FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/
ISSN-e: 3084-7761
Año 2025 - Nº004

El número fregeano; ¿un concepto elemental?

José Luis Guevara Rodríguez
Universidad Nacional de Colombia
joguevarar@unal.edu.co
Bogotá
Harol Esteban Rodríguez
Universidad Pedagógica Nacional
herodriguezd@upn.edu.co
Bogotá

Resumen

Este artículo tiene como objetivo exponer que las ideas expuestas en los *Fundamentos de la Aritmética* de Frege no son tan elementales como se podría esperar del nombre del libro. En dicho documento, aparecen discusiones fundamentales que plantea Frege al reconocer que en su época no es muy claro lo que se entiende por número. Además, expone varias definiciones y/o opiniones de filósofos como Kant y matemáticos como Leibniz. A partir de dichas opiniones y de su análisis crítico construye su concepto de número, mostrándole a el lector la importancia de la relación inquebrantable entre matemáticas y filosofía.

Palabras clave Gottlob Frege; Concepto de número; Empirismo, Intuición, elemental;

1. Introducción

Cuando el adjetivo *elemental* aparece en un discurso, su significado parece ser aseveración simple. Sin embargo, esto no es así. Pues, es sólo una cualidad de las varias aserciones que ofrece la expresión mencionada. La real academia de lengua española (RAE) propone otros adjetivos a la misma expresión: "1. Perteneciente o relativo a un elemento. 2. Fundamental, primordial. 3. Referente a los elementos o principios de una ciencia o arte" [12]. De hecho, las anteriores cualidades no están lejos de aparecer en las Matemáticas. Por ejemplo, la obra *Elementos* atraviesa los anteriores adjetivos. En el primer caso a la Geometría griega. Como segundo caso, puede asociarse al hecho de que fue enseñado en las escuelas. Por último con los postulados del *Libro I*.
Durante mucho tiempo se guardó la esperanza de que la Geometría Euclidiana poseía fundamentos sólidos, y que sus verdades iban acorde a una representación real de la naturaleza. Sin embargo, este paradigma cambió, es decir, la Geometría esbozada en *Elementos* ya no tiene el mismo estatus que sostuvo durante veintidós siglos. Esto es debido al postulado V que sostiene un vinculo entre la teoría de las líneas rectas paralelas y el infinito en potencia y acto; dicha teoría encontró posteriormente en matemáticos como: Carl Gauss (1777-1845), János Bolyai (1802-1860) y Nicolái Lobachevsky (1792-1856) interpretaciones que chocan con la intuición espacial que poseemos y que las mismas nos daban por verdaderos en la escuela. Dichas interpretaciones son consecuencia de una larga historia sobre la independencia del quinto postulado respecto a los otros cuatros postulados. Esto provocó que las "verdades" de la geometría euclidiana en las que descansaba el fundamento para comprender el mundo sensible [1], perdieran ese rótulo y se acentuaran más las dudas sobre el corpus matemático que tenía el rótulo de Geometría.
Este hito tuvo otra consecuencia en el ámbito matemático, y es debilitar las entidades matemáticas, en otras palabras, quedar sin fundamentos, debido a que la geometría proporcionaba hasta ese momento la seguridad de la existencia de dichos objetos [1], por lo que se tuvo que buscar teorías matemáticas

EDICIÓN 2025

que volvieran a darle un estatus de seguridad a toda la matemática construida hasta ese momento. Gauss,uno de los referentes matemáticos de aquel entonces, propuso que en la Aritmética quizá estaba la solución al fundamento de las Matemáticas, y por ende recuperar el estatus de la verdad desestabilizada del momento [6]. Así, es el momento de la historia de las Matemáticas en el que va aparecer el protagonista Gottlob Frege.

Gottlob Frege (1848-1925) quien estuvo afín de la propuesta gaussiana, notó que él problema era aún mayor, señalando que los matemáticos de su época no sabían de lo que hablaban ni aún nivel "elemental" ([5]; [16]). A partir de ese hecho, Frege dedicó su vida a entender lo que eran los números y en la obra *Fundamentos de la Aritmética* propone una respuesta a la cual Bertrand Russell (1892-1970) le da un mérito importante: "La pregunta ¿qué es un número? se ha planteado con frecuencia, pero solo en nuestros días se le ha dado una respuesta correcta. La respondió Frege, en 1884, en sus *Grundlagen der Arithmetik*" [14, p. 19]. Esta obra es trascendental por dos hechos. Por un lado, Frege se tomó el trabajo de hacer visible al lector el concepto del número y/o de la Aritmética acudiendo a otros autores como: Leibniz, Newton, Baumman, Grassman, Schröder, pues no quería tener los mismos errores cuando publicó su primera obra titulada *Conceptografía* [16], puesto que, según Stepanians, M. [16] "un crítico influyente de la conceptografía había objetado que Frege ignoraba el trabajo de otros investigadores y es evidente que él no quiso exponerse de nuevo a ese reproche" [p. 48]. Por otro lado, Frege estableció su concepto de número bajo tres reglas, las cuales se hacen visibles en sus ideas:

> hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;
> el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en palabras aisladas;
> hay que tener presente la diferencia entre concepto y objeto. [2, p. 20]

La premisa principal de esta obra es exponer la tesis logicista: "La aritmética es reducible a la lógica" y expone como es posible llegar a ella, mediante el concepto de número como objeto lógico. En medio del desarrollo de su obra, Frege reaccionó reaccionó respecto de dos tendencias filosóficas opuestas, la Kantiana (intuición-razón) y el Empirismo de Mill.

2. *Fundamentos de la Aritmética*

John Stuart Mill (1806-1873) propuso que la noción de número, se adquiere como resultado de hacer semejanzas y agrupaciones de objetos del mundo sensible [9]. Frege refutó la postura de Mill, la cual se apoya en: (1) las impresiones sensoriales y (2) hechos en los que se aplica la estructura matemática al mundo real. Para ver (2), Mill se apoya en dos afirmaciones, el primero consiste en que "los cálculos no se siguen de la definición misma, si no de los hechos observados" [2, pp. 32-33], y el siguiente enunciado: "lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de estas partes" [2, p. 35]. Respecto al primer enunciado, Mill haría entender que las leyes matemáticas surgen a partir de la experiencia, haciendo una especie de inducción, pero esto es un error como lo hace notar Frege, ya que Frege argumenta que Mill confunde los hechos aritméticos con una aplicación de los mismos y lo hace así: "$5 + 2 = 7$ no significa que si se vierten sobre 5 volúmenes de un liquido 2 volúmenes del mismo, se obtienen 7 volúmenes de liquido, sino que esto es un aplicación del primer enunciado, aplicación que se cumple únicamente cuando no aparece una modificación del volumen a consecuencia de un fenómeno químico" [2, p. 35]. Para abordar (1), se debe aclarar el término psicologismo, que según Kenny, A [5] es "la psicología es el estudio experimental de la mente, la búsqueda de regularidades que gobiernan los fenómenos mentales." [p. 73]. Ahora bien, siendo Mill un empirista es natural que acuda a fenómenos mentales, porque, la experiencia nos hace recrear cierto estimulo mental sobre un hecho asociado al mundo real. Y aquí, la critica de Frege es más audaz, reaccionando así: "Si el dos fuera una imagen, ésta sería ante todo solamente mía. La imagen que tiene otro es ya, en cuanto tal, otra imagen. Entonces, tendríamos quizá muchos millones de doses. Debería decirse: mi dos, tu dos, un dos, todos los doses" [2, p. 55]. Para lo cual, es evidente que él número en vez de ser objetivo como lo concebimos se torna ambiguo, debido a la subjetividad del psicologismo y empirismo fundado por Mill. A partir de esto, se tiene que el concepto del número abstraído de la realidad, bajo el empirismo no sea admitido si el cero es considerado un número, ¿qué fenómeno de la realidad se puede asociar al cero? A partir de

EDICIÓN 2025
https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/ ISSN: 3084-7761-e

lo anterior, Frege deduce que las verdades aritméticas no son a posteriori, deben ser a priori. Por lo tanto, reaccionó sobre la lectura de Kant.

Inmanuel Kant (1724-1804) afirmó que las verdades de la Geometría eran sintéticas y a priori. Lo cual es natural pensar que si la Geometría era quien respaldaba los fundamentos de la Matemática, entonces la Matemática, en particular, la Aritmética también lo fuese. Por eso, Frege planteó cuestiones sobre la certeza de la seguridad que tiene las propiedades aritméticas, tanto en su demostración como la forma de llegar a ellas. Para ello, inició Frege recalcando que para Kant las expresiones como $1+1=2$ son sintéticas y no es posible dar una demostración de las mismas, pero a pesar de ello no tienen un carácter de axioma, debido a que, no solo hay expresiones de esa forma, sino infinitas combinaciones de expresiones aritméticas [2]. En consecuencia, ¿cómo se podría acudir a la intuición kantiana para sostener que expresiones como la anterior sean verdaderas?, si entre más grande sea una expresión más difícil es que la intuición nos guié:

> ¿es acaso evidente que 135664+37863=173527?
> ¡No! Y es precisamente esto le lleva a Kant a sostener el carácter sintético de estos enunciados. Pero lo anterior más bien habla sobre su indemostrabilidad. Pues, ¿de que otra manera pueden ser aceptados, como no sea mediante una demostración, dado que no son directamente evidentes? Kant quiere ayudarse con la intuición de dedos o puntos, con lo cual cae en el peligro de hacer que estos enunciados aparezcan como empíricos, en contra de su propia opinión; pues la intuición de 37863 dedos no es, en cualquier caso, una intuición pura [2, pp. 29-30]

Además, acudir a la intuición tampoco es muy viable, pues si con números grandes genera conflictos, con números pequeños también: "pues ya sólo 10 dedos, según las posiciones relativas que ocupen entre sí, pueden producir las más diversas intuiciones" [2, p. 30]. Por lo tanto, la postura Kantiana no es tampoco favorable en cierto sentido para satisfacer la respuesta a las cuestiones que establece Frege. Por ello, encuentra en Leibniz cierta luz sobre la demostrabilidad de expresiones como la anteriormente citada, y así establecer que las verdades matemáticas como su demostración y obtención son analíticas y a priori.

Frege, expone de las ideas de Leibniz al manifestar que él redujo la cuestión sobre creación de los números mediante su precedente y de hecho cita a Leibniz:

> No es una verdad inmediata que 2 y 2 son 4; supongamos que 4 significa 3 y 1. Se le puede demostrar de esta manera:
> Definiciones:
> 1. 2 es 1 y 1,
> 2. 3 es 2 y 1,
> 3. 4 es 3 y 1.
>
> Axioma: Si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste.
> Prueba: $2+2=2+1+1=3+1=4$.
> Def. 1. Def. 2. Def. 3
> Luego por el axioma 2+2=4 [2, p. 30]

Haciendo notar que la Aritmética es analítica y a priori. Lo cual queda establecido así:

> Por mucho que se menosprecie la deducción, no se puede negar que las leyes fundadas en la inducción son insuficientes [refiriéndose a Mill]. De éstas últimas deben deducirse nuevos enunciados que no están contenidos en ninguna de ellas. Que éstos se hallen en cierto modo, incluidos en todas ellas juntas, no nos exime de la tarea de extraerlos de ahí y establecerlos por sí mismos. Con ello se abre la siguiente posibilidad: en vez de hacer depender una deducción directamente de un hecho, se puede dejar éste tal como está y admitir su contenido como condición. Si en un razonamiento se sustituyen de este modo todos los hechos por condiciones, se obtendrá el resultado de manera que, de una serie de condiciones, se desprende una conclusión [2, p. 43]

Apartir de la demostración de Leibniz queda aclarar que significa 1. Frege ya no acude a Leibniz, pues él hace una definición circular sobre lo uno: "Uno es lo que reunimos por medio de un acto del

ISSN: 3084-7761-e

entendimiento” [2, p. 58]. Frege para dar con la respuesta sobre el significado de 1, propuso asignarle números a los conceptos, estableciendo en ellos su diferencia. Así puedo encontrar la relación entre el número y su concepto:

> Si yo, por ejemplo, al considerar un gato blanco y uno negro, prescindo de las propiedades por las que ellos se distinguen, obtengo quizás el concepto «gato». Si ahora pongo a ambos bajo este concepto y los llamo unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro sigue siendo negro. Incluso si no pienso en sus colores, o me propongo no sacar conclusiones de su diferenciación, no por ello se volverán gatos sin color; permanecerán tan distintos como eran. El concepto «gato», que se ha obtenido de este modo por abstracción, ya no contiene, es verdad, las peculiaridades, pero precisamente por eso es sólo uno.
> Por procedimientos meramente conceptuales no se consiguen hacer iguales cosas distintas; pero si se consiguese, ya no se tendrían cosas, sino sólo *una* cosa [2, p. 62].

Para llegar al corazón de la idea que guarda el concepto de número fregeano, él mismo nos advierte que en el contexto de un enunciado es posible decantar al número. Además propuso dos ejemplos, contextualizando que los números aparecen en los conceptos como sucedió en el ejemplo del concepto gato:

> Cuando digo: «Venus tiene 0 lunas» no es que halla allí ninguna luna o agregado de lunas del que pudiera afirmarse algo; pero al *concepto* «luna de Venus» se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo él. Si digo: «del coche del Kaiser tiran cuatro caballos», atribuyo el número cuatro al concepto «caballo que tira del coche del Kaiser»[2, p. 73]

Sin embargo, este no es el único concepto en que cae el número cuatro, si yo digo las cuatro patas sostienen la mesa del comedor, es claro que el número cuatro de nuevo cae en el concepto “patas que sostienen la mesa del comedor”, a raíz de ello Frege puede definir al número como: “el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto «equinúmerico al concepto F»” [2, p. 92]. Con ello, logra en la palabra equinumérico establecer una función biyectiva y el resultado es que cada clase de equivalencia resulta ser los números que caen bajo los conceptos. En nuestro ejemplo, en la clase de equivalencia del concepto patas que sostienen la mesa del comedor, está el caballo que tira del coche del Kaiser. Con esta definición, logra definir al número cero, uno y el sucesor de un número, que es finalmente lo que caracteriza a los números naturales, y así, como se puede apreciar de su definición, logró capturar al número mediante un objeto lógico como lo es la relación de biyectividad.

Referencias

[1] Falk, M. *Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX*. Vol. 1-2. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2012.

[2] Frege, G. *Los Fundamentos de la aritmética:investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. Trad. por U Moulines. Con com. de Claude Imbert. Con intr. de Jesús Mosterín. Barcelona: Editorial Laia, S. A, 1972. ISBN: 84-7222-454-6.

[3] Frege, G. *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Ed., trad., com. e intr. por L. Valdés. Con notas de L. Valdés. Madrid: Editorial Tecnos, 1998.

[4] Guevara, J. «¿Cambió el concepto de número con la crisis de los fundamentos de la matemática? [tesis de pregrado]». En: (2021). URL: http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/12980/Cambio%5C%20el%5C%20concepto%5C%20de%5C%20n%5C%C3%5C%BAmero.pdf?sequence=8&isAllowed=y.

[5] Kenny, A. *Introducción a Frege*. Trad. por Carmen García Trevijano. Madrid: Cátedra, 1997.

[6] Kline, M. *Matemáticas La perdida de la Certidumbre*. Trad. por Andrés Ruiz Merino. Barcelona: Siglo xxi de españa editores S.A, 1985.

[7] Kneale, W. y Kneale, M. *El desarrollo de la lógica*. Trad. por J. Mugerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1980.

EDICIÓN 2025

[8] Körner, Sthepan. *Introducción a la filosofía de la matemática.* Trad. por Carlos Gerhard. México: Siglo XXI, 1967.

[9] Luque, C., Jiménez, H y Ángel, J. *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables.* 2.ª ed. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2013.

[10] Mosterín, J. *Los Lógicos.* Ed. por S.A. Espasa Calpe. Madrid: ESPASA, 2000.

[11] Perez, J. *La aritmetica según Gottlob Frege. Un ejemplo de matemáticas elementales.* 2002. URL: http://funes.uniandes.edu.co/9104/1/Aritmetica2002Perez.pdf.

[12] Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española, 23ª.ed., [versión 23.5 en línea].* URL: https://dle.rae.es/elemental?m=form.

[13] Rossi, J. «Consideraciones generales sobre el concepto de número en los Fundamentos de la Aritmética de Gottlob Frege [tesis de pregrado]». En: (2015). URL: http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/3276/TE-18975.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[14] Russell, B. *Introducción a la filosofía matemática.* Trad. por Mireia Bofill. Buenos Aires: Paidós, 1956.

[15] Soames, S. *El Surgimiento De La Filosofía Analítica: Frege, Moore, Russell y Wittgenstein.* Ed. por E. Villanueva Chigne. Trad. por Wong Melgar, F., Gamboa Castillo, J., Dammert Lastres, P., y Villanueva Chigne, E. Madrid: Editorial Tecnos, 2019.

[16] Stepanians, M. *Gottlob Frege. Una introducción.* Ed. por S. Rahman. Ed. por J. Redmond. Trad. por J. Redmond. Vol. 1. Cuadernos de lógica, Epistemología y Lenguaje. College publications, 2007.

ISSN: 3084-7761-e