FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/
ISSN-e: 3084-7761
Año 2025 - Nº005

Limitación de una generalización euclidiana en la historia: ángulos interiores del triángulo esférico

Limitation of a Euclidean generalization in history: interior angles of the spherical triangle

Melvin Cruz-Amaya
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN)
melvin.cruz@cinvestav.mx
Ciudad de México, México

Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN)
gmontiele@cinvestav.mx
Ciudad de México, México

Roberto Vidal-Cortés
Universidad Mayor
roberto.vidalc@umayor.cl
Santiago de Chile, Chile

Resumen

Ante la necesidad de tratar con las generalizaciones euclidianas, en este documento se presenta un estudio histórico-epistemológico desde la Socioepistemología, que a través de un análisis cualitativo de contenidos busca identificar y caracterizar prácticas matemáticas asociadas a la generalización euclidiana, la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico, en la génesis de la geometría esférica, de tal forma que estas prácticas sirvan para configurar un posicionamiento epistemológico inicial para el diseño didáctico. Como resultado, se reconoce la influencia de los cambios políticos, económicos, culturales y científicos de la cultura del autor en la construcción y estructura de la actividad matemática; además, en términos epistemológicos, esta geometría se caracteriza por propiedades como la relación de divergencia-convergencia entre rectas, consecuencia de la articulación de varias prácticas matemáticas.

Palabras clave: geometrías no euclidianas, geometría esférica, prácticas matemáticas.

Abstract

Given the need to deal with euclidean generalizations, this paper presents a historical-epistemological study from Socio-epistemology, which through a qualitative content analysis seeks to identify and characterize mathematical practices associated with the euclidean generalization, the sum of the interior angles of a spherical triangle, in the genesis of spherical geometry, in such a way that these practices serve to configure an initial epistemological positioning for the didactic design. As a result, the influence of the political, economic, cultural and scientific changes of the author's culture in the construction and structure of mathematical activity is recognized; furthermore, in epistemological terms, this geometry is characterized by properties such as the relation of divergence-convergence between straight lines, a consequence of the articulation of several mathematical practices.

Keywords: non-euclidean geometries, spherical geometry, mathematical practices.

EDICIÓN 2025

1. Introducción

Los procesos de incorporación de las Geometrías No Euclidianas (GNE) en lineamientos curriculares de bachillerato y de la formación del profesorado de matemáticas son una línea de estudios relativamente reciente (Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa, 2024). Estos estudios exteriorizan carencias asociadas al conocimiento sobre estas geometrías y a su didáctica. En Brasil, donde formalmente se han incorporado las GNE en cuatro estados —Sãu Paulo, Paraná, Ceará y Rio Grande do Sul— (Pinto, 2013), sus contenidos fueron desatendidos por el profesorado como consecuencia de la falta de formación, de metodologías de enseñanza y aprendizaje y de libros de texto, además, por el desconocimiento de las propiedades o la naturaleza de estas geometrías (Caldatto y Pavanello, 2014). Estos fenómenos reorientaron la investigación, buscando profundizar en los aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos de estas geometrías, para fundamentar su enseñanza y aprendizaje en diferentes poblaciones.

Por el interés en estos aspectos, en el presente se sintetiza una revisión de literatura en el marco de un contexto global y latinoamericano. Sobre los aspectos epistemológicos, existe un desconocimiento de la naturaleza de estas geometrías, ya que únicamente se han hecho intentos por replicar en el aula de matemáticas las condiciones que permearon la fundamentación matemática de las GNE en la historia (Aparecida y Pinto, 2021; Silva y Yonezawa, 2017). La historia de las matemáticas evidencia la gran influencia de los Elementos de Euclides y, por ende, de la arquitectura de la geometría euclidiana, la cual ha marcado no solo el desarrollo de una geometría universal única, vigente hasta la aparición de la fundamentación matemática de nuevas geometrías que desafiaron el quinto postulado. Esta transición generó controversias importantes en la comunidad matemática, al punto de considerarse como una de las grandes crisis de la matemática.

Además, Euclides trazó una arquitectura para la comunicación científica que se legitimó mediante un enfoque deductivo, seguido por obras tan relevantes como Sobre las revoluciones de los orbes celestes de Copérnico y los Philosophiæ naturalis principia mathematica de Newton (Vidal-Cortés, 2024). En el primer cuarto del siglo XX, el programa formalista de Hilbert y los nuevos Elementos de la Matemática de Bourbaki reavivan esta arquitectura, abriendo un debate sobre la verdad en la ciencia y el absolutismo, no solo en matemáticas, sino también con la misma noción de ciencia. Por ello, tiene sentido la permanencia de la geometría euclidiana y la replicabilidad de la fundamentación matemática de las GNE en el aula; sin embargo, dado que esta naturaleza puede mostrar nuevas o más robustas estrategias para su atención didáctica, existe una necesidad de ser estudiada en profundidad.

Sobre los aspectos didácticos, se reconoce que hay carencia de recursos didácticos para el estudio de estas geometrías. Sin embargo, también se reconocen avances sobre enfoques metodológicos —procesos generales de estructuración de la enseñanza— y estrategias de enseñanza —procesos particulares de enseñanza—. Por ejemplo, el enfoque de la geometría comparativa, propuesto desde 1990 por István Lénárt, profesor e investigador húngaro (Lénárt, 2021). Este enfoque pretende una enseñanza comparada entre la geometría plana y la geometría esférica para luego agregar la comparación con la geometría hiperbólica. Entre las estrategias de enseñanza destacan la interdisciplinariedad, el uso de material manipulable y el uso de tecnologías digitales (Aparecida y Pinto, 2021; Soares et al., 2020).

Desde los aspectos cognitivos, se identifican y describen a las generalizaciones euclidianas como un fenómeno didáctico-cognitivo que se antepone al estudio de GNE en cualquier población (Lovis et al., 2014). Este fenómeno fue caracterizado por primera vez por Kattsoff (1960) como dificultades psicológicas a través de ideas euclidianas, también fue nombrado reglas euclidianas por Bolondi et al. (2014), y finalmente como generalizaciones euclidianas (Lovis et al., 2014). Estas generalizaciones "son evidentes cuando algunos razonamientos euclidianos —verdaderos únicamente en esta geometría— pueden ser considerados generales sin reconocer la especificidad de la superficie en la que se trabaja" (Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa, 2024, p. 9), por ejemplo, que la distancia más corta entre dos puntos dados corresponda a la medida del segmento que los une, o bien que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°.

Entre estas generalizaciones, se reconoce relevante la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ya que su limitación en una superficie diferente al plano genera una distinción inmediata entre geometrías. En efecto, este reconocido teorema de la geometría euclidiana resulta lógicamente equivalente al quinto postulado, dada su dependencia inmediata en su demostración, con dicho postulado. Además, de acuerdo con Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa (2024), estas generalizaciones pueden tener un papel importante en el diseño didáctico a través del paso de su funcionalidad en el plano a su limitación en otra superficie. Ante esta problemática y considerando las aportaciones de la literatura, se plantea la pertinencia de un estudio histórico–epistemológico situado en la génesis de la geometría esférica que responda a las preguntas de investigación: ¿qué caracteriza a la actividad matemática en la que se estudia históricamente la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico?, ¿qué condiciones culturales, sociales e intelectuales la enmarcan? y ¿qué consideraciones epistemológicas se derivan de su análisis? En esta dirección, se plantea como objetivo de investigación, identificar y caracterizar prácticas matemáticas asociadas a la generalización euclidiana, la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico, en la génesis de la geometría esférica. Con este resultado, se pretende la configuración de un posicionamiento epistemológico inicial para fundamentar diseños didácticos que traten esta geometría.

2. Fundamentos teóricos

Este estudio se enmarca en la Socioepistemología, teoría que concibe a la actividad matemática humana, contextual y pragmática —exponiendo prácticas que acompañan y preceden al conocimiento matemático— (Cantoral et al., 2015). Para explicar la construcción social del conocimiento matemático, estas prácticas se organizan en un modelo de anidación; y para este estudio, se consideran sus primeros tres niveles. A las primeras interacciones observables entre el sujeto y el medio en su relación con la matemática se les denominan acciones. Una articulación de ellas, bajo una intencionalidad observable, constituye una actividad. Finalmente, las prácticas socialmente compartidas son reconocidas como formas establecidas y reiteradas al hacer matemática que organizan las actividades (Cantoral et al., 2015).

La racionalidad del sujeto se entiende permeada por el contexto en el que construye el conocimiento —contexto de significación, porque da sentido en tanto funcionalidad a la matemática involucrada (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021)—. Con el fin de dar cuenta del carácter contextual de la actividad matemática, desde la propuesta de López-Acosta y Montiel-Espinosa (2022) este contexto se estratifica en: el contexto cultural, refleja pertenencia a un grupo; contexto situacional, influencia del espacio y tiempo donde se da la construcción; y contexto de la situación específica, situaciones de la actividad matemática particular.

3. Fundamentos metodológicos

Este estudio se desarrolla a través de una trayectoria metodológica organizada mediante un análisis cualitativo de contenido que requiere del análisis contextual y textual (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2022).

Esta trayectoria se divide en las siguientes seis etapas: (1) determinación de un objeto de análisis (texto histórico en este caso), proceso que tiene su propia metodología, para ello se hizo una revisión de literatura sobre los orígenes de la geometría esférica y se tomaron en cuenta los criterios de selección que presentan Wardhaugh (2010): los relativos a la investigación o decisiones metodológicas; los aspectos técnicos, referentes al acceso al texto; y los relativos a la pieza matemática; (2) recolección y selección de fuentes de datos asociadas al objeto de análisis, estas se organizaron en fuentes primarias, las cuales constituyen el principal acceso a la obra; secundarias, las constituyen documentos que muestran datos indirectos del momento histórico, tales como biografías e interpretaciones de la fuente primaria; y terciarias, estas están basadas en fuentes primarias y secundarias, por ejemplo, los estudios históricos-epistemológicos, libros de historia y biografías generales (Wardhaugh, 2010).

Seguidamente, se desarrolla el (3) preanálisis de los datos a través de un primer acercamiento al contexto y al texto, donde se seleccionan las unidades de análisis. (4) El análisis de datos consiste en el estudio contextual y textual con herramientas analíticas: el análisis textual se centra en la caracterización de las prácticas matemáticas. Para identificar las acciones se plantean los cuestionamientos ¿qué y cómo lo hizo?; para las actividades los cuestionamientos ¿para qué y por qué lo hizo? Por su parte, las prácticas socialmente compartidas son reconocidas como formas establecidas y reiteradas al hacer matemática que organizan las actividades (Cantoral et al., 2015); para el análisis contextual, en cada estrato se plantearon diferentes preguntas considerando las referencias propuestas por Wardhaugh (2010). Para el contexto cultural se asocian las referencias socioculturales e intelectuales; para el contexto situacional las referencias socioculturales, biográficas e intelectuales; y para el contexto de la situación específica las referencias intelectuales. Posteriormente, a través de la (5) interpretación e inferencia, se construye una hipótesis epistemológica, retomando "la génesis de los saberes en términos de las prácticas (la matemática como actividad humana) y las circunstancias socioculturales que condicionan dichas prácticas (contexto de significación)" (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022, p. 542); para finalmente presentar los (6) resultados del estudio.

4. Análisis y resultados

Seleccionamos como texto de análisis Esférica de Menelao de Alejandría (ca 70 - 130 d. C), escrito alrededor de los 100 d. C. Esta obra es considerada el primer texto que trabaja el desarrollo del triángulo esférico como geometría sobre la superficie de la esfera, por ello es denominada la primera obra sobre geometría esférica (Rashed y Papadopoulos, 2017). Fue escrito en griego; aunque no se cuenta con la versión original, existen algunas traducciones al árabe antiguo; de estas últimas retomamos, para el estudio como fuente primaria, una traducción al inglés titulada Menelaus' Spherics. Early Translation and al-Māhānī /al-Harawī's Version por Rashed y Papadopoulos (2017). Dado el interés particular de este estudio, se selecciona como unidad de análisis la proposición 12 de Esférica de Menelao: "En cualquier triángulo, un ángulo exterior es menor que la suma de los dos ángulos opuestos interiores, y <la suma de>los tres ángulos del triángulo es mayor que dos ángulos rectos" (Rashed y Papadopoulos, 2017, p.526, traducción propia).

5. Análisis y resultados contextuales

Como ejemplo del análisis contextual se presenta una parte de la organización de los datos asociados al contexto cultural (ver Cuadro 1). Estos datos devienen de todas las fuentes de datos.

Referencias socioculturales	*¿En qué época y lugar vivió Menelao?*
	Vivió entre el siglo I y II d. C., entre Alejandría y Roma, en la civilización helénica (Goulet, 2005).
	¿Qué sucesos políticos, sociales y económicos caracterizan esa época y lugar?
	Roma era la única potencia económica del Mediterráneo. Registros de la relación de Menelao con algunos emperadores romanos (Trajano y Domiciano) (Goulet, 2005).
	¿Hubo sucesos importantes e influyentes previos a la vida de Menelao?
	Organización económica y religiosa del pueblo egipcio, la conquista de Alejandro Magno y el desarrollo de Alejandría (Smith, 1975).
	¿Dan estos sucesos sentido de pertenencia al autor?
	Hacen que Menelao se considere un matemático y astrónomo romano y griego cercano a emperadores romanos.
	¿Qué relación tienen estos sucesos con la vida personal y profesional de Menelao?
	Menelao se relaciona con Roma y Alejandría, hace observaciones astronómicas en Roma y estudia la ciencia griega (Rashed y Papadopoulos, 2017).
Referencias intelectuales	*¿Qué sucesos matemáticos, filosóficos y científicos caracterizan la producción académica de esa época y lugar?*
	Principios matemáticos y observaciones independientes en la ciencia alejandrina. Almagesto de Ptolomeo condensa el desarrollo astronómico griego y romano con influencia de Menelao (Smith, 1975).
	¿Hubo sucesos importantes e influyentes previos a la vida de Menelao?
	Observaciones y anticipaciones astronómicas en Egipto y Babilonia, avances matemáticos griegos y romanos a través del uso de la demostración directa y la sistematización axiomática y avances astronómicos desde la cosmovisión aristotélica del universo y la creación de la esfericidad (Sidoli, 2018).
	¿Dan estos sucesos sentido de pertenencia al autor?
	Menelao tenía libertad de corriente filosófica, por lo que se basaba en principios matemáticos y observaciones astronómicas. La relación geometría-astronomía en la esfericidad motivó el desarrollo de *Esférica* (Smith, 1975).
	¿Qué relación tienen estos sucesos con la obra de Menelao?
	La doble implicación en el desarrollo geométrico y astronómico explica el interés de Menelao por la geometría esférica y el nuevo enfoque sobre esta geometría (Rashed y Papadopoulos, 2017).

ISSN: 3084-7761-e

Cuadro 1: Organización de datos para la descripción del contexto cultural. Fuente: Construcción propia.

Con base en esta organización de datos contextuales por cada uno de los estratos, se desarrolla la caracterización del contexto cultural, el contexto situacional y el contexto de la situación específica.

El contexto cultural se enmarca en la época romana de la civilización helénica, en la que vivió Menelao (Goulet, 2005). Esta civilización se caracteriza por cambios políticos, económicos y culturales que devienen de los egipcios y babilónicos. Además, influenciada por la estabilidad política, económica y científica que vivió Alejandría desde que Ptolomeo I tomó el poder en Egipto en el año 306 a. C. (Smith, 1975). Durante los años en que vivió Menelao, Roma era la única potencia económica del Mediterráneo. Menelao disfrutaba de esta estabilidad, ya que mantenía relación con algunos de los emperadores romanos, Domiciano y Trajano (Goulet, 2005).

El trabajo de Menelao es consecuencia del desarrollo astronómico y geométrico de sus predecesores. La astronomía junto a la geometría formó parte desde el siglo VI a.C. del Quadrivium, desarrollado en la antigua Grecia y que con la música y la aritmética conformaban las 4 artes liberales que debía ser parte de la formación de toda persona culta, especialmente aquellos que se iniciarían en el mundo del clero. Por esta razón probablemente, desde los pitagóricos hasta Ptolomeo (100 d. C. – 170 d.C.), la geometría y astronomía fueron consideradas principales ramas de estudio y de la matemática. Además, la cosmovisión aristotélica propuesta por Aristóteles (384 – 322 a.C.) se mantenía en tiempos de Menelao como la visión del universo (Sidoli, 2018). Por otra parte, la geometría llega a Menelao mediante obras en la arquitectura euclidiana, como forma deductiva de organizar el conocimiento matemático y la demostración como herramienta matemática para el convencimiento y aspiración del conocimiento de la verdad. La relación entre la geometría y la astronomía potencia la creación de la esfericidad como rama de la geometría aplicada a la astronomía, por lo que se le asocian cuatro obras: Sobre las esferas giratorias de Autólycus (333-300 a.C.), Fenómenos de Euclides (alrededor del año 300 a.C.), Esférica de Teodosio (alrededor del año 200 a.C.) y Esférica de Menelao (alrededor del año 100 d.C.) (Henderson y Taimina, 2004).

Del contexto situacional se reconoce que Esférica se escribió alrededor de 100 d. C. en Roma. De la vida de Menelao se sabe muy poco; se reconoce de Alejandría por las referencias que hicieron Proclo y Pappus; luego se mudó a Roma manteniendo una relación con Alejandría (Goulet, 2005). Se le atribuyen seis libros: Esférica, Sobre el conocimiento de los pesos y la distribución de los diferentes cuerpos, tres libros sobre los elementos de geometría y el libro del triángulo; sin embargo, solo han sobrevivido traducciones de Esférica. Esférica es una obra dependiente del sistema axiomático de Elementos de Euclides, por ello se dice que fue escrita bajo una racionalidad euclidiana (Rashed y Papadopoulos, 2017). Además, Elementos de Euclides y Esférica de Teodosio son el fundamento en muchas de sus demostraciones. De esta última, Menelao utiliza la teoría de la polaridad, que refiere a la relación constante entre una recta esférica y su polo (centro). Al igual que Teodosio, Menelao presenta en Esférica dos proyectos: una geometría esférica deductiva sobre un conjunto inicial de elementos y la aplicación de la geometría a la astronomía antigua (Rashed y Papadopoulos, 2017).

Por su parte, el contexto de la situación específica se caracteriza en términos generales por al menos tres aspectos que hacen de Esférica una obra única y valiosa: el cambio de significado atribuido al término esfericidad, como geometría sobre la superficie de la esfera; la distinción que hace en las demostraciones, presentando la demostración directa; y la presentación de pocos elementos iniciales, tres definiciones. Además, entre algunas características particulares destaca la presentación por primera vez de la definición de triángulo esférico y el teorema de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor a 180 grados y no constante (Goulet, 2005). Asociado a la naturaleza esférica, se reconoce una relación importante, la teoría de la polaridad o relación entre recta-polo que retoma del trabajo de Teodosio. Son estas características las que permiten a Rashed y Papadopoulos (2017) mencionar que “a la vista de estas proposiciones y de otras del mismo tipo, es posible afirmar que Esférica de Menelao es la primera investigación sistemática de una geometría no euclidiana” (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 5, traducción propia).

Estos resultados permiten dar respuesta a la primera y segunda preguntas de investigación. Sobre la pregunta, ¿qué condiciones culturales, sociales e intelectuales enmarcan la actividad matemática en la que se estudia históricamente la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico? Se

https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/ ISSN: 3084-7761-e

puede explicitar que la construcción de Esférica de Menelao es consecuencia de los cambios políticos, económicos y culturales de los egipcios y babilonios; de la estabilidad política, económica y científica que vivió Alejandría; y de la extensión territorial y el desarrollo económico del imperio romano. Las condiciones intelectuales devienen del desarrollo geométrico y astronómico al que tuvo acceso Menelao. Dado que para su época se consideraba que la geometría y la astronomía eran ramas de la matemática y se mantenía una cosmovisión aristotélica del universo, tiene sentido la emergencia de la esfericidad (rama de la geometría aplicada a la astronomía) y, por consiguiente, la creación de Esférica. Por otro lado, ante la pregunta ¿qué caracteriza a la actividad matemática? se puede declarar que se caracteriza por presentarse a través de una demostración directa, diferente a las demostraciones por reducción al absurdo y por superposición de figuras utilizadas por los antecesores de Menelao; y principalmente, por basarse en un cambio de significado al término esfericidad, entendido en el texto como la geometría sobre la superficie de la esfera. Además, por la estructura general del texto y el uso de Elementos de Euclides en la fundamentación de sus demostraciones, se considera una obra escrita bajo una racionalidad euclidiana.

6. Análisis y resultados textuales

Para el análisis textual de la proposición 12 de Esférica de Menelao, se utilizó la reconstrucción pragmática de la actividad matemática, descrita por López-Acosta y Montiel-Espinosa (2022) como una reconstrucción que explicita las prácticas (matemáticas) que permiten la construcción de esa matemática. Además, dado que la fundamentación de esta demostración requiere dos proposiciones anteriormente demostradas, éstas se describen a continuación:

Proposición 1 *Procedemos construyendo un ángulo igual a un ángulo dado contenido por grandes círculos en un arco de gran círculo conocido y en un punto de ese arco (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 410, traducción propia).*

Interpretación: dado un ángulo esférico, formado por la intersección de dos circunferencias máximas —las más grandes circunferencias que pueden trazarse en una esfera—, y dado un segmento de recta esférica y un punto de él, se construye en ese punto un nuevo ángulo igual al ángulo dado.

Proposición 11 *Si dos lados de una figura trilátera son menores que un semicírculo, entonces el ángulo exterior a uno de los dos ángulos del lado restante es mayor que el <interior>opuesto a él. Si los dos lados son mayores que un semicírculo, entonces el ángulo exterior es menor que el <interior>opuesto a él. Y si los dos lados AB, BC son iguales a un semicírculo, entonces el ángulo exterior es igual al <ángulo>interior. (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 424, traducción propia)*

Interpretación: con base en la Figura 1, en el triángulo ABC, si la suma de los lados AB y BC es menor que una semicircunferencia máxima, entonces el ángulo BCD (ángulo exterior del triángulo) es mayor que el ángulo CAB (ángulo interior del triángulo opuesto a él). Si la suma de los lados AB y BC es mayor que una semicircunferencia máxima, entonces el ángulo BCD es menor que el ángulo CAB. Y si la suma de los lados AB y BC es igual a una semicircunferencia máxima, entonces los ángulos BCD y CAB son iguales.

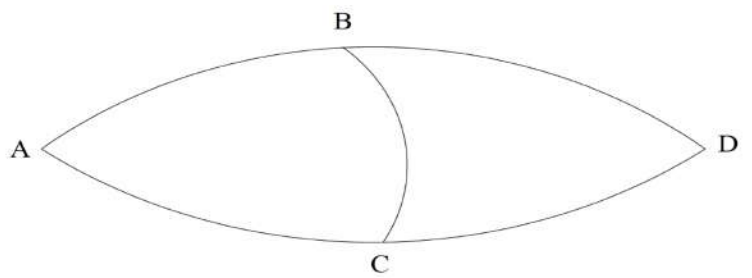


Figura 1: Diagrama propuesto para la Proposición 11. Fuente: Rashed y Papadopoulos (2017, p. 426).

Proposición 12 *Después del enunciado se presenta la exposición, donde se declaran los objetos en un diagrama inicial (Navarro, 2005) y la preparación, donde se exponen las relaciones entre los objetos expuestos (Vega, 2013) relacionadas con la Figura 2.*

Sea ABC un triángulo, y produzcamos AC a D; digo: el ángulo exterior BCD del triángulo ABC es menor que la suma de los dos ángulos opuestos A y B, y la <suma de los>tres ángulos del triángulo ABC es mayor que dos ángulos rectos. (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 528)

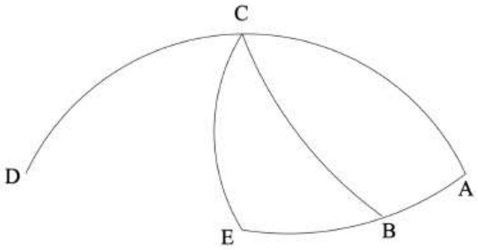
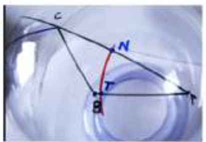
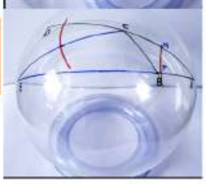
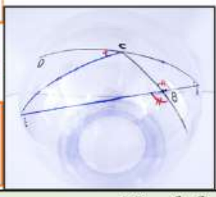


Figura 2: Diagrama propuesto para la proposición 12. Fuente: Rashed y Papadopoulos (2017, p. 528).

El análisis de prácticas se presenta en el Cuadro 2:

Nivel de acción		
Reconstrucción matemática	¿Qué hizo?	¿Cómo lo hizo?
Demostración: Hacemos un ángulo DCE igual al ángulo A (por la P1 [*construir un ángulo en un punto dado de un gran círculo que sea igual a un ángulo dado*]) y producimos AB hasta que se encuentre con CE en E (se extiende el segmento AB, reconoce la posibilidad de externerlo de forma ilimitada en la esfera, esto por el Epostulado2[*Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta*]).  	**Expone** elementos de partida y sus consecuencias. **Prolonga o extiende** arcos (arbitrarios y limitados). **Agrega** elementos auxiliares y **establece** elementos de referencia. **Traslada** ángulos y distancias. **Construye** un ángulo igual a otro.	**Continuando** el segmento AC en línea recta hasta el punto D y el segmento AB hasta el punto E. Tomando una distancia cualquiera desde el punto A y manteniendo esa distancia, forma un arco con centro en C. **Conservando** distancias.
Como el ángulo DCE es igual al ángulo A, entonces la suma de los dos arcos AE, EC es un semicírculo **[conclusión particular]** (esto por el P11[*en cualquier triángulo, si producimos uno de los lados y si el ángulo exterior es igual al ángulo interior que le es opuesto, entonces la suma de los dos lados que contienen el ángulo restante es un semicírculo; si es menor, entonces su suma es mayor que un semicírculo; y si es mayor, entonces la suma es menor que un semicírculo*]). 	**Distingue** ángulos interiores y exteriores de un triángulo. **Compara** ángulos interiores y exteriores de un triángulo. **Compara** la medida de un semicírculo con la suma de dos lados de un triángulo. **Distingue** ángulos según su medida.	**Relacionando** los semicírculos máximos con lados de un triángulo para referir a medidas de los lados de un triángulo y a ángulos iguales.
Entonces los dos arcos BE, EC son menores que un semicírculo **[conclusión particular]** (ENC8[*Y el todo es mayor que la parte*]), por lo tanto el ángulo ABC es mayor que el ángulo BCE **[conclusión particular]** (EP15[*Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí*]) y P11).   El ángulo ABC es igual a su opuesto por el vértice. Como su opuesto es mayor que el ángulo BCE (por P11), entonces el ángulo ABC es mayor que el ángulo BCE.	**Deduce** que la suma de dos segmentos es menor a un semicírculo. **Identifica** ángulos opuestos por el vértice. **Distingue** ángulos según su medida. **Compara** arcos con semicírculos y ángulos y reconoce sus medidas. **Caracteriza** ángulos.	**Relacionando** los semicírculos máximos con lados de un triángulo para referir a medidas de los lados de un triángulo y a ángulos iguales. **Comparando** esos dos lados (BE y EC) con otros dos lados que suman un semicírculo (AE y EC).

Los ángulos ACB, BCE, DCE son iguales a dos ángulos rectos (EP13[*Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos*]. Pero el ángulo B es mayor que el ángulo BCE, el ángulo A es igual al ángulo DCE, y el ángulo ACB es común, por lo tanto los ángulos ABC, BCA, CAB son mayores que los ángulos ECD, ECB, BCA [**Generalización**]. Por lo tanto la <suma de los> ángulos del triángulo ABC es mayor que dos ángulos rectos. 	**Junta** tres ángulos y **relaciona** sus medidas con dos ángulos rectos. **Asocia** dos ángulos rectos con los ángulos interiores de un triángulo. **Reconoce** y **señala** que uno de los ángulos interiores de un triángulo forma parte de otro conjunto de ángulos. **Compara** la medida de dos grupos de ángulos.	Dado el proceso de construcción, desde el mismo punto se generaron tres segmentos. **Construyendo, comparando y relacionando** ángulos. Por las relaciones que esos grupos de ángulos tienen.
Nivel de actividad Reconocer articulaciones de acciones que justifique el porqué y para qué lo hace.		
• Expone los elementos de partida y sus consecuencias, prolonga segmentos, agrega elementos auxiliares, establece elementos de referencia, traza arcos y conserva distancias, para *trasladar un ángulo*. • Expone los elementos de partida y sus consecuencias, prolonga segmentos, agrega elementos auxiliares, distingue ángulos interiores y exteriores, reconoce ángulos iguales y la composición de una semicircunferencia, compara la medida de dos lados con la de un semicírculo y de ángulos interiores y exteriores, establece a la semicircunferencia como referente de medida y condiciona la medida de un ángulo, para *equivaler lados de un triángulo con un semicírculo*. • Expone los elementos de partida y sus consecuencias, compara un semicírculo con segmentos y dos grupos de ángulos, agrega elementos auxiliares, reconoce magnitudes y ángulos iguales si son opuestos por el vértice, distingue arcos de círculo y arcos de círculos máximos, identifica ángulos opuestos por el vértice y según su medida, relaciona segmentos con semicírculos y medidas de ángulos con dos ángulos rectos y adjunta ángulos, para *diferenciar la suma de dos grupos de ángulos*.		

Cuadro 2: Análisis de prácticas de la Proposición 12. Fuente: construcción propia.

El contexto de la situación específica describe una estructura deductiva del texto, por ello tiene sentido que en las tres actividades se mantengan las acciones de exponer los elementos de partida y sus consecuencias, agregar elementos auxiliares y usar las propiedades (de los elementos de partida y agregados) en la argumentación del proceso constructivo. En esta proposición se identifica que las actividades caracterizadas se encuentran organizadas por una forma de actuación matemática o práctica socialmente compartida, propia de la naturaleza esférica de esta geometría, a la que se ha denominado relación divergencia-convergencia. Esta relación se caracteriza de la siguiente manera: de la intersección en el punto N (ver Figura 3), las rectas de color verde y azul inician divergiendo una de la otra hasta la recta color rojo; de ahí empiezan a converger hasta volver a intersecarse en el punto opuesto a N, el punto M.

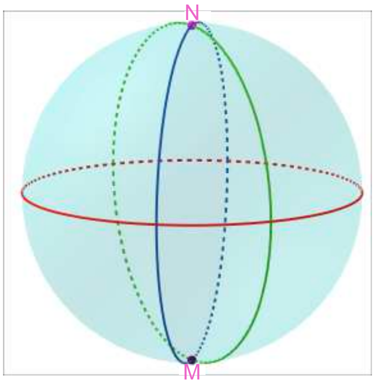


Figura 3: Relación entre dos rectas, divergencia-convergencia. Fuente: construcción propia.

Se dice entonces que esta relación organiza las actividades porque en la demostración la medida del ángulo A fue trasladada al ángulo DCE. La deducción de que la suma de los lados CE y AE es un semicírculo es consecuencia de aceptar que al prolongar los lados AB y AC del triángulo volverán a interceptarse en el punto opuesto a A, lo que a su vez es consecuencia de la relación de divergencia-convergencia entre esas dos rectas. Por lo mismo, al construir este nuevo ángulo (DCE), traza el segmento CE para equivaler los lados CE y AE del triángulo ACE a la medida de un semicírculo y diferenciar esos grupos de ángulos. Por ello, se dice que la relación divergencias-convergencia favorece el reconocimiento del cuadrante, donde cambia la relación de divergencia a convergencia; y el semicírculo, donde vuelven a converger, como referentes y unidades de medida de segmentos esféricos.

Como producto de este análisis, para dar respuesta a la tercera pregunta de investigación sobre las consideraciones epistemológicas, se configura la siguiente hipótesis epistemológica: la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico está fundamentada en la relación entre rectas, divergencia-convergencia, relación que es consecuencia de la naturaleza de la superficie esférica en la que se trabaja esta geometría. Por otro lado, se presenta el proceso de construcción geométrica de Menelao, que se compone por tres momentos: exponer los elementos de partida y sus consecuencias, agregar elementos auxiliares y usar sus propiedades en la argumentación y justificación de la construcción. La forma de agregar elementos auxiliares deviene de varias prácticas, por ejemplo, extender, trasladar, seccionar o componer segmentos y ángulos.

7. Discusión y conclusión

De la problemática y la revisión de literatura se justifica la importancia de los estudios históricos que tengan un interés en reconocer elementos epistemológicos, en este caso asociados a la geometría esférica. Además, se reconoce también el fenómeno denominado generalizaciones euclidianas como un obstáculo o un recurso didáctico (Lovis et al., 2014). Por ello, bajo la hipótesis de que los elementos epistemológicos asociados a una generalización euclidiana en su génesis histórica darán fundamento al uso de esa generalización como un recurso didáctico, se desarrolla este estudio sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Por los resultados, es posible asentir que la relación entre rectas esféricas de divergencia-convergencia trasciende a la generalización euclidiana estudiada y aporta en la caracterización de la naturaleza de la superficie esférica, es decir, trastoca toda geometría trabajada en esta superficie. Esta conclusión aporta al estudio de esta geometría en el sentido que describen Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa (2019), Junius (2008) y Lénárt (1996), una primera etapa en el estudio de la geometría esférica debe trabajar en la compresión de la geometría intrínseca a la superficie de la esfera, es decir, que él o la aprendiz reconozca que puede hacer geometría sobre esa superficie y su influencia en los resultados geométricos. Por lo que, en términos de un diseño didáctico, esta relación podría caracterizarse en las primeras partes del diseño. Por la importancia de la interdisciplinariedad que se reconoce desde la revisión de literatura (Aparecida y Pinto, 2021), se propone describirla en el contexto de la geografía, por ejemplo, tomando dos meridianos cualesquiera y analizando el cambio de longitud de los arcos de paralelos entre esos meridianos desde el polo norte hasta el polo sur. De este modo, la geometría esférica aparece como un modelo geométrico para la comprensión del mundo y no solo como se suele divulgar: como una de las dos geometrías que emergen a partir de discutir y emprender la tarea de negar el quinto postulado de Euclides.

Por otro lado, en la hipótesis epistemológica se describe el proceso constructivo que siguió Menelao, de ahí se reconoce que toda tarea geometría puede guiarse por ese proceso: iniciando con la descripción de los elementos de partida y caracterizando las propiedades que tienen esos elementos, luego desarrollando la tarea geométrica en la que se agregarán nuevos elementos y con ellos nuevas propiedades geométricas, para finalizar con la justificación del desarrollo de la tarea usando las propiedades de los elementos geométricos involucrados.

Con base en los elementos epistemológicos asociados a la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico y mediante el enfoque metodológico de enseñanza de la geometría comparativa (Lénárt, 2021), se acepta que es posible el uso de esta generalización como un recurso didáctico, generando el paso de su funcionalidad en el plano a su limitación en la esfera. Esta limitación provocará cuestionamientos importantes, tales como: ¿siempre van a medir más de 180 grados?, ¿cuánto es el máximo que pueden medir?, ¿existe un triángulo bi o tri-rectángulo? Cuestionamientos que también favorecen la problematización de la geometría euclidiana y con ello su significación.

Un estudio didáctico experimental que ponga en juego un diseño fundamentado en estos elementos podrá darnos evidencia empírica sobre este planteamiento, en ese sentido con el presente estudio se inicia una amplia línea de trabajo hacia la investigación de diseño, el desarrollo profesional docente, el análisis del discurso matemático escolar y aquellas otras rutas que fueron señaladas en la literatura. Además, dado que una de las poblaciones de mayor interés en este campo es el profesorado de matemáticas, se acepta que los resultados de este estudio exponen un acercamiento a la naturaleza de las geometrías en sentido amplio y, con ello, un fundamento para la construcción de recursos didácticos específicos, partiendo, como se ha querido señalar en este escrito, con la geometría esférica.

Referencias

[1] Aparecida, J., y Pinto, J. (2021), *A abordagem da geometria esférica no ensino e na aprendizagem matemática: o que apontam as pesquisas realizadas entre 2000 e 2018. Revista Tangram, 4(2), 59-82.*https://doi.org/10.30612/tangram.v4i2.11952

[2] Bolondi, G., Ferretti, F., y Gambini, A. (2014) *The relation between mathematical object/mathematical name: Conceptual changes between designation, description, denomination and definition. Proceedings of the Frontiers in Mathematics and Science Education Research Conference, 1(3), 169-176.* https://doi.org/10.30935/scimath/9640

[3] Caldatto, M., y Pavanello, R. (2014) *O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. Bolema, 28(48), 42-63.* https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a03

[4] Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015) *El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(1), 5-17.* https://doi.org/10.12802/relime.13.1810

[5] Cruz-Amaya, M., y Montiel, G. (2019) *Angularidad en la esfera. Una exploración didáctica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 24, 107-115. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. ISSN:2346-0539.* https://www.researchgate.net/publication/333971981_Angularidad_en_la_esfera_Una_exploracion_didactica

[6] Cruz-Amaya, M., y Montiel-Espinosa, G(2024) *Las geometrías no euclidianas en y para la formación del profesorado de matemáticas: Una revisión de literatura. Olhar de professor, 27, 1-25.* https://doi.org/10.5212/OlharProfr.v.27.22500.021

[7] Cruz-Márquez, G., y Montiel-Espinosa, G. (2022) *Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. Acta Scientiae., 24(4), 81-108*https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911

[8] Goulet, R.(2005) *Dictionnaire des Philosophes Antigues. París: C. N. R. S. ÉDITIONS.* https://doi.org/10.4000/philosant.825

[9] Henderson, D., y Taimina, D. (2004) *Experiencing Geometry. Euclidean and Non - Euclidean with History. Pearson.*https://doi.org/10.3792/euclid/9781429799850

[10] Junius, P. (2008) *A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(8), 987-1002.* https://doi.org/10.1080/00207390802136529

[11] Kattsoff, L. O. (1960) *Problems in presenting non-Euclidean geometries to high school teachers. The Mathematics Teacher, 53(7), 559–563.* https://www.jstor.org/stable/27956249

[12] Lénárt, I. (1996) *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere. Investigations in Planar and Spherical Geometry. United States of America: Key Curriculum Press.*

[13] Lénárt, I. (2021) *Hyperbolic geometry in general education: comprehending the incomprehensible. Journal of Physics: Conference Series, 1-15.* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012005

[14] López-Acosta, L., y Montiel-Espinosa, G. (2022) *Emergencia de las ecuaciones paramétricas en viète y descartes: elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 17(3) 539-559.*https://doi.org/10.14483/23464712.17062

[15] Lovis, K., Franco, V., y Barros, R. (2014) *Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica. Zetetiké – FE/Unicamp, 22(42), 11-29.* https://doi.org/10.20396/zet.v22i42.8646565

[16] Navarro, J. (2005) *Los elementos de euclides. Un Paseo por la Geometría 2002/2003, 55 – 82. España: Real Sociedad Matemática Española.*https://www.academia.edu/22625610/Los_Elementos_de_Euclides

[17] Pinto, J. (2013) *Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. Educação Matemática Pesquisa, 15(3), 647-670.*https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16187

[18] Rashed, R., y Papadopoulos, A. (2017) *Menelaus' Spherics. Early Translation and al-Māhānī / al-Harawī's Version. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH.* https://doi.org/10.1515/9783110571424

[19] Sidoli, N. (2018) *Greek Mathematics. En A. J. (ed), The Cambridge History of Science, 345 - 373. Cambridge University Press.*https://doi.org/10.1017/9780511980145.020

[20] Silva, P., y Yonezawa, W. (2017) *A geometria euclidiana e as geometrias não-euclidiana numa visão epistemológica segundo a filosofia de bachelard. Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino, 1(1), 141-156.*https://seer.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/905

[21] Smith, R. (1975) *The Alexandrian Scientific Tradition, 14 – 21.* https://journals.co.za/doi/pdf/10.10520/AJA03031896_274

[22] Soares, I., Antunes, J., Soares, L., Ferreira, L., y Crisostomo, E. (2020) *O uso de materiais manipuláveis na consolidação de conceitos de geometria esférica. En J. Batista, Ensino de ciências e educação matemática, 71-83. Paraná, Brasil: Atena Editora.*https://doi.org/10.22533/at.ed.152201606

[23] Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021) *Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. Educación Matemática 33(3), 202-232.* https://doi.org/10.24844/EM3303.08

[24] Vega, Y. (2013) *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.* https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21355

[25] Vidal, R. (2024) *Trazando el camino: Integración de la Historia de las Matemáticas en la formación docente para un cambio de paradigma. Revista de Matemáticas, Ensino e Cultura – REMATEC, (49), e2024006.* https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id661

[26] Wardhaugh, B. (2010) *How to read Historical Mathematics. New Jersey, United States: Princeton University Press.*