



## Cálculo de la velocidad de transferencia de calor por fricción, aplicándose el método de volumen de control a un flujo laminar e incompresible, desarrollado hidrodinámicamente

Calculation of speed of transfer frictional heat, whichever control volume method a laminar flow and incompressible hydrodynamic developed

Jordan Amaro Gutiérrez <sup>a,\*</sup>; Orlando Hernández Bracamonte <sup>b</sup>; José Olivencia Quiñones <sup>b</sup>

*a. Escuela de Ingeniería Mecánica (Universidad Nacional de Trujillo) Av. Juan Pablo II s/n Trujillo Perú*

*b. Departamento de Matemáticas (Universidad Nacional de Trujillo) Av. Juan Pablo II s/n Trujillo Perú*

\*Autor para correspondencia: [jordan.amaro.gutierrez7@gmail.com](mailto:jordan.amaro.gutierrez7@gmail.com) (J. Amaro).

Recibido 5 Julio 2016; Aceptado 8 Septiembre 2016.

### RESUMEN

Este trabajo de investigación tiene como objetivo determinar la velocidad de transferencia de calor por fricción de un determinado volumen de control de un flujo laminar e incompresible, desarrollado hidrodinámicamente al interior de una tubería. En principio, para poder determinar tal expresión que cuantifique dicha velocidad de transferencia de calor, se ha procedido a definir algunas funciones las cuales permiten entender mejor el fenómeno físico que se estudia. Luego, se ha procedido a estudiar el volumen de control empleando la ecuación de continuidad másica, para posteriormente, terminar analizando el volumen de control por la ecuación de cantidad de movimiento. Finalmente, mediante este último análisis se puede concluir analíticamente en la cuantificación de la velocidad de transferencia de calor por fricción del fluido con la tubería.

**Palabras clave:** Volumen de control, flujo laminar, desarrollo hidrodinámico.

### ABSTRACT

This research aims to determine the rate of transfer of heat by friction, a certain amount of control of a laminar incompressible flow, hydrodynamically developed into a pipe. In principle, in order to determine such an expression that quantifies this rate of heat transfer, it has proceeded to define functions which allow a better understanding of the physical phenomenon being studied. Then, we proceeded to study the control volume using the equation of mass continuity, later, to finish analyzing the control volume for the equation of momentum. Finally, by the latter analysis one can conclude analytically quantify the speed of heat transfer fluid friction with the pipe.

**Keywords:** Control volume, laminar flow, hydrodynamic development.

### 1. Introducción

A nivel mundial el transporte de líquidos y gases a través de conductos tubulares cerrados es muy común como consecuencia de los adelantos de la tecnología industrial (Ávila *et al.*, 2007). Tubería, en tecnología, es el tubo empleado para transportar de un punto a otro líquido, sólidos fragmentados, mezclas de líquidos y sólidos, así como gases (Vega-Peña *et al.*, 2007). El flujo de fluidos a través de conductos cerrados,

involucra pérdidas de energía, debidas principalmente a la naturaleza de las paredes de los tubos (rugosidad), en el caso de secciones rectas de tuberías (Streeter *et al.*, 2000). La pérdida de energía se debe principalmente a turbulencia y fricción (Ortiz-Vidal *et al.*, 2010). Dentro de la dinámica de éstos, siempre ocurre fricción de los mismos con la tubería y en diferentes accesorios, ocasionando pérdidas de presión en el flujo a lo largo de su trayectoria (Anaya-Durand *et al.*, 2014).

En 1883, fue Osborne Reynolds quien al fin abrió el camino al tratamiento científico del problema, al reconocer la existencia del flujo laminar y el turbulento, fijar sus límites y utilizar el análisis dimensional para proponer una fórmula racional para expresar la resistencia al flujo en conductos (Pérez-Franco, 2002). Además, Osborne Reynolds desarrolló a través del análisis dimensional una ley racional de resistencia al flujo, basándose en la suposición de que la resistencia dependía del diámetro, la longitud, y la condición de la superficie interior de la tubería; de la viscosidad y densidad del fluido y de la velocidad media del flujo a través de la tubería (Pérez-Franco, 2002).

Es indudable la semejanza entre las consecuencias del movimiento de un fluido sobre una pared sólida con las del movimiento relativo entre dos sólidos en contacto; una parte de la energía disponible para el movimiento se transforma a lo largo del camino en energía calórica. Sin embargo, lo que realmente sucede a nivel molecular es radicalmente diferente. Las moléculas de fluido, libres de abandonar la masa que conforman por la energía que poseen (energía interna) aparentemente experimentan mayor atracción por el material de la pared sólida que entre ellas mismas y, como consecuencia, la capa de fluido adyacente a la pared se queda inmóvil ejerciendo sobre el resto del fluido un efecto retardador (Gencel, 2012).

La caída de presión que se produce cuando un flujo de fluido se conduce a través de un tubo se relaciona directamente con la pérdida de energía total debida al cambio de energía interna del fluido y a la transferencia de calor hacia el medio ambiente. Estos dos factores se relacionan directamente con la fricción del fluido con las paredes del tubo (Fernández-Roque *et al.*, 2006).

En los casos de corriente fluida laminar analizados comúnmente en los libros de mecánica de fluidos de pre-grado, no se toma absolutamente en consideración el cambio de temperatura del flujo y, por consiguiente, la viscosidad del líquido tanto en los límites de la sección transversal, como a lo largo del flujo, es decir, se suponía una temperatura constante en todos los puntos del flujo (Amaro y Hernández, 2016).

Al pasar de las venas elementales de un líquido ideal a la corriente real, es decir, a la

del líquido viscoso que tiene dimensiones finitas y está limitada por paredes, hay que tener en cuenta, en primer lugar, la irregularidad en la distribución de las velocidades por la sección y, en segundo lugar, las pérdidas de energía (altura). Cuando el líquido viscoso fluye a lo largo de una pared sólida, por ejemplo, en un tubo, se produce el frenado del flujo, debido a la viscosidad y también a la acción de las fuerzas de cohesión molecular entre el líquido y la pared. Por eso, la velocidad máxima tiene lugar en la parte central del flujo y en las partes periféricas la velocidad va disminuyendo hasta llegar prácticamente a cero. La distribución irregular de velocidad significa el deslizamiento de unas capas o partes del líquido sobre otras, por lo cual surgen tensiones tangenciales, es decir, tensiones de rozamiento. Además, el movimiento del líquido viscoso a menudo va acompañado de la rotación de las partículas, formación de torbellinos y de mezclado. Todo eso exige gastos de energía, por lo cual, la energía específica del líquido viscoso en movimiento (energía total) no es constante, como en el caso del líquido ideal, sino que se gasta gradualmente para vencer las resistencias y, por consiguiente, disminuye a lo largo del flujo (Nekrasov, 1968).

Si para la vena líquida de líquido ideal la ecuación de Bernoulli viene a ser la ley de conservación de la energía mecánica, para el flujo real es la del balance de energía, teniendo en cuenta sus pérdidas. La energía que pierde el líquido en el sector dado de la corriente, como es natural, no desaparece, sino que se transforma en energía térmica.

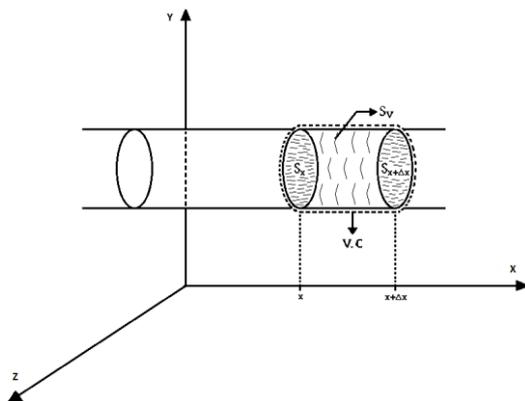
Es cierto que la energía térmica se difunde incesantemente, por lo cual el aumento de la temperatura, a menudo, es prácticamente imperceptible. Este proceso de transformación de la energía mecánica en térmica es irreversible, es decir, es imposible que este proceso transcurra a la inversa (Nekrasov, 1968).

En este estudio se determinará de forma analítica una expresión de la velocidad de transferencia de calor por fricción del flujo de fluidos al interior de una tubería horizontal, cuando el flujo está desarrollado hidrodinámicamente.

## 2. Materiales y métodos

Para el estudio de la velocidad de transferencia de calor por fricción (objeto de estudio), al interior de una tubería, se ha establecido las siguientes condiciones: El régimen de flujo es estacionario y laminar, el estado del fluido de trabajo será siempre monofásico (líquido comprimido) y el movimiento del fluido será unidireccional (horizontal).

En principio, se analizará un V.C (volumen de control) fijo respecto a la terna XYZ de este flujo, una porción de vena fluida y dos superficies planas perpendiculares al eje X, teniendo de borde a la vena fluida, será el volumen de control en estudio. (Ver figura 1)



**Figura 1.** Volumen de control en estudio

Ahora se definirán algunas funciones, para después analizar el V.C señalado, mediante el uso de la ecuación de la continuidad másica. En general, denotaremos  $f(x + \Delta x) - f(x)$ , como  $\Delta f(x)$ . Por simplicidad, escribiremos  $f: R^m \rightarrow R^n$ , para indicar que  $R^m$  es el conjunto de partida (no necesariamente el dominio) de  $f$ .

\*)  $A_T(\xi)$ : Se define como el área de la superficie plana (que tiene de borde a la vena fluida y que es perpendicular al eje X) correspondiente a la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X.

$$A_T: \quad R \rightarrow R \\ \xi \rightarrow A_T(\xi) =: A_T$$

\*)  $A_V(\xi)$ : Se define como el área de la superficie de la vena fluida desde la coordenada 0 hasta la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X (se puede referir a esta superficie “venosa” con  $S_V(\xi)$ ), se la puede denotar como:

$$A_V: \quad R \rightarrow R \\ \xi \rightarrow A_V(\xi)$$

De donde:

$$A_V(x + \Delta x) - A_V(x) = \Delta A_V(x)$$

\*)  $\Omega(\xi)$ : Se define como el volumen “barrido” por una superficie plana (que tiene de borde a la vena fluida y que es perpendicular al eje X) desde la coordenada 0 hasta la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X.

$$\Omega: \quad R \rightarrow R \\ \xi \rightarrow \Omega(\xi) = A_T \xi$$

De donde:

$$\Omega(x + \Delta x) - \Omega(x) = \Delta \Omega(x)$$

\*)  $m(\xi)$ : Se define como la masa “barrida” por una superficie plana (que tiene de borde a la vena fluida y que es perpendicular al eje X) desde la coordenada 0 hasta la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X.

$$m: \quad R \rightarrow R \\ \xi \rightarrow m(\xi)$$

De donde:

$$m(x + \Delta x) - m(x) = \Delta m(x) = \rho \Delta \Omega(x)$$

\*)  $\vec{V}_{xyz}(\xi, \psi, \zeta)$ : Es la velocidad de un elemento material respecto a la terna fija.

$$\vec{V}_{xyz}: \quad R^3 \rightarrow R^3 \\ (\xi, \psi, \zeta) \rightarrow \vec{V}_{xyz}(\xi, \psi, \zeta) =: \vec{V}_{xyz}$$

De donde:

$$|\vec{V}_{xyz}(x, y, z)| =: V_{xyz}$$

Ahora se analizará el V.C por la ecuación de la continuidad másica:

$$\frac{D(\text{Masa del V.C})}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C} \rho dV + \iint_{S.C} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{n} dA$$

Resultando:

$$0 = \iint_{S_x} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{n} dA_T + \iint_{S_{x+\Delta x}} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{n} dA_T$$

Se usará la siguiente notación:

$$|\vec{V}_{xyz} \cdot \vec{n}| =: V_{xyz}^x$$

Donde, claro está, se cumple:

$$V_{xyz}^x: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \psi, \zeta) \rightarrow V_{xyz}^x(\xi, \psi, \zeta)$$

Entonces se tiene:

$$0 = -\rho \iint_{S_x} V_{xyz}^x dA_T + \\ \rho \iint_{S_{x+\Delta x}} V_{xyz}^x dA_T$$

$$\rho \iint_{S_x} V_{xyz}^x dA_T = \rho \iint_{S_{x+\Delta x}} V_{xyz}^x dA_T$$

$$\rho V_{xyz,m}^x(x) \iint_{S_x} dA_T = \\ \rho V_{xyz,m}^x(x + \Delta x) \iint_{S_{x+\Delta x}} dA_T$$

$$\rho V_{xyz,m}^x(x) A_T = \rho V_{xyz,m}^x(x + \Delta x) A_T$$

$$V_{xyz,m}^x(x) = V_{xyz,m}^x(x + \Delta x)$$

Simplificando aún más la notación de esta última ecuación, se puede hacer lo siguiente:

$$V_{xyz,m}^x(\xi) =: V_m^x$$

Quedará entonces:

$$\rho V_m^x A_T = k_M \dots \quad (k_M \in \mathbb{R}^+)$$

Se puede decir también lo siguiente:

$$V_m^x A_T = k_V \dots \quad (k_V \in \mathbb{R}^+)$$

Ahora, se definirán algunas funciones para después analizar el V.C mediante la ecuación de la cantidad de movimiento.

\*)  $\vec{P}_\Omega(\Omega(\xi))$ : Se define como el valor del peso del cuerpo cuyo volumen es  $\Omega(\xi)$ .

$$\vec{P}_\Omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Omega(\xi) \rightarrow \vec{P}_\Omega(\Omega(\xi)) =: -\rho g \Omega(\xi) \vec{j} \\ =: \rho \Omega(\xi) \vec{g}$$

Redefiniendo  $\vec{P}_\Omega$ , quedará:

$$\vec{P}_\Omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \xi \rightarrow \vec{P}_\Omega(\xi) =: \rho \Omega(\xi) \vec{g}$$

De donde:

$$\vec{P}_\Omega(x + \Delta x) - \vec{P}_\Omega(x) = \Delta \vec{P}_\Omega(x)$$

\*)  $\vec{F}_D(\xi)$ : Se define como la fuerza total aplicada por la “parte derecha” a la superficie plana perpendicular al eje X correspondiente a la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X.

$$\vec{F}_D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \xi \rightarrow \vec{F}_D(\xi) =: -(\iint_{S_\xi} \sigma dA_T) \vec{i}$$

En este análisis se supondrá que la tensión normal ( $\sigma$ ) no depende de cualquiera de las coordenadas “pertenecientes” a la superficie  $S_\xi$ .

De donde:

$$\vec{F}_D(x + \Delta x) - \vec{F}_D(x) = \Delta \vec{F}_D(x)$$

Trabajando en la dirección del flujo, se tiene:

$$[\vec{F}_D(x + \Delta x) - \vec{F}_D(x)] \cdot \vec{i} = [\Delta \vec{F}_D(x)] \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_D(x + \Delta x) \cdot \vec{i} - \vec{F}_D(x) \cdot \vec{i} = \Delta \vec{F}_D(x) \cdot \vec{i}$$

Denotemos estos términos de la siguiente manera:

$$\vec{F}_D(x + \Delta x) \cdot \vec{i} =: -F_D^x(x + \Delta x) \\ \vec{F}_D(x) \cdot \vec{i} =: -F_D^x(x) \\ \Delta \vec{F}_D(x) \cdot \vec{i} =: -\Delta F_D^x(x)$$

Entonces se tendrá:

$$F_D^x(x + \Delta x) - F_D^x(x) = \Delta F_D^x(x)$$

\*)  $\vec{F}_V(\Omega(\xi))$ : Es la fuerza total en la dirección del flujo aplicada exclusivamente a la vena fluida desde la coordenada 0 hasta la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X.

$$\vec{F}_V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Omega(\xi) \rightarrow \vec{F}_V(\Omega(\xi)) = -(\tau_{m,tub}^x \pi D_i \xi) \vec{i}$$

Siendo el término  $\tau_{m,tub}^x$  la tensión cortante media aplicada en todo punto de la superficie venosa y en sentido contrario al flujo. El

término  $D_i$  es el diametro interno de la tubería.

Redefiniendo  $\vec{F}_V$ , quedará:

$$\vec{F}_V: R \rightarrow R^3$$

$$\xi \rightarrow \vec{F}_V(\xi) = -(\tau_{m,tub}^x \pi D_i \xi) \vec{i}$$

De donde:

$$\vec{F}_V(x + \Delta x) - \vec{F}_V(x) = \Delta \vec{F}_V(x)$$

Trabajando en la dirección del flujo, se tiene:

$$[\vec{F}_V(x + \Delta x) - \vec{F}_V(x)] \cdot \vec{i} = [\Delta \vec{F}_V(x)] \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_V(x + \Delta x) \cdot \vec{i} - \vec{F}_V(x) \cdot \vec{i} = \Delta \vec{F}_V(x) \cdot \vec{i}$$

Denotando estos términos de la siguiente manera:

$$\vec{F}_V(x + \Delta x) \cdot \vec{i} =: -F_V^x(x + \Delta x)$$

$$\vec{F}_V(x) \cdot \vec{i} =: -F_V^x(x)$$

$$\Delta \vec{F}_V(x) \cdot \vec{i} =: -\Delta F_V^x(x)$$

Entonces se tendrá:

$$F_V^x(x + \Delta x) - F_V^x(x) = \Delta F_V^x(x)$$

\*) Sea  $\vec{F}_0$  la fuerza total aplicada por la "parte izquierda" a la superficie plana perpendicular al eje X correspondiente a la coordenada 0 de la variable independiente X. Donde:

$$\vec{F}_0 = F_0^x \vec{i} + F_0^y \vec{j} + F_0^z \vec{k}$$

\*)  $\vec{Re}(\Omega(\xi))$ : Es la fuerza total aplicada al cuerpo cuyo volumen es  $\Omega(\xi)$ .

$$\vec{Re}: R \rightarrow R^3$$

$$\Omega(\xi) \rightarrow \vec{Re}(\Omega(\xi)) = \vec{F}_0 + \vec{F}_D(\xi) + \vec{F}_V(\xi) + \vec{F}_\Omega(\xi)$$

Redefiniendo  $\vec{Re}$ , quedará:

$$\vec{Re}: R \rightarrow R^3$$

$$\xi \rightarrow \vec{Re}(\xi) = \vec{F}_0 + \vec{F}_D(\xi) + \vec{F}_V(\xi) + \vec{F}_\Omega(\xi)$$

De donde:

$$\vec{Re}(x + \Delta x) - \vec{Re}(x) = \Delta \vec{Re}(x)$$

Trabajando en la dirección del flujo, se tiene:

$$[\vec{Re}(x + \Delta x) - \vec{Re}(x)] \cdot \vec{i} = [\Delta \vec{Re}(x)] \cdot \vec{i}$$

$$\vec{Re}(x + \Delta x) \cdot \vec{i} - \vec{Re}(x) \cdot \vec{i} = \Delta \vec{Re}(x) \cdot \vec{i}$$

Denotemos estos términos de la siguiente manera:

$$\vec{Re}(x + \Delta x) \cdot \vec{i} =: Re^x(x + \Delta x)$$

$$\vec{Re}(x) \cdot \vec{i} =: Re^x(x)$$

$$\Delta \vec{Re}(x) \cdot \vec{i} =: \Delta Re^x(x)$$

Entonces se tendrá:

$$Re^x(x + \Delta x) - Re^x(x) = \Delta Re^x(x)$$

Ahora, analizando el V.C mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, se tiene:

$$\Delta \vec{Re}(x) = \frac{\partial \iiint_{V.C} \vec{V}_{xyz} \rho dV}{\partial t} + \iint_{S.C} \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{n} dA$$

Estableciendo que:

$$V_{xyz}^x =: V_m^x + \Delta V^x$$

Siendo el término  $V_m^x$  el módulo de la velocidad media del perfil de velocidades en la superficie determinada.

Entonces se obtiene:

$$0 = \Delta F_D^x(x) + \Delta F_V^x(x) - \rho \iint_{S_x} (V_m^x + \Delta V^x)^2 dA_T + \rho \iint_{S_{x+\Delta x}} (V_m^x + \Delta V^x)^2 dA_T$$

Resultando:

$$0 = \Delta F_D^x(x) + \Delta F_V^x(x) - [\rho \iint_{S_x} (\Delta V^x)^2 dA_T] + [\rho \iint_{S_{x+\Delta x}} (\Delta V^x)^2 dA_T]$$

Ahora, se definirá una función que se necesitará para seguir trabajando con mayor sencillez:

\*)  $F_T^x(\xi)$ : Se define como la magnitud de la fuerza total generada por los esfuerzos cortantes en una superficie plana

correspondiente a la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X.

$$F_{\tau}^x: R \rightarrow R$$

$$\xi \rightarrow F_{\tau}^x(\xi) := \rho \iint_{S_{\xi}} (\Delta V^x)^2 dA_{\tau}$$

Reacomodando términos y reemplazando, se tiene:

$$0 = \Delta F_D^x(x) + \Delta F_V^x(x) + F_{\tau}^x(x + \Delta x) - F_{\tau}^x(x)$$

$$0 = \Delta F_D^x(x) + \Delta F_V^x(x) + \Delta F_{\tau}^x(x)$$

Equivalentemente:

$$dF_D^x(x) + dF_V^x(x) + dF_{\tau}^x(x) = 0$$

Por tanto:

$$dRe^x(x) = dF_{\tau}^x(x)$$

Integrando la penúltima ecuación, se obtendrá:

$$F_D^x(\xi) + F_V^x(\xi) + F_{\tau}^x(\xi) = \theta \dots (\theta \in R^+)$$

Ahora, se estudiará la siguiente ecuación:

$$\Delta F_D^x(x) + \Delta F_V^x(x) + \Delta F_{\tau}^x(x) = 0$$

Realizando algunos acomodos, se obtiene:

$$\left\{ \frac{(V_m^x)^2}{2} \left[ \frac{2 \iint_{S_{x+\Delta x}} (\Delta V^x)^2 dA_{\tau}}{A_{\tau} (V_m^x)^2} \right] + \frac{F_D^x(x + \Delta x)}{\rho A_{\tau}} \right\} - \left\{ \frac{(V_m^x)^2}{2} \left[ \frac{2 \iint_{S_x} (\Delta V^x)^2 dA_{\tau}}{A_{\tau} (V_m^x)^2} \right] + \frac{F_D^x(x)}{\rho A_{\tau}} \right\} + \frac{\Delta F_V^x(x)}{\rho A_{\tau}} = 0$$

Dada la notable similitud de los factores entre corchetes y la única dependencia de estos respecto a la coordenada  $\xi$  de la variable independiente X, se pueden definir las siguientes funciones:

\*)  $\psi(\xi)$  :

$$\psi: R \rightarrow R$$

$$\xi \rightarrow \psi(\xi) := \frac{\iint_{S_{\xi}} (\Delta V^x)^2 dA}{A_{\tau} (V_m^x)^2}$$

\*)  $\alpha(\xi)$  : Se le denominará coeficiente adimensional de velocidad. Esta función depende de la distribución de la velocidad en cualquier superficie plana perpendicular a la dirección del flujo:

$$\alpha: R \rightarrow R$$

$$\xi \rightarrow \alpha(\xi) := 2\psi(\xi)$$

Ahora, se define la presión en una superficie cualquiera:

\*)  $P(\xi)$  :

$$P: R \rightarrow R$$

$$\xi \rightarrow P(\xi) := \frac{F_D^x(\xi)}{A_{\tau}}$$

De donde:

$$P(x + \Delta x) - P(x) = \Delta P(x)$$

Entonces, quedará la última ecuación de la siguiente forma:

$$\left\{ \frac{\alpha(x + \Delta x)(V_m^x)^2}{2} + \frac{P(x + \Delta x)}{\rho} \right\} - \left\{ \frac{\alpha(x)(V_m^x)^2}{2} + \frac{P(x)}{\rho} \right\} + \frac{\Delta F_V^x(x)}{\rho A_{\tau}} = 0$$

Reacomodando los términos, se obtiene:

$$\left\{ \frac{\alpha(x)(V_m^x)^2}{2} + \frac{P(x)}{\rho} \right\} - \left\{ \frac{\alpha(x + \Delta x)(V_m^x)^2}{2} + \frac{P(x + \Delta x)}{\rho} \right\} = \frac{\Delta F_V^x(x) V_m^x}{k_M}$$

Ecuación fluido-dinámica específica unidimensional

De la cual, se puede decir que:

$$- \left[ \frac{k_M (V_m^x)^2}{2} \Delta \alpha(x) + k_V \Delta P(x) \right] = \Delta F_V^x(x) V_m^x$$

Se usará la siguiente notación para mayor simplicidad:

$$\Delta F_V^x(x) V_m^x =: \dot{Q}_{fri}$$

Finalmente, se obtiene:

$$- \left[ \frac{k_M (V_m^x)^2}{2} \Delta \alpha(x) + k_V \Delta P(x) \right] = \dot{Q}_{fri}$$

Ecuación de velocidad de transferencia de calor por fricción del flujo al interior de una tubería

### 3. Resultados y discusión

Se puede apreciar, en base a la última ecuación, que la velocidad de transferencia de calor por fricción del flujo con la tubería depende de dos magnitudes; de la presión y del coeficiente adimensional de velocidad  $\alpha$ . Se supondrá, por un momento, que los perfiles de velocidad al interior de la tubería son todos iguales, por tanto, la ecuación resultante de velocidad de transferencia de calor por fricción será:

$$-k_v \Delta P(x) = \dot{Q}_{\text{fri}}$$

Esto es admisible para cuestiones, digamos, “didácticas”, ya que físicamente es paradójico. El argumento es el siguiente: Suponiendo que todo el calor de fricción se transfiere a la tubería, ésta, naturalmente elevará su temperatura, ocasionando una diferencia de temperatura entre el flujo y la tubería, por lo tanto, ocurrirá un calentamiento, por convección, del flujo, produciendo así distribuciones de viscosidades en diferentes secciones transversales al flujo, siendo todas distintas, para finalmente originar diferentes distribuciones de velocidades, lo cual hace que el coeficiente adimensional cambie.

### 4. Conclusiones

La ecuación de velocidad de transferencia de calor por fricción del flujo, al interior de una tubería, obtenida es muy necesaria para el estudio de pérdida o ganancia de calor de flujos reales incompresibles y laminares al interior de tuberías, ya que permite un completo entendimiento del fenómeno fluido-dinámico y de transferencia de calor que ocurre al interior de dicha tubería. Vale decir que tal ecuación se puede simplificar para cuestiones didácticas u otras, siempre y cuando existan sus salvedades o limitaciones.

### Referencias

- Ávila, N.; Becerra, C.; Mustafá, Y.; Sanz, J. 2007. Pérdidas de presión en el transporte hidráulico de café por tubería PVC de 88 mm. *Revista Scientia et Technica* 1(34): 177- 182.
- Vega, L.; Rodríguez, G. 2007. Perdidas de presión en tuberías de vapor. *Revista: Ciencias Holguín* 13(3): 1-10.
- Streeter, V.; Benjamin, E.; Bedford, K. 1999. *Mecánica de fluidos*. Editorial Mc Graw – Hill. Santa fe de Bogotá, Colombia.
- Nekrasov B. 1968. *Hidráulica*. Editorial Mir. Moscú, Rusia.
- Ortiz, L.; Cabanillas, D.; Fierro, R. 2010. Equilibrio hidráulico en sistemas de bombeo minero: Estudio de caso. *Revista Ingeniare* 18(3): 335-342.
- Anaya, A.; Cauich, G.; Funabazama, O.; Medrano, V. 2014. Evaluación de ecuaciones de factor de fricción explícito para tuberías. *Revista Educación Química* 25(2): 128-134.
- Pérez, D. 2002. Evolución histórica de las fórmulas para expresar las pérdidas de carga en tuberías. Segunda parte: Desde los trabajos de Darcy hasta los de Stanton. *Revista Ingeniería Hidráulica y Ambiental* 23(3): 3-8.
- Gencel, Z. 2012. Sobre “fricción” en fluidos en movimiento y en su frontera sólida y sobre la energía “perdida”. *Revista Ingeniería Hidráulica y Ambiental* 33(1): 30-36.
- Fernández, T.; Toledo, M.; Vásquez, J. 2006. Caída de presión debida a un flujo en torbellino. *Revista Científica* 10(4): 159-165.
- Amaro, J.; Hernández, O.; Olivencia, J. 2015. Cálculo del campo de velocidad de un flujo laminar de agua al interior de una tubería, enfriándose con el medio ambiente después del completo desarrollo hidrodinámico. *Agroindustrial Science* 5(2): 127 – 132.

