Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2026; Vol.13(1):77-84.

On the Galois Group of Unramified Extensions of a p-adic Field

Sobre el grupo de Galois de Extensiones no ramificadas del cuerpo p-ádico

Ronald Jesús Mas Huamán

Received, Feb. 15, 2026; *Accepted, Jun. 03, 2026;* *Published, Jul. 27, 2026*

How to cite this article:
Mas R. *On the Galois Group of Unramified Extensions of a p-adic Field.* Selecciones Matemáticas. 2026;13(1):77–84.
https://doi.org/10.17268/sel.mat.2026.01.06

Abstract

In this work, we study the structure of the Galois group of finite unramified extensions of the p-adic field. Furthermore, we establish the uniqueness, up to isomorphism, of unramified extensions of a given degree, and we describe the Galois group of the maximal unramified extension of $\mathbb{Q}_p$.

Keywords . Frobenius automorphism, Galois group, unramified extension.

Resumen

En este trabajo se estudia la estructura del grupo de Galois de extensiones finitas no ramificadas del cuerpo p-ádico. Asimismo, se establece la unicidad, salvo isomorfismo, de las extensiones no ramificadas de grado dado, y se describe el grupo de Galois de la extensión maximal no ramificada de $\mathbb{Q}_p$.

Palabras clave. Automorfismo de Frobenius, grupo de Galois, extensión no ramificada.

1. Introduction. Sea K un cuerpo p-ádico, es decir, una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Las extensiones no ramificadas de K desempeñan un papel fundamental en la aritmética de los cuerpos locales y en el estudio de sus grupos de Galois. Es bien sabido que las extensiones no ramificadas finitas de K corresponden a extensiones finitas del cuerpo residual de K. En particular, el grupo de Galois de tales extensiones posee una estructura simple y está estrechamente relacionado con el automorfismo de Frobenius del cuerpo residual. Esta correspondencia permite describir de manera explícita la estructura de los grupos de Galois de extensiones no ramificadas. El propósito de este trabajo es estudiar estos grupos de Galois y describir algunas de sus propiedades fundamentales.

2. Cuerpos Finitos. Empecemos escribiendo algunas definiciones y proposiciones relacionadas a la teoría de Galois. Para mayor información puede consultar [1], [2] y [3].

Es bien sabido que, dado F un cuerpo de característica p. Para todo $a, b \in F$ y todo $n \geq 1$ se cumple

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.1. Dado F un cuerpo de característica p. La aplicación

$$\varphi : F \to F, \qquad a \mapsto a^p$$

es un homomorfismo de anillos, llamado el *endomorfismo de Frobenius* de F. En caso F sea un cuerpo finito, se tiene que φ es un isomorfismo llamado *automorfismo de Frobenius* y denotado por Frob.

Lema 2.1. *Sea K una extensión finita de grado n sobre un cuerpo finito F. Si F tiene q elementos, entonces K tiene q^n elementos.*

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú. (rmash@uni.edu.pe).

Demostración: Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de K como espacio vectorial sobre F. Entonces todo $v \in K$ puede escribirse de manera única en la forma

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n,$$

donde $a_i \in F$.

Como cada a_i puede ser cualquiera de los q elementos de F, el número total de dichas combinaciones lineales distintas es q^n. □

Corolario 2.1. *Sea F un cuerpo finito. Entonces existe un primo p y un entero $n \in \mathbb{N}$, ambos únicos, tales que F tiene p^n elementos.*

Demostración: Como F tiene un número finito de elementos, su característica debe ser un primo p. Por el lema anterior F tiene p^n elementos para cierto n. □

Corolario 2.2. *Para todo primo p y todo entero $n \geq 1$ existe un cuerpo con p^n elementos.*

Demostración: Sea E cuerpo de descomposición del polinomio $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ dado por

$$f(x) = x^{p^n} - x.$$

Como la derivada formal

$$f'(x) = p^n x^{p^n-1} - 1 = -1$$

y f son primos entre sí, se tiene que f posee p^n raíces distintas en E. Sea el conjunto

$$K = \{x \in E : \ f(x) = 0\}.$$

Veamos que K es un cuerpo. Es claro que 0 y 1 están en K. Si $a, b \in K$, entonces

$$(a-b)^{p^n} = a^{p^n} - b^{p^n} = a - b,$$

por lo que $a - b \in K$.

Por otro lado, si $b \neq 0$, entonces

$$(ab^{-1})^{p^n} = a^{p^n}(b^{p^n})^{-1} = ab^{-1},$$

de donde obtenemos $ab^{-1} \in K$. Por lo tanto K es un cuerpo. □

3. Teoría de Galois. Para mayor información puede consultar [1] y [3].

Definición 3.1.

1. Un polinomio $f \in K[x]$ es llamado *separable* sobre K si ninguno de sus factores irreducibles sobre K tiene raíces múltiples (en un cuerpo de descomposición).
2. Decimos que L/K es una *extensión separable* si todo elemento $\alpha \in L$ es separable sobre K, es decir, si el polinomio mínimo de α sobre K es separable.

Definición 3.2. Un cuerpo K es llamado *perfecto* si todos los polinomios en $F[x]$ son separables.

Proposición 3.1.

a) Un cuerpo de característica cero es perfecto.

b) Un cuerpo F de característica $p \neq 0$ es perfecto si y sólo si todo elemento de F es una p-ésima potencia.

Demostración: Consultar [[1],Proposition 2.15]. □

Ejemplo 3.1.

i) Un cuerpo finito F es perfecto, dado que el endomorfismo de Frobenius

$$a \mapsto a^p : F \to F,$$

es inyectivo y por lo tanto sobreyectivo.

ii) Un cuerpo que puede escribirse como unión de cuerpos perfectos es perfecto. Por lo tanto, todo cuerpo algebraico sobre $\mathbb{F}_p$ es perfecto.

Definición 3.3. Sea E/F una extensión algebraica. Decimos que E/F es *normal* si el polinomio mínimo de todo elemento $\alpha \in E$ sobre F se descompone completamente en $E[x]$.

Observación 3.1. Sea $f \in F[x]$ un polinomio irreducible de grado m y sea E/F una extensión algebraica, se cumple:

i) Si E/F es separable, entonces las raíces de f son distintas.

ii) Si E/F es normal, entonces f se descompone completamente en $E[x]$.

Por lo tanto, si E/F es separable y normal, entonces f tiene m raíces distintas en E.

Ejemplo 3.2. El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es una extensión separable de $\mathbb{Q}$ pero no es normal sobre $\mathbb{Q}$, ya que el polinomio $f = x^3 - 2$ no se descompone completamente en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Definición 3.4. Sea F un cuerpo. Una extensión finita E de F se dice que es *de Galois* si F es el cuerpo fijo del grupo de F-automorfismos de E. Este grupo se denomina el *grupo de Galois* de E sobre F, y se denota por $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Teorema 3.1. *Sea E/F una extensión. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) E es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable $f \in F[X]$.
b) $E = E^G$ para algún grupo finito G de automorfismos de E.
c) E/F es normal, separable y de grado finito sobre F.
d) E/F es una extensión de Galois.

Demostración: Consultar [[1],Theorem 3.10]. □

Ejemplo 3.3. Sea $E = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ donde ζ_3 es una raíz cúbica primitiva de la unidad, es decir ζ_3 es raíz del polinomio

$$f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x].$$

Como el polinomio f es irreducible y separable sobre $\mathbb{Q}$ entonces $E/\mathbb{Q}$ es una extensión separable. Por otro lado, como las raíces ζ_3 y ζ_3^2 pertenecen a E entonces, la extensión $E/\mathbb{Q}$ es normal, es decir, es una extensión de Galois. El grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ está formado por los automorfismos

$$\sigma_k(\zeta_3) = \zeta_3^k, \qquad k \in \{1, 2\},$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

4. Extensiones p-ádicas. Para mayor información puede consultar [4], [5] y [6]. Dado un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|$ sobre un cuerpo K, definamos la función sobre K

$$v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

dada por

$$v(x) = \begin{cases} -\log|x|, & \text{si } x \in K^\times = K \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

1. $v(x) = \infty$ si y sólo si $x = 0$.
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$.
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,

Definición 4.1. Una función v que satisface las propiedades anteriores es llamada *valuación exponencial* del cuerpo K.

Definición 4.2. Para cada p número primo positivo, definamos la función

$$v_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

dada por

$$v_p(x) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{Z} : p^n \mid x\}, & \text{si } x \neq 0, \\ \infty, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función puede ser extendida a $\mathbb{Q}$, es decir, dado $x = a/b \in \mathbb{Q}$, definamos

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Esta valuación exponencial es llamada la *valuación p-ádica* de $\mathbb{Q}$.

Para cada v valuación exponencial, definamos la valuación o valor absoluto sobre un cuerpo K como

$$|x| = q^{-v(x)},$$

donde q es un número real fijo con $q > 1$.

Definición 4.3. La función $|\cdot|$ se le llama la *valuación multiplicativa asociada* o *valor absoluto asociado*.

Ejemplo 4.1. Para $K = \mathbb{Q}$ definamos la función

$$|a|_p = p^{-v_p(a)}.$$

Dicha función $|\cdot|_p$ es llamada *valor absoluto p-ádico* sobre $\mathbb{Q}$.

Proposición 4.1. *Sea K un cuerpo con valuación exponencial v y valor absoluto asociada $|\cdot|$. El conjunto*

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : v(x) \geq 0\} = \{x \in K : |x| \leq 1\},$$

es un anillo con grupo de unidades

$$\mathcal{O}_K^{\times} = \{x \in K : v(x) = 0\} = \{x \in K : |x| = 1\},$$

y único ideal maximal

$$\mathfrak{p}_K = \{x \in K : v(x) > 0\} = \{x \in K : |x| < 1\}.$$

Demostración: Consultar [[5],Proposition 3.9]. □

Observación 4.1.

1. Para todo $x \in K$ se cumple $x \in \mathcal{O}_K$ o $x^{-1} \in \mathcal{O}_K$, es decir, $\mathcal{O}_K$ es un *anillo de valuación*.
2. El cuerpo $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$ se llama el *cuerpo residual* de $\mathcal{O}_K$.

Definición 4.4. Una valuación exponencial v se llama *discreta* si admite un valor positivo mínimo s tal que $v(K^{\times}) = s\mathbb{Z}$. En caso $s = 1$, diremos que la valuación es *normalizada*.

Dividiendo por s siempre podemos pasar a una valuación normalizada sin cambiar los invariantes $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^{\times}$ y $\mathfrak{p}$.

Definición 4.5. En un cuerpo K con una valuación normalizada v, un elemento $\pi \in \mathcal{O}$ tal que

$$v(\pi) = 1$$

es llamado *normalizador*.

Observación 4.2. *(Caracterización de todo elemento no nulo en un cuerpo con valuación normalizada).*

En un cuerpo K con valuación normalizada, todo elemento $x \in K^{\times}$ admite una representación única

$$x = u\pi^m,$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ y $u \in \mathcal{O}^{\times}$.

Definición 4.6. *Un cuerpo henseliano es un campo provisto de una valuación no arquimediana v cuyo anillo de valuación $\mathcal{O}$ satisface el lema de Hensel. También se dice que la valuación v o el anillo de valuación $\mathcal{O}$ es henseliano.*

Sea K un campo que es henseliano respecto de la valuación exponencial v.

Si L/K es una extensión finita de grado n, entonces v se extiende de manera única a una valuación exponencial w sobre L, dada por

$$w(\alpha) = \frac{1}{n}\, v\big(N_{L/K}(\alpha)\big).$$

Para los grupos de valores y los cuerpos residuales de v y w, se obtienen las inclusiones

$$v(K^{\times}) \subset w(L^{\times}) \quad \text{y} \quad \kappa \subset \lambda.$$

Definición 4.7. *El índice de ramificación de la extensión L/K se define como el índice*

$$e = e(w|v) = \big(w(L^{\times}) : v(K^{\times})\big),$$

y el número

$$f = f(w|v) = [\lambda : \kappa],$$

se denomina el grado de inercia.

Definición 4.8. Una extensión L/K es *no ramificada* si la extensión l/k de cuerpos residuales es separable y $[L : K] = [l : k]$. En caso L/K sea una extensión infinita, esta es no ramificada si es unión de subextensiones finitas de K no ramificadas.

Observación 4.3. Para mayor información de los siguientes resultados, consultar [4].

i) Dados L/K y M/K con $L, M \subset \overline{K}$. Si L/K es no ramificada entonces LM/M es no ramificada.
ii) La composición de dos extensiones no ramificadas de K es no ramificada.

Ejemplo 4.2. Sea $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})/\mathbb{Q}_2$, veamos que es no ramificada.

$$|a + b\sqrt{5}|_L = |N_{L/\mathbb{Q}_2}(a + b\sqrt{5})|_2^{1/2} = \text{máx}\{|a|_2, |b|_2\}.$$

Luego

$$\mathcal{O}_L = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}_2\} \quad \text{y} \quad \rho_L = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in 2\mathbb{Z}_2\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} l &= \{a + b\sqrt{5} + \rho_L : a, b \in \mathbb{Z}_{\not 2}\} \\ &= \{[0], [1], [\sqrt{5}], [1 + \sqrt{5}]\} \\ &\cong \mathbb{F}_4. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ es una extensión no ramificada de $\mathbb{Q}_2$.

5. El grupo de Galois de una extensión no ramificada de $\mathbb{Q}_p$. En adelante, dado L es una extensión finita de $K = \mathbb{Q}_p$, denotamos por $\mathcal{O}_L$ el anillo de enteros de L, por $\mathfrak{m}_L$ su ideal maximal y por

$$l = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$$

su cuerpo residual. De igual modo k denota el cuerpo residual de $\mathbb{Z}_p$, para mayor información consultar [4] y [5].

Proposición 5.1. *Sea L/K una extensión finita no ramificada de grado f. Entonces la aplicación natural*

$$\psi : \text{Gal}(L/K) \longrightarrow \text{Gal}(l/k), \qquad \sigma \longmapsto \overline{\sigma},$$

donde $\overline{\sigma}$ es el automorfismo inducido por σ sobre el cuerpo residual l, es un isomorfismo.

Demostración: Empecemos probando la buena definición de ψ. Sea $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$. Como σ es un automorfismo de cuerpos que fija K, preserva la valuación de L que extiende la de K. En particular,

$$\sigma(\mathcal{O}_L) = \mathcal{O}_L \qquad \text{y} \qquad \sigma(\mathfrak{m}_L) = \mathfrak{m}_L.$$

Por lo tanto, σ induce un automorfismo del cociente

$$l = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L.$$

Además, como σ fija K, también fija $\mathcal{O}_K$ y por consiguiente fija el subcuerpo residual

$$k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K \subset l.$$

Así, $\overline{\sigma} \in \text{Gal}(l/k)$, y la aplicación ψ está bien definida.

Veamos ahora que ψ es un homomorfismo de grupos. Sean $\sigma, \tau \in \text{Gal}(L/K)$. Para todo $x \in \mathcal{O}_L$, se tiene

$$\psi(\sigma\tau)(x) = \overline{\sigma\tau}(x \bmod \mathfrak{m}_L) = \sigma(\tau(x)) \bmod \mathfrak{m}_L = \overline{\sigma}\big(\overline{\tau}(x \bmod \mathfrak{m}_L)\big).$$

Luego

$$\psi(\sigma\tau) = \overline{\sigma\tau} = \overline{\sigma} \circ \overline{\tau}.$$

Veamos ahora que ψ es inyectiva. Supongamos que $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ induce la identidad sobre l. Entonces σ pertenece al grupo de inercia de la extensión L/K. Pero como L/K es no ramificada, por definición su índice de ramificación es

$$e(L/K) = 1.$$

Equivalentemente, el grupo de inercia es trivial. Por tanto,

$$\sigma = \text{id}_L.$$

Así, ψ es homomorfismo inyectivo.

Finalmente, probemos que ψ es sobreyectiva. Como L/K es no ramificada y finita, se tiene

$$[L : K] = f = [l : k].$$

Por otra parte, toda extensión finita de cuerpos finitos es galoisiana, y su grupo de Galois tiene cardinal igual al grado de la extensión. Por lo tanto,

$$|\mathrm{Gal}(l/k)| = [l : k] = f.$$

Además,

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K] = f.$$

Así se tiene que

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| \leq |\mathrm{Gal}(l/k)| = f.$$

Ahora bien, una extensión no ramificada finita de un cuerpo local es siempre galoisiana, pues corresponde a una extensión finita del cuerpo residual. En consecuencia,

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| = [L : K] = f.$$

Por tanto, como ψ es una aplicación inyectiva entre dos conjuntos finitos con el mismo número de elementos; se tiene que ψ es biyectiva.

Corolario 5.1. *Sea L/K una extensión finita no ramificada de grado f. Entonces L/K es galoisiana y*

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}.$$

En particular, $\mathrm{Gal}(L/K)$ *es cíclico.*

Demostración: Por la proposición anterior,

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(l/k).$$

Como $K = \mathbb{Q}_p$, su cuerpo residual es $k = \mathbb{F}_p$. Puesto que L/K es no ramificada de grado f, se tiene

$$[l : k] = f,$$

de modo que

$$l \cong \mathbb{F}_{p^f}.$$

Ahora bien, el grupo de Galois de una extensión finita de cuerpos finitos es cíclico, generado por el automorfismo de Frobenius Frob. Por tanto,

$$\mathrm{Gal}(l/k) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^f}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}.$$

Se concluye que

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}.$$

Proposición 5.2. *Sea L/K una extensión finita no ramificada. Entonces existe un único elemento*

$$\mathrm{Frob}_{L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$$

tal que su acción sobre el cuerpo residual l está dada por

$$\overline{\mathrm{Frob}_{L/K}}(x) = x^p \qquad \textit{para todo } x \in l.$$

Además, $\mathrm{Frob}_{L/K}$ *genera el grupo* $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Demostración: Como l/k es una extensión finita de cuerpos finitos, el automorfismo de Frobenius

$$\varphi : l \longrightarrow l, \qquad x \longmapsto x^p$$

pertenece a $\mathrm{Gal}(l/k)$.

Por la Proposición 5.1, la aplicación natural

$$\mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(l/k)$$

es un isomorfismo. Por tanto, existe un único automorfismo

$$\mathrm{Frob}_{L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$$

que corresponde a φ. Por otro lado, como $\mathrm{Gal}(l/k)$ es cíclico generado por φ, y el isomorfismo anterior preserva la estructura de grupo, se sigue que $\mathrm{Gal}(L/K)$ es cíclico generado por $\mathrm{Frob}_{L/K}$.

Proposición 5.3. *Para cada entero $f \geq 1$, existe, salvo isomorfismo sobre $\mathbb{Q}_p$, una única extensión no ramificada de grado f de $\mathbb{Q}_p$.*

Demostración: Sea $L/\mathbb{Q}_p$ una extensión no ramificada de grado f. Entonces su cuerpo residual l es una extensión de $\mathbb{F}_p$ de grado f. Pero sobre un cuerpo finito existe, salvo isomorfismo, una única extensión de grado dado; es decir, existe un único cuerpo finito con p^f elementos, a saber,

$$\mathbb{F}_{p^f}.$$

Recíprocamente, la teoría de extensiones no ramificadas de cuerpos locales establece que las extensiones finitas no ramificadas de $\mathbb{Q}_p$ están en correspondencia biyectiva con las extensiones finitas de su cuerpo residual $\mathbb{F}_p$. Por lo tanto, para cada $f \geq 1$ existe una única extensión no ramificada de grado f de $\mathbb{Q}_p$, salvo isomorfismo sobre $\mathbb{Q}_p$.

Corolario 5.2. *Sea*

$$\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} = \bigcup_{f \geq 1} L_f,$$

donde $L_f/\mathbb{Q}_p$ es la única extensión no ramificada de grado f. Entonces

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_p) \cong \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Demostración: Para cada $f \geq 1$, el Corolario 5.1 muestra que

$$\mathrm{Gal}(L_f/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}.$$

Además, si $m \mid n$, entonces $L_m \subseteq L_n$, y los homomorfismos de restricción

$$\mathrm{Gal}(L_n/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_m/\mathbb{Q}_p)$$

coinciden, bajo estas identificaciones, con los morfismos naturales

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Por definición del grupo de Galois de una extensión infinita,

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_p) \cong \varprojlim_f \mathrm{Gal}(L_f/\mathbb{Q}_p) \cong \varprojlim_f \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Esto prueba el resultado.

Ejemplo 5.1. La extensión trivial $L = K = \mathbb{Q}_p$ es no ramificada de grado 1. En este caso,

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \{\mathrm{id}\}.$$

Ejemplo 5.2. Del ejemplo 4.2 se sabe que $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ es una extensión no ramificada de grado 2 de $\mathbb{Q}_2$. Entonces

$$l \cong \mathbb{F}_{2^2},$$

y por el Corolario 5.1,

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

6. Conclusiones. En este trabajo se ha analizado la estructura del grupo de Galois de extensiones finitas no ramificadas de $\mathbb{Q}_p$. Los resultados obtenidos permiten destacar los siguientes puntos fundamentales:

- La teoría de Galois de extensiones no ramificadas está completamente determinada por la teoría de extensiones de cuerpos finitos. En particular, existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(l/k),$$

  lo que reduce el problema a un contexto algebraico finito.
- El grupo de Galois está generado por el automorfismo de Frobenius, lo que proporciona una descripción explícita de sus elementos y de su acción.
- Para cada entero $f \geq 1$, existe una única extensión no ramificada de grado f de $\mathbb{Q}_p$, lo que implica una clasificación completa de dichas extensiones.
- La extensión maximal no ramificada de $\mathbb{Q}_p$ posee un grupo de Galois profinito.

Contribución de los autores. El autor hizo la planificación, metodología del trabajo y resultados.

Financiamiento. Esta investigación no recibió financiación externa

Conflictos de interés. Esta investigación son resultados obtenidos en mi avance de tesis doctoral, declaro que no hay conflicto de interés con otros autores

ORCID and License
Ronald Jesús Mas Huamán https://orcid.org/0000-0002-7298-7663

Referencias

[1] Milne JS. Fields and Galois Theory. Version 4.21. 2008. Available from: http://www.jmilne.org/math/
[2] Stewart I, Tall D. Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem. 3rd ed. Natick (MA): A K Peters; 2002.
[3] Weintraub SH. Galois Theory. New York: Springer Science+Business Media; 2009.
[4] Mas R. Raíces p-ádicas de la unidad [tesis de maestría]. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú; 2015.
[5] Neukirch J. Algebraic Number Theory. Berlin: Springer; 1999.
[6] Robert A. A Course in p-adic Analysis. New York: Springer-Verlag; 2000.