FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/
ISSN-e: 3084-7761
Año 2025 - Nº003

La muerte de Hipaso y el dodecaedro

Douglas Jiménez
UNEXPO. Vicerrectorado de Barquisimeto
dougjim@gmail.com
Barquisimeto. Venezuela

Resumen

Dentro de los tantos mitos que rodean al pitagorismo, uno de ellos destaca como un crimen: el asesinato de Hipaso ahogado en el mar. Dentro de los motivos aducidos para tan indigno acto aparece la revelación de los misterios del dodecaedro. En este ensayo analizaremos algunos de los documentos históricos que dieron pie al mito y también mostraremos de manera rigurosa cuáles son los supuestos misterios del dodecaedro, el sólido platónico magno.

1. Reseña de un supuesto crimen intelectual

En la abundante biografía de Pitágoras escrita por Iámblico y recogida en la famosa compilación de Guthrie ([4], pág. 79), se lee:[1]

> *Como Hipaso que, a pesar de ser reconocido como un pitagórico, encontró sin embargo en el mar la ruina de los impíos, como consecuencia de haber divulgado y enseñado el método de encerrar doce pentágonos en una esfera, método cuyo descubrimiento se le atribuía. No obstante, como todo conocimiento de geometría, era producto de la mente de* ***el hombre****, que era la frase usada para referirse a Pitágoras.*

La cita habla de una ejecución: *encontró en el mar la ruina de los impíos*. Lo que no parece muy claro es el supuesto delito que la provocó. ¿Se le reclamaba a Hipaso de Metaponto la divulgación de un secreto sectario? ¿O se le juzgó por acreditarse un conocimiento que la secta atribuía a su jefe y máximo exponente? En cualquiera de los dos casos, el castigo se ve harto excesivo, pero en la historia del mundo el sectarismo ha dado para eso y para cosas más terribles aún.

La crudeza del hecho da incluso para pensar en alguna exageración con fines de moraleja, pero el pitagorismo ha sido históricamente una fuente de misterios, derivados todos de una evidente falta de material escrito contemporáneo con los protagonistas, producido por ellos mismos, aún cuando Diógenes Laercio niega la supuesta carencia de tales materiales por falta de producción del jefe de la escuela, a quien le atribuye, al menos nueve obras. Otras, según la misma fuente, eran de autores distintos que firmaron usurpando el nombre de Pitágoras, entre ellos el mismo Hipaso, con supuestos fines de descrédito.[2]

Todo esto pareciera hablar de cierta inquina alrededor de la persona de Hipaso y, quizás, hasta de alguna rivalidad del destacado alumno con su celoso maestro. Desaveniencia que, en la nube histórica que ha empañado la mirada hacia el pitagorismo, hace aparecer al metapontino como creador o divulgador indistintamente de la (también supuesta) crisis de los inconmensurables tanto como del tema que nos ocupa relacionado con el dodecaedro, es decir *el método de encerrar doce pentágonos en una esfera*, al que se refiere Iámblico en la cita anterior. Nuestra fuente para esta afirmación es el mismo Iámblico, ya que en [4], pág. 116 leemos que la divulgación, a personas indignas, del secreto

[1] La traducción del inglés es nuestra. Con otra redacción, la cita se consigue también en Heath, ([5], vol. 1, pág. 160).
[2] Al respecto se puede consultar a Diógenes Laercio: [1], vol. II, pág. 102 o [4], pág. 142.

de las magnitudes conmensurables e inconmensurables traía para el infractor un castigo moral (simbólico, según Guthrie) en la forma de la construcción de una tumba, como si ya hubiera muerto. A continuación, Iámblico retorna a la persona de Hipaso y rememora el dodecaedro y el castigo, no tan simbólico, del ahogamiento que, según él, fue ordenado por el propio Poder Divino. No obstante, al final del párrafo comparte la duda de si el castigo tuvo que ver más bien con los inconmensurables.

Lo único claro de todo esto es que hay confusión, pero la confusión parece inherente al legado pitagórico al punto de que Platón, admirador decidido de Pitágoras y sus aportes, lo menciona por su nombre en múltiples párrafos agradecidos; no obstante Aristóteles, alumno destacado y crítico de Platón, usa "los pitagóricos" para referir la fuente de dichos aportes, ignorando por completo el nombre propio, a pesar de la frecuencia con la que recurre a ellos, en libros como *Física* o *Metafísica*.

Con confusión o sin ella, lo que la tradición ha dado en llamar *legado pitagórico* tiene resultados muy concretos que mantienen importancia y algunos vigencia. Podemos nombrar:

- los fundamentos de la *teoría de números*, entendiendo como tal las propiedades de los números naturales, con la creación de conceptos como *múltiplos*, *divisores*, *paridad*, *primos* y otros relacionados;
- la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo alcanza un ángulo llano;
- el conocido *teorema de Pitágoras*, relativo a los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, aunque puede extenderse a cualquier otra clase de figuras distintas a los cuadrados;
- los *problemas de aplicación de áreas*, expresables hoy mediante identidades y ecuaciones polinomiales de segundo grado;
- las *magnitudes conmensurables e inconmensurables*, germen de los actuales conceptos de número racional e irracional;
- el descubrimiento del hoy llamado *número de oro*, que en los *Elementos* de Euclides se identifica como *división en extrema y media razón*;
- el estudio de las figuras tridimensionales de caras poligonales congruentes, hoy conocidas como *sólidos platónicos* que, según Proclo[3], fue el *leit motiv* de los *Elementos* de Euclides.

En la enumeración hemos nombrado varias veces los *Elementos* de Euclides, puesto que en este texto histórico del siglo III a. C. aparecen todos estos resultados dispersos a lo largo de sus trece volúmenes. De hecho, los sólidos platónicos cierran la obra, mostrándonos el autor los procedimientos de construcción de dichos sólidos, así como la demostración de que solo puede haber cinco de tal naturaleza.

Los aspectos de la lista anterior no están aislados entre sí, existen íntimas conexiones entre ellos, pero los tres últimos son los que definen el embrollo del asesinato de Hipaso. Como móviles del crimen se suele identificar (ya nos lo mostró Iámblico) a los inconmensurables y al dodecaedro. Ahora bien, la inconmensurabilidad abarcó en principio a la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado, problema que en la actualidad conocemos asociado al número irracional $\sqrt{2}$. El cuadrado fue objeto predilecto de estudio para los pitagóricos, aunque posiblemente no lo fue tanto como el pentágono regular que oculta en él una relación altamente valorada, llamada por Euclides la división en extrema y media razón y rebautizada por la posteridad como razón áurea. También para el pentágono la razón diagonal–lado se mostró inconmensurable y el número que hoy la identifica se conoce, como es natural, con el calificativo de número áureo y resulta ser

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pues bien, el pentágono es la fuente del número de oro y el dodecaedro está hecho de doce pentágonos. Lo que ganó el nombre de *platónicos* para los poliedros regulares es la descripción de los mismos

[3] Ver [7] pág. 57.

que hiciera Platón en su diálogo *Timeo o de la Naturaleza*, para lo cual puso tal descripción en la boca del personaje Timeo. El matemático actual se siente desconcertado y desilusionado con esta descripción, pues se trata de una artificiosa composición de triángulos rectángulos, unos isorrectángulos $(45° - 90° - 45°)$ y otros mitad de un equilátero $(30° - 90° - 60°)$. Pero esta composición particular solo le sirve para cuatro de los cinco sólidos (tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro), que están hechos de caras triangulares o cuadradas. Según la cosmogonía de Timeo eran la forma de los átomos de los elementos reconocidos hasta ese momento: fuego, tierra, aire y agua.

¿Qué queda entonces para el quinto sólido, ese que no puede componerse con los triángulos descritos en el párrafo que acabamos de terminar, dado que los pentágonos no los acogen? Pues... nada más y nada menos que ser la representación del plano con el cual el mismísimo Dios construyó el Universo. Así termina Timeo su exposición de los cinco sólidos, tal como puede verse en [6], págs. 690-691.

Como ya hemos dicho, los *Elementos* de Euclides concluyen en la construcción de los sólidos platónicos, pero con una rigurosidad matemática que está bastante alejada de la farragosa descripción de ellos en el *Timeo*, lo que lleva a la pregunta acerca de cuál era el proceder pitágorico frente a estos sólidos: ¿el fárrago de Timeo o la rigurosidad de Euclides? En esta última el papel que juega el número de oro en las demostraciones es central para dos de las figuras: el icosaedro y el dodecaedro. La diferencia que vale la pena destacar entre ambos, a los efectos de nuestro tema, es que para el icosaedro el pentágono es un elemento auxiliar de construcción mientras que en el dodecaedro es esencial, puesto que sus caras son pentagonales.

Si el asesinato de Hipaso fuera más allá del mito y pudiera adquirir estatus de verdad histórica, deberíamos abrigar pocas dudas de que la erudición euclidiana al respecto llegó directamente del pitagorismo. Para una secta con pretensiones místicas, con conciencia de saber privilegiado y visión aristocrática derivada de ese saber todos los ingredientes que conformarían el misterio estaban a la mano: la presencia del pentágono y la estrella que formaban sus diagonales, que llegó a ser símbolo de la propia escuela y recibió el nombre particular de *Salud*; la razón áurea que aparecía en el corte de esas diagonales; el hecho indeseado de que tal razón fuera una razón entre inconmensurables; el uso privilegiado de ella misma para construir el dodecaedro; la consideración especial del dodecaedro en la cosmogonía universal. Si Hipaso fue un inspirado antecesor de la divulgación científica no supo calibrar el contenido de herejía de su particular intento, en caso contrario fue un valiente racionalista con una visión democrática harto riesgosa para su integridad personal.

Lo cierto es que poco menos de tres siglos después, todo el fardo místico que pretendió embadurnar de ocultismo unos conocimientos poderosos ya había sido desechado. La obra de Euclides -sus *Elementos* y unos cuantos títulos más que conocemos aunque no hayamos tenido acceso a sus contenidos- nos presenta lo esencial del pitagorismo en su estructura netamente racional, tanto así que el alejandrino lo metamorfosea en un sistema de pensamiento que se convirtió en modelo para la matemática posterior pero, muy particularmente, para la de los siglos XIX y XX.

En los *Elementos* de Euclides los historiadores de la matemática han reconocido la influencia pitagórica, dentro de una tradición de respeto al conocimiento racional que pasa por una gran cantidad de pensadores cuyos nombres no son populares pero que giran como planetas alrededor de ese par de soles que fueron Platón y Aristóteles para el pensamiento universal. Posiblemente Hipaso fue el antecesor de Arquitas, Hipócrates y Eudoxo, quienes buscaron las piedras con las que Euclides, Arquímedes y Apolonio construirían el enorme edificio del cual fueron delicados arquitectos.

En lo que sigue trataremos de describir el tránsito que llevó a una de esas piedras a ser parte de una destacada habitación del edificio. El número de oro es la gema más valiosa de la orfebrería que significó la teoría de los poliedros regulares, vale decir, de los sólidos platónicos. En el conjunto de ellos destaca el dodecaedro con sus doce caras pentagonales, el sólido que supuestamente fue el *leit motiv* del sacrificio de Hipaso. Mostraremos un camino lógico, desprovisto de connotaciones mágicas, que en la obra euclidiana va desde este número hasta el sólido. Pero, salvo al describir el propio dodecaedro, dejaremos los detalles técnicos al escarbador que quiera inmiscuirse en las páginas del alejandrino.

EDICIÓN 2025

ISSN: 3084-7761-e

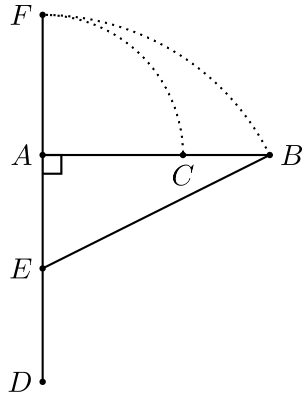


Figura 1: Separación áurea con regla y compás

2. Las pautas del camino

En el momento en que aparece la división en extrema y media razón -es decir la razón áurea- por primera vez en los *Elementos*[4] ni siquiera podía el autor usar ese nombre. La estructura teórica de esta obra es rigurosa y la palabra *razón* tiene un significado muy específico, que será develado al lector apenas en el quinto de los libros. Sin embargo, al final del libro II, específicamente en la proposición 11 (proposición II.11) se describe un método para separar un segmento cualquiera en dos partes desiguales, de manera que el cuadrado construido sobre la parte mayor del corte tenga la misma área que el rectángulo cuyos lados son el segmento completo y la parte menor del corte. El procedimiento de dibujo, mostrado en la figura 1, sigue la siguiente pauta:

1. Se traza el segmento $\overline{AB}$, que será el objeto de la separación propuesta.
2. Se gira el segmento perpendicularmente con centro A para obtener $\overline{AD}$.
3. Se marca E, el punto medio de $\overline{AD}$.
4. Se marca F en $\overrightarrow{EA}$ tal que $EF = EB$.
5. Se marca C en $\overline{AB}$ tal que $AC = AF$.

El lector moderno no tendrá mayor dificultad en verificar que la construcción anterior lleva a la ecuación

$$AC^2 = (AB)(BC)$$

que es la formulación aritmética de la propuesta geométrica original euclidiana. Sin embargo, la expresión

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

para nosotros derivada inmediatamente de la anterior, estaba vedada por razones teóricas a Euclides. Pero es esta última igualdad la que define a la razón áurea: *el segmento total es a la parte mayor del corte como dicha parte mayor es a la menor.*

El libro IV está destinado, entre otras proposiciones auxiliares, a la construcción de algunos polígonos regulares -inscritos y circunscritos- a círculos dados: el cuadrado, el pentágono, el hexágono y el pentadecágono. Dado nuestro objetivo manifiesto debemos detenernos en el pentágono. Para construirlo Euclides necesita un triángulo auxiliar: un isósceles cuyos ángulos de la base sean dobles del tercer ángulo. En nuestros términos está claro que se trata de un ángulo de $36° - 72° - 72°$. Para la construcción de tal ángulo es necesaria la división áurea aprendida en la proposición II.11 y esto lo muestra Euclides en la proposición IV.10 para, de inmediato en la IV.11, construir el pentágono regular inscrito, tal como se muestra en la figura 2, en la que primero inscribimos dentro del círculo dado el

[4] Las alusiones al contenido de los *Elementos* se pueden verificar en las referencias [2] y [3].

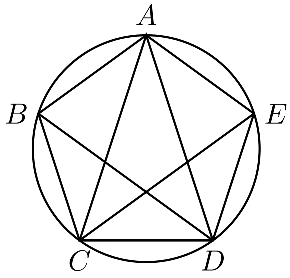


Figura 2: Construcción de un pentágono inscrito.

$\triangle ACD$ de $36° - 72° - 72°$ que ya sabemos construir.[5] Ese paso nos da tres puntos del pentágono (A, C y D); los otros dos (B y E) los obtenemos en la circunferencia intersectándola con las bisectrices de los ángulos en C y D.[6]

El concepto de *razón*, imprescindible para la construcción de la matemática griega, entra en escena en el quinto libro. No aspiramos al espacio de este artículo para explicar su complejidad, pero le sirvió a los griegos para resolver los problemas asociados a su desconocimiento del número real. En todo caso, ya una vez armado con ese concepto, Euclides puede proceder a definir la división en extrema y media razón -nuestra razón áurea- la cual presenta como la tercera definición del sexto libro en los términos que ya hemos comentado: un segmento de extremos A y B está dividido en extrema y media razón por un punto C si la razón entre el segmento total y la parte mayor del corte es la misma que la existente entre dicha parte mayor y la parte menor. En términos actuales sería

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

entendiendo que la parte mayor del corte va de A a C. Nuestra expresión es completamente numérica: para Euclides se trataba de una comparación de segmentos.

En el mismo libro VI, Euclides nos muestra un procedimiento para dividir un segmento dado en forma áurea pero, sorprendentemente, no apela al mismo procedimiento que nos enseñó en la proposición II.11. Más bien adorna su faena usando una técnica de construcción de paralelogramos,[7] que hoy interpretamos como un estudio de las soluciones de ciertas ecuaciones de segundo grado. Técnica que, en las manos de Apolonio, nos dio las definiciones de las secciones cónicas de una forma bastante similar a como las conocemos hoy.

De aquí en adelante no nos topamos con la razón áurea sino hasta el libro XIII, el último de la serie, donde el alejandrino construye con rigor detallista cada uno de los sólidos platónicos. Previo a ello, el libro contiene alguna teoría faltante y necesaria sobre el número de oro. Haremos sección aparte para el comentario debido.

3. El número de oro en el libro XIII

Salvo por un factor positivo, todo segmento separado en razón áurea puede mirarse como en la figura 3, en la que

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esa observación es útil para hacer un álgebra de φ. Por ejemplo, de

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

[5]Previamente Euclides nos ha enseñado a inscribir en un círculo dado triángulos semejantes a otros.

[6]El dibujo contiene cuatro diagonales del pentágono. Si dibujáramos la quinta, es decir $\overline{BE}$, veríamos la estrella de cinco puntas que era el signo de la hermandad pitagórica; había un nombre para ella en la congregación: *Salud*.

[7]Los llamados *problemas de aplicación de áreas*.

https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/ ISSN: 3084-7761-e

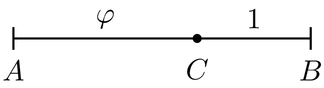


Figura 3: La separación áurea en general

obtenemos

$$\frac{\varphi + 1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1}$$

además de dos importantes ecuaciones de caracterización aritmética:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

las cuales nos dicen que φ es el único número positivo cuyo cuadrado se obtiene al sumarle 1 y su inverso al restarle 1. No creemos que pueda suponerse que alguna de estas visiones (llamémoslas aritméticas o algebraicas) pasaran por la mente de Euclides. El profano haría mal esperando encontrarse con ellas en el texto de los *Elementos*; en su lugar verá bellos razonamientos sobre figuras.

El libro XIII comienza con seis proposiciones cuya visión se nos simplifica hoy aprovechando la aritmética que define el párrafo anterior. Por ejemplo, XIII.1 afirma que en la separación áurea el cuadrado construido sobre la adición del segmento mayor a la mitad del total quintuplica en área al cuadrado construido precisamente sobre la mitad del total. Usando la aritmética del párrafo anterior, la afirmación

$$\left(AC + \frac{AB}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{AB}{2}^2,\right)$$

se traduce en la siguiente identidad

$$\left(\varphi + \frac{\varphi+1}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{\varphi+1}{2}\right)^2,$$

que no debe ser de difícil verificación al lector.

De mucha utilidad en la construcción de los sólidos es también XIII.4, que nos dice que el corte áureo hace que los cuadrados construidos, uno con el segmento completo y otro con la parte menor de la separación triplican juntos en área al construido con el segmento mayor, esto es

$$AB^2 + BC^2 = 3AC^2$$

o, aritméticamente

$$(\varphi + 1)^2 + 1 = 3\varphi^2.$$

Es en el libro XIII que Euclides nos muestra, en la proposición 8, que las diagonales del pentágono se cortan en razón áurea y la parte mayor del corte es igual al lado del pentágono. Algunas proposiciones siguientes a esta establecen relaciones métricas entre los lados de los polígonos regulares inscritos dentro del círculo. Por ejemplo, la proposición 9 dice que los lados de hexágono y decágono están en relación áurea, mientras que la proposición 10 nos informa que los lados de decágono, hexágono y pentágono dispuestos en triángulo forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado del pentágono. Finalmente, antes de entrar a la construcción de los sólidos, se nos hace saber en la proposición 12 que el cuadrado construido con el lado del triángulo equilatero triplica en área al cuadrado construido con el lado del hexágono que, por otra parte, es igual al radio del círculo.[8]

Las proposiciones 13 a 17 muestran con riqueza de detalles la construcción de los cinco sólidos platónicos. El plan de Euclides es similar para todas las demostraciones. Primero fija el diámetro de la esfera donde se inscribirá el sólido; con esa dimensión define un procedimiento para construir las caras del poliedro; demuestra que ese procedimiento produce caras congruentes y vértices situados sobre la esfera dada; finalmente compara las longitudes de las aristas del sólido con el radio de la esfera.

[8]Todos estos resultados son muy útiles en la compleja construcción del icosaedro, realizada en la proposición XIII.16.

ISSN: 3084-7761-e

A pesar de lo fino del razonamiento, los dibujos euclidianos, totalmente carentes de perspectiva, dificultan la lectura de las demostraciones. Con el objeto de suavizar un poco esta dificultad, las hemos rediseñado en tres dimensiones apoyándonos con la aplicación Geogebra, menteniendo intacto (salvo uno que otro detalle menor) el razonamiento euclidiano. Las hemos puesto en la red en las siguientes direcciones:

Tetraedro: `https://www.geogebra.org/m/xb3eykhw`

Octaedro: `https://www.geogebra.org/m/dhvtnekn`

Hexaedro: `https://www.geogebra.org/m/v6nfzckx`

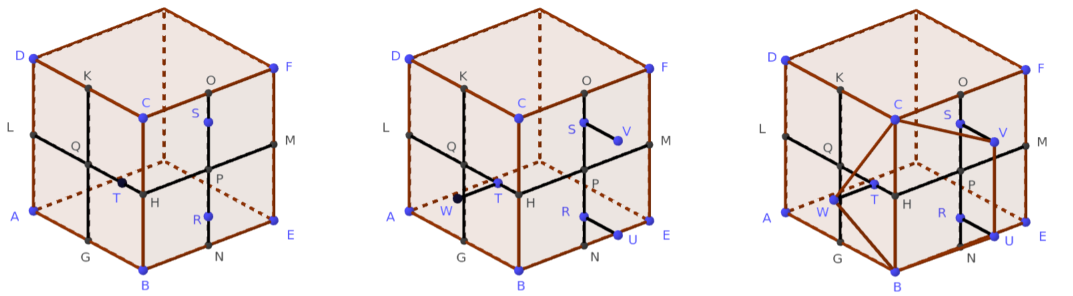
Icosaedro: `https://www.geogebra.org/m/ebhyey29`

Dodecaedro: `https://www.geogebra.org/m/yup9bptz`

Dedicaremos la sección final de este ensayo a la construcción del dodecaedro, usando los dibujos obtenidos de la presentación Geogebra anterior. No entraremos en la consideración métrica, pues esta nos introduciría en terrenos difíciles de los Elementos que podemos dejar para un ensayo posterior.

4. Los secretos del dodecaedro

Expondremos a continuación, con el detalle que nos provee Euclides, la construcción del dodecaedro. La lectura de esta sección nos exigirá algo de ejercicio matemático concentrado. El lector que tenga a su mano una buena versión de los *Elementos* disfrutará de una visión que el autor alejandrino no pudo dar, porque estaba ocupado en preparar las pautas civilizatorias que nos llevarían a esa visión moderna, así que guardemos los juicios duros en el maletín de la prudencia. El razonamiento que leeremos -que también podemos conseguir en el enlace que dimos en la sección anterior- es el mismo de Euclides y la notación que usaremos para identificar los puntos de la figura es la que encontramos en Heath ([2], vol. III, págs. 493-498). La razón de la selección es que se trata de caracteres latinos que (a nuestro juicio) hacen más fácil seguir el razonamiento. Otras versiones usan letras griegas.



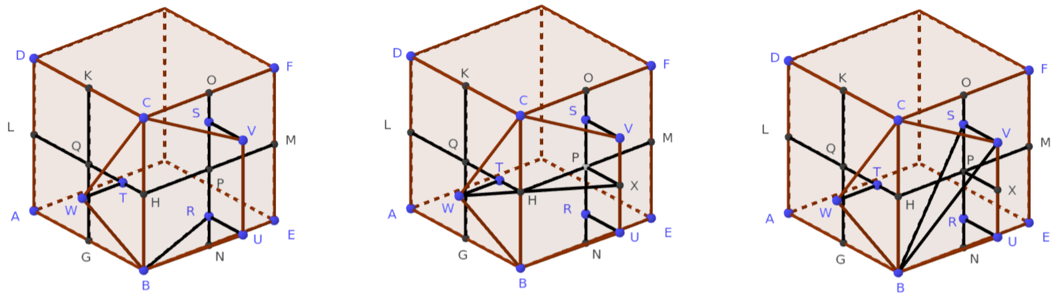
(a) (b) (c)

Figura 4: Construcción del dodecaedro: las caras

Todo comienza, tal como vemos en la figura 4, con el cubo ya construido en la proposición XIII.15 el cual, soportará cada cara del dodecaedro en una de sus doce aristas. La parte (a) de la figura muestra el cubo y las caras $ABCD$ y $BCFE$ que se intersectan en la arista $\overline{BC}$, que será el soporte del pentágono. ¿De qué manera? Las caras comentadas las hemos separado cada una en cuatro cuadrantes que emanan de los centros P y Q de las propias caras. H, L, K, G, M, N, O son puntos medios de las aristas sobre las que se ven en el dibujo. Los segmentos $\overline{PN}$, $\overline{PO}$ y $\overline{QH}$ se separan de manera áurea por los puntos respectivos R, S y T, de forma que la parte mayor de la separación contenga el punto central de la cara (P o Q).

https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/ ISSN: 3084-7761-e

A continuación, como muestra la parte (b) de la figura, se levantan segmentos perpendiculares desde los puntos de separación hacia fuera del cubo, todos iguales a la parte mayor de la división áurea realizada. Identificamos como U, V, y W los extremos de estos segmentos. Tenemos entonces cinco puntos U, B, W, C y V que unimos en pentágono, tal como se indica en la parte (c) de la figura 4. ¿Se trata de un pentágono regular?



(d) (e) (f)

Figura 5: Construcción del dodecaedro: la métrica

Para demostrar que sí, Euclides necesita tres cosas: (1) que sus lados sean congruentes (equilateralidad), (2) que los cinco vértices estén en un mismo plano (coplanaridad) y (3) que los cinco ángulos internos sean congruentes (equiangularidad). Las tres partes de la figura 5 nos ayudarán a dar las respuestas respectivas.

Para llegar a la equilateralidad, la parte (d) muestra el trazo del segmento $\overline{RB}$. Como R corta a $\overline{PN}$ en forma áurea, la proposición XIII.4 asegura que $PN^2 + RN" = 3PR^2$. Pero $PN = NB$ y $PR = RU$, por lo cual $NB^2 + NR^2 = 3RU^2$. Por otra parte, el teorema de Pitágoras dice que $NB^2 + NR^2 = BR^2$, lo que conduce a que $BR^2 + RU^2 = 4RU^2$. También es cierto que $\triangle BRU$ es rectángulo en R, por lo que $BR^2 + RU^2 = BU^2$ y entonces $BU^2 = 4RU^2$, o mejor $BU = 2RU$. Pero también $VU = SR = 2PR = 2RU$, lo que trae como consecuencia $VU = BU$: dos lados del pentágono son iguales. Razonamientos similares, apoyados en S y T demuestran que los cinco lados son iguales.

La demostración de la coplanaridad de los vértices (parte (e) de la figura 5) arranca desde la consideración de X, el punto medio de $\overline{UV}$, sobre el cual construimos el $\overline{PX}$, paralelo y de igual longitud a $\overline{RU}$ y $\overline{SV}$. Tracemos los segmentos $\overline{XH}$ y $\overline{HW}$. Como T es punto de división áurea de $\overline{QH}$ entonces

$$\frac{QH}{QT} = \frac{QT}{TH}.$$

Pero $HQ = HP$ y $QT = TW = PX$, por lo cual

$$\frac{HP}{PX} = \frac{TW}{TH} \quad \text{y} \quad \overline{PX} \parallel \overline{TH}, \overline{HP} \parallel \overline{TW},$$

implican que $\triangle XPH \sim \triangle HTW$, lo que lleva a paralelismo y consiguiente colinealidad de $\overline{XH}$ y $\overline{HW}$, lo que es suficiente para demostrar la coplanaridad que procuramos.

Demostraremos ahora la equiangularidad, apoyados en la parte (f) de la figura 5, para ello tracemos los segmentos $\overline{SB}$ y $\overline{VB}$. Por construcción, $\overline{PN}$ está cortado en razón áurea por R ($PR > RN$) y $PR = PS$, por lo tanto, según la proposición XIII.5, $\overline{NS}$ está cortado en razón áurea por P ($NP > PS$); entonces

$$NS^2 + SP^2 = 3NP^2.$$

Pero $NP = NB$ y $PS = SV$, de donde

$$NS^2 + SV^2 = 3NB^2.$$

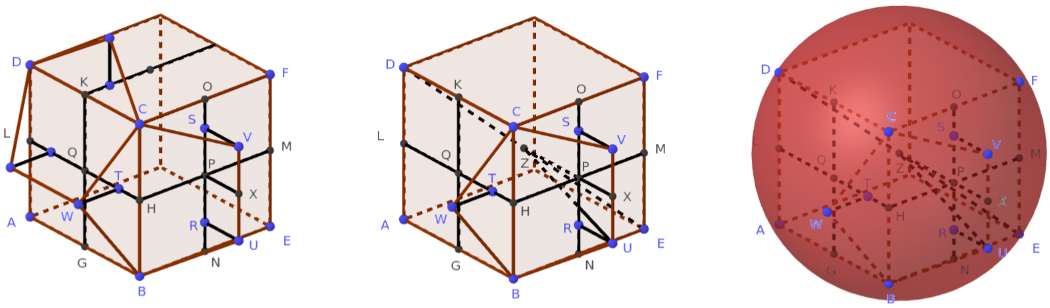
Sumando NB^2 a ambos lados de esta igualdad tenemos

$$SV^2 + (NS^2 + NB^2) = 4NB^2,$$

por lo que, aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle SNB$,

$$SV^2 + SB^2 = 4NB^2,$$

y aplicándolo de nuevo sobre el $\triangle VSB$ esta última igualdad no es otra cosa que $VB^2 = 4NB^2$ o, mejor todavía, $VB = 2NB$. Pero $BC = 2BN$, lo que implica que $BC = BV$ y, por el criterio LLL, $\triangle BCW \cong \triangle BVU$, lo que garantiza la igualdad de los ángulos del pentágono en los vértices W y U. El razonamiento se puede repetir usando R en vez de S, y se obtiene la igualdad de los ángulos en los vértices V y W. Con estos tres vértices basta para garantizar la igualdad de los dos ángulos restantes.[9]



(g) (h) (i)

Figura 6: Construcción del dodecaedro: la esfera

Llegado a este punto, Euclides da por hecha la construcción del dodecaedro, puesto que el cubo tiene doce aristas. Nosotros pensamos que, para convencernos de la conexión entre las caras del sólido, no es mala idea dibujar una cara adicional sobre la arista $\overline{DC}$ perpendicular a $\overline{BC}$, la que acaba de servirnos de soporte. La parte (g) de la figura 6 muestra la construcción, usando dos segmentos auxiliares adicionales que salen perpendicularmente de las caras del cubo. Pero aún queda pendiente la tarea de demostrar que los nuevos vértices están sobre la misma esfera en la que está inscrito el cubo. Para ello necesitaremos la parte (h) de la figura 6.

En esa ilustración vemos que se trazó la diagonal $\overline{DE}$ en el cubo ($\overline{DE}$ es un diámetro de la esfera de circunscripción) y que se prolongó $\overline{XP}$ por P hasta el punto Z donde se consigue con la diagonal. El punto Z es el centro de la esfera que circunscribe al cubo.[10] Tracemos además $\overline{UZ}$, que nos mostrará el $\triangle UXZ$, rectángulo en X. Si partimos de

$$NS^2 + SP^2 = 3NP^2$$

y de que $NS = XZ$, $XP = PS = XU = RP$, llegamos a

$$ZX^2 + XU^2 = 3NP^2,$$

pero

$$UZ^2 = ZX^2 + XU^2,$$

por lo cual $UZ^2 = 3NP^2$. Además[11] $ZE^2 = 3NP^2$, lo que lleva directamente a $UZ = ZE$, garantizando así que U está sobre la esfera. El razonamiento se hace de manera similar con V y W, lo que completa la demostración. La parte (i) de la figura 6 muestra la situación completa.

[9] Lo demostró Euclides en la proposición XIII.7.

[10] La demostración de esa intersección la conseguimos en los *Elementos* en la proposición XI.38.

[11] Igualdad demostrada en la construcción del cubo (Prop. XIII.15). Recordemos que Euclides termina las demostraciones consiguiendo relaciones métricas entre la arista de los poliedros y el radio de la esfera de circunscripción.

https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/ ISSN: 3084-7761-e

5. Conclusión

No estamos seguros: no sabemos si Hipaso conocía lo que acabamos de leer con el detalle con el que lo vimos en la sección anterior. La construcción es de una belleza fascinante que invita a reflexionar sobre el sentido de ocultarla para favor de algunos privilegiados. Pero tampoco podemos ser muy duros en nuestro juicio: los seres humanos somos producto de nuestra época y es por la valentía de hombres como Hipaso que los prejuicios pueden quedar como figuras de desecho o lastre para la posteridad. No sabemos todo lo que los siglos por venir reclamarán a la era en que vivimos pero, con certeza, no quedaremos impunes. Aplaudamos entonces la dinámica de la Historia y la obra del Hombre que la construye.

Referencias

[1] Diógenes Laercio, *Vidas de los más ilustres filósofos griegos. (Dos volúmenes).* Colección Biblioteca de Filosofía, Ediciones Folio, S. A., 2002.

[2] Euclid, *The thirteen books of the Elements.* (3 vols.) (Traducción, introducción y comentarios de Sir Thomas Heath.) Dover Publications, Inc. Nueva York, 1956.

[3] Euclides, *Elementos.* (3 vols.) (Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño.) Editorial Gredos. Madrid, 1991.

[4] Guthrie, Kenneth Sylvan, *The pythagorean sourcebook and library (Compilation and translation).* Alexandria books, Phanes Press, 1987, 1988.

[5] Heath, Thomas, *A history of greek mathematics (Two volumes)*, Dover Publications, Inc, 1981.

[6] Platón, *Diálogos (Estudio preliminar de Francisco Larroyo).*, Colección "Sepan cuántos…". Editorial Porrúa, 1996.

[7] Proclus, *A commentary on the first book of Euclid* Elements. (Translated with Introduction and notes, by Glenn R. Morrow.) Princeton University Press. New Jersey. 1970.

https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/theorem/ ISSN: 3084-7761-e