Agroindustrial Science

Agroind Sci 5 (2015)

Escuela de Ingeniería Agroindustrial

Universidad Nacional de Trujillo

Existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico

Existence and uniqueness of solution of a differential partial not linear stationary equation of the elliptical type

Herón Juan Morales Marchena[a]; Milton Melciades Cortez Gutiérrez[b]

a. Departamento Académico de Matemática, Universidad Nacional Del Santa, Av. Universitaria s/n, Nuevo Chimbote, Perú.
b. Departamento Académico de Matemática, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n, Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú.

*Autor para correspondencia: juanheron62@hotmail.com (H. Morales).

Recibido 10 noviembre 2015; Aceptado 22 Diciembre 2015.

RESUMEN

En la presente investigación, se demostró la unicidad de solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-f \quad \text{en} \quad \Omega.$$

En el espacio $H_0^1(\Omega)$, para Ω una región plana convexa, $f\in L^2(\Omega)$ y $g\in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Palabras clave: Operador diferencial, desigualdad de Poincaré, norma estrictamente convexa, distribuciones y espacio de funciones de prueba y espacios de Sobolev.

ABSTRACT

In the present investigation, there was demonstrated the uniqueness of solution of the differential partial not linear stationary equation of the elliptical type of the form:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

In the space $H_0^1(\Omega)$ for Ω a flat convex region, $f\in L^2(\Omega)$ y $g\in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Keywords: Differential operator, Poincaré's Inequality, strictly convex Norm, Distributions and Space of functions of Test and Sobolev's Spaces.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales constituyen una potente herramienta para describir procesos o sistemas que se dan en la naturaleza. En el mundo de la ingeniería son múltiples los ejemplos. Desde el estudio del movimiento armónico simple en muelles hasta las ecuaciones no lineales de la mecánica de fluidos, por citar algunos. Uno de los casos particulares en el vasto conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales lo constituyen las ecuaciones diferenciales parciales lineales de 2º orden:

$$u_{tt} - (A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y}) + Fu = f(x,y)$$

Las cuales son ecuaciones diferenciales parciales las que modelan en su mayoría los problemas en ingeniería.

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales se consideran las condiciones iniciales, así como también las condiciones de contorno.

En estos problemas se plantean las siguientes cuestiones: (a) existencia de solución; (b) unicidad de la solución; (c) estabilidad de la solución.

La mayoría de las leyes de la física están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales: las ecuaciones de Maxwell, la ley de enfriamiento de Newton, las leyes de Kleper, la ecuación de Navier – Stokes, la ecuación del momentum de Newton, la ecuación de Schrodinger de la mecánica cuántica, la ecuación del telégrafo, la ecuación hiperbólica en la teoría de control, etc.

Una de las aplicaciones del modelo en el sector agropecuario se dio en el análisis térmico de una paila panelera, para observar el comportamiento de flujo de calor hacia los jugos de la caña de azúcar, el cual se desarrolló en 2 etapas:

- El flujo de gases calientes, la superficie de la paila, y los jugos de la caña de azúcar.
- La conducción de calor dentro de la lámina que forma la paila y el jugo.

Donde se obtuvo el modelo del comportamiento del calor y su distribución bajo las condiciones de operación (Parra, 1996).

Los problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales no lineales han venido siendo desarrollados desde diferentes perspectivas, según la Base de Datos del Ministerio de Educación y Ciencia de España, la Universidad de Sevilla como por ejemplo en el caso de los problemas no lineales de la mecánica de fluidos incompresibles, existe un modelo del tipo elíptico estacionario modelado netamente con herramientas matemáticas basados experimentalmente como son los números de Reynolds, presión de fluidos, velocidad, etc. Tal como se aprecia en Gómez (1997), Climent (1995), seguidamente se han encontrado problemas que relacionan a los fluidos no Newtonianos como se cita en Robles (1995), por otro lado los modelos ya han sido tratados desde el punto de vista numérico tal es el caso en Echevarría (1995), se observa una matemática finita, note que también existen modelos relacionados con la dinámica de poblaciones con difusión lineal y no lineal estudiados (Suarez, 1998) recientemente también han sido tratados los problemas de control, vea Doubova (1999), así como también existen otros modelos que conllevan a las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas tal como la ecuación de ITO entre los que también tratan (Garrido, 2002) en este trabajo de tesis se va estudiar un modelo que involucra la dinámica de fluidos basado en un modelo del tipo elíptico para posteriormente tratar sobre las existencia y unicidad de solución.

Por otro lado, las derivadas parciales que aparecen no siempre existen desde el punto de vista clásico es por eso que también se requiere el uso de la teoría de las distribuciones para poder generalizar a una derivada generalizada en la que la solución del modelo a tratar será en los espacios funcionales como son los Espacios de Sobolev, etc.

2. Enunciado del problema

¿Existe y es única la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -f \quad \text{en } \Omega \quad \ldots (*)$$

Donde:

Ω es una región plana convexa.

$f \in L^2(\Omega)$ (de preferencia $f \in (H_0^1(\Omega))'$).

$\varphi/_{\partial\Omega} = g \quad ; \quad g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. ?

3. Hipótesis

Se considera $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

El operador diferencial admite una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

4. Referencias teóricas

Espacio de funciones de prueba: $Đ(\Omega)$

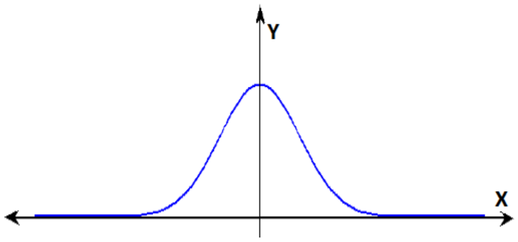
Definición. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ una función.
Se llama soporte de u y se denota por $spp(u)$ al subconjunto definido por: $spp(u)=\{x\in\Omega / u(x)\neq 0\}$.

Definición. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, una función $u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$, es llamada función de prueba, si cumple las siguientes condiciones:

i. $u\in C^{\infty}(\Omega)$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas parciales continuas de todos los órdenes sobre Ω .
ii. $spp(u)\subset K$, K compacto.

Ejemplo. Dada la función:

$$w(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & ,|x|\prec 1 \\ 0 & ,|x|\geq 1 \end{cases}$$



i. $w\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas parciales continuas de todos los órdenes.
ii. $spp(w)\subset K=[-1,1]$, K compacto.

$Đ(\Omega)$: Es llamado Espacio de Funciones de Prueba con soporte compacto.

Convergencia

Definición. Una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}\subset Đ(\Omega)$ converge hacia "u" en $Đ(\Omega)$ si:

i. $spp(u_n)\subset K$, K compacto,$\forall n\in\mathbb{N}$.
ii. $D^{\alpha}u_n\rightarrow D^{\alpha}u$, las derivadas convergen uniformemente $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$

($\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$).

Distribuciones

Definición. Una funcional lineal $T:Đ(\Omega)\rightarrow K$ es llamada distribución si T es continua.
Esto es:

i. T funcional.
Es decir. Para cada función $u\in Đ(\Omega)$, se le asocia un escalar que designaremos por $\langle T,u\rangle$.
ii. T lineal, es decir:
$\langle T,\alpha u+\beta v\rangle=\alpha\langle T,u\rangle+\beta\langle T,v\rangle$.
iii. T continuo.

Es decir: Para toda sucesión $\{u_n\}$ convergente en $Đ(\Omega)$, sus imágenes $\{T(u_n)\}$ forman una sucesión convergente en K, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(T(u_n)\right)=T\left(\lim_{n\to\infty}u_n\right) \quad o \quad \lim_{n\to\infty}\langle T,u_n\rangle=\left\langle T,\lim_{n\to\infty}u_n\right\rangle$$

Por otro lado, se define la suma de distribuciones y el producto por un escalar de la siguiente forma:

$$\langle T_1+T_2,u\rangle=\langle T_1,u\rangle+\langle T_2,u\rangle \ \ y \ \ \langle\alpha T,u\rangle=\alpha\langle T,u\rangle$$

Con lo que el conjunto de distribuciones tiene estructura de espacio vectorial sobre K y se designa por $Đ'$ (espacio dual de $Đ$).

Derivada de una Distribución

Definición. Sea $T:Đ(\Omega)\rightarrow K$ una distribución, llamamos derivada de T respecto a x_i y se denota por $\partial_i T$, a una distribución talque verifica:

$$\langle\partial_i T,u\rangle=-\langle T,\partial_i u\rangle=-\int_{\Omega}T.\frac{\partial u}{\partial x_i}dx,$$

$$\forall u\in Đ(\Omega)$$

Espacios de Sobolev

Definición. Dado un subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto acotado, llamamos espacio de Sobolev y se denota por $H^1(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales de primer orden, también pertenecen a $L^2(\Omega)$, junto a las operaciones de funciones de adición y multiplicación escalar.

Es decir:

$$H^1(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega);\ i=1,2,...,n\right\}$$

Nota. Las derivadas parciales en $H^1(\Omega)$, no se entienden en el sentido clásico, sino en el de las distribuciones.

Definición. Dado un subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto acotado, llamamos espacio de Sobolev de orden $m\in\mathbb{Z}^+$ y se denota por $H^m(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones de orden menor o igual a m también pertenecen a $L^2(\Omega)$.

$$H^m(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):\ D^\alpha u\in L^2(\Omega),\forall\alpha,|\alpha|\le m\right\}$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio con producto interno, con el producto interno:

$$\ll u,v\gg=\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\int_\Omega u(x)v(x)dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

Demostración

$\forall u,v,w\in H^1(\Omega);\quad\forall\alpha,\beta\in K$

a). $\ll u,u\gg\ \ge 0$

$$\ll u,u\gg=\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\int_\Omega|u(x)|^2dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\ \ge\ 0$$

$$\ll u,u\gg=0$$

$$\ll u,u\gg=\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\int_\Omega|u(x)|^2dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\ =\ 0$$

$\int_\Omega|u(x)|^2dx\ =\ 0$ **y**

$$\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\ =\ 0$$

$u(x)\ =\ 0$,

entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i}\ =\ 0,\forall i=1...n$

b). $\ll u,v\gg=\ll v,u\gg$

$$\ll u,v\gg=\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\int_\Omega u(x)v(x)dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

$$=\int_\Omega v(x)u(x)dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx$$

$$=\langle v,u\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\ll v,u\gg$$

c). $\ll\alpha u+\beta v,w\gg=\alpha\ll u,w\gg+\beta\ll v,w\gg$

$$\ll\alpha u+\beta v,w\gg=\langle\alpha u+\beta v,w\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\int_\Omega[\alpha u+\beta v](x).w(x)dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial[\alpha u(x)+\beta v(x)]}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx$$

$$=\alpha\int_\Omega u(x).w(x)dx+\beta\int_\Omega v(x).w(x)dx+\alpha\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx$$

$$\beta\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx$$

$$=\alpha\langle u,w\rangle_{L^2(\Omega)}+\beta\langle v,w\rangle_{L^2(\Omega)}+\alpha\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}+$$

$$\beta\sum_{i=1}^n\left\langle\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$=\alpha\ll u,w\gg+\beta\ll v,w\gg$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio normado, con la norma:

$$\|u\|=[\int_\Omega|u(x)|^2dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx]^{1/2}$$

5. Resultados

$$\begin{cases}-\sum_{i=1}^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f & \dots\quad(1)\\ u/_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

Equivalente a:

$$\begin{aligned}Au&=f\\ u/_{\partial\Omega}&=g\end{aligned}\qquad\dots.\quad(2)$$

Demostración de la Unicidad

Consideremos dos soluciones diferentes $u,v\in V$

Esto es:

$$Au=f\quad;\quad u/_{\partial\Omega}=g$$
$$Av=f\quad;\quad v/_{\partial\Omega}=g$$

Donde $Au=-\sum_{i=1}^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$

Reemplazando

$$\langle Au - Av\,,\, u - v\rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial v}{\partial x_i}\right), u - v \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial v}{\partial x_i}\right], u - v \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left\langle \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial v}{\partial x_i}\right], \frac{\partial (u - v)}{\partial x_i} \right\rangle \geq 0$$

$$u \in W^{1,4}(\Omega) \quad \rightarrow \quad V = W^{1,4}(\Omega).$$

Por otro lado:

$$\langle Av - f, v - u\rangle = \langle Au - f, v - u\rangle + \langle Av - Au, v - u\rangle$$

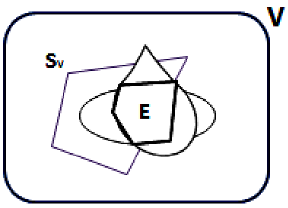
$$= \langle Av - Au, v - u\rangle \geq 0\,,\ \textit{por ser monótona.}$$

$$\Rightarrow \langle Av - f\ ,\, v - u\rangle \geq 0\,, \forall v \in V$$

Construyamos: $\forall v \in V$,

$$S_v = \{ u \in V \,/\, \langle Av - f, v - u\rangle \geq 0,\ Au = f \}$$

subespacio cerrado de V .



$$\Rightarrow\ E = \bigcap_{v \in V} S_v$$

E es cerrado y convexo, además $E = \{ u \in V \,/\, Au = f \}$, conjunto de las soluciones de (2).

Suponga que la norma en V ,

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

es estrictamente convexa sobre la esfera unitaria de V , y

$\| Au \| = \| Av \| \ \Rightarrow\ \| u \| = \| v \|$ como u satisface (2)

$$E \ \subset \{ u \in V \,/\, \| u \| = S\ ,\ Au = f \},\ S$$

Convenientemente.

Se deduce que E se reduce a un conjunto unitario.

6. Discusión

La monotonía del operador $A : V \rightarrow V'$, i.e $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq o\,,\quad \forall u\ v \in V, u \neq v$, fue necesaria para la construcción del conjunto E, como propuesta inicial de las soluciones de $Au = f$.

El cerradura del conjunto E de las soluciones junto a la condición de norma estrictamente convexa permitió demostrar que el conjunto E se reduce a un punto, es decir la solución de la ecuación diferencial en el sentido de las distribuciones es única.

7. Conclusión

La solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -f$$

en Ω , es única.

Referencias

Climent, B. 1995. Soluciones débiles y renormalizadas de algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales con Origen en Mecánica de Fluidos. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.

Doubova A. 1999. Análisis y control de algunas EDP no lineales con origen en Mecánica. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.

Echevarría, R. 1995. Algunas aplicaciones del Método de Elementos Finitos a Problemas en Derivadas Parciales No Lineales. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.

Garrido, J. 2002. Algunos resultados de Existencia, Unicidad y estabilidad para EDP Funcionales Estocásticas no Lineales. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.

Gómez, M. 1997. Estudio Matemático de algunos problemas no Lineales de la Mecánica de Fluidos Incompresibles. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.

Parra, J. 1996. Análisis térmico de una paila panelera. Ingenio Libre 5: 44-50.

Robles, R. 1995. Contribución al estudio teórico de algunas ecuaciones en derivadas parciales no lineales relacionadas con fluidos no newtonianos. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.

Suarez, A. 1998. Propiedades de las soluciones de sistemas estacionarios de la dinámica de poblaciones con difusión lineal y no lineal. Tesis Doctoral. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, España.