



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

2026; Vol.13(1):45-69.



Holonomy for affine holomorphic actions

Holonomía para acciones holomorfas afines

Benito Leonardo Ostos Cordero 

Received, Jul. 15, 2025;

Accepted, Mar. 03, 2026;

Published, Jul. 07, 2026



How to cite this article:

Benito O. *Holonomía para acciones holomorfas afines*. *Selecciones Matemáticas*. 2026;13(1):45–69. <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2026.01.04>

Abstract

The holonomy of a leaf of a foliation was introduced by C. Ehresmann and is the version of the Poincaré first return map of a real flow in a neighborhood of a periodic orbit. In general, holonomy allows us to see the behavior of leaves near a fixed leaf. In particular, we will focus on the following problem: Let X and Y be two holomorphic vector fields defined in the three-dimensional complex space with singularity at the origin such that X is a diagonal linear vector field and Y is a quasi-homogeneous vector field, and furthermore these vector fields are related by the Lie bracket through $[X, Y] = -Y$. We will study the holonomy of X , Y and of the integrable 1-form determined by these vector fields.

Keywords . Quasi-homogeneous vector fields, Lie bracket, holonomy of a foliation.

Resumen

La holonomía de una hoja de una foliación fue introducido por C. Ehresmann y es la versión de la aplicación del primer retorno de Poincaré de un flujo real en una vecindad de una órbita periódica. En general, la holonomía nos permite ver el comportamiento de las hojas cerca de una hoja fijada. En particular nos enfocaremos en el siguiente problema: Sean X e Y dos campos holomorfos definidos en el espacio complejo tridimensional con singularidad en el origen tales que X es un campo lineal diagonal e Y es un campo cuasi-homogéneo, y además estos campos están relacionados con el corchete de Lie mediante $[X, Y] = -Y$. Vamos a estudiar la holonomía de X , Y y de la 1-forma integrable determinada por estos campos.

Palabras clave. Campos vectoriales cuasi-homogéneos, corchete de Lie, holonomía de una foliación.

1. Introducción. La noción de holonomía de una hoja de una foliación se introdujo de manera formal por Charles Ehresmann [1] y Georges Reeb [2] en la década de 1940, dentro del desarrollo de la teoría global de las foliaciones diferenciables. Sin embargo, la idea germinal ya aparecía implícitamente en el trabajo de Élie Cartan (en geometría de G-espacios y conexiones) y en los estudios topológicos de Henri Poincaré sobre monodromía y recurrencia.

A partir de los años setenta, la teoría se adaptó al contexto holomorfo. En este entorno, las hojas de una foliación holomorfa (o, de manera equivalente, las órbitas integrales de un campo vectorial holomorfo) pueden presentar singularidades aisladas. En 1978, César Camacho y Paulo Sad [3] introdujeron una definición precisa de la holonomía local asociada a una separatriz invariante de una foliación holomorfa en el plano complejo. Allí mostraron que el germen de la holonomía, obtenido mediante la integración de la forma diferencial que define la foliación, constituye un invariante analítico esencial para la clasificación local de las singularidades. Este resultado sentó las bases de lo que hoy se conoce como la teoría local de la holonomía holomorfa.

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú. (bostosc@uni.edu.pe).

Posteriormente, Jean-François Mattei y Robert Moussu (1980)[4] ampliaron el marco conceptual en “Holonomie et intégrales premières”, donde demostraron que la holonomía local determina, bajo ciertas condiciones, la existencia de integrales primeras y la equivalencia topológica de las foliaciones. Su enfoque relaciona directamente el grupo de holonomía con la dinámica transversal y la linealización formal de los campos vectoriales holomorfos.

Desde entonces, la holonomía ha pasado a ser un invariante estructural fundamental tanto en foliaciones diferenciables como holomorfas. En el caso particular de campos vectoriales holomorfos cuasi-homogéneos, la holonomía captura la interacción entre la simetría cuasi-homogénea del campo y la dinámica transversal alrededor de las separatrices invariantes. Trabajos recientes Stolovitch 2016 [5]; Ribón y Rosas 2025 [6] continúan extendiendo esta noción hacia la descripción de la holonomía prescrita y la modulación analítica de foliaciones holomorfas, consolidando así el papel central de la holonomía en la comprensión de la dinámica local de singularidades holomorfas. En el trabajo de Hayato Chiba 2015[7] Se estudia las soluciones en serie formales y los exponentes de Kovalevskaya de un sistema polinómico cuasi-homogéneo de ecuaciones diferenciales mediante un espacio proyectivo ponderado y la teoría de sistemas dinámicos, y en el trabajo reciente de Changyu Zhou y Hayato Chiba 2025[8] estudian campos vectoriales conmutativas y cuasi-homogéneas a través de sus soluciones en series de Laurent cerca de singularidades movibles.

Consideremos campos vectoriales holomorfos X, Y definidas en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ que satisfacen $[X, Y] = -Y$. Estos campos son involutivos, es decir, generan una foliación singular de dimensión dos y expresada por una 1-forma holomorfa integrable $w = i_X \circ i_Y (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$. Sea $X(z) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ e $Y(z) = \sum_{i=1}^3 b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$, donde cada $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. De la relación $[X, Y] = -Y$ se deduce que los coeficientes que definen Y son cuasi-homogéneos. Aunque para el campo diagonal X es sencillo determinar su holonomía, para el campo Y esta tarea es considerablemente más compleja. Supondremos que eje z_1 es una separatriz de la foliación determinado por Y y $g_\gamma : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es el germen de la función de holonomía con respecto al eje z_1 . En este caso, la derivada $dg_\gamma(0)$ queda como solución de cierta ecuación diferencial. Cuando estos campos se encuentran definidas en todo $\mathbb{C}^3$ y son completos generan una acción holomorfa definido en el grupo afín complejo sobre $\mathbb{C}^3$.

En este artículo, considerando que Y tiene multiplicidad algebraica mayor que dos y coeficientes cuasi-homogéneos, los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3 describen diferentes caracterizaciones de las soluciones de dicha ecuación en cualquier tiempo t .

A partir de estos resultados, el Teorema 3.1 determina la derivada de la función holonomía $dg_\gamma(0)$. Una vez establecidos los distintos casos de la parte lineal de la holonomía, el Teorema 3.2 determina los valores propios de la función de holonomía obtenida por el Teorema 3.1. Conocidos estos autovalores con alguna relación (en algunos casos completamente determinados), los Teoremas 3.3, 3.4 y 3.5 establecen las condiciones necesarias y suficientes para que dichos autovalores se encuentren el dominio de Poincaré y/o sean no resonantes.

Además, se determina la holonomía de la foliación singular de dimensión dos generada por los campos X, Y . El teorema 4.1, bajo algunas condiciones sobre la singularidad de w , asegura que la función de holonomía es lineal y periódica.

2. Preliminares. Las referencias bibliográficas para campos vectoriales y corchete de Lie pueden ser encontradas en [9] y [10].

Definición 2.1. Sea M una variedad compleja. Un campo vectorial holomorfo X en M es una aplicación holomorfa, $X : M \rightarrow TM$ tal que para cada $p \in M$, $X(p) \in T_p M$. Es decir, $\pi \circ X = id_M$. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ el espacio vectorial de campos vectoriales holomorfos en M .

Definición 2.2. Dado un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$. Un mapa $\varphi : D \times M \rightarrow M$ definido en un abierto $D \subset \mathbb{C} \times M$ es un flujo de X si φ es holomorfo y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = X(\varphi(t, p)), \quad \forall (t, p) \in D.$$

El mapa φ satisface:

1. $\varphi(0, p) = p$, para todo $p \in M$,
2. $\varphi(t_1 + t_2, p) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, p))$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ en donde este definido φ .

Denotaremos por $X_t(p) = \varphi(t, p)$ el flujo del campo X . Así $X_t : M \rightarrow M$ es un biholomorfismo tal que:

1. $X_0 = I$,
2. $X_{t_1+t_2} = X_{t_1} \circ X_{t_2}$,
3. $(X_t)^{-1} = X_{-t}$.

Definición 2.3. Una curva holomorfa $\gamma : I \rightarrow M$ definido en un disco abierto $I \subset \mathbb{C}$ con $0 \in I$, es llamada curva integral de X en p , si $\gamma(0) = p$ y

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in I.$$

Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ una carta local en M . La expresión de X con respecto a φ es la aplicación $\varphi_*(X) : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}^m$ dado por:

$$\varphi_*(X)(q) = d\varphi(\varphi^{-1}(q)) \cdot X(\varphi^{-1}(q)), \quad \forall q \in \varphi(U). \quad (2.1)$$

La aplicación $\varphi_*(X)$ es llamada expresión local de X con respecto a (U, φ) y denotamos por X_* . Sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ dos campos en M . Fijando un punto $p \in M$ y otro punto $t \in \mathbb{C}$, el vector

$$v(t) = X_t^*(Y)(p) = DX_{-t}(X_t(p)) \cdot Y(X_t(p)),$$

es tangente a M en p .

Definición 2.4. El corchete de Lie de X e Y es un campo vectorial $[X, Y]$ definido por

$$[X, Y](p) = \frac{d}{dt}(X_t^*(Y)(p))|_{t=0}, \text{ para todo } p \in M.$$

Lema 2.1. Sea M una variedad compleja de dimensión m y $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^m$ una carta local de M . Si $X_* = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y_* = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces $[X, Y]_* = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, donde

$$c_i = \sum_{j=1}^m \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right).$$

Proposición 2.1. El corchete de Lie tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{C}$ -lineal: $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$ y $[X, aY_1 + bY_2] = a[X, Y_1] + b[X, Y_2]$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.
2. Antisimétrica: $[X, Y] = -[Y, X]$, donde $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
3. Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
4. Si f, g son funciones holomorfas, entonces $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Lo que sigue puede ser encontradas en [11], [12], [13] y [14].

Definición 2.5. Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_+^n$ y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que f es una función cuasi-homogénea de tipo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y de peso k si satisface:

$$f(t^{\alpha_1} z_1, \dots, t^{\alpha_n} z_n) = t^k f(z_1, \dots, z_n), \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Definición 2.6. Dado un campo vectorial $X = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in \mathcal{X}(\mathbb{C}^n)$, decimos que X es cuasi-homogéneo de tipo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y de peso k si cada componente f_j es una función cuasi-homogénea de tipo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y de peso $k + \alpha_j$.

Definición 2.7. Sea $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$. Decimos que F es resonante si los valores propios de $dF(0)$, denotados como $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, satisface la siguiente relación:

$$\lambda^m - \lambda_j = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n} - \lambda_j = 0,$$

para algún $j = 1, \dots, n$ y algún multi-índice $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ con $|m| = m_1 + \dots + m_n \geq 2$. El valor propio λ_j es denominado valor propio resonante con orden de resonancia $(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Observación 2.1. Adoptamos la notación multi-índice estándar:

$$z^m := z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \quad |m| := m_1 + \dots + m_n, \quad \lambda^m := \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n},$$

de modo que la condición de resonancia se escribe de forma compacta como $\lambda^m = \lambda_j$.

Sea $F : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ el germen de una aplicación holomorfa. Consideremos $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, donde cada componente admite la expansión en series de Taylor

$$F_s = P_1^s + P_2^s + \dots$$

y cada P_k^s es un polinomio homogéneo de grado k en las variables $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Definición 2.8. Si λ_s es un valor propio resonante con orden de resonancia $m = (m_1, \dots, m_n)$, llamamos monomio de resonancia asociado a λ_s al monomio

$$z^m = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n},$$

el cual aparece en la componente homogénea $P_{|m|}^s$ de grado $|m| = m_1 + \dots + m_n$ de F_s .

Ejemplo 2.1. Consideremos $n = 2$ y el difeomorfismo $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ cuya diferencial en el origen tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda$ y $\lambda_2 = \lambda^2$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$, además λ no es raíz de la unidad.

Caso1: λ_1 no es resonante. Ya que si $m = (m_1, m_2)$ con $|m| \geq 2$ tal que $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = \lambda_1$, entonces

$$\lambda^{m_1} \lambda^{2m_2} = \lambda \Rightarrow \lambda^{m_1+2m_2} = \lambda.$$

De esta condición obtenemos que $m_1 + 2m_2 = 1$. Pero tenemos que $m_1 + m_2 \geq 2$, lo cual nos lleva a que $m_2 \leq -1$ que es una contradicción.

Caso2: λ_2 es resonante. En efecto, dado $m = (m_1, m_2)$ con $|m| \geq 2$ tal que $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = \lambda_2$, entonces

$$\lambda^{m_1} \lambda^{2m_2} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^{m_1+2m_2} = \lambda^2.$$

De esta condición obtenemos que $m_1 + 2m_2 = 2$. Pero tenemos que $m_1 + m_2 \geq 2$, lo cual nos lleva a que

$$2 \geq 2 + m_2 \Rightarrow m_2 \leq 0 \Rightarrow m_2 = 0 \text{ y } m_1 = 2.$$

Por lo tanto, λ_2 es resonante con orden de resonancia $(2, 0)$.

El monomio de resonancia asociado a λ_2 con orden $m = (2, 0)$ es:

$$z^m = z_1^2 z_2^0 = z_1^2.$$

Este monomio aparece en la segunda componente F_2 de F , en el término homogéneo de grado 2:

$$F_2(z_1, z_2) = \lambda_2 z_2 + c \cdot z_1^2 + \dots, \quad c \in \mathbb{C}.$$

□

Si $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ para todo j , entonces la resonancia de F_j es equivalente a decir que F_j es una función casi-homogénea de grado $\ln \lambda_j$ con peso $(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n)$, es decir:

$$F_j(t^{\ln \lambda_1} z_1, \dots, t^{\ln \lambda_n} z_n) = t^{\ln \lambda_j} F_j(z_1, \dots, z_n), \quad \forall t \neq 0.$$

Teorema 2.1. (Poincaré-Dulac) Sea $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ con $F(0) = 0$ y $dF(0)$ diagonal, entonces F es formalmente conjugado a una serie formal $\hat{F} = dF(0) + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \dots$, donde $\hat{P}_j$ son polinomios con únicamente monomios resonantes de F . En particular, si $dF(0)$ no tiene resonancia entonces F es formalmente linealizable.

Para la convergencia recurrimos a la siguiente definición

Definición 2.9. Diremos que F pertenece al dominio de Poincaré en 0 si todos los valores propios de $dF(0)$ tienen módulo estrictamente menor a uno o todos tienen módulo estrictamente mayor a uno. En otro caso, diremos que F pertenece al dominio de Siegel en 0.

Teorema 2.2. (Poincaré-Dulac) Si F pertenece al dominio de Poincaré en 0 entonces F es holomórficamente conjugada a una forma normal polinomial. En particular, si F no tiene resonancia en 0 entonces es holomórficamente linealizable.

Otras condiciones para encontrar un cambio de coordenadas cuando es no resonante:

La condición de Siegel: existe $C > 0$ y $v \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j = 1, 2, \dots, n$ y $m_1, \dots, m_n$ con $|m| \geq 2$ se tiene:

$$|\lambda_j - \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_n^{m_n}| \geq \frac{C}{|m|^v}.$$

La condición de Brjuno:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \log(\Omega^{-1}(2^{k+1})) < +\infty,$$

donde $\Omega(k) = \inf\{|\lambda^m - \lambda_i|; 2 \leq |m| \leq k, 1 \leq i \leq n\}$.

Por el teorema C.L. Siegel [12] y A.D. Brjuno [13], F es holomórficamente linealizable cuando $dF(0)$ es no resonante, diagonal y los valores propios satisfacen la condición de Brjuno.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de codimensión $k = 1$ o $k = 2$ en $\mathbb{C}^3$, L una hoja de $\mathcal{F}$ y $\gamma: [0, 1] \rightarrow L$ una curva continua. Sean Σ_0 y Σ_1 secciones transversales a $\mathcal{F}$ de dimensión k , tales que $p_0 = \gamma(0)$ y $p_1 = \gamma(1)$. Consideremos una cobertura finita de $\gamma(I)$ por cartas distinguidas de $\mathcal{F}$, digamos $V_0, V_1, \dots, V_m$, tales que para cada $j = 1, 2, \dots, m$:

1. $V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$.
2. Existe una carta trivializadora U_j de $\mathcal{F}$ tal que $V_{j-1} \cup V_j \subset U_j$.
3. Existe una partición $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = 1\}$ de I tales que $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$.
4. Sea Σ'_j una sección transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(t_j) \in \Sigma'_j \subset U_{j-1} \cap U_j$ y Σ'_j corta cada placa de U_{j-1} en cada placa de U_j como máximo en un punto.
5. Consideremos que $\Sigma'_0 = \Sigma_0$ y $\Sigma'_{m+1} = \Sigma_1$.

A partir de ello para cada j , existe $A_j \subset \Sigma'_j$ con $\gamma(t_j) \in A_j$ y un difeomorfismo $f_j : A_j \rightarrow \Sigma'_{j+1}$ tal que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$ y para cada $q \in A_j$, $f(q)$ es el punto de corte de la placa que pasa por q con Σ'_{j+1} . Así podemos componer $f_m, f_{m-1}, \dots, f_0$ en secciones transversales convenientes. Sea $f_\gamma = f_m \circ f_{m-1} \circ \dots \circ f_0$, el cual llamaremos aplicación de holonomía con respecto a γ .

Fijemos una hoja L y un punto $p \in L$. Consideremos el primer grupo fundamental de L con base en p , $\pi(L, p)$, el cual está dada por

$$\pi(L, p) = \{[\gamma]/\gamma : [0, 1] \rightarrow L, \gamma(0) = \gamma(1) = p\}.$$

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ un lazo tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Es un grupo con la operación

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta],$$

donde

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \beta(2t), & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \alpha(2t - 1), & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Sea $\text{Diff}(\Sigma, p)$ el germen de difeomorfismo en Σ que deja fijo p . Se tiene $[f_{\gamma_1 * \gamma_2}] = [f_{\gamma_1}] \circ [f_{\gamma_2}]$.

Definición 2.10.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de codimensión $k = 1, 2$ en $\mathbb{C}^3$, L una hoja de $\mathcal{F}$, $p \in L$ y Σ una sección transversal holomorfa a $\mathcal{F}$ tal que $p \in \Sigma$. La representación de holonomía de L con respecto a p y a Σ es una aplicación $H = H_{L,p,\Sigma} : \pi_1(L, p) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, p)$, definida por:

$$H([\gamma]) = [f_\gamma],$$

donde γ es un representante de $[\gamma]$ y $[f_\gamma]$ es el germen de holonomía de γ con respecto a Σ .

Definición 2.11. El grupo de holonomía de L con respecto a p y a Σ está definido por la imagen $H(\pi_1(L, p))$.

Denotaremos por $\text{Hol}(L, p, \Sigma)$ a $H(\pi_1(L, p))$. Sean $p_1, p_2 \in L$ y Σ_1 y Σ_2 secciones transversales a $\mathcal{F}$ que contienen a p_1 y a p_2 , respectivamente. Entonces los grupos de holonomías $\text{Hol}(L, p_1, \Sigma)$ y $\text{Hol}(L, p_2, \Sigma)$ son conjugadas y en particular isomorfas.

3. Holonomía para los campos inducidos para una acción afín holomorfa. Sean X e Y dos campos holomorfos definidos en $(\mathbb{C}^3, 0)$ tales que $X(z) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ e $Y(z) = \sum_{i=1}^3 b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ donde cada $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ y cada b_i son funciones holomorfas, y además estos campos están relacionados con el corchete de Lie mediante $[X, Y] = -Y$. Vamos a estudiar la holonomía de X, Y , de la 1-forma integrable $w = i_X \circ i_Y(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$ y de la relación entre ellas. Además, denotaremos las foliaciones asociadas a X, Y y a la uno forma w por $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$ y $\mathcal{F}_{X,Y}$, respectivamente.

Como el campo X es lineal es fácil determinar su holonomía. El eje z_1 es una separatriz de X y $\Sigma = (z_1 = 1)$ es una sección transversal a este eje en el punto $(1, 0, 0)$. Sea $\gamma(t) = (e^{2\pi i \lambda_1 t}, 0, 0)$ un lazo que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y sea $f_\gamma : (\Sigma, (1, 0, 0)) \rightarrow (\Sigma, (1, 0, 0))$ la función holonomía. Se puede probar fácilmente que

$$f_\gamma(z_2, z_3) = (e^{2\pi i \lambda_2 / \lambda_1} z_2, e^{2\pi i \lambda_3 / \lambda_1} z_3).$$

Como $[X, Y] = -Y$, entonces b_1, b_2, b_3 satisfacen:

$$\begin{aligned} b_1(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1+\lambda_1} b_1(z_1, z_2, z_3), \\ b_2(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1+\lambda_2} b_2(z_1, z_2, z_3), \\ b_3(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1+\lambda_3} b_3(z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

Es decir, Y es un campo vectorial holomorfo cuasi-homogéneo de tipo $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ y de peso 1.

Supongamos que el eje z_1 sea una variedad invariante de Y tal que $S = \{(z_1, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}^*\}$ sea una hoja regular de $\mathcal{F}_Y$, entonces

$$b_1(z_1, 0, 0) \neq 0, \quad b_2(z_1, 0, 0) \equiv 0 \quad \text{y} \quad b_3(z_1, 0, 0) \equiv 0.$$

Así b_1, b_2, b_3 toman la forma:

$$b_2(z) = b_{2,2}(z)z_2 + b_{2,3}(z)z_3 \text{ y } b_3(z) = b_{3,2}(z)z_2 + b_{3,3}(z)z_3.$$

Como b_2 y b_3 son cuasi-homogéneos se tiene

$$\begin{cases} b_{2,2}(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1} b_{2,2}(z_1, z_2, z_3), \\ b_{2,3}(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1+\lambda_2-\lambda_3} b_{2,3}(z_1, z_2, z_3), \\ b_{3,2}(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1+\lambda_3-\lambda_2} b_{3,2}(z_1, z_2, z_3), \\ b_{3,3}(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, t^{\lambda_3} z_3) &= t^{-1} b_{3,3}(z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Sea $\gamma(t) = (\alpha(t), 0, 0)$ un lazo que pasa por el punto $(1, 0, 0)$, donde $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\alpha(t) = e^{2\pi i \lambda_1 t}$ y sea $g_\gamma : (\Sigma, (1, 0, 0)) \rightarrow (\Sigma, (1, 0, 0))$ la función holonomía.

Tomemos la ecuación diferencial

$$y'(t) = \frac{\alpha'(t)B(\alpha(t), y(t))}{b_1(\alpha(t), 0, 0)} y(t),$$

donde $B = (b_{ij})_{2 \leq i, j \leq 3}$ y $y(t) = (y_2(t), y_3(t)) \in \mathbb{C}^2$. Denotemos por $Y(t, y_0)$ solución de la ecuación anterior tal que $Y(0, y_0) \equiv y_0$. Entonces tendremos

$$g_\gamma(1, y_0) = (1, Y(1, y_0)).$$

Obtener la solución y de la ecuación diferencial anterior es complicada ya que B y b_1 dependen de $\alpha(t)$ y de $y(t)$, sin embargo, se sabe que la diferencial de g_γ (véase [15, pp. 22-30]), $dg_\gamma(1, 0, 0) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ en 0 es obtenida por la integración de la ecuación diferencial en $[0, 1] \times GL(2, \mathbb{C})$

$$\frac{dW}{dt} = C(t)W \text{ con } W(0) = I, \quad (3.1)$$

donde $C(t) = \frac{\alpha'(t)B(\gamma(t))}{b_1(\gamma(t))}$ y $W = (w_{ij})_{2 \leq i, j \leq 3}$ es una matriz cuadrada de orden 2×2 . Ahora usando las ecuaciones anteriores que determinan la forma de $b_{22}, b_{2,3}, b_{3,2}, b_{3,3}$, se obtiene

$$\begin{aligned} b_{2,2}(\gamma(t)) &= e^{-2\pi i t} b_{2,2}(1, 0, 0), \quad b_{2,3}(\gamma(t)) = e^{2\pi i(-1+\lambda_2-\lambda_3)t} b_{2,3}(1, 0, 0), \\ b_{3,2}(\gamma(t)) &= e^{2\pi i(-1+\lambda_3-\lambda_2)t} b_{3,2}(1, 0, 0) \text{ y } b_{3,3}(\gamma(t)) = e^{-2\pi i t} b_{3,3}(1, 0, 0). \end{aligned}$$

Luego sustituyendo en la ecuación (3.1)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w'_{22}(t) & w'_{23}(t) \\ w'_{32}(t) & w'_{33}(t) \end{pmatrix} &= \frac{\alpha'(t)}{b_1(\gamma(t))} \begin{pmatrix} b_{22}(t) & b_{23}(t) \\ b_{32}(t) & b_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{22}(t) & w_{23}(t) \\ w_{32}(t) & w_{33}(t) \end{pmatrix}, \\ &= \frac{2\pi i \lambda_1}{b_1(1, 0, 0)} \begin{pmatrix} b_{2,2}(1, 0, 0) & e^{2\pi i(\lambda_2-\lambda_3)t} b_{2,3}(1, 0, 0) \\ e^{2\pi i(\lambda_3-\lambda_2)t} b_{3,2}(1, 0, 0) & b_{3,3}(1, 0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{22}(t) & w_{23}(t) \\ w_{32}(t) & w_{33}(t) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a & e^{2\pi i(\lambda_2-\lambda_3)t} b \\ e^{2\pi i(\lambda_3-\lambda_2)t} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{22}(t) & w_{23}(t) \\ w_{32}(t) & w_{33}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con condición inicial

$$\begin{pmatrix} w_{22}(0) & w_{23}(0) \\ w_{32}(0) & w_{33}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$k = \frac{2\pi i \lambda_1}{b_1(1, 0, 0)}, \quad a = k b_{22}(1, 0, 0), \quad b = k b_{23}(1, 0, 0), \quad c = k b_{32}(1, 0, 0), \quad d = k b_{33}(1, 0, 0). \quad (3.2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} w'_{22}(t) = a w_{22}(t) + e^{2\pi i(\lambda_2-\lambda_3)t} b w_{32}(t) \\ w'_{23}(t) = a w_{23}(t) + e^{2\pi i(\lambda_2-\lambda_3)t} b w_{33}(t) \\ w'_{32}(t) = e^{-2\pi i(\lambda_2-\lambda_3)t} c w_{22}(t) + d w_{32}(t) \\ w'_{33}(t) = e^{-2\pi i(\lambda_2-\lambda_3)t} c w_{23}(t) + d w_{33}(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

con condición inicial

$$w_{22}(0) = 1, w_{23}(0) = 0, w_{32}(0) = 0, w_{33}(0) = 1,$$

donde las constantes a, b, c, d satisfacen (3.2).

Lema 3.1. Sea $\nu_0(Y)$ la multiplicidad algebraica de Y en cero.

1. Si $\nu_0(Y) = 1$ o $\nu_0(Y) = 2$, entonces $a = kc_{1,1,0}^2$ y $d = kc_{1,0,1}^3$.
2. Si $\nu_0(Y) > 2$, entonces $a = d = 0$.

Demostración:

1. Usar la condición de cuasi-homogenidad de Y .
2. Como Y es de la forma:

$$Y(z) = b_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + (b_{2,2}(z)z_2 + b_{2,3}(z)z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + (b_{3,2}(z)z_2 + b_{3,3}(z)z_3) \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Entonces $\nu_0(b_{22}) > 1$, $\nu_0(b_{23}) > 1$, $\nu_0(b_{32}) > 1$ y $\nu_0(b_{33}) > 1$. Como b_{22} y b_{33} son cuasi-homogéneos de tipo $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ y de peso -1 , se tienen que

$$b_{22}(1, 0, 0) = b_{33}(1, 0, 0) = 0.$$

Por tanto $a = d = 0$.

□

El sistema (3.3) nos sugiere resolver la ecuación diferencial matricial

$$x' = A(t)x, \quad (3.4)$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & e^{2\pi i \alpha t} b \\ e^{-2\pi i \alpha t} c & d \end{pmatrix},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $\alpha = \lambda_2 - \lambda_3 \in \mathbb{Z}_+$.

Sean $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ dos soluciones de (3.4) que pasan por los puntos $x(0) = (1, 0)$ e $y(0) = (0, 1)$, respectivamente. Así, la derivada de la aplicación de holonomía $dg_\gamma(1, 0, 0)$ está dada por

$$dg_\gamma(1, 0, 0) = W(1) = [x(1), y(1)].$$

Los siguientes lemas describen cómo son estas soluciones.

Lema 3.2. Sea $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ una solución de (3.4) que pasa por $x(0) = (1, 0)$. Cuando $a = d = 0$:

1. Si $bc = 0$ y $\alpha = 0$, entonces $x_1(t) = 1$ y $x_2(t) = ct$.
2. Si $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces $x_1(t) = 1$ y $x_2(t) = \frac{c}{2\pi i \alpha} (1 - e^{-2\pi i \alpha t})$.
3. Si $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$x_1(t) = \frac{e^{-\sqrt{bct}} + e^{\sqrt{bct}}}{2}, \quad x_2(t) = \frac{c}{2\sqrt{bc}} \left(-e^{-\sqrt{bct}} + e^{\sqrt{bct}} \right).$$

4. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc = \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$x_1(t) = bc \left(\frac{te^{\pi i \alpha t}}{\pi i \alpha} - \frac{e^{\pi i \alpha t}}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{bc} \right), \quad x_2(t) = tce^{\beta t},$$

con $\beta = -\pi i \alpha$.

5. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$\begin{aligned} x_1(t) &= bc_1 \left(\frac{e^{(2\pi i \alpha + \beta_1)t}}{2\pi i \alpha + \beta_1} - \frac{e^{(2\pi i \alpha + \beta_2)t}}{2\pi i \alpha + \beta_2} - \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_2} + \frac{1}{bc_1} \right), \\ x_2(t) &= c_1(e^{\beta_1 t} - e^{\beta_2 t}), \end{aligned}$$

con $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, $\beta_2 = -\pi i \alpha - \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$ y $c_1 = \frac{c}{\beta_1 - \beta_2}$.

Demostración: Como $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es solución de ((3.4) tenemos

$$x_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b x_2(t) \text{ y } x_2'(t) = e^{-2\pi i \alpha t} c x_1(t).$$

Ahora derivando $x_2'(t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} x_2''(t) &= -2\pi i \alpha e^{-2\pi i \alpha t} c x_1(t) + e^{-2\pi i \alpha t} c x_1'(t), \\ &= -2\pi i \alpha x_2'(t) + e^{-2\pi i \alpha t} e^{2\pi i \alpha t} b c x_2(t), \end{aligned}$$

luego

$$x_2''(t) + 2\pi i \alpha x_2'(t) - b c x_2(t) = 0, \text{ con } x_2(0) = 0 \text{ y } x_2'(0) = c, \quad (3.5)$$

es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes. Consideremos el polinomio característico $p(\beta) = \beta^2 + 2\pi i \alpha \beta - bc$ de la ecuación anterior. De la ecuación $p(\beta) = 0$ tenemos $(\beta + \pi i \alpha)^2 = -\pi^2 \alpha^2 + bc$ cuyas raíces son:

$$\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}, \quad \beta_2 = -\pi i \alpha - \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} \beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{|bc - \pi^2 \alpha^2|} [\cos(\frac{\theta_0}{2}) + i \sin(\frac{\theta_0}{2})], \\ \beta_2 = -\pi i \alpha - \sqrt{|bc - \pi^2 \alpha^2|} [\cos(\frac{\theta_0}{2}) + i \sin(\frac{\theta_0}{2})], \end{cases}$$

donde $bc - \pi^2 \alpha^2 = |bc - \pi^2 \alpha^2| (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$.

A partir de aquí y en adelante consideraremos casos según que $p(\beta)$ tenga uno o dos raíces

1. Si $bc = 0$ y $\alpha = 0$, $P(\beta) = 0$ tiene una única raíz $\beta_1 = 0$ de multiplicidad 2.

En (3.5) tenemos que $x_2''(t) = 0$ con $x_2(0) = 0$ y $x_2'(0) = c$. Además $x_1'(t) = b x_2(t)$. Entonces

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (1, ct).$$

2. Si $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, $P(\beta) = 0$ tiene dos raíces, $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = -2\pi i \alpha$.

Así (3.5) tiene como solución general $x_2(t) = c_0 + c_1 e^{-2\pi i \alpha t}$. Usando las condiciones iniciales $x_2(0) = 0$ y $x_2'(0) = c$, tenemos $x_2(t) = \frac{c}{2\pi i \alpha} - \frac{c}{2\pi i \alpha} e^{-2\pi i \alpha t}$. Como $x_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b x_2(t)$, entonces $x_1'(t) = 0$. Además $x_1(0) = 1$ tenemos $x_1(t) = 1$. Por lo tanto,

$$x(t) = \left(1, \frac{c}{2\pi i \alpha} - \frac{c}{2\pi i \alpha} e^{-2\pi i \alpha t}\right).$$

3. Si $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, $P(\beta) = 0$ tiene dos raíces, $\beta_1 = \sqrt{bc}$ y $\beta_2 = -\sqrt{bc}$.

Así (3.5) tiene como solución general $x_2(t) = c_0 e^{-\sqrt{bc}t} + c_1 e^{\sqrt{bc}t}$. Usando las condiciones iniciales $x_2(0) = 0$ y $x_2'(0) = c$, tenemos

$$x_2(t) = -\frac{c}{2\sqrt{bc}} e^{-\sqrt{bc}t} + \frac{c}{2\sqrt{bc}} e^{\sqrt{bc}t}.$$

Como $x_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b x_2(t) = b x_2(t)$, entonces

$$x_1'(t) = \frac{bc}{2\sqrt{bc}} \left(-e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t}\right).$$

Procedemos a integrar:

$$\begin{aligned} \int_0^t x_1'(s) ds &= \frac{bc}{2\sqrt{bc}} \int_0^t \left(-e^{-\sqrt{bc}s} + e^{\sqrt{bc}s}\right) ds = \frac{bc}{2\sqrt{bc}} \left(\frac{e^{-\sqrt{bc}s}}{\sqrt{bc}} + \frac{e^{\sqrt{bc}s}}{\sqrt{bc}}\right) \Bigg|_0^t \\ &= \frac{bc}{2\sqrt{bc}} \left(\frac{e^{-\sqrt{bc}t}}{\sqrt{bc}} + \frac{e^{\sqrt{bc}t}}{\sqrt{bc}} - \frac{2}{\sqrt{bc}}\right) = \frac{e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t}}{2} - 1, \end{aligned}$$

y usando la condición $x_1(0) = 1$, tenemos

$$x_1(t) = \frac{e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t}}{2}.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = \left(\frac{e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t}}{2}, \frac{c}{2\sqrt{bc}} \left(-e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t}\right)\right).$$

4. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc = \pi^2 \alpha^2$. Así $p(\beta)$ tiene una única raíz $\beta = -\pi i \alpha$ de multiplicidad 2. La solución general de (3.5) está dado por

$$x_2(t) = c_0 e^{\beta t} + c_1 t e^{\beta t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y constantes $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$. Como $x_2(0) = 0$ y $x_2'(0) = c$, entonces $c_0 = 0$ y $c_1 = c$; y la ecuación x_2 se reduce a $x_2(t) = c t e^{\beta t}$. Sustituyendo en $x_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b x_2(t)$, tenemos

$$x_1'(t) = b c t e^{\pi i \alpha t}, \text{ con } x_1(0) = 1.$$

Integrando y sustituyendo su condición inicial obtenemos:

$$x_1(t) = b c \left(\frac{t e^{\pi i \alpha t}}{\pi i \alpha} - \frac{e^{\pi i \alpha t}}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{b c} \right).$$

5. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2 \alpha^2$. Así $p(\beta)$ tiene dos raíces diferentes β_1 y β_2 . La ecuación (3.5) está dado por

$$x_2(t) = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 e^{\beta_2 t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Como $x_2(0) = 0$ y $x_2'(0) = c$ entonces

$$x_2(t) = c_1 (e^{\beta_1 t} - e^{\beta_2 t}), \text{ con } \beta_1 + \beta_2 = -2\pi i \alpha \text{ y } c_1 = \frac{c}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Sustituyendo en $x_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b x_2(t)$, tenemos

$$x_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b c_1 (e^{\beta_1 t} - e^{\beta_2 t}) \text{ con } x_1(0) = 1.$$

Integrando y sustituyendo su condición inicial, obtenemos:

$$x_1(t) = b c_1 \left(\frac{e^{(2\pi i \alpha + \beta_1)t}}{2\pi i \alpha + \beta_1} - \frac{e^{(2\pi i \alpha + \beta_2)t}}{2\pi i \alpha + \beta_2} - \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_2} + \frac{1}{b c_1} \right)$$

□

Lema 3.3. Sea $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ una solución de (3.4) que pasa por $y(0) = (0, 1)$. Cuando $a = d = 0$:

1. Si $bc = 0$ y $\alpha = 0$, entonces $y_1(t) = b t$ y $y_2(t) = 1$.
2. Si $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces $y_1(t) = \frac{b}{2\pi i \alpha} (e^{2\pi i \alpha t} - 1)$ y $y_2(t) = 1$.
3. Si $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{b}{2\sqrt{bc}} \left(-e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t} \right), \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \left(e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t} \right). \end{aligned}$$

4. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc = \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$\begin{aligned} y_1(t) &= b t e^{\pi i \alpha t}, \\ y_2(t) &= b c \left(-\frac{t e^{-\pi i \alpha t}}{\pi i \alpha} - \frac{e^{-\pi i \alpha t}}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{b c} \right). \end{aligned}$$

5. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c'_0 \left(e^{\beta'_1 t} - e^{\beta'_2 t} \right) \\ y_2(t) &= c c'_0 \left(\frac{e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_1)t}}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} - \frac{e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_2)t}}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} - \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} + \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} + \frac{1}{c c'_0} \right), \end{aligned}$$

$$\text{con } \beta'_1 = \pi i \alpha - \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}, \quad \beta'_2 = \pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} \text{ y } c'_0 = \frac{b}{\beta_1 - \beta_2}.$$

□

Demostración: Como $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ es solución de (3.4), entonces

$$y_1'(t) = e^{2\pi i \alpha t} b y_2(t) \text{ y } y_2'(t) = e^{-2\pi i \alpha t} c y_1(t).$$

Ahora derivando $y_1'(t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= 2\pi i\alpha e^{2\pi i\alpha t} b y_2(t) + e^{2\pi i\alpha t} b y_2'(t) \\ &= 2\pi i\alpha y_1'(t) + b c y_1(t). \end{aligned}$$

Luego,

$$y_1''(t) - 2\pi i\alpha y_1'(t) - b c y_1(t) = 0, \quad \text{con } y_1(0) = 0 \text{ y } y_1'(0) = b. \quad (3.6)$$

Tiene como polinomio característico $\beta^2 - 2\pi i\alpha\beta - bc = 0$, cuyas raíces son:

$$\beta'_1 = \pi i\alpha - \sqrt{-\pi^2\alpha^2 + bc}, \quad \beta'_2 = \pi i\alpha + \sqrt{-\pi^2\alpha^2 + bc}.$$

1. Si $bc = 0$ y $\alpha = 0$. Entonces $\beta'_1 = 0$ es la única raíz de multiplicidad 2 y $y_1''(t) = 0$. Luego,

$$y_1(t) = bt \quad \text{y } y_2(t) = 1.$$

2. Si $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\beta'_1 = 0$ y $\beta'_2 = 2\pi i\alpha$. Así (3.6) tiene como solución general $y_1(t) = c'_0 + c'_1 e^{2\pi i\alpha t}$. Usando las condiciones iniciales, tenemos $y_1(t) = \frac{b}{2\pi i\alpha} (e^{2\pi i\alpha t} - 1)$ y $y_2(t) = 1$.
3. Si $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, entonces el polinomio característico, tiene dos raíces, $\beta'_1 = -\sqrt{bc}$ y $\beta'_2 = \sqrt{bc}$. Así (3.6) tiene como solución general $y_1(t) = c'_0 e^{-\sqrt{bc}t} + c'_1 e^{\sqrt{bc}t}$. Usando las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ y $y_1'(0) = b$, tenemos

$$y_1(t) = \frac{b}{2\sqrt{bc}} \left(-e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t} \right).$$

Como $y_2'(t) = c y_1(t)$, entonces

$$y_2'(t) = \frac{\sqrt{bc}}{2} \left(-e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t} \right), \quad \text{con } y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0.$$

Integrando obtenemos

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-\sqrt{bc}t} + e^{\sqrt{bc}t} \right).$$

4. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc = \pi^2\alpha^2$, entonces el $\beta' = \pi i\alpha$ es la única raíz con multiplicidad 2. Luego, la solución general es

$$y_1(t) = c'_0 e^{\beta' t} + c'_1 t e^{\beta' t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $c'_0, c'_1 \in \mathbb{C}$. Como $y_1(0) = 0$ y $y_1'(0) = b$, entonces $y_1(t) = b t e^{\pi i\alpha t}$. Para obtener y_2 :

$$y_2'(t) = e^{-2\pi i\alpha t} c y_1(t) = b c t e^{-\pi i\alpha t}.$$

Así,

$$y_2'(t) = b c t e^{-\pi i\alpha t}, \quad \text{con } y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} y_2(t) &= b c \int_0^t s e^{-\pi i\alpha s} ds + 1, \\ &= b c \left(\frac{s e^{-\pi i\alpha s}}{-\pi i\alpha} \Big|_0^t + \frac{1}{\pi i\alpha} \int_0^t e^{-\pi i\alpha s} ds \right) + 1, \\ &= b c \left(-\frac{t e^{-\pi i\alpha t}}{\pi i\alpha} - \frac{1}{(\pi i\alpha)^2} (e^{-\pi i\alpha t} - 1) \right) + 1, \\ &= b c \left(-\frac{t e^{-\pi i\alpha t}}{\pi i\alpha} - \frac{e^{-\pi i\alpha t}}{(\pi i\alpha)^2} + \frac{1}{(\pi i\alpha)^2} + \frac{1}{bc} \right). \end{aligned}$$

5. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2 \alpha^2$, entonces el polinomio característico tiene dos raíces diferentes, entonces la solución general es

$$y_1(t) = c'_0 e^{\beta'_1 t} + c'_1 e^{\beta'_2 t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $c'_0, c'_1 \in \mathbb{C}$. Como $y_1(0) = 0$ e $y'_1(0) = b$, entonces

$$y_1(t) = c'_0 (e^{\beta'_1 t} - e^{\beta'_2 t}), \quad \text{donde } c'_0 = \frac{b}{\beta'_1 - \beta'_2}.$$

Para determinar y_2 :

$$\begin{aligned} y'_2(t) &= e^{-2\pi i \alpha t} c y_1(t) = e^{-2\pi i \alpha t} c c'_0 (e^{\beta'_1 t} - e^{\beta'_2 t}), \\ &= c c'_0 (e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_1)t} - e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_2)t}), \quad \text{con } y_2(0) = 1, y'_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= c c'_0 \left(\frac{e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_1)t} - 1}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} - \frac{e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_2)t} - 1}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} \right) + 1, \\ &= c c'_0 \left(\frac{e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_1)t}}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} - \frac{e^{(-2\pi i \alpha + \beta'_2)t}}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} - \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} + \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} + \frac{1}{c c'_0} \right). \end{aligned}$$

Teorema 3.1. Sean X e Y dos campos holomorfos definidos en $(\mathbb{C}^3, 0)$ tales que $X(z) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} e$ $Y(z) = \sum_{i=1}^3 b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ donde cada $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ y cada b_i son funciones holomorfas, y además estos campos están relacionados con el corchete de Lie mediante $[X, Y] = -Y$. Si $S = \{(z_1, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}^*\}$ es una hoja regular de $\mathcal{F}_Y$ y $\nu_0(Y) > 2$, entonces la derivada de la holonomía g_γ es $\square$

$$dg_\gamma(1, 0, 0) = W(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) & y_1(1) \\ x_2(1) & y_2(1) \end{pmatrix},$$

donde $x_1(1), x_2(1), y_1(1), y_2(1)$ son tales que:

1. $bc = 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = c, \quad y_1(1) = b, \quad y_2(1) = 1.$$

2. $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1.$$

3. $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x_1(1) &= \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2}, & x_2(1) &= \frac{c}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right), \\ y_1(1) &= \frac{b}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right), & y_2(1) &= \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2}. \end{aligned}$$

4. si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $bc = \pi^2 \alpha^2$ y α es par, entonces

$$x_1(1) = 1 - \pi i \alpha, \quad x_2(1) = c, \quad y_1(1) = b, \quad y_2(1) = 1 + \pi i \alpha.$$

5. si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $bc = \pi^2 \alpha^2$ y α es impar, entonces

$$x_1(1) = -1 + \pi i \alpha, \quad x_2(1) = -c, \quad y_1(1) = -b, \quad y_2(1) = -1 - \pi i \alpha.$$

6. si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2 \alpha^2$ entonces

$$\begin{aligned} x_1(1) &= b c_1 \left(\frac{e^{\beta_1} - 1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1, & x_2(1) &= c_1 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), \\ y_1(1) &= -c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), & y_2(1) &= b c_1 \left(\frac{e^{-\beta_1} - 1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1, \end{aligned}$$

$$\text{donde } \beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}, \quad c_1 = \frac{c}{2\sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}}, \quad c'_0 = \frac{b}{-2\sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}}.$$

Demostración: Sustituir $t = 1$ en los ítems de los lemas (3.2) y (3.3). En los ítem 1, 2,3 en dichos lemas es solo sustitución. Sin embargo, para el ítem 4 consideraremos el caso α par o impar. Tenemos

$$\begin{aligned} x_1(1) &= bc \left(\frac{e^{\pi i \alpha}}{\pi i \alpha} - \frac{e^{\pi i \alpha}}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{bc} \right), \\ x_2(1) &= ce^{-\pi i \alpha}, \\ y_1(1) &= be^{\pi i \alpha}, \\ y_2(1) &= bc \left(-\frac{e^{-\pi i \alpha}}{\pi i \alpha} - \frac{e^{-\pi i \alpha}}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi i \alpha)^2} + \frac{1}{bc} \right). \end{aligned}$$

Caso 1. Si α es par. Entonces $e^{\pi i \alpha} = \cos(\pi \alpha) + i \sin(\pi \alpha) = 1$ y $e^{-\pi i \alpha} = \cos(\pi \alpha) - i \sin(\pi \alpha) = 1$. Sustituyendo y simplificando

$$x_1(1) = 1 - \pi i \alpha, \quad x_2(1) = c, \quad y_1(1) = b, \quad y_2(1) = 1 + \pi i \alpha.$$

Caso 2. Si α es impar. Entonces $e^{\pi i \alpha} = \cos(\pi \alpha) + i \sin(\pi \alpha) = -1$ y $e^{-\pi i \alpha} = \cos(\pi \alpha) - i \sin(\pi \alpha) = -1$. Sustituyendo y simplificando

$$x_1(1) = -1 + \pi i \alpha, \quad x_2(1) = -c, \quad y_1(1) = -b, \quad y_2(1) = -1 - \pi i \alpha.$$

Para el caso 5 de los lemas:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{2\pi i \alpha + \beta_1}}{2\pi i \alpha + \beta_1} - \frac{e^{2\pi i \alpha + \beta_2}}{2\pi i \alpha + \beta_2} - \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_2} + \frac{1}{bc_1} \right), \\ x_2(1) &= c_1(e^{\beta_1} - e^{\beta_2}), \end{aligned}$$

con $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, $\beta_2 = -\pi i \alpha - \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$ y $c_1 = \frac{c}{\beta_1 - \beta_2}$.

$$\begin{aligned} y_1(1) &= c'_0(e^{\beta'_1} - e^{\beta'_2}), \\ y_2(1) &= cc'_0 \left(\frac{e^{-2\pi i \alpha + \beta'_1}}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} - \frac{e^{-2\pi i \alpha + \beta'_2}}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} - \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} + \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} + \frac{1}{cc'_0} \right), \end{aligned}$$

con $\beta'_1 = \pi i \alpha - \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, $\beta'_2 = \pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$ y $c'_0 = \frac{b}{\beta_1 - \beta_2}$.

Como 2α es par, podemos simplificar:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1}}{2\pi i \alpha + \beta_1} - \frac{e^{\beta_2}}{2\pi i \alpha + \beta_2} - \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_2} + \frac{1}{bc_1} \right), \\ x_2(1) &= c_1(e^{\beta_1} - e^{\beta_2}), \\ y_1(1) &= c'_0(e^{\beta'_1} - e^{\beta'_2}), \\ y_2(1) &= cc'_0 \left(\frac{e^{\beta'_1}}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} - \frac{e^{\beta'_2}}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} - \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} + \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_2} + \frac{1}{cc'_0} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\beta_1 + \beta_2 = -2\pi i \alpha \quad \beta'_1 + \beta'_2 = 2\pi i \alpha,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1}}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{2\pi i \alpha + \beta_1} - \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{bc_1} \right), \\ x_2(1) &= c_1(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), \\ y_1(1) &= c'_0(e^{\beta'_1} - e^{-\beta'_1}), \\ y_2(1) &= cc'_0 \left(\frac{e^{\beta'_1}}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} + \frac{e^{-\beta'_1}}{\beta'_1} - \frac{1}{-2\pi i \alpha + \beta'_1} - \frac{1}{\beta'_1} + \frac{1}{cc'_0} \right), \end{aligned}$$

donde $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, $\beta'_1 = \pi i \alpha - \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, $c_1 = \frac{c}{2\sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}}$, $c'_0 = \frac{b}{-2\sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}}$.

Luego, $\beta_1 + \beta'_1 = 0$ y $bc_1 + cc'_0 = 0$. obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1}}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} - \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{bc_1} \right), \\ x_2(1) &= c_1(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), \\ y_1(1) &= -c'_0(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), \\ y_2(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{-\beta_1}}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} - \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{bc_1} \right). \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1, \\ x_2(1) &= c_1(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), \\ y_1(1) &= -c'_0(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}), \\ y_2(1) &= bc_1 \left(\frac{e^{-\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1. \end{aligned}$$

□

Conocer los autovalores de la parte lineal g_γ en el punto $(1, 0, 0)$ nos permite estudiar si es o no resonante y si esta en el dominio de Poincaré o el de Siegel.

Teorema 3.2. *Bajo las condiciones del teorema(3.1), sean λ_1 y λ_2 los autovalores de $W(1)$. Tenemos los siguientes casos:*

1. Si $bc = 0$ y $\alpha = 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$.
2. Si $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
3. Si $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$\lambda_1 = \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} - \sqrt{\sqrt{bc}}(-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}})}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} + \sqrt{\sqrt{bc}}(-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}})}{2}.$$

4. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc = \pi^2\alpha^2$, entonces, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ para α par y $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ para α impar.
5. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2\alpha^2$, entonces

$$\lambda_1 = \frac{\text{diag}(W(1)) - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\text{diag}(W(1)) + \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde:

$$\text{diag}(W(1)) = -bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + 2$$

y

$$\begin{aligned} \Delta &= (bc_1)^2 \left[(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left((e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) - 4 \right) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right)^2 - 4 \frac{(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2}{(2\pi i\alpha + \beta_1)\beta_1} \right] \\ &\quad - 4bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left[\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right] - 4c_1c'_0(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2. \end{aligned}$$

$$\text{Además, } \beta_1 = -\pi i\alpha + \sqrt{-\pi^2\alpha^2 + bc} \text{ y } c_1 = \frac{c}{2\sqrt{-\pi^2\alpha^2 + bc}}.$$

Demostración:

Sea λ un autovalor de la matriz $W(1)$, es decir $\det(W(1) - \lambda I) = 0$.

Caso 1. Si $bc = 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$W(1) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\det(W(1) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + bc = 0.$$

Así los autovalores de $W(1)$ son: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$.

Caso 2. Si $bc = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces

$$W(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto tiene un autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad 2.

Caso 3. Si $bc \neq 0$ y $\alpha = 0$, entonces

$$W(1) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} & \frac{b}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right) \\ \frac{c}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right) & \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} - \lambda & \frac{b}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right) \\ \frac{c}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right) & \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \left(\frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{bc}{\sqrt{bc}} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right)^2, \\ &= \lambda^2 - \left(e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} \right) \lambda + \left(\frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right)^2 - \sqrt{bc} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Cuyo discriminante es:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} \right)^2 - 4 \left(\left(\frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right)^2 - \sqrt{bc} \left(\frac{-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}}}{2} \right)^2 \right), \\ &= \sqrt{bc} \left(-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} \right)^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lambda = \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} \pm \sqrt{\sqrt{bc}} \left(-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} \right)}{2}.$$

Caso 4. Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $bc = \pi^2 \alpha^2$ y α es un número par, entonces:

$$W(1) = \begin{pmatrix} 1 - \pi i \alpha & b \\ c & 1 + \pi i \alpha \end{pmatrix}$$

y

$$\det(W(1) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Si $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $bc = \pi^2 \alpha^2$ y α es un número impar, entonces:

$$W(1) = \begin{pmatrix} -1 + \pi i \alpha & -b \\ -c & -1 - \pi i \alpha \end{pmatrix}$$

y

$$\det(W(1) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Caso 5. Del teorema 3.1 parte 6 tenemos:

$$W(1) = \begin{pmatrix} bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1} - 1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1 & -c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}) \\ c_1 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}) & bc_1 \left(\frac{e^{-\beta_1} - 1}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1 \end{pmatrix},$$

donde $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, $c_1 = \frac{c}{2\sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}}$, $c'_0 = \frac{b}{-2\sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}}$.

Además

$$\det(W(1) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{diag}(W(1))\lambda + \det(W(1)) = 0, \quad (3.7)$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = \frac{\text{diag}(W(1)) - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\text{diag}(W(1)) + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{diag}(W(1)) &= bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1} + e^{-\beta_1} - 2}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} + e^{\beta_1} - 2}{\beta_1} \right) + 2, \\ &= bc_1 (e^{\beta_1} + e^{-\beta_1} - 2) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + 2, \\ &= -bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + 2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} [\text{diag}(W(1))]^2 &= \left[-bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + 2 \right]^2, \\ &= (bc_1)^2 (e^{\beta_1} - 1)^2 (e^{-\beta_1} - 1)^2 \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right)^2 \\ &\quad - 4bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + 4. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(W(1)) &= \left[bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1 \right] \left[bc_1 \left(\frac{e^{-\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + 1 \right] + \\ &\quad c_1 c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2, \\ &= (bc_1)^2 \left(\frac{e^{\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) \left(\frac{e^{-\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) \\ &\quad + bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) + bc_1 \left(\frac{e^{-\beta_1} - 1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} - 1}{\beta_1} \right) \\ &\quad + 1 + c_1 c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2, \\ &= (bc_1)^2 \left(\frac{(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1)}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{(e^{-\beta_1} - 1)^2 + (e^{\beta_1} - 1)^2}{(2\pi i\alpha + \beta_1)\beta_1} + \frac{(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1)}{\beta_1^2} \right) \\ &\quad + bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1} + e^{-\beta_1} - 2}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1} + e^{-\beta_1} - 2}{\beta_1^2} \right) + 1 + c_1 c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2, \\ &= (bc_1)^2 \left((e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right) + \frac{(e^{-\beta_1} - 1)^2 + (e^{\beta_1} - 1)^2}{(2\pi i\alpha + \beta_1)\beta_1} \right) \\ &\quad - bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right) + 1 + c_1 c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta &= [\text{diag}(W(1))]^2 - 4\det(W(1)) \\ &= (bc_1)^2 \left[(e^{\beta_1} - 1)^2 (e^{-\beta_1} - 1)^2 \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right)^2 - 4e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{(e^{-\beta_1} - 1)^2 + (e^{\beta_1} - 1)^2}{(2\pi i\alpha + \beta_1)\beta_1} \right] - 4bc_1 \left[(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left(\frac{1}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right) \right] + 4 - 4[1 + c_1 c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2]. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio

$$X(\beta_1) = e^{\beta_1} - 1 ; Y(\beta_1) = e^{-\beta_1} - 1 ; Z_1(\beta_1) = \frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} ; Z_2(\beta_1) = \frac{1}{\beta_1},$$

tenemos

$$X(-\beta_1) = Y(\beta_1) ; Z_1(-2\pi i\alpha + \beta_1) = Z_2(\beta_1).$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta &= (bc_1)^2 [X^2Y^2(Z_1 + Z_2)^2 - 4(XY)(Z_1^2 + Z_2^2) - 4(X^2 + Y^2)Z_1Z_2] \\
&\quad - 4bc_1 [XY(Z_1 + Z_2) + XY(Z_1^2 + Z_2^2)] + 4 - 4[1 + c_1c'_0(Z_1 - Z_2)^2], \\
&= (bc_1)^2 [X^2Y^2(Z_1 + Z_2)^2 - 4(XY)(Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_1Z_2 - 2Z_1Z_2) - 4(X^2 + Y^2)Z_1Z_2] \\
&\quad - 4bc_1 [XY(Z_1 + Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2)] - 4c_1c'_0(Z_1 - Z_2)^2, \\
&= (bc_1)^2 [X^2Y^2(Z_1 + Z_2)^2 - 4(XY)(Z_1 + Z_2)^2 - 2Z_1Z_2 - 4(X^2 + Y^2)Z_1Z_2] \\
&\quad - 4bc_1 [XY(Z_1 + Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2)] - 4c_1c'_0(Z_1 - Z_2)^2, \\
&= (bc_1)^2 [(X^2Y^2 - 4XY)(Z_1 + Z_2)^2 + 8XYZ_1Z_2 - 4(X^2 + Y^2)Z_1Z_2] \\
&\quad - 4bc_1 [XY(Z_1 + Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2)] - 4c_1c'_0(Z_1 - Z_2)^2, \\
&= (bc_1)^2 [(X^2Y^2 - 4XY)(Z_1 + Z_2)^2 + 4Z_1Z_2(2XY - X^2 - Y^2)] \\
&\quad - 4bc_1 [XY(Z_1 + Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2)] - 4c_1c'_0(Z_1 - Z_2)^2, \\
&= (bc_1)^2 [(X^2Y^2 - 4XY)(Z_1 + Z_2)^2 - 4Z_1Z_2(X - Y)^2] \\
&\quad - 4bc_1 [XY(Z_1 + Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2)] - 4c_1c'_0(Z_1 - Z_2)^2.
\end{aligned}$$

Colocando los valores iniciales:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (bc_1)^2 \left[(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1)((e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) - 4) \left(\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2}{(2\pi i\alpha + \beta_1)\beta_1} \right] \\
&\quad - 4bc_1(e^{\beta_1} - 1)(e^{-\beta_1} - 1) \left[\frac{1}{2\pi i\alpha + \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{(2\pi i\alpha + \beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right] - 4c_1c'_0(e^{\beta_1} - e^{-\beta_1})^2.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.1. Los casos 1,2 y 4 del teorema 3.2 son tales que g_γ es resonante y pertenecen al dominio de Siegel en 0. Además no satisfacen la condición de Brjuno.

Observación 3.2. En el teorema 3.2 parte 3 con $bc = 1$, los autovalores de $dg_\gamma(1, 0, 0)$ son $\lambda_1 = e^{-1}$ y $\lambda_2 = e$. Por lo tanto, g_γ es resonante y pertenece en el dominio de Siegel. La resonancia es porque $e^{-1} = e^{-2}e$.

El siguiente teorema describe el teorema 3.2 parte 3 cuando bc es real y positivo.

Teorema 3.3. Bajo las condiciones del teorema 3.2 parte 3, es decir, bc real y $\alpha = 0$. Si bc es positivo, entonces:

1. existe $b_0c_0 > 0$ tal que $\lambda_1 > 0$ en el intervalo $(0, b_0c_0)$ y $\lambda_1 < 0$ en el intervalo $(b_0c_0, +\infty)$. Mientras que λ_2 siempre es positivo. Además el valor aproximado de b_0c_0 es 1,758963.

2. $\lambda_1(bc) < 1$ y $\lambda_2(bc) > 1$ para todo $bc > 0$. Por lo tanto no está en el dominio de Poincaré.

Demostración: Por el teorema 3.2 parte 3 los autovalores son

$$\begin{aligned}
\lambda_1(bc) &= \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} - \sqrt{\sqrt{bc}}(-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}})}{2}, \\
\lambda_2(bc) &= \frac{e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} + \sqrt{\sqrt{bc}}(-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}})}{2}.
\end{aligned}$$

Como bc es un número real y positivo, entonces $e^{2\sqrt{bc}} > 1$ es equivalente a $-e^{-\sqrt{bc}} + e^{\sqrt{bc}} > 0$. Así, $\lambda_2(bc) > 0$ para todo $bc > 0$.

Agrupando términos

$$\lambda_1(bc) = \frac{e^{-\sqrt{bc}}(1 + \sqrt{\sqrt{bc}}) + e^{\sqrt{bc}}(1 - \sqrt{\sqrt{bc}})}{2}.$$

Consideremos el cambio de variable $u = \sqrt{bc}$, entonces

$$\lambda_1(u^2) = \frac{e^{-u}(1 + \sqrt{u}) + e^u(1 - \sqrt{u})}{2},$$

y haciendo $f(u) = \lambda_1(u^2)$, para todo $u > 0$. Para analizar su signo, hagamos los siguientes casos:

1. Si $0 < u < 1$, entonces $f(u) > 0$.
2. Si $u = 1$, entonces $f(u) = e^{-1} > 0$.
3. Si $u > 1$, entonces $1 - \sqrt{u} < 0$ y $f(u)$ puede tomar valores positivos o valores negativos o también el valor cero. Como f es estrictamente decreciente, existe un único u_0 tal que $f(u_0) = 0$, es decir,

$$e^{-u_0}(1 + \sqrt{u_0}) + e^{u_0}(1 - \sqrt{u_0}) = 0.$$

Usando el método de Newton-Raphson determinamos que el valor aproximado de u_0 es 1,326259. Por tanto, $b_0c_0 = u_0^2 = (1,326259)^2 = 1,758963$. Luego, $\lambda_1 = f(u)$ es positiva en $(1, b_0c_0)$ y es negativa en $(b_0c_0, +\infty)$, donde $b_0c_0 \approx 1,758963$.

Para λ_1 : Para que valor de u , $\lambda_1(u^2) = 1$, es decir,

$$e^{-u}(1 + \sqrt{u}) + e^u(1 - \sqrt{u}) - 2 = 0$$

Cuando $u = 0$, satisface la ecuación. Además: para que valores de $u > 0$, $\lambda_1(u^2) > 1$:

$$\begin{aligned} e^{-u}(1 + \sqrt{u}) + e^u(1 - \sqrt{u}) - 2 > 0 &\Leftrightarrow e^{2u}(1 - \sqrt{u}) - 2e^u + 1 + \sqrt{u} > 0 \\ &\Leftrightarrow ((1 - \sqrt{u})e^u - (1 + \sqrt{u}))(e^u - 1) > 0, \quad \forall u > 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \sqrt{u})e^u > 1 + \sqrt{u}. \end{aligned}$$

Como podemos ver, la desigualdad anterior es valida para $u < 1$. Así,

$$e^u > \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}}.$$

Pero esta desigualdad no es valida para ningún valor $u < 1$. Por lo tanto,

$$\lambda_1(u^2) < 1, \quad \forall u > 0.$$

Para λ_2 : $\lambda_2(u^2) = \frac{e^{-u}(1 - \sqrt{u}) + e^u(1 + \sqrt{u})}{2}$. Para que valores de $u > 0$, $\lambda_2(u^2) < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} e^{-u}(1 - \sqrt{u}) + e^u(1 + \sqrt{u}) - 2 < 0 &\Leftrightarrow e^{2u}(1 + \sqrt{u}) - 2e^u + 1 - \sqrt{u} < 0 \\ &\Leftrightarrow ((1 + \sqrt{u})e^u - (1 - \sqrt{u}))(e^u - 1) > 0, \quad \forall u > 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + \sqrt{u})e^u < 1 - \sqrt{u}. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior es valida para $u < 1$. Entonces

$$e^u < \frac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}}.$$

Pero esto no es cierto. Por lo tanto,

$$\lambda_2(u^2) > 1, \quad u > 0.$$

□

Teorema 3.4. Bajo las condiciones del teorema 3.2 parte 3, es decir, bc real y $\alpha = 0$. Si bc es negativo y $bc = -d$ con $d > 0$, tenemos:

1. Si $|\lambda_1(bc)| = |\lambda_2(bc)| = 1$, si y solo si $d = n^2\pi^2$.
2. Si $|\lambda_1(bc)| < 1$ y $|\lambda_2(bc)| = 1$, entonces $\sin(2\sqrt{d}) < 0$, $\cos(2\sqrt{d}) < 1$ y $d < 1$.
3. Si $|\lambda_1(bc)| > 1$ y $|\lambda_2(bc)| = 1$, entonces $\sin(2\sqrt{d}) > 0$, $\cos(2\sqrt{d}) < 1$ y $d > 1$.
4. Si $|\lambda_1(bc)| = 1$ y $|\lambda_2(bc)| < 1$, entonces $\sin(2\sqrt{d}) > 0$, $\cos(2\sqrt{d}) < 1$ y $d < 1$.
5. Si $|\lambda_1(bc)| = 1$ y $|\lambda_2(bc)| > 1$, entonces $\sin(2\sqrt{d}) < 0$, $\cos(2\sqrt{d}) < 1$ y $d > 1$.
6. Si $|\lambda_1(bc)| < 1$ y $|\lambda_2(bc)| < 1$, si y solo si

$$\cos(2\sqrt{d}) < 1, \quad d < 1 \quad \text{y} \quad |\cot(\sqrt{d})| < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right).$$

7. Si $|\lambda_1(bc)| > 1$ y $|\lambda_2(bc)| > 1$, si y solo si

$$\cos(2\sqrt{d}) < 1, \quad d > 1 \quad \text{y} \quad |\cot(\sqrt{d})| < -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right).$$

8. Si $|\lambda_1(bc)| > 1$ y $|\lambda_2(bc)| < 1$, si y solo si

$$\operatorname{sen}(2\sqrt{d}) > 0 \quad \text{y} \quad |\cos(2\sqrt{d})| < \frac{2\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}|1-\sqrt{d}|} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) + 1.$$

9. Si $|\lambda_1(bc)| < 1$ y $|\lambda_2(bc)| > 1$, si y solo si

$$\operatorname{sen}(2\sqrt{d}) < 0 \quad \text{y} \quad |\cos(2\sqrt{d})| < -\frac{2\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}|1-\sqrt{d}|} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) + 1.$$

Demostración:

Como $bc < 0$ y $\alpha = 0$, entonces existe un número real positivo d tal que $bc = -d$. Luego,

$$\begin{aligned} \lambda_1(bc) &= \frac{e^{-i\sqrt{d}} + e^{i\sqrt{d}} - \sqrt{i\sqrt{d}}(-e^{-i\sqrt{d}} + e^{i\sqrt{d}})}{2}, \\ &= \frac{2\cos(\sqrt{d}) - \sqrt{i\sqrt{d}}(2i\operatorname{sen}(\sqrt{d}))}{2}, \\ &= \cos(\sqrt{d}) - i\sqrt{i\sqrt{d}}\operatorname{sen}(\sqrt{d}), \end{aligned}$$

de modo similar para $\lambda_2(bc)$:

$$\lambda_2(bc) = \cos(\sqrt{d}) + i\sqrt{i\sqrt{d}}\operatorname{sen}(\sqrt{d}).$$

Como $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, entonces $i\sqrt{i} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. Luego,

$$\begin{cases} \lambda_1(bc) &= \cos(\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}\operatorname{sen}(\sqrt{d})}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}\operatorname{sen}(\sqrt{d})}{\sqrt{2}}i, \\ \lambda_2(bc) &= \cos(\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}\operatorname{sen}(\sqrt{d})}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}\operatorname{sen}(\sqrt{d})}{\sqrt{2}}i, \end{cases}$$

donde $bc = -d < 0$.

Cuyos módulos elevados al cuadrado son:

$$\begin{aligned} |\lambda_1(bc)|^2 &= \cos^2(\sqrt{d}) + \sqrt{d}\operatorname{sen}^2(\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}), \\ |\lambda_2(bc)|^2 &= \cos^2(\sqrt{d}) + \sqrt{d}\operatorname{sen}^2(\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}). \end{aligned}$$

Podemos simplificar estos módulos usando las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} |\lambda_1(bc)|^2 &= \cos^2(\sqrt{d}) + \sqrt{d}\operatorname{sen}^2(\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ &= \frac{1+\cos(2\sqrt{d})}{2} + \sqrt{d}\left(\frac{1-\cos(2\sqrt{d})}{2}\right) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}), \\ &= \frac{1+\sqrt{d}}{2} + \frac{1-\sqrt{d}}{2}\cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{aligned}$$

y también

$$|\lambda_2(bc)|^2 = \frac{1+\sqrt{d}}{2} + \frac{1-\sqrt{d}}{2}\cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}).$$

Así tenemos:

$$\begin{cases} |\lambda_1(bc)|^2 &= \frac{1+\sqrt{d}}{2} + \frac{1-\sqrt{d}}{2}\cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}), \\ |\lambda_2(bc)|^2 &= \frac{1+\sqrt{d}}{2} + \frac{1-\sqrt{d}}{2}\cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{d}). \end{cases}$$

1. Si $|\lambda_1(bc)| = |\lambda_2(bc)| = 1$.

Entonces

$$|\lambda_1(bc)|^2 = |\lambda_2(bc)|^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}), \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}). \end{cases}$$

Luego,

$$\cos(2\sqrt{d}) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) = 0 \Rightarrow d = n^2 \pi^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Si $|\lambda_1(bc)| < 1$ y $|\lambda_2(bc)| = 1$.

Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} > \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) < 0, \cos(2\sqrt{d}) < 1 \text{ y } d < 1.$$

3. Si $|\lambda_1(bc)| > 1$ y $|\lambda_2(bc)| = 1$.

Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} < \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) > 0, \cos(2\sqrt{d}) < 1 \text{ y } d > 1.$$

4. Si $|\lambda_1(bc)| = 1$ y $|\lambda_2(bc)| < 1$.

Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} > \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) > 0, \cos(2\sqrt{d}) < 1 \text{ y } d < 1.$$

5. Si $|\lambda_1(bc)| = 1$ y $|\lambda_2(bc)| > 1$.

Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} < \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) < 0, \cos(2\sqrt{d}) < 1 \text{ y } d > 1$$

6. Si $|\lambda_1(bc)| < 1$ y $|\lambda_2(bc)| < 1$.

Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} > \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} > \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\cos(2\sqrt{d}) < 1, \quad d < 1 \text{ y } |\operatorname{sen}(2\sqrt{d})| < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right) (1 - \cos(2\sqrt{d})).$$

Usando la identidad trigonométrica $\cot(x/2) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$, con $x = 2\sqrt{d}$, tenemos $\cot(\sqrt{d}) = \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{d})}{1-\cos(2\sqrt{d})}$. Por lo tanto,

$$\cos(2\sqrt{d}) < 1, \quad d < 1 \quad \text{y} \quad |\cot(\sqrt{d})| < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right).$$

7. Si $|\lambda_1(bc)| > 1$ y $|\lambda_2(bc)| > 1$.

Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} < \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} < \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\sqrt{d}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\cos(2\sqrt{d}) < 1, \quad d > 1 \quad \text{y} \quad |\cot(\sqrt{d})| < -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right).$$

8. Si $|\lambda_1(bc)| > 1$ y $|\lambda_2(bc)| < 1$.
Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} < \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} > \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{d}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sin(2\sqrt{d}) > 0 \quad \text{y} \quad |\cos(2\sqrt{d})| < \frac{2\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}|1-\sqrt{d}|} \sin(2\sqrt{d}) + 1$$

9. Si $|\lambda_1(bc)| < 1$ y $|\lambda_2(bc)| > 1$.
Luego,

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} > \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) + \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{d}) \\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} < \frac{1-\sqrt{d}}{2} \cos(2\sqrt{d}) - \frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{d}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sin(2\sqrt{d}) < 0 \quad \text{y} \quad |\cos(2\sqrt{d})| < -\frac{2\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{2}|1-\sqrt{d}|} \sin(2\sqrt{d}) + 1$$

□

Observación 3.3. En el caso del teorema 3.4 parte 6, $|\cot(\sqrt{d})| < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right)$ entonces:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{1-\sqrt{d}} \right) < |\tan(\sqrt{d})| < |\tan(1)| = \tan 1 \Rightarrow d^{1/4} < \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{d}) \tan(1) < \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(1)$$

Por lo tanto, $0 < d < \frac{\tan^4(1)}{4}$.

En el caso del teorema 3.4 parte 7, $|\cot(\sqrt{d})| < -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{d}}{\sqrt{\sqrt{d}}} \right)$ entonces

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{1-\sqrt{d}} \right) < |\tan(\sqrt{d})|.$$

No se puede obtener una cota superior para $|\tan(\sqrt{d})|$, ya que $d > 1$ y la función tangente es creciente. Pero podemos restringirlo en un intervalo $(1, \pi^2/16)$. Así, $|\tan(\sqrt{d})| < 1$. Luego,

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{1-\sqrt{d}} \right) < 1.$$

Ejemplo 3.1. Bajo las condiciones del teorema 3.2 parte 3. Si bc real negativo y $\alpha = 0$. Consideremos casos particulares:

Caso 1. Si $d = (\pi/2)^2$. Vamos a probar que g_γ está en el dominio de poincaré y es no resonante.

$$\begin{aligned} \lambda_1(-(\pi/2)^2) &= \sqrt{\pi/4} - \sqrt{\pi/4}i = \sqrt{\pi/4}(1-i), \\ \lambda_2(-(\pi/2)^2) &= -\sqrt{\pi/4} + \sqrt{\pi/4}i = \sqrt{\pi/4}(-1+i) \end{aligned}$$

y

$$|\lambda_1(-(\pi/2)^2)| = |\lambda_2(-(\pi/2)^2)| = \sqrt{\pi/2} > 1.$$

Dados $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $m_1 + m_2 \geq 2$. Vamos a probar que no se cumple

$$\lambda_1 = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \quad \text{o} \quad \lambda_2 = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi/4}(1-i) &= (\sqrt{\pi/4}(1-i))^{m_1} (\sqrt{\pi/4}(-1+i))^{m_2} \\ &= (\sqrt{\pi/4})^{m_1} (\sqrt{\pi/4})^{m_2} (1-i)^{m_1} (-1+i)^{m_2} \\ &= (\sqrt{\pi/4})^{m_1+m_2} (1-i)^{m_1} (-1+i)^{m_2}. \end{aligned}$$

Aplicando módulo:

$$\left| \sqrt{\pi/4}(1-i) \right| = \left| \left(\sqrt{\pi/4} \right)^{m_1+m_2} |(1-i)^{m_1} - 1 + i|^{m_2} \right| \Leftrightarrow \sqrt{\pi/2} = \left(\sqrt{\pi/2} \right)^{m_1+m_2}$$

es una contradicción.

Caso 2. $d = (3\pi/2)^2$. Vamos a probar que g_γ está en el dominio de Poincaré y es no resonante.

$$\begin{aligned} \lambda_1(-(3\pi/2)^2) &= -\sqrt{3\pi/4} + \sqrt{3\pi/4}i = \sqrt{3\pi/4}(-1+i), \\ \lambda_2(-(3\pi/2)^2) &= \sqrt{3\pi/4} - \sqrt{3\pi/4}i = \sqrt{3\pi/4}(1-i). \end{aligned}$$

Entonces

$$|\lambda_1(-(3\pi/2)^2)| = |\lambda_2(-(3\pi/2)^2)| = \sqrt{3\pi/2} > 1.$$

Dados $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $m_1 + m_2 \geq 2$. Vamos a probar que no se cumple

$$\lambda_1 = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \quad \text{o} \quad \lambda_2 = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \sqrt{3\pi/4}(1-i) &= (\sqrt{3\pi/4}(-1+i))^{m_1} (\sqrt{3\pi/4}(1-i))^{m_2}, \\ &= (\sqrt{3\pi/4})^{m_1} (\sqrt{3\pi/4})^{m_2} (-1+i)^{m_1} (1-i)^{m_2}, \\ &= (\sqrt{3\pi/4})^{m_1+m_2} (-1+i)^{m_1} (1-i)^{m_2}. \end{aligned}$$

Aplicando módulo:

$$\sqrt{3\pi/2} = (\sqrt{3\pi/2})^{m_1+m_2}$$

es una contradicción.

Caso 3. $d = \pi^2$. Entonces $\lambda_1(-\pi^2) = \lambda_1(-\pi^2) = -1$.

Caso 4. $d = (2\pi)^2$. Entonces $\lambda_1(-(2\pi)^2) = \lambda_1(-(2\pi)^2) = 1$. □

Teorema 3.5. Consideremos el teorema 3.4 parte 6 y parte 7, es decir, $\lambda_1(bc), \lambda_2(bc)$ están en el dominio de Poincaré.

1. Si $|\lambda_1(bc)| = |\lambda_2(bc)|$, entonces g_γ es no resonante
2. Si $0 < |\lambda_1(bc)| \neq |\lambda_2(bc)|$ y $\frac{\ln(|\lambda_1(bc)|)}{\ln(|\lambda_2(bc)|)} \notin \mathbb{Q}$, entonces g_γ es no resonante.

Demostración: Dados los enteros no negativos m_1, m_2 tales que $m_1 + m_2 \geq 2$, y que:

$$\lambda_1(bc) = \lambda_1^{m_1}(bc) \lambda_2^{m_2}(bc) \quad \text{o} \quad \lambda_2(bc) = \lambda_1^{m_1}(bc) \lambda_2^{m_2}(bc).$$

Aplicando modulo:

$$|\lambda_1(bc)| = |\lambda_1^{m_1}(bc)| |\lambda_2^{m_2}(bc)| \Rightarrow |\lambda_1(bc)|^2 = (|\lambda_1(bc)|^2)^{m_1} (|\lambda_2(bc)|^2)^{m_2}.$$

Caso 1. Si $|\lambda_1(bc)| = |\lambda_2(bc)| < 1$ o $|\lambda_1(bc)| = |\lambda_2(bc)| > 1$, entonces Ya que,

$$|\lambda_1(bc)|^{m_1+m_2} < |\lambda_1(bc)| \quad \text{o} \quad |\lambda_1(bc)|^{m_1+m_2} > |\lambda_1(bc)|.$$

Por lo tanto g_γ es no resonante.

Caso 2. Sea $0 < |\lambda_1(bc)| < |\lambda_2(bc)| < 1$. Supongamos que g_γ es resonante, entonces existen enteros no negativos m_1, m_2 tales que $m_1 + m_2 \geq 2$ y $\lambda_1(bc) = \lambda_1^{m_1}(bc) \lambda_2^{m_2}(bc)$. Aplicando módulo:

$$\begin{aligned} |\lambda_1(bc)| &= |\lambda_1^{m_1}(bc)| |\lambda_2^{m_2}(bc)| \Rightarrow \ln(|\lambda_1(bc)|) = m_1 \ln(|\lambda_1(bc)|) + m_2 \ln(|\lambda_2(bc)|) \\ &\Rightarrow \text{para } m_1 \neq 1, \quad \frac{\ln(|\lambda_1(bc)|)}{\ln(|\lambda_2(bc)|)} = \frac{m_2}{1-m_1}. \end{aligned}$$

Para $m_1 = 1$, tenemos $m_2 \ln(|\lambda_2(bc)|) = 0$. Como $|\lambda_2(bc)| \neq 1$, necesariamente $m_2 = 0$, pero entonces $m_1 + m_2 = 1 < 2$. □

El siguiente teorema nos describe algunos casos particulares del teorema 3.1 parte 6.

Teorema 3.6. Bajo las condiciones del teorema 3.1 parte 6, es decir, $bc \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $bc \neq \pi^2 \alpha^2$:

1. Sea $bc > \pi^2 \alpha^2$. Si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta_1 = 2\pi i k$, entonces $\alpha \neq -2k$ y $W(1) = I$.
2. Sea $bc < \pi^2 \alpha^2$, entonces no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta_1 = 2\pi i k$.

3. Sea $bc < \pi^2 \alpha^2$. Si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta_1 = \pi i k$. Entonces $k \neq \alpha$, y

$$W(1) = -2bc_1 \left(\frac{1}{(2\alpha + k)\pi i} + \frac{1}{k\pi i} + 1 \right) I$$

con k impar y $W(1) = I$ con k par.

4. Si $bc > \pi^2 \alpha^2$, entonces no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta_1 = \pi i k$.

Demostración:

1. Como $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, entonces:

$$\begin{aligned} -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= 2\pi i k &\Leftrightarrow \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= \pi i (2k + \alpha) \\ &&\Leftrightarrow -\pi^2 \alpha^2 + bc &= -\pi^2 (2k + \alpha)^2 \\ &&\Leftrightarrow bc &= \pi^2 [\alpha^2 - (2k + \alpha)^2] \\ &&\Leftrightarrow bc &= -4k\pi^2 (\alpha + k). \end{aligned}$$

Como $bc > \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$-4k\pi^2 (\alpha + k) > \pi^2 \alpha^2 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k\alpha + \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow (2k + \alpha)^2 > 0.$$

Por lo tanto, $\alpha \neq -2k$.

2. Como $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$, entonces:

$$\begin{aligned} -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= 2\pi i k &\Leftrightarrow \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= \pi i (2k + \alpha) \\ &&\Leftrightarrow \sqrt{\pi^2 \alpha^2 - bc} &= \pi (2k + \alpha) \\ &&\Leftrightarrow \pi^2 \alpha^2 - bc &= \pi^2 (2k + \alpha)^2 \\ &&\Leftrightarrow bc &= \pi^2 [\alpha^2 - (2k + \alpha)^2] \\ &&\Leftrightarrow bc &= -4k\pi^2 (\alpha + k). \end{aligned}$$

Como $bc < \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$-4k\pi^2 (\alpha + k) < \pi^2 \alpha^2 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k\alpha + \alpha^2 < 0 \Leftrightarrow (2k + \alpha)^2 < 0.$$

3. Como $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$ y $bc < \pi^2 \alpha^2$, entonces

$$\begin{aligned} -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= \pi i k &\Leftrightarrow i\sqrt{\pi^2 \alpha^2 - bc} &= \pi i (k + \alpha) \\ &&\Leftrightarrow \pi^2 \alpha^2 - bc &= \pi^2 (k + \alpha)^2 \\ &&\Leftrightarrow bc &= \pi^2 [\alpha^2 - (k + \alpha)^2] \\ &&\Leftrightarrow bc &= -k\pi^2 (2\alpha + k). \end{aligned}$$

Luego,

$$-k\pi^2 (2\alpha + k) < \pi^2 \alpha^2 \Leftrightarrow 0 < (k + \alpha)^2 \Leftrightarrow k \neq \alpha.$$

Como

$$W(1) = \begin{pmatrix} bc_1 \left(\frac{e^{\beta_1 - 1}}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{-\beta_1 - 1}}{\beta_1} \right) + 1 & -c'_0 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}) \\ c_1 (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}) & bc_1 \left(\frac{e^{-\beta_1 - 1}}{2\pi i \alpha + \beta_1} + \frac{e^{\beta_1 - 1}}{\beta_1} \right) + 1 \end{pmatrix}.$$

Si k es par, entonces $e^{\beta_1} = 1$ y $W(1) = I$. Si k es impar, entonces $e^{\beta_1} = -1$ y $W(1) = -2bc_1 \left(\frac{1}{(2\alpha + k)\pi i} + \frac{1}{k\pi i} + 1 \right) I$.

4. Como $\beta_1 = -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc}$ y $bc > \pi^2 \alpha^2$ entonces

$$\begin{aligned} -\pi i \alpha + \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= \pi i k &\Leftrightarrow \sqrt{-\pi^2 \alpha^2 + bc} &= \pi i (k + \alpha) \\ &&\Leftrightarrow -\pi^2 \alpha^2 + bc &= -\pi^2 (k + \alpha)^2 \\ &&\Leftrightarrow bc &= \pi^2 [\alpha^2 - (k + \alpha)^2] \\ &&\Leftrightarrow bc &= -k\pi^2 (2\alpha + k). \end{aligned}$$

Luego,

$$-k\pi^2 (2\alpha + k) > \pi^2 \alpha^2 \Leftrightarrow k^2 + 2\alpha k + \alpha^2 < 0 \Leftrightarrow (k + \alpha)^2 < 0.$$

□

4. Holonomía para ω . Sea w la 1-forma integrable asociada a los campos X e Y (como al inicio de la sección 2), es decir $w = i_X \circ i_Y (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) = f_1 dz_1 + f_2 dz_2 + f_3 dz_3$, donde

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \lambda_2 z_2 b_3(z) - \lambda_3 z_3 b_2(z), \\ f_2(z) &= \lambda_3 z_3 b_1(z) - \lambda_1 z_1 b_3(z), \\ f_3(z) &= \lambda_1 z_1 b_2(z) - \lambda_2 z_2 b_1(z). \end{aligned}$$

Supongamos que el plano ($z_3 = 0$) es una separatriz de w , entonces existe una 2-formas holomorfas θ tal que $w \wedge dz_3 = z_3 \theta$. Entonces,

$$w \wedge dz_3 = f_1 dz_1 \wedge dz_3 + f_2 dz_2 \wedge dz_3 = z_3 \theta,$$

z_3 divide a las funciones f_1 y a f_2 . Asumiendo además que el conjunto singular $\text{sing}(w_{\varphi^0})$ es de codimensión mayor o igual a dos, esto implica que z_3 no divide a b_1 ni a b_2 . Sea $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow (z_3 = 0)$ una curva cerrada definido por $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), 0)$, donde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ con $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t \alpha}$ y $\gamma_2(t) = e^{2\pi i t \beta}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$. La curva $\tilde{\gamma}$ es un lazo que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ (es decir es una curva cerrada en el intervalo cerrado $[0, 1]$).

Teorema 4.1. Sea $w = i_X \circ i_Y (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$, donde $X(z) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} e$ y $Y(z) = \sum_{i=1}^3 b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ tales que $[X, Y] = -Y$. Si 0 es una singularidad aislada de w y ($z_3 = 0$) es una separatriz de la foliación asociada a w , entonces $h_{\tilde{\gamma}} : (\Sigma, (1, 1, 0)) \rightarrow (\Sigma, (1, 1, 0))$ la función holonomía asociado a $\tilde{\gamma}$ es lineal y periódica, donde $\tilde{\gamma}(t) = (e^{2\pi i t \lambda_1}, e^{2\pi i t \lambda_2}, 0)$.

Demostración: Sea $\pi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la proyección dado por $\pi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$. Esta función es transversal a la foliación obtenida por w en una vecindad pequeña del punto $(1, 1, 0)$. Sea $\tilde{\Gamma}_{z_3}(t) = (\gamma(t), \Gamma(t, z_3))$ el levantamiento de γ con respecto a π en el punto $(1, 1, z_3)$ cercano al punto $(1, 1, 0)$. Sea $\Gamma(t, z_3) = \sum_{k \geq 0} c_k(t) z_3^k$ su expresión en series de potencias. Como $\tilde{\Gamma}_{z_3}(0) = (1, 1, z_3)$ entonces $\Gamma(0, z_3) = z_3$, luego

$$c_1(0) = 1 \text{ y } c_k(0) = 0 \forall k \neq 1.$$

La curva $\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)$ está siempre contenido en una hoja dada por w y que pasa por el punto $(1, 1, z_3)$, entonces

$$w(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Gamma}_{z_3}(t) \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^3 f_j(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) dz_j \right) \left(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right) = 0,$$

esto es equivalente a

$$f_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \gamma'_1(t) + f_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \gamma'_2(t) + f_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) = 0. \quad (4.1)$$

Usando f_1 y f_2 :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) = \lambda_2 \gamma_2(t) b_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \lambda_3 \Gamma(t, z_3) b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)), \\ f_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) = \lambda_3 \Gamma(t, z_3) b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \lambda_1 \gamma_1(t) b_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)), \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \gamma'_1(t) + f_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \gamma'_2(t) &= b_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) [\lambda_2 \gamma_2(t) \gamma'_1(t) - \lambda_1 \gamma_1(t) \gamma'_2(t)] + \\ &\quad \lambda_3 \Gamma(t, z_3) [\gamma'_1(t) b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \gamma'_2(t) b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t))]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Además,

$$f_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) = [\lambda_1 \gamma_1(t) b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \lambda_2 \gamma_2(t) b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t))] \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3). \quad (4.3)$$

Sustituyendo (4.2) y (4.3) en (4.1):

$$\begin{aligned} 0 &= b_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) [\lambda_2 \gamma_2(t) \gamma'_1(t) - \lambda_1 \gamma_1(t) \gamma'_2(t)] + \left(\lambda_3 \gamma'_1(t) \Gamma(t, z_3) + \lambda_1 \gamma_1(t) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right) b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \\ &\quad \left(\lambda_3 \gamma'_2(t) \Gamma(t, z_3) + \lambda_2 \gamma_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right) b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t \alpha}$ y $\gamma_2(t) = e^{2\pi i t \beta}$, entonces $\gamma_1'(t) = 2\pi i \alpha \gamma_1(t)$ y $\gamma_2'(t) = 2\pi i \beta \gamma_2(t)$ sustituyendo en la ecuación (4.4) se tiene:

$$0 = 2\pi i \gamma_1(t) \gamma_2(t) [\alpha \lambda_2 - \beta \lambda_1] b_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) + \gamma_1(t) \left[2\pi i \alpha \lambda_3 \Gamma(t, z_3) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right] b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \gamma_2(t) \left[2\pi i \beta \lambda_3 \Gamma(t, z_3) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right] b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)). \quad (4.5)$$

En particular si $\alpha = \lambda_1$ y $\beta = \lambda_2$, entonces sustituyendo en (4.5):

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \gamma_1(t) \left[2\pi i \lambda_3 \Gamma(t, z_3) - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right] b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \lambda_2 \gamma_2(t) \left[2\pi i \lambda_3 \Gamma(t, z_3) - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right] b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)), \\ &= \left[\lambda_1 \gamma_1(t) b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \lambda_2 \gamma_2(t) b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \right] \left[2\pi i \lambda_3 \Gamma(t, z_3) - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) \right], \\ &= f_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) \frac{d}{dt} (e^{2\pi i t \lambda_3} \Gamma(t, z_3)), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para $t = 0$ en (4.6):

$$\begin{aligned} f_3(1, 1, z_3) \frac{d}{dt} (e^{2\pi i t \lambda_3} \Gamma(t, z_3)) \Big|_{t=0} = 0 &\Rightarrow f_3(1, 1, z_3) \left(2\pi i \lambda_3 \Gamma(0, z_3) + \frac{d\Gamma(t, z_3)}{dt} \Big|_{t=0} \right) = 0 \\ &\Rightarrow f_3(1, 1, z_3) \sum_{k \geq 0} (2\pi i \lambda_3 c_k(0) + c'_k(0)) z_3^k = 0. \end{aligned}$$

Como $f_3(1, 1, z_3) \neq 0$, entonces para todo $k \geq 0$:

$$2\pi i \lambda_3 c_k(0) + c'_k(0) = 0. \quad (4.7)$$

Así tenemos $c'_1(0) = -2\pi i \lambda_3$ y $c'_k(0) = 0$ para $k \neq 1$. usando la casi-homogeneidad de b_1 y de b_2 en f_3 :

$$\begin{aligned} f_3(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) &= \lambda_1 \gamma_1(t) b_2(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)) - \lambda_2 \gamma_2(t) b_1(\tilde{\Gamma}_{z_3}(t)), \\ &= e^{2\pi i (-1 + \lambda_1 + \lambda_2)t} \left[\lambda_1 b_2 \left(1, 1, \frac{\Gamma(t, z_3)}{e^{2\pi i \lambda_3 t}} \right) - \lambda_2 b_1 \left(1, 1, \frac{\Gamma(t, z_3)}{e^{2\pi i \lambda_3 t}} \right) \right], \\ &= e^{2\pi i (-1 + \lambda_1 + \lambda_2)t} f_3 \left(1, 1, \frac{\Gamma(t, z_3)}{e^{2\pi i \lambda_3 t}} \right). \end{aligned}$$

Luego la ecuación (4.6) queda

$$f_3 \left(1, 1, \frac{\Gamma(t, z_3)}{e^{2\pi i \lambda_3 t}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) - 2\pi i \lambda_3 \Gamma(t, z_3) \right) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (4.8)$$

En general, si $f_3 \left(1, 1, \frac{\Gamma(t, z_3)}{e^{2\pi i \lambda_3 t}} \right) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, z_3) = 2\pi i \lambda_3 \Gamma(t, z_3)$$

y esto equivale a $c'_k(t) = 2\pi i \lambda_3 c_k(t)$ con $c_1(0) = 1$ y $c_k(0) = 0$ para $k \neq 1$. Resolviendo estas ecuaciones se tiene

$$c_k(t) = \alpha_k e^{2\pi i \lambda_3 t}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Usando las condiciones iniciales tenemos

$$c_1(t) = e^{2\pi i \lambda_3 t} \text{ y } c_k(t) = 0 \text{ para } k \neq 1.$$

Sea $h_{\tilde{\gamma}} : (\sum, (1, 1, 0)) \rightarrow (\sum, (1, 1, 0))$ la función holonomía asociado a $\tilde{\gamma}$, entonces

$$h_{\tilde{\gamma}}(1, 1, z_3) = (1, 1, \Gamma(1, z_3)) = (1, 1, e^{2\pi i \lambda_3} z_3).$$

Authorcontributions. Se usó el método inductivo deductivo combinado las referencias bibliográficas dadas en el artículo.

Funding. Esta investigación no recibió financiación externa.

Conflicts of interest. Declaro que no hay ningún conflicto de interés con otros autores.

ORCID and License

Benito Leonardo Ostos Cordero <https://orcid.org/0000-0001-5931-3595>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](#)

Referencias

- [1] Ehresmann C. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Séminaire Bourbaki. 1952;24:153-68.
- [2] Reeb G. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Ann Sci Éc Norm Sup. 1948;11:321-67.
- [3] Camacho C, Sad P. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. Ann of Math. 1982;115(3):579-95.
- [4] Mattei J, Moussu R. Holonomie et intégrales premières. Ann Sci Éc Norm Sup. 1980;13(4):469-523.
- [5] Stolovitch L. Holomorphic normal form of nonlinear perturbations of nilpotent vector fields. J Differential Equations. 2016;260(1):1-50.
- [6] Ribón J, Rosas R. Nondegenerate germs of holomorphic foliations with prescribed holonomy. Math Z. 2025;311(80):1-50.
- [7] Chiba H. Kovalevskaya exponents and the space of initial conditions of a quasi-homogeneous vector field. J Differential Equations. 2015;259:7681-716.
- [8] Zhou C, Chiba H. Quasi-homogeneous integrable system: free parameters, Kovalevskaya exponents, and the Painlevé property; 2025. arXiv:2505.24330v2. Available from: <https://arxiv.org/abs/2505.24330>.
- [9] Camacho C, Neto L. A geometric theory of foliations. 1st ed. Boston: Birkhäuser; 1985.
- [10] Viana M, Espinar J. Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice. No. 212 in Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society; 2021.
- [11] Arnold VI. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. 2nd ed. New York: Springer; 1983.
- [12] Siegel CL. Iteration of analytic functions. Ann Math. 1942;43:807-12.
- [13] Brjuno AD. Analytical forms of differential equations. Trans Mosc Math Soc. 1971;25:131-288.
- [14] Pérez-Marco R. Linearization of holomorphic germs with resonant linear part; 2000. arXiv:math/0009030v1. Available from: <https://arxiv.org/abs/math/0009030>.
- [15] Neto L, Scárdua B. Complex algebraic foliations. No. 67 in De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin: De Gruyter; 2020.