



## Cálculo del campo de velocidad de un flujo laminar de agua al interior de una tubería, enfriándose con el medio ambiente después del completo desarrollo hidrodinámico

Calculation of the velocity field of laminar water into a pipe, cooling the environment after full development hydrodynamic flow

Jordan Amaro Gutiérrez<sup>a, \*</sup>; Orlando Hernández Bracamonte<sup>b</sup>; José Olivencia Quiñones<sup>b</sup>

*a. Escuela de Ingeniería Mecánica (Universidad Nacional de Trujillo) Av. Juan Pablo II s/n Trujillo Perú.*

*b. Departamento de Matemáticas (Universidad Nacional de Trujillo) Av. Juan Pablo II s/n Trujillo Perú.*

\*Autor para correspondencia: [jordan.amaro.gutierrez7@gmail.com](mailto:jordan.amaro.gutierrez7@gmail.com) (J. Amaro)

Recibido 15 Noviembre 2015; Aceptado 9 Diciembre 2015

### RESUMEN

Este trabajo de investigación tiene como objetivo demostrar la existencia de un campo de velocidad (expresado en coordenadas cilíndricas) que pueda modelar el perfil de velocidad en cualquier posición al interior de una tubería, por la cual circula un flujo laminar de agua que sufre un proceso de enfriamiento después del completo desarrollo hidrodinámico. Para determinar dicho campo se ha procedido a particularizar un campo de velocidad inicial, en base a condiciones de frontera del flujo al interior de una tubería, además de esto, se ha tenido siempre presente la constante referencia de la geometría de los diferentes perfiles de velocidad, sobre todo en la región después del completo desarrollo hidrodinámico. Sólo para efectos de visualización se ha procedido a dibujar los diferentes perfiles de velocidad usando el programa MATLAB. Finalmente, observando los diferentes perfiles de velocidad obtenidos, se ha concluido que el campo de velocidad calculado expresa muy bien el comportamiento de los perfiles de velocidad al interior de la tubería, validando de ese modo el campo encontrado.

**Palabras clave:** Campo de velocidad, flujo laminar, MATLAB.

### ABSTRACT

This research aims to demonstrate the existence of a velocity field (expressed in cylindrical coordinates) that can model the velocity profile at any position within a pipe, through which water circulates a laminar flow undergoes a process cooling after full hydrodynamic development. To determine that field, we have proceeded to particularize a field of initial velocity, based on boundary conditions of the flow inside a pipeline, in addition to this has been always the constant reference to the geometry of the different velocity profiles, especially in the hydrodynamic region after full development. Only for display purposes it has proceeded to draw the different velocity profiles using MATLAB. Finally observing the different velocity profiles obtained, it was found that the calculated velocity field expresses very well the behavior of the velocity profiles within the pipe, thereby validating the field has been found.

**Keywords:** Velocity field, laminar flow, MATLAB.

### 1. Introducción

En la actualidad, el conocimiento referente al campo de velocidades de un flujo laminar

e incomprensible al interior de una tubería circular, tanto en las regiones de entrada hidrodinámica, térmica y de completo desarrollo térmico, es escasa. Esto ha

generado muchas interrogantes respecto al comportamiento del perfil de velocidad al interior de la tubería para dichas regiones anteriormente mencionadas. En los casos de corriente fluida laminar analizados comúnmente en los libros de mecánica de fluidos de pre-grado, no se toma absolutamente en consideración el cambio de temperatura del flujo y, por consiguiente, la viscosidad del líquido tanto en los límites de la sección transversal, como a lo largo del flujo, es decir, se suponía una temperatura constante en todos los puntos del flujo (Nekrasov, 1968). De este modo, debido al intercambio de calor a través de la pared del tubo, entre el líquido y el medio circundante, no se cumple la ley parabólica general de distribución de velocidades, la cual se cumple para flujo laminar e incompresible isotérmico (Nekrasov, 1968). Se debe recordar que los flujos laminares y aproximadamente incompresibles al interior de una tubería, pueden ser corrientes fluidas isotérmicas o no isotérmicas, donde las evoluciones del perfil de velocidades, para ambos casos, son totalmente distintas (Nekrasov, 1968).

Para estudiar la evolución del perfil de velocidad, y por ende, el campo de velocidades de un flujo isotérmico, se tiene que tener conocimiento del comportamiento de la viscosidad en las diferentes secciones transversales al flujo, para poder explicar, por ejemplo, el desarrollo del perfil en la región de entrada hidrodinámica, en la cual se encuentra la llamada capa límite de velocidad (Shames, 1995). Después de esta región el perfil se estabiliza siendo un perfil parabólico de velocidad para cualquier sección transversal, el cual es característico para la corriente fluida laminar (Nekrasov, 1968), (Cengel y Ghajar, 2011).

Ahora, para poder estudiar la evolución del perfil de velocidad, y por ende, el campo de velocidad de un flujo no isotérmico, se tiene que tener también conocimiento del comportamiento de la viscosidad en las diferentes secciones transversales al flujo, pero no sólo para la región de entrada hidrodinámica, sino para toda la región en la cual intercambia calor con el medio externo, que en muchos casos puede ser el medio ambiente. De este modo, debido al intercambio de calor a través de la pared de la tubería, entre el fluido y el medio circundante, no se cumple el perfil

parabólico general de distribución de velocidades, el cual se cumple para flujos isotérmicos completamente desarrollados hidrodinámicamente (Nekrasov, 1968). Las regiones que habría que estudiar para este caso, serían la región de entrada hidrodinámica, térmica, y la de completo desarrollo térmico (Incropera y DeWitt, 1999).

En la corriente fluida laminar no isotérmica, acompañada con enfriamiento con el medio ambiente, la velocidad de las partículas fluidas cercanas a la pared interior de la tubería, tenderán a disminuir ya que la tensión cortante será mucho mayor que en el centro de la tubería. Además, bajo la hipótesis de que el flujo es aproximadamente incompresible, las partículas fluidas que están en la cercanía del eje de la tubería, tendrán mayor velocidad comparada con la velocidad que poseían respecto al perfil parabólico general de distribución de velocidades (perfil estándar para corriente fluida laminar isotérmica e incompresible) (Nekrasov, 1968).

Finalmente, en este estudio se tratará de calcular un campo de velocidad para un determinado flujo laminar de agua comprimida, que pierde calor hacia el medio circundante.

## 2. Materiales y métodos

Para este estudio del campo de velocidades (objeto de estudio) se ha establecido las siguientes condiciones: El régimen de flujo del agua es estacionario y laminar, el estado del fluido de trabajo será siempre monofásico (líquido comprimido), el movimiento del fluido será unidireccional (horizontal). Además, se considerará un flujo isotérmico de agua en la región de entrada hidrodinámica, ya que en esta región se ha procedido a aislar la tubería para así validar la teoría existente de capa límite de velocidad; consecuentemente, la temperatura media a la salida de la región de entrada hidrodinámica será igual a la temperatura de entrada en la tubería. Después de esta región se considerará la temperatura de la tubería igual a la temperatura del medio ambiente, la cual es menor que la temperatura media a la salida de la región de entrada hidrodinámica.

Por tanto, después de la región de entrada hidrodinámica, el flujo se enfriará, originando que el perfil de velocidad cambie, como antes se mencionó repetidamente, el argumento de esta afirmación es el siguiente: Al existir pérdida de calor del flujo hacia el medio ambiente, sucederá que la temperatura en cada punto de una determinada sección transversal al flujo, cambie, generando una distribución de temperatura en la sección transversal, ocasionando a la vez una distribución de viscosidad; consecuentemente, se produciría una distribución de tensiones cortantes en la misma sección, pero como las distribuciones de temperaturas a lo largo de la tubería son diferentes, coherentemente el perfil de velocidades cambiará después de la región de entrada hidrodinámica, hasta que el fluido se nivele térmicamente con la temperatura de la tubería (Nekrasov, 1968).

En la figura 1 se representa la tubería en el cual se estudió la evolución del perfil de velocidad del flujo de agua. Además, se consideró lo siguiente:  $D_i = 0,1 \text{ m}$ ;  $T_{ent} = 40^\circ\text{C}$  y  $T_{amb} = 15^\circ\text{C}$ .

Para la región de entrada hidrodinámica se cumplirá:  $T_{sup} = T_{et} = 40^\circ\text{C}$ .

Para después de la región de entrada hidrodinámica se cumplirá:  $T_{sup} = 15^\circ\text{C}$ .

El caudal másico de entrada será:

$$K_{M,ent} = 0.11 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

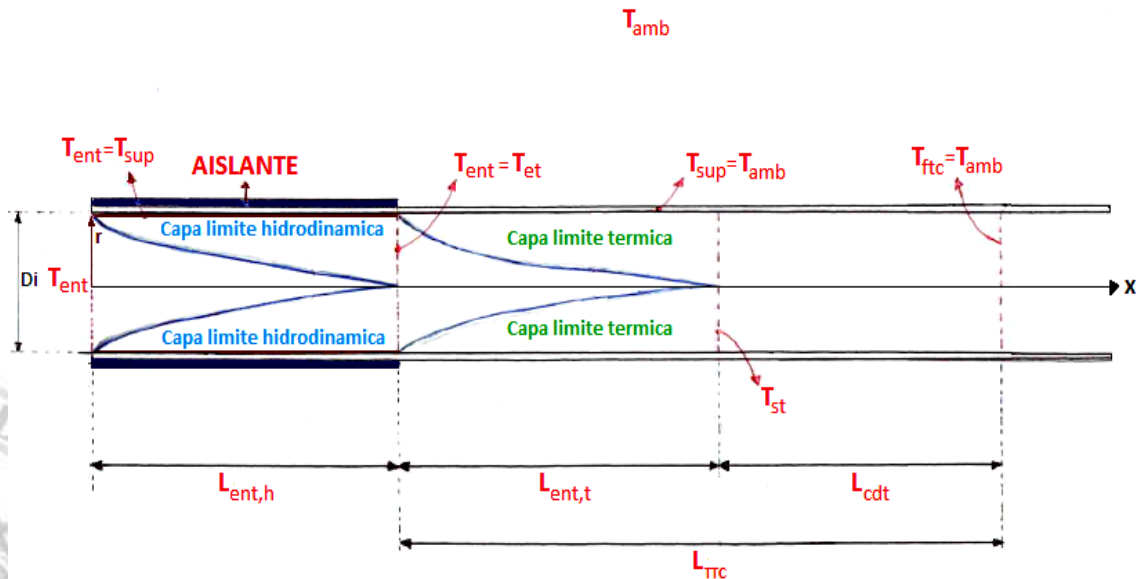
Siendo la velocidad media del flujo:

$$V_m^x = 0.01411716 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Habiendo realizado un estudio de transferencia de calor, en el cual se ha considerado que la resistencia térmica de la tubería es despreciable y en el que además se ha recurrido hasta a una tercera iteración para calcular la temperatura  $T_{st}$ . Por último, se han logrado determinar las longitudes correspondientes a cada región. Todos estos resultados se presentan en las tablas 1, 2, 3 y 4.

**Tabla 1.** Longitud correspondiente a todas las regiones en estudio

$L_{ent,h}$ [m]	$L_{ent,t}$ [m]	$L_{cdt}$ [m]	$L_{TTC}$ [m]
6,221	27,391	186,222	213,613



**Figura 1.** Algunas magnitudes del flujo y de la tubería. Donde  $D_i$ : Diámetro interno de la tubería;  $T_{ent}$ : Temperatura media a la entrada de la tubería;  $T_{sup}$ : Temperatura superficial de la tubería;  $T_{amb}$ : Temperatura del medio ambiente;  $T_{et}$ : Temperatura media a la entrada en la región de entrada térmica;  $T_{st}$ : Temperatura media a la salida en la región de entrada térmica;  $T_{ftc}$ : Temperatura media elegida, para la cual la región después de la sección considerada para la que se da esta temperatura, la transferencia de calor del flujo para con el medio ambiente, es despreciable;  $L_{ent,h}$ : Longitud de la región de entrada hidrodinámica;  $L_{ent,t}$ : Longitud de la región de entrada térmica;  $L_{cdt}$ : Longitud correspondiente para el cese de pérdida de calor después de la región de entrada térmica;  $L_{TTC}$ : Longitud total de transferencia de calor a lo largo de la tubería.

**Tabla 2.** Magnitudes características de la región en desarrollo térmico

Temperatura media en la región de entrada térmica $\bar{T}_{ma,dt}$ [C]	Coefficiente de convección promedio $\bar{h}_f @ \bar{T}_{ma,cdt} [\frac{W}{m^2 C}]$	Calor perdido [W]
33,96	35,39	-5569

**Tabla 3.** Temperaturas características del flujo de agua en la región en completo desarrollo térmico

$T_{st}$ [C]	$T_{amb}$ [C]	$T_{sup}$ [C]	$T_{ftc}$ [C]
27,91	15	15	16

**Tabla 4.** Magnitudes características de la región en completo desarrollo térmico

Temperatura media en la región de entrada térmica $\bar{T}_{ma,cdt}$ [C]	Coefficiente de convección promedio $\bar{h}_f @ \bar{T}_{ma,cdt} [\frac{W}{m^2 C}]$	Calor perdido [W]
21,96	20,21	-5505

A continuación, se presentará el campo de velocidad inicial asumido; el cual es una función real de variable vectorial tridimensional, definida por:

$$(r, \theta, x) \rightarrow V^x(r, \theta, x) = a(x)r^3 + b(x)r^2 + c(x)r + d(x)$$

Cumpléndose que:

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq \frac{D_i}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq L_{ent,h} + L_{TTC} \end{aligned}$$

Las funciones "a", "b", "c" y "d" son reales de variable real, definidas en el mismo dominio que  $V^x$ .

Ahora se someterá el campo a las siguientes condiciones de frontera:

1) Condición de velocidad máxima en el eje de la tubería:

$$\left. \frac{\partial V^x(r, \theta, x)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

2) Condición de punto de inflexión:

$$\left. \frac{\partial^2 V^x(r, \theta, x)}{\partial r^2} \right|_{r=r_i} = 0$$

Siendo  $r_i$  el radio para el cual se ubica el punto de inflexión del perfil de velocidades.

3) Condición de no deslizamiento en la pared interna a la tubería:

$$V^x\left(\frac{D_i}{2}, \theta, x\right) = 0$$

4) Condición de velocidad media a la entrada de la tubería (en el "inicio" del eje de la tubería):

$$V^x(0, \theta, 0) = V_m^x$$

5) Condición en completo desarrollo hidrodinámico para flujo isotérmico:

$$V^x(r, \theta, L_{ent,h}) = \left(2 - 8\left(\frac{r}{D_i}\right)^2\right) V_m^x$$

Ley parabólica general de distribución de velocidades para corriente fluida isotérmica.

Escribiendo:

$$a(x) = \frac{V_m^x}{D_i^3} f(x)$$

Se tiene que:

$$f(\xi) = \begin{cases} f_1(\xi), \forall \xi \in D_{dh} \\ f_2(\xi), \forall \xi \in D_{dt} \\ f_3(\xi), \forall \xi \in D_{cdt} \end{cases}$$

En donde:

$$\begin{aligned} D_{dh} &= [0, L_{ent,h}] \\ D_{dt} &= \langle L_{ent,h}, L_{ent,h} + L_{ent,t} \rangle \\ D_{cdt} &= \langle L_{ent,h} + L_{ent,t}, L_{ent,h} + L_{TTC} \rangle \end{aligned}$$

Para finalmente, mediante el estudio de transferencia de calor del flujo de agua hacia el medio ambiente, se pueda definir el campo de velocidades de la siguiente forma:

$$V^x(r, \theta, x) = \left[ \left( \left( \frac{r}{D_i} \right)^3 - \frac{3}{5} \left( \frac{r}{D_i} \right)^2 + \frac{1}{40} \right) f(x) + \left( 2 - 8 \left( \frac{r}{D_i} \right)^2 \right) \right] V_m^x$$

Siendo:

$$f(\xi) = \begin{cases} 40 \left( \frac{\xi}{6.221} - 1 \right), \forall \xi \in D_{dh} \\ 35 \left( \frac{\xi - 6.221}{27.391} \right), \forall \xi \in D_{dt} \\ \frac{15\xi + 6013.59}{186.222}, \forall \xi \in D_{cdt} \end{cases}$$

En donde:

$$\begin{aligned} D_{dh} &= [0, 6.221] \\ D_{dt} &= \langle 6.221, 33.612 \rangle \\ D_{cdt} &= \langle 33.612, 219.834 \rangle \end{aligned}$$

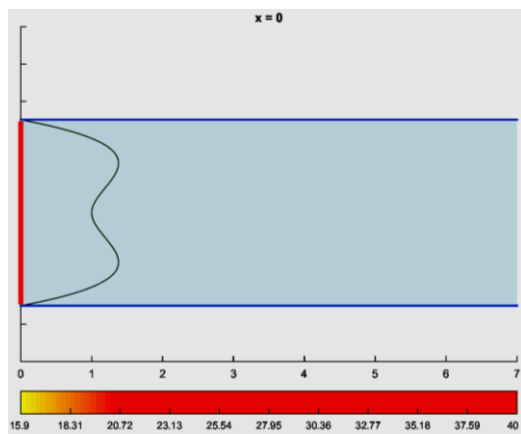
Mediante el análisis de transferencia de calor también se pudo llegar a la siguiente distribución de temperaturas medias al interior de la tubería:

$$T_m(\xi) = \begin{cases} 40, \forall \xi \in D_{dh} \\ 15 + 25 * e^{-0.024 * (\xi - 6.221)}, \forall \xi \in D_{dt} \\ 15 + 12.91 * e^{-0.014 * (\xi - 33.612)}, \forall \xi \in D_{cdt} \end{cases}$$

### 3. Resultados y discusión

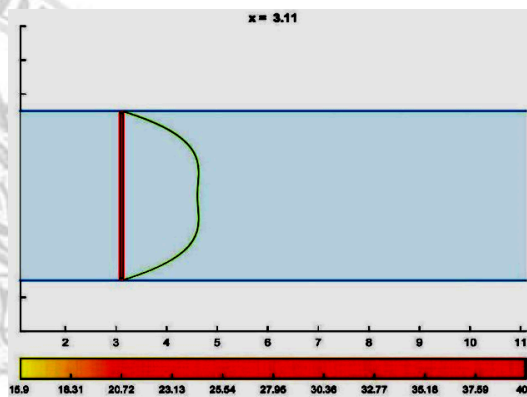
Las siguientes figuras son resultado de dividir el campo de velocidad definido entre  $V_m^x$  (para mejores efectos de visualizaciones); además en la parte inferior de las figuras se presenta una escala de temperatura centígrada. Se procederá a analizar la evolución del perfil de velocidades, en referencia a cada región en la que se encuentra:

Región de entrada hidrodinámica: El perfil de velocidades en la figura 2, intenta expresar la uniformidad de la velocidad en la entrada de la tubería, pero no puede expresar con mucha eficacia la distribución de velocidades en la “región central”, también llamada el “núcleo” del flujo.



**Figura 2.** Perfil de velocidad en la posición  $x = 0$  m.

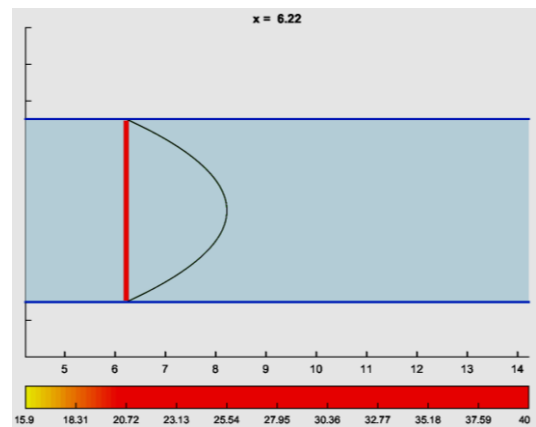
Posteriormente, el perfil de velocidades en la figura 3 muestra una mejor evolución que en la entrada a la tubería, en esta última figura se puede apreciar que la región del núcleo del flujo, se representa de mejor manera, y acorde al perfil teórico.



**Figura 3.** Perfil de velocidad en la posición  $x = 3.11$  m (aproximadamente a 50%  $L_{ent,h}$ ).

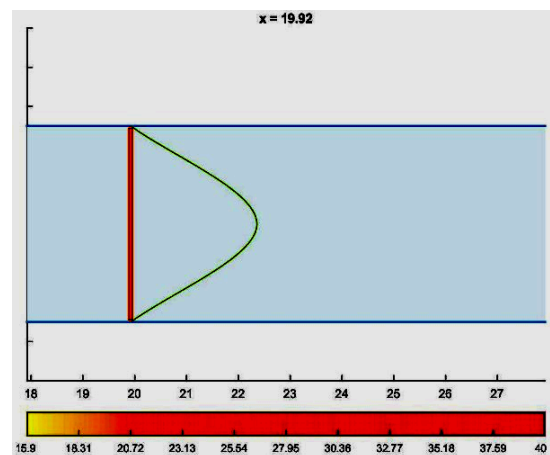
Además, el perfil de velocidades en la figura 3, posee un comportamiento con tendencia a ser mucho más constante hacia el eje de la tubería, justo después de adquirir la máxima velocidad para el radio igual a 26.7%  $D_i/2$  aproximadamente.

Finalmente, el perfil de velocidades en la figura 4 que se da para el completo desarrollo hidrodinámico, representa exactamente la ley de distribución de velocidades para un flujo isotérmico que se cumple para cualquier flujo laminar e incompresible (Nekrasov, 1968), la cual hace validar el campo calculado.



**Figura 4.** Perfil de velocidad en la posición  $x = 6.22$  m (100%  $L_{ent,h}$ ).

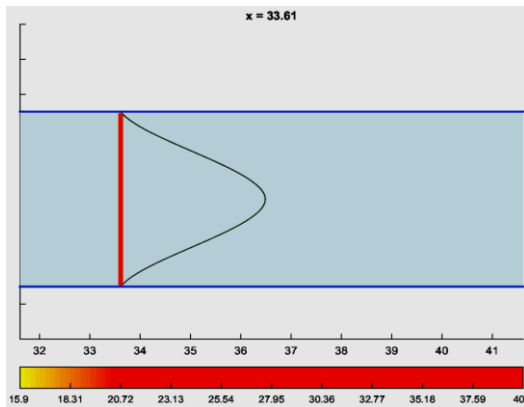
Región de entrada térmica: El perfil de velocidades en la figura 5 muestra un incremento de velocidad en el eje de la tubería de un 21,9% respecto a la velocidad en el eje de la tubería en la figura 4.



**Figura 5.** Perfil de velocidad en la posición  $x = 19.92$  m (aproximadamente a 50%  $L_{ent,t}$ ).

Esto se explica, debido a que existe una disminución de velocidad en la cercanía a la

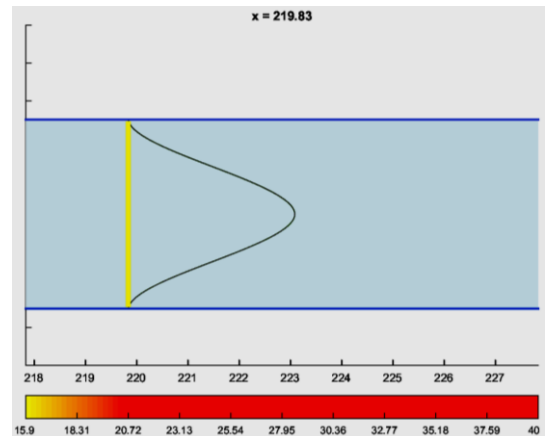
pared interna a la tubería, como un aumento de velocidad en la cercanía al eje de la tubería. Esto se debe a la conservación del caudal másico. Finalmente, en la figura 6, se encuentra el perfil de velocidades al término de la capa límite térmica. En este perfil ocurre lo mismo que sucede con el perfil de velocidades en la figura 5, la diferencia es que en este perfil se intensifican tanto las disminuciones como los aumentos de velocidad. En este perfil, la velocidad en el eje de la tubería es de 43,8% respecto a la velocidad en el eje de la tubería en la figura 4.



**Figura 6.** Perfil de velocidad en la posición  $x = 33.61$  m ( $100\% L_{ent,t}$ ).

Región en completo desarrollo térmico: En esta región el cambio de perfil de velocidades es menos notorio que en la región precedente debido a que su longitud es mucho mayor y a través de la cual se pierde aproximadamente la misma cantidad de calor que en la región anterior (aproximadamente 5,5 kW), esto hace que el cambio de perfil no sea tan pronunciado visualmente, pero cabe admitir que aún existen cambios en la región cercana al eje de la tubería, como en la región cercana a la pared interior a la tubería. Finalmente, el perfil de velocidades en la figura 7 se aprecia notoriamente diferente al perfil de velocidades de la figura 5 debido que en esta región el comportamiento es análogo al ocurrido en la región anterior. En este perfil se puede apreciar que la velocidad en el eje de la tubería alcanza un aumento del 53,1% de velocidad, en referencia a la adquirida en el perfil de la figura 5. Cabe resaltar que el perfil de velocidades de la figura 7 es aproximadamente el que se va a adoptar

para la siguiente región de flujo en la que aproximadamente cesa la transferencia de calor.



**Figura 7.** Perfil de velocidad en la posición  $x = 219.83$  m ( $100\% L_{cdt}$ ).

#### 4. Conclusiones

El campo de velocidad calculado para la región de entrada hidrodinámica, expresa muy bien el comportamiento del perfil de velocidad, excepto que no modela con mucha eficacia el perfil en el “núcleo” del flujo.

El campo de velocidad calculado para la región de entrada térmica, expresa muy bien el comportamiento del perfil de velocidad, el cual es muy cambiante debido a la relativamente pequeña longitud de la región.

El campo de velocidad calculado para la región en completo desarrollo térmico, expresa muy bien el comportamiento del perfil de velocidad el cual no es muy cambiante debido a la relativamente grande longitud de la región.

#### Referencias

- Cengel, Y.; Ghajar, A. 2011. Transferencia de Calor y Masa. Cuarta edición. Editorial McGraw Hill, México D.F, México. 920 p.
- Incropera, F.; de Witt, D. 1999. Fundamentos de Transferencia de Calor. Cuarta edición, Editorial Prentice Hall, Naucalpan de Juárez, México. 886 p.
- Nekrasov B. 1968. Hidráulica. Tercera edición, Editorial Mir, Moscú, Rusia. 432 p
- Shames I. 1995. Mecánica de los fluidos. Tercera edición, Editorial McGraw Hill, Santafé de Bogotá, Colombia. 825 p.