



Euclidean space perturbed by a constant vector field and its relation to a Zermelo navigation problem

Espacio euclidiano perturbado por un campo vectorial constante y su relación con un problema de navegación de Zermelo

Dik D. Lujerio Garcia^{ID}, Newton M. Solórzano Chávez^{ID}, Marck A. Molina Morales^{ID} and Bibiano M. Cerna Maguiña^{ID}

Received, Jan. 18, 2025;

Accepted, May. 05, 2025;

Published, Jul. 27, 2025



How to cite this article:

Lujerio D, et al. *Euclidean space perturbed by a constant vector field and its relation to a Zermelo navigation problem*. *Selecciones Matemáticas*. 2025;12(1):15–32. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2025.01.02>

Abstract

In this work, the authors perturb the Euclidean plane with a constant vector field of the form $W = (0, \varepsilon)$ with $0 \leq \varepsilon < 1$, which can be interpreted as wind currents affecting the movement of ships in a constant unidirectional way. It is observed that the resulting perturbed norm, called the ε -Euclidean metric, which is non-reversible, is a Finsler metric. In this way, a new non-Euclidean geometry is introduced. With this, the ε -Euclidean distance is induced and defined. This new way of measuring point-to-point distances can be interpreted, physically, as optimal travel time. Due to the non-reversibility of the ε -Euclidean metric, two types of circumferences are defined and characterized. Distance formulas (or optimal travel time) from point to line, from line to point, and from line to line are obtained, as well as a geometric construction technique for obtaining the distance from a point to a parabola, which can be adapted to other curves that simulate the edge of a beach. Examples and graphs are presented for a better understanding of the work.

Keywords . Finsler metric, ε -euclidian metric, Zermelo navigation problem, non-euclidean geometry.

Resumen

En este trabajo, los autores perturban el plano euclidiano con un campo vectorial constante de la forma $W = (0, \varepsilon)$ con $0 \leq \varepsilon < 1$, el cual puede ser interpretado como corrientes de viento afectando el movimiento de embarcaciones de manera unidireccional constante. Se observa que la norma perturbada resultante, llamada ε -métrica euclidiana, la cual es no reversible, es una métrica Finsler. De esta forma, se introduce una nueva geometría no euclidiana. Con esta ε -métrica euclidiana se induce y se define la ε -distancia euclidiana. Esta nueva forma de medir distancias de punto a punto puede ser interpretada, físicamente, como tiempo de viaje óptimo. Debido a la no reversibilidad de la ε -métrica euclidiana, son definidas y caracterizadas dos tipos de circunferencias. Son obtenidas fórmulas de distancias (o tiempo de viaje óptimo) de punto a recta, de recta

*Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, UNASAM, Perú. **Correspondence author** (dlujerio@unasam.edu.pe).

[†]ILACVN - CICN, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, UNILA, Brasil. (nmayer159@gmail.com).

[‡]Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, UNASAM, Perú. (mmolinam@unasam.edu.pe).

[§]Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, UNASAM, Perú. (bcernam@unasam.edu.pe).

a punto y de recta a recta, así como también se presenta una técnica de construcción geométrica para la obtención de distancia de punto a parábola, el cual puede ser adaptada a otras curvas que simulan el borde de una playa. Ejemplos y gráficos son presentados para una mejor comprensión del trabajo.

Palabras clave. Métrica Finsler, ε -métrica euclidiana, problema navegacional de Zermelo, Geometría no euclidiana.

1. Introduction. La física moderna, en su búsqueda por teorías unificadas y comprensión profunda de la naturaleza, encuentra en la geometría no euclidiana un aliado fundamental. Sea en la relatividad general, en la cosmología o en otras áreas. Estos modelos no euclidianos han sido cruciales para describir fenómenos que desafían la intuición y la geometría clásica.

Un ejemplo notable de geometría no euclidiana es la geometría Randers, utilizada para modelar el tiempo de viaje de un barco en un escenario donde hay una fuerza externa, como la corriente de viento. Este modelo es particularmente útil en aplicaciones náuticas y meteorológicas, ofreciendo una forma más precisa de prever rutas y tiempos de viaje (véase por ejemplo [1] y [2]).

Las métricas Randers, son un caso particular de las métricas Finsler, y son definidas como la suma de una métrica Riemanniana y una 1-forma. Las métricas Randers fueron primeramente estudiadas por el físico G. Randers en 1941 desde el punto de vista de relatividad general [3]. Tiempo después, estas métricas fueron aplicados a la teoría del microscopio electrónico por R. S. Ingarden en 1957, quien los nombró, por primera vez, métricas Randers. Desde entonces, las métricas Randers vienen siendo usados para distintas áreas del saber, como Biología, Ecología, Física, etc.

Por otro lado, el problema de navegación de Zermelo surgió en la mente del matemático Ernst Zermelo al presenciar la circunnavegación de la Tierra por el dirigible “Graf Zeppelin” en agosto de 1929. Zermelo consideró un campo vectorial definido en el plano euclidiano que describe la distribución de los vientos como función de la posición y el tiempo. Se planteó entonces la siguiente pregunta: ¿cómo debe volar un dirigible o un avión, moviéndose a una velocidad constante contra el viento, para alcanzar un punto dado Q desde un punto de partida dado P en el menor tiempo posible? [4]

En [5], los autores describieron el problema de navegación de Zermelo en variedades Riemannianas y demostraron que la trayectoria con el tiempo de viaje más corto es la geodésica de una métrica Randers. Recíprocamente, demostraron de manera constructiva que toda métrica Randers surge como solución del problema de navegación de Zermelo en algún paisaje Riemanniano bajo la influencia de un viento apropiado.

Estudios interesantes sobre geometría bidimensional no euclidiana pueden ser encontrados en [6, 7, 8, 9, 10, 11]. En contraste a estos trabajos, en este artículo estudiamos una métrica Randers bidimensional que es obtenida por medio de una perturbación de la geometría euclidiana por un campo vectorial constante. Esto, motivado por un problema de navegación, donde la corriente de viento es unidireccional y constante.

Una métrica Finsler $F = F(x, y)$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, es llamada *proyectivamente plana*, si todas sus geodésicas son líneas rectas. Sabemos que una métrica Finsler $F = F(x, y)$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es *proyectivamente plana* si, y solamente si, F satisface la siguiente ecuación de Hamel (ver página 22 en [12]),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2}. \quad (1.1)$$

Para mayor profundidad sobre métricas Finsler se recomiendan [13, 14, 15, 16, 17].

En la Sección 2 recordamos algunos resultados básicos para el buen desarrollo del trabajo. En la Sección 3 obtenemos y definimos la ε -métrica euclidiana, demostramos que sus geodésicas son líneas rectas y luego obtenemos la ε -distancia euclidiana. Con esto, definimos y caracterizamos las circunferencias ε -perturbadas, obtenemos fórmulas de distancias de punto a recta, de recta a punto y de recta a recta. En la Sección 4 son usados métodos de geometría euclidiana para obtener distancias de punto a parábola y de punto a circunferencia.

2. Preliminares. Z. Shen en [18] expresa: “Metric spaces exist everywhere in our life” (Los espacios métricos están en toda parte de nuestras vidas). Esta afirmación resalta la ubicuidad de los espacios métricos en diversas áreas del conocimiento y su aplicabilidad en múltiples contextos. Desde la física hasta la informática y la biología, la estructura de los espacios métricos permite analizar nociones de proximidad, convergencia y continuidad, proporcionando herramientas esenciales en la modelización de fenómenos.

Matemáticamente, un espacio métrico es un conjunto de puntos dotado de una métrica, una función que determina la distancia entre pares de puntos. Esto permite cuantificar la separación entre elementos del espacio y proporciona una base para el análisis de estructuras matemáticas en distintos campos. Más precisamente, tenemos

Definición 2.1 (Ver p. 1 en [18]). Una *métrica* en un conjunto no vacío M es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que satisface las siguientes propiedades

(1) Para cualesquier $p, q \in M$

$$d(p, q) \geq 0,$$

siendo que la igualdad solo se cumple para $p = q$;

(2) Para cualesquier $p, q, r \in M$,

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q).$$

Adicionalmente, si d tiene la siguiente reversibilidad,

(3) Para cualesquier pares de puntos $p, q \in M$

$$d(p, q) = d(q, p),$$

entonces d es llamada métrica reversible.

Note que la Definición 2.1 es diferente a la ya clásica definición de métrica dada por distintos autores, como por ejemplo en [19]. Esta definición se hace conveniente, pues deja clara la idea de que la reversibilidad no es un requisito fundamental para medir distancia no euclidianas.

Definición 2.2. Sea d una métrica cualquiera en $\mathbb{R}^2$. Decimos que una métrica d es *invariante por traslaciones*, si para cualquier traslación $\mathcal{T}_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathcal{T}_p(x) = x + p$, donde $p \in \mathbb{R}^2$, se tenga

$$d(\mathcal{T}_p(\xi), \mathcal{T}_p(\eta)) = d(\xi, \eta),$$

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$.

Definición 2.3. Sea d una métrica cualquiera en $\mathbb{R}^2$. Decimos que una métrica d es *invariante por rotaciones*, si para cualquier rotación $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathcal{R}_\theta(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \xi,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, se tenga

$$d(\mathcal{R}_\theta(\xi), \mathcal{R}_\theta(\eta)) = d(\xi, \eta),$$

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.1. Si consideramos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Dados $P = (x_{1p}, x_{2p})$ y $Q = (x_{1q}, x_{2q})$, las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} d_E(P, Q) &= \sqrt{(x_{1p} - x_{1q})^2 + (x_{2p} - x_{2q})^2}, \\ d_S(P, Q) &= |x_{1p} - x_{1q}| + |x_{2p} - x_{2q}| \quad \text{y} \\ d_M(P, Q) &= \max\{|x_{1p} - x_{1q}|, |x_{2p} - x_{2q}|\}. \end{aligned}$$

son métricas reversibles conocidas como métrica euclidiana, de suma y del máximo.

Un tratamiento interesante sobre la geometría de cónicas considerando las métricas de suma y del máximo son tratados en [6, 7].

Cabe destacar que $\mathbb{R}^2$ tiene una estructura topológica natural inducida por la métrica euclidiana, donde un conjunto es abierto si contiene una bola alrededor de cada uno de sus puntos. Además, en el caso de $\mathbb{R}^2$, así como cualquier $\mathbb{R}^n$, se sabe que este puede ser considerado como espacio vectorial con la estructura de adición y multiplicación por escalares usuales. Con esto, para el vector $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tenemos la definición de norma euclidiana usual sobre $\mathbb{R}^2$ dada por

$$|y| = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}.$$

De manera general, la definición de norma se extiende a espacios vectoriales:

Definición 2.4. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera vectores $u, v \in V$ y escalar λ :

1. $\|u\| \geq 0$, donde la igualdad solo ocurre si $u = 0$;
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

es llamada norma.

Definición 2.5 (Campo vectorial). Un *campo vectorial* en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ es una aplicación $W : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que asocia a cada punto $x \in \Omega$ un vector $W(x)$ de $\mathbb{R}^2$.

Por simplicidad de notación, de ahora en adelante el campo vectorial $W(x)$ será denotado por W_x .

Definición 2.6 (ver p. 104 em [20]). (*Curva parametrizada diferenciable regular en $\mathbb{R}^2$*) Una *curva parametrizada* en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$. Una curva parametrizada c es llamada *diferenciable* si c es de clase C^k , donde $k = 1, 2, \dots$, esto significa que cada coordenada de c es de clase C^k . Decimos que una curva parametrizada es *suave* si es de clase C^k , donde $k = 1, 2, \dots$. Una curva parametrizada diferenciable c es llamada *regular* en I si $c'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$. Una curva parametrizada c es dicha *regular por partes* si existen $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ tal que $c|_{[t_i, t_{i+1}[}$ es regular en $]t_i, t_{i+1}[$, para cada $i = 1, \dots, n-1$.

Para la siguiente definición, consideremos que la curva sea, por lo menos, de clase C^1 .

Definición 2.7. Sea $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular de clase C^1 . La *longitud de arco* de c , denotado por $\mathcal{L}(c)$, es definida por:

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b |c'(\tau)| d\tau.$$

Para cualquier par de puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, definimos la distancia euclidiana usual de P a Q como:

$$d(P, Q) := |Q - P|.$$

Cabe mencionar que la definición de la distancia dada encima es una simplificación o consecuencia de la siguiente definición alternativa:

$$d(P, Q) := \inf_c \mathcal{L}(c), \quad (2.1)$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto de todas las curvas regulares por partes c tales que $c(a) = P$ e $c(b) = Q$. La simplificación se debe al hecho de que el ínfimo en (2.1) es alcanzado por cualquier recta $c(t)$, en particular, pudiendo ser considerado $c(t) = tQ + (1-t)P$.

2.1. Métricas Finsler. Aunque una métrica Finsler F es una función definida sobre el fibrado tangente TM de una variedad diferenciable M , para fines didácticos, y siguiendo el espíritu de diseminar la geometría Finsler en la graduación, en este trabajo presentamos una definición simplificada de una métrica Finsler en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Intuitivamente, podemos pensar en una métrica Finsler como una generalización de norma definida sobre el espacio tangente $T_x M$ para cada $x \in M$. Para un tratamiento más completo de las métricas Finsler en variedades diferenciables, remitimos a [12, 18, 21].

Definición 2.8. La función $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se denomina *métrica Finsler sobre Ω* , si para $x \in \Omega$ e $y \in \mathbb{R}^n$, F satisface las siguientes propiedades:

1. $F(x, y)$ es C^∞ para todo $x \in \Omega$ e $y \neq 0$;
2. $F(x, y) > 0$, para todo $x \in \Omega$ e $y \neq 0$;
3. $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, donde λ es cualquier número real positivo;
4. La matriz Hessiana de $\frac{1}{2}F^2$, denotada por $[g_{ij}]$,

$$[g_{ij}] = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_i \partial y_j} \right]$$

es definida positiva.

Ejemplo 2.2. Sean $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Las siguientes métricas son métricas Finsler conocidas:

1. Métrica Euclidiana canónica sobre $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2};$$

2. Métrica Riemanniana sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + [a_{12}(x) + a_{21}(x)]y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2},$$

donde $a_{ij}(x)$ son funciones diferenciables que definen una matriz simétrica y definida positiva $[a_{ij}(x)]$ para todo $x \in \Omega$.

3. Métrica Randers sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \alpha(x, y) + \beta(x, y) \\ &= \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + [a_{12}(x) + a_{21}(x)]y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2} + b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2, \end{aligned}$$

donde $a_{ij}(x)$ y $b_i(x)$ son funciones diferenciables tales que la matriz $[a_{ij}(x)]$ es simétrica y definida positiva y $b_i(x)$ satisfacen

$$\sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2} < 1,$$

donde $[a^{ij}(x)] = [a_{ij}(x)]^{-1}$.

2.2. Problema de navegación de Zermelo. Es importante destacar que cualquier problema de navegación de Zermelo en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (incluyendo dominios más generales como variedades diferenciables) da lugar a una métrica Randers en Ω (o dominios más generales). Además, toda métrica de Randers se origina de un problema de navegación de Zermelo (ver [5, 22] y el Capítulo 2 en [21]).

En esta sección, exploraremos las métricas de Randers derivadas del problema de navegación de Zermelo modelado en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que un barco es impulsado por una fuerza interna (como la fuerza de un motor) con un vector de velocidad U_x de longitud constante, $|U_x| = 1$. Sin un vector de velocidad externo, las trayectorias más cortas son líneas rectas. En este caso, la longitud de un segmento de recta corresponde exactamente al tiempo de viaje del barco. Específicamente, si $c : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el vector de posición del barco, tal que $\frac{d}{dt}c(t) = U_{c(t)}$ (un vector de velocidad unitaria), entonces:

$$\int_0^t |c'(\tau)| d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t.$$

Ahora, supongamos que existe un vector de velocidad externo W_x , como el generado por el viento, con $|W_x| < 1$. Esta condición asegura que el barco pueda moverse en todas las direcciones. El resultante de estos vectores velocidad $T_x = U_x + W_x$, proporciona la dirección y la velocidad del barco en el punto $x \in \Omega$ (ver Figura 2.1). Una vez que se elige el vector de velocidad interno U_x con $|U_x| = 1$, tenemos:

$$|T_x - W_x| = |U_x| = 1. \quad (2.2)$$

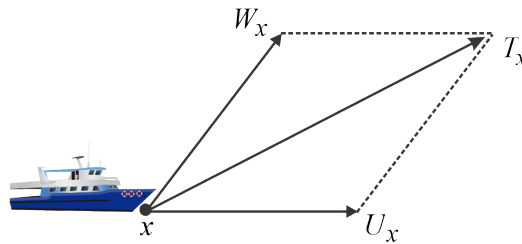
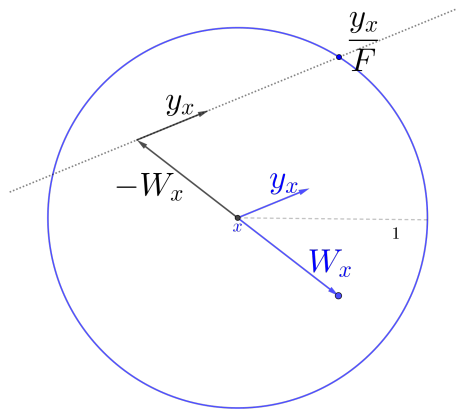


Figura 2.1: Problema de navegación de Zermelo.

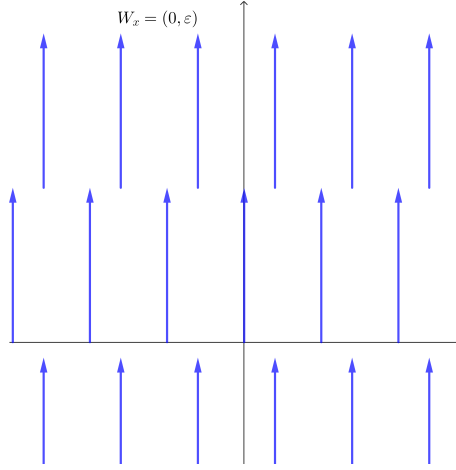
Para cualquier vector $y_x \in \mathbb{R}^2$, existe (ver Figura 2.2) una única solución $F = F(x, y_x) > 0$ a la siguiente ecuación:

$$\left| \frac{y_x}{F(x, y_x)} - W_x \right| = 1. \quad (2.3)$$



Observación 2.1 (Tiempo de viaje y métrica Finsler F). Considerando $y_x = T_x$ en (2.3) y

[illegible]

Figura 3.1: Campo vectorial $W_x = (0, \varepsilon)$.

Definición 3.1. Sean $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \varepsilon < 1$, y $y \in \mathbb{R}^2$. Definimos la ε -métrica euclidiana F_ε por

$$F_\varepsilon(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)y_1^2 + y_2^2} - \varepsilon y_2}{1 - \varepsilon^2}. \quad (3.1)$$

Observación 3.1. Note que F_ε no depende de x . Por simplicidad, denotaremos (3.1) por $F_\varepsilon(y) = F_\varepsilon(x, y)$.

Dos curvas regulares $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ son llamadas *equivalentes* si existe una aplicación diferenciable por partes $\phi : I \rightarrow \bar{I}$ tal que $\phi'(t) > 0$ y $\bar{c}(\phi(t)) = c(t)$, $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Una curva C regular en $\mathbb{R}^2$ es definida como una clase de equivalencia de curvas regulares en $\mathbb{R}^2$. Podemos extender esta definición para curvas regulares por partes de manera natural. Por simplicidad, no distinguiremos C y $c = c(t)$, a menos que sea necesario. Dada una curva regular (representada por) $c : I = [a, b] \rightarrow \Omega$, su reverso $c_- : I \rightarrow \Omega$ es definido por $c_-(t) := c(b + a - t)$. Entonces la clase representada por c_- es distinta de la clase que representa c .

Estas definiciones nos llevan a tener en consideración la orientación de las curvas. En otra palabras, todas las curvas serán orientadas. Esto tiene sentido si pensamos en problemas de Navegación, que exige escoger una dirección y sentido.

Definición 3.2. [ε -longitud de arco] Sea C una curva regular por partes C^∞ de P a Q representada por $c = c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ con $c(a) = P$ e $c(b) = Q$. La ε -longitud de arco de C es definida por:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(C) := \int_a^b F_\varepsilon(c'(t)) dt$$

donde F_ε es la función definida en la Definición 3.1. Así de (3.1) tenemos

$$\mathcal{L}_\varepsilon(C) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \int_a^b \left[\sqrt{(1 - \varepsilon^2)(c'_1(t))^2 + (c'_2(t))^2} - \varepsilon c'_2(t) \right] dt. \quad (3.2)$$

Vamos mostrar que $\mathcal{L}(C)$ está bien definida. Suponga que $\bar{c} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es equivalente a la curva c , entonces existe ϕ tal que $\phi' > 0$, $\bar{t} = \phi(t)$ con $\bar{a} = \phi(a)$ y $\bar{b} = \phi(b)$. Así

$$d\bar{t} = \phi'(t) dt, \quad c'(t) = \bar{c}'(\bar{t}) \phi'(t).$$

y por tanto, por propiedad 3. en Definición 2.8, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b F_\varepsilon(c'(t)) dt &= \int_a^b F_\varepsilon(\bar{c}'(\bar{t}) \phi'(t)) dt \\ &= \int_a^b F_\varepsilon(\bar{c}'(\bar{t})) \phi'(t) dt \\ &= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} F_\varepsilon(\bar{c}'(\bar{t})) d\bar{t}. \end{aligned}$$

Ahora podemos definir distancia: la *distancia ε -euclidiana perturbada* de un punto a otro es el menor de las longitudes de arco de todas las curvas C que parten en P y terminan en Q .

$$d_\varepsilon(P, Q) := \inf_C \mathcal{L}_\varepsilon(C). \quad (3.3)$$

3.1. Geodésicas en espacios Finsler. Una curva $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es llamada *geodésica* de F si satisface el siguiente sistema

$$\frac{d^2 c_i}{dt^2}(t) + 2G^i \left(c(t), \frac{dc}{dt}(t) \right) = 0,$$

donde, los llamados coeficientes geodésicos $G^i = G^i(x, y)$ de la métrica Finsler F son definidas por

$$G^i := \frac{1}{4} g^{il} \left\{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \right\}.$$

Ejemplo 3.1 (Ejemplo 2.3.1 en [21]).

Sea $F(x, y) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + [a_{12}(x) + a_{21}(x)]y_1 y_2 + a_{22}(x)y_2^2}$ una métrica Riemanniana sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces los coeficientes geodésicos G_i son dados por

$$G^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k,$$

donde,

$$\Gamma_{jk}^i(x) = \frac{1}{2} g^{il}(x) \left[\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(x) + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \right],$$

son los conocidos símbolos de Christoffel. Observe que para una métrica Riemanniana, los coeficientes geodésicos $G^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k$ son cuadráticos en $y \in T_x \Omega$. En general, esta propiedad no es satisfecha por métricas Finsler.

En [23] los autores mostraron que las geodésicas de métricas Randers son los caminos que minimizan el tiempo de viaje de un punto a otro en una variedad riemanniana.

El Cuarto Problema de Hilbert [24] presentado por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, es un problema fundamental en la geometría que, en su formulación general, pide la construcción y el estudio de todas las geometrías en las que las líneas rectas son las geodésicas (los caminos más cortos entre dos puntos). El caso regular de este problema consiste en estudiar y caracterizar las métricas de Finsler en un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuyas geodésicas sean líneas rectas. Las métricas Finsler con esta propiedad se denominan métricas *proyectivamente planas* (projectively flat). En particular, en el caso bidimensional, se sabe que una métrica Finsler $F = F(x, y)$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es *proyectivamente plana* si, y solamente si, F satisface la ecuación de Hamel (1.1).

Teorema 3.1. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \varepsilon < 1$. Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, la distancia ε -euclidiana perturbada (o tiempo de viaje considerando velocidad externa $W = (0, \varepsilon)$) desde P hasta Q es dada por

$$d_\varepsilon(P, Q) = \frac{\sqrt{\|Q - P\|^2 - \varepsilon^2 [\pi_1(Q - P)]^2 - \varepsilon \pi_2(Q - P)}}{1 - \varepsilon^2},$$

donde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son las proyecciones sobre la primera y segunda coordenada respectivamente. Es decir, $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1, 2$.

Demostración: Note que esta métrica Finsler F_ε no depende de la posición $x = (x_1, x_2)$. Esto lo convierte, por causa de la ecuación de Hamel, en una métrica proyectivamente plana. Con esto, la distancia (3.3) es alcanzada por la curva $c(t) = P + t(Q - P)$. Considerando $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ y substituyendo $c'(t) = Q - P$ en la fórmula de longitud de arco (3.2), tenemos

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P, Q) &= \inf_c \mathcal{L}_F(c) = \int_0^1 F_\varepsilon(c(t), c'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 - \varepsilon(q_2 - p_2)}}{1 - \varepsilon^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 - \varepsilon(q_2 - p_2)}}{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

□

3.2. Propiedades. Para $0 < \varepsilon < 1$ tenemos:

1. d_ε no es reversible, pues, para $q_2 \neq p_2$,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P, Q) &= \frac{\sqrt{\|Q - P\|^2 - \varepsilon^2 [\pi_1(Q - P)]^2} - \varepsilon \pi_2(Q - P)}{1 - \varepsilon^2} \\ &\neq \frac{\sqrt{\|Q - P\|^2 - \varepsilon^2 [\pi_1(Q - P)]^2} + \varepsilon \pi_2(Q - P)}{1 - \varepsilon^2} = d_\varepsilon(Q, P). \end{aligned}$$

2. d_ε es invariante por traslaciones, pues considerando $\mathcal{T}_A(x) = x + A$, con $A \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\mathcal{T}_A(P), \mathcal{T}_A(Q)) &= d_\varepsilon(P + A, Q + A) \\ &= \frac{\sqrt{\|(Q + A) - (P + A)\|^2 - \varepsilon^2 [\pi_1((Q + A) - (P + A))]^2} - \varepsilon \pi_2((Q + A) - (P + A))}{1 - \varepsilon^2} \\ &= d_\varepsilon(P, Q). \end{aligned}$$

3. d_ε no es invariante por rotaciones. Es suficiente mostrar que

$$d_\varepsilon\left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(1, 0)\right) \neq d_\varepsilon((0, 0), (1, 0)).$$

De hecho,

$$d_\varepsilon\left(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(0, 0), \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(1, 0)\right) = d_\varepsilon((0, 0), (0, 1)) = \frac{1}{1 + \varepsilon},$$

y

$$d_\varepsilon((0, 0), (1, 0)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

3.3. Sobre ε -circunferencias. A continuación, son caracterizados todos los puntos del plano tales que las distancias con un punto fijo son constantes. Esto puede ser interpretado como la búsqueda de puntos tales que el tiempo de viaje sea el mismo. Como d_ε no es reversible, consideramos dos interpretaciones de circunferencias.

Definición 3.3. Dados C un punto en $\mathbb{R}^2$ y r un número real positivo, la circunferencia de centro C y radio r es definida como siendo el conjunto formado por todos los puntos $X \in \mathbb{R}^2$ tales que satisfacen una de las siguientes propiedades:

$$\mathcal{C}_1: d_\varepsilon(C, X) = r;$$

$$\mathcal{C}_2: d_\varepsilon(X, C) = r.$$

El conjunto de puntos verificando la propiedad $(\mathcal{C}_k)$ es llamada circunferencia tipo k , donde $k = 1, 2$; denotaremos ese conjunto por $\mathcal{C}_k[C; r]$.

Note que, por el Teorema 3.1, tenemos

$$X \in \mathcal{C}_k[C; r] \iff \frac{\sqrt{\|X - C\|^2 - \varepsilon^2 [\pi_1(X - C)]^2} + (-1)^k \varepsilon \pi_2(X - C)}{1 - \varepsilon^2} = r.$$

Teorema 3.2. Las circunferencias ε -perturbadas tipo k de centro $C = (c_1, c_2)$ y radio $r > 0$, donde $k = 1, 2$, son caracterizadas por circunferencias euclidianas. Más específicamente, $X = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_k[C; r]$ si, y solamente si,

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2 + (-1)^k \varepsilon r)^2 = r^2.$$

Demostración: Como la distancia ε -perturbada es invariante por traslaciones, basta considerar $C = O = (0, 0)$. Luego,

$$\begin{aligned}
 X = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_k[C; r] &\iff \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2)x_1^2 + x_2^2} + (-1)^k \varepsilon x_2}{1-\varepsilon^2} = r \\
 &\iff (1-\varepsilon^2)x_1^2 + x_2^2 = ((1-\varepsilon^2)r - (-1)^k \varepsilon x_2)^2 \\
 &\iff x_1^2 + x_2^2 + 2(-1)^k r \varepsilon x_2 = (1-\varepsilon^2)r^2 \\
 &\iff x_1^2 + (x_2 + (-1)^k \varepsilon r)^2 = r^2.
 \end{aligned}$$

Observe que en la segunda equivalencia fue usado el hecho de que $d_\varepsilon(O, X), d_\varepsilon(X, O) \geq 0$ para cualquier $X \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Observación 3.2. Concluimos que las circunferencias $\mathcal{C}_k[C; r]$ son circunferencias euclidianas trasladadas. Por ejemplo, la circunferencia tipo 1 de centro $C = (0, 0)$ y radio r , nada más es una circunferencia euclidiana de centro $C' = (0, \varepsilon r)$ y radio r . Esto puede ser interpretado como si la corriente de viento $W = (0, \varepsilon)$ empujase la circunferencia de radio r a una proporción de εr . (ver Figuras 3.2a - 3.2b)

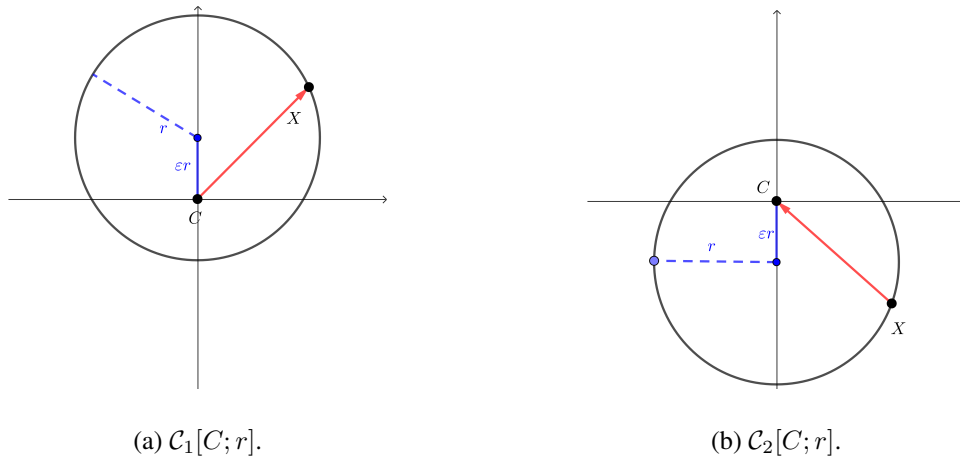


Figura 3.2: Distancias ε -perturbadas de punto a recta.

3.4. Distancia de punto a recta. Continuando, calcularemos el tiempo y la trayectoria de viaje que un barco puede optar por recorrer si quiere optimizar el viaje de un punto a una playa rectilínea.

Definición 3.4. Las *distancias ε -perturbadas*, $d_\varepsilon(P, s)$, del punto P a la recta s y $d_\varepsilon(s, P)$, de la recta s al punto P , son definidas, respectivamente, por:

$$d_\varepsilon(P, s) := \min\{d_\varepsilon(P, P'); P' \in s\} \quad \text{e} \quad d_\varepsilon(s, P) := \min\{d_\varepsilon(P', P); P' \in s\}.$$

Decimos que el punto $P^* \in s$ realiza la *distancia ε -perturbada de P hasta s o de s hasta P* , si

$$d_\varepsilon(P, P^*) = d_\varepsilon(P, s) \quad \text{o} \quad d_\varepsilon(P^*, P) = d_\varepsilon(s, P).$$

La obtención de las fórmulas de distancias $d_\varepsilon(P, s)$ y $d_\varepsilon(s, P)$, será necesario dividirlo en dos casos.

Proposición 3.1. Sean $0 \leq \varepsilon < 1$, $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y la recta, $s : x_1 = c$ entonces

$$d_\varepsilon(P, s) = d_\varepsilon(s, P) = |c - p_1|,$$

y los puntos donde se alcanzan estas distancias son

$$P^* = \begin{cases} (c, p_2 + \varepsilon|c|), & \text{para } d_\varepsilon(P, s) \\ (c, p_2 - \varepsilon|c|), & \text{para } d_\varepsilon(s, P). \end{cases}$$

Demostración: Como d_ε es invariante por traslaciones, podemos considerar $\bar{P} = (0, 0)$ y la recta vertical $s' : \bar{x}_1 = \bar{c} = c - p_1$.

Para el caso, $d_\varepsilon(P, s)$, la distancia $f = f(y)$ desde $\bar{P}$ hasta cualquier punto de la recta s' , por Teorema 3.2, está dada implícitamente por la ecuación:

$$(\bar{c})^2 + (y - \varepsilon f)^2 = f^2. \quad (3.4)$$

Derivando implícitamente la ecuación (3.4) en relación a y , dos veces, tenemos,

$$(y - \varepsilon f)(1 - \varepsilon f') = f f', \quad (3.5)$$

$$(1 - \varepsilon f')^2 - \varepsilon(y - \varepsilon f)f'' = f'^2 + f f''. \quad (3.6)$$

Si $f'(y_0) = 0$, de (3.5) y (3.4) tenemos $y_0 = \varepsilon f(y_0)$ y $f(y_0) = |\bar{c}|$. Por (3.6), garantizamos que $y_0 = \varepsilon|\bar{c}|$ minimiza f . Para el caso $d_\varepsilon(s, P)$ el análisis es análogo al anterior. $\square$

Ejemplo 3.2. Considerando $P = (0, 0)$, $s : x = 2$ e $s' : x = -2$ tenemos que

$$d_\varepsilon(P, s) = d_\varepsilon((0, 0), (2, 2\varepsilon)) = 2,$$

$$d_\varepsilon(s, P) = d_\varepsilon((2, -2\varepsilon), (0, 0)) = 2.$$

Por otro lado (ver Figura 3.3),

$$d_\varepsilon(P, s') = d_\varepsilon((0, 0), (-2, 2\varepsilon)) = 2,$$

$$d_\varepsilon(s', P) = d_\varepsilon((-2, -2\varepsilon), (0, 0)) = 2.$$

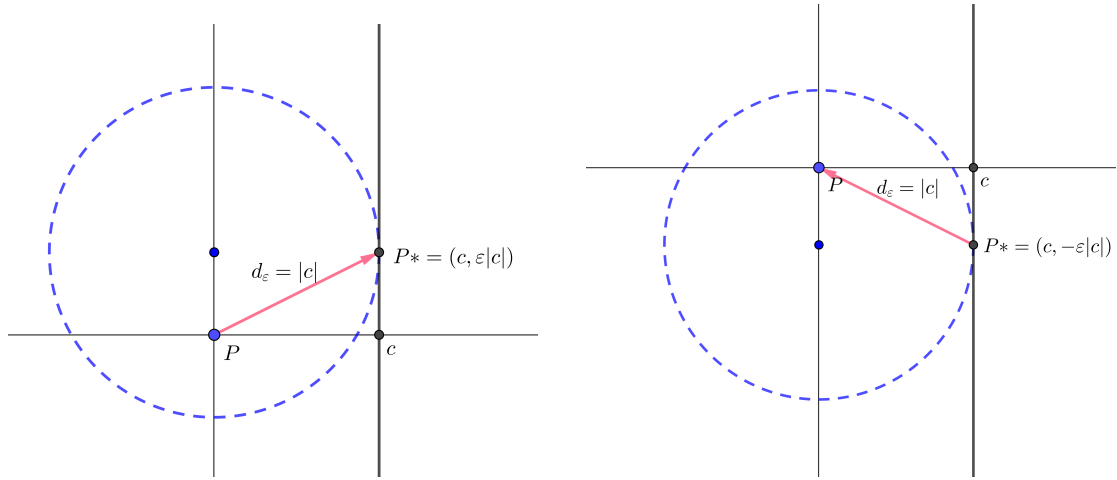


Figura 3.3: Distancias ε -perturbadas de punto a recta y viceversa.

Para obtener las distancias $d_\varepsilon(P, s)$ e $d_\varepsilon(s, P)$, donde s no es vertical, usamos nuevamente los criterios de primera y segunda derivada.

Teorema 3.3. Sean $0 \leq \varepsilon < 1$, $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y la recta $s : x_2 = mx_1 + n$ entonces

$$d_\varepsilon(P, s) = \frac{|\bar{n}|}{\sqrt{1 + m^2 + \varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{n})}},$$

$$d_\varepsilon(s, P) = \frac{|\bar{n}|}{\sqrt{1 + m^2 - \varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{n})}},$$

donde $\bar{n} = mp_1 + n - p_2$. En particular, si $\varepsilon = 0$, (el campo externo es nulo) tenemos la distancia euclidiana usual entre punto y recta.

Demostración: La prueba es para el caso $d_\varepsilon(P, s)$, pues el caso $d_\varepsilon(s, P)$, es análogo. Como d_ε es invariante por traslaciones, podemos considerar $\bar{P} = (0, 0)$ y $s' : \bar{x}_2 = m\bar{x}_1 + \bar{n}$, con $\bar{n} = mp_1 + n - p_2$. Procediendo como en el caso anterior, la función $f = f(x)$ a minimizar está dada implícitamente por

$$x^2 + (mx + \bar{n} - \varepsilon f)^2 = f^2. \quad (3.7)$$

Derivando implícitamente la ecuación (3.7), dos veces, en relación a x , tenemos

$$x + (m - \varepsilon f')(mx + \bar{n} - \varepsilon f) = f f', \quad (3.8)$$

$$1 + (m - \varepsilon f')^2 - \varepsilon f''(mx + \bar{n} - \varepsilon f) = f'^2 + f f''. \quad (3.9)$$

Luego, si x_0 minimiza f , entonces de (3.8) y (3.7) tenemos

$$x_0 = \frac{m(\varepsilon f(x_0) - \bar{n})}{1 + m^2} \quad (3.10)$$

y

$$f^2(x_0) = \frac{(\bar{n} - \varepsilon f(x_0))^2}{1 + m^2}. \quad (3.11)$$

Ahora, por diferencia de cuadrados, de (3.11), tenemos,

$$f(x_0) = \begin{cases} \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+m^2+\varepsilon}}, & \text{si } \bar{n} > 0 \\ \frac{-\bar{n}}{\sqrt{1+m^2-\varepsilon}}, & \text{si } \bar{n} < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

de (3.10), (3.12) en (3.9) tenemos que efectivamente, $f(x_0)$ dado por (3.12) es mínimo. $\square$

Observación 3.3. Note que $\text{sgn}(\bar{n}) = 1$ significa que $mp_1 + n > p_2$, lo cual puede interpretarse como que la recta s está por encima del punto P . Del mismo modo, $\text{sgn}(\bar{n}) = -1$ significa que la recta s está abajo del punto P .

Observación 3.4. De (3.10), el punto donde se alcanza la distancia $d_\varepsilon(P, s)$ es dado por $P^* = (x_1^0, mx_1^0 + \bar{n}) + P$, donde,

$$x_1^0 = \frac{m}{1 + m^2} \left(\frac{\varepsilon |\bar{n}|}{\sqrt{1 + m^2 + \varepsilon \text{sgn}(\bar{n})}} - \bar{n} \right).$$

Análogamente, el punto donde se alcanza la distancia $d_\varepsilon(s, P)$ es dado por $P^* = (x_1^0, mx_1^0 + \bar{n}) + P$, donde,

$$x_1^0 = \frac{m}{1 + m^2} \left(-\frac{\varepsilon |\bar{n}|}{\sqrt{1 + m^2 - \varepsilon \text{sgn}(\bar{n})}} - \bar{n} \right).$$

El siguiente corolario sigue como consecuencia de la Proposición 3.1 y del Teorema 3.3 previamente demostrados.

Corolario 3.1. Sean el punto $P = (p_1, p_2)$ y la recta $s : ax_1 + bx_2 + c = 0$, entonces

$$d_\varepsilon(P, s) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 - \varepsilon b \text{sgn}(ap_1 + bp_2 + c)}},$$

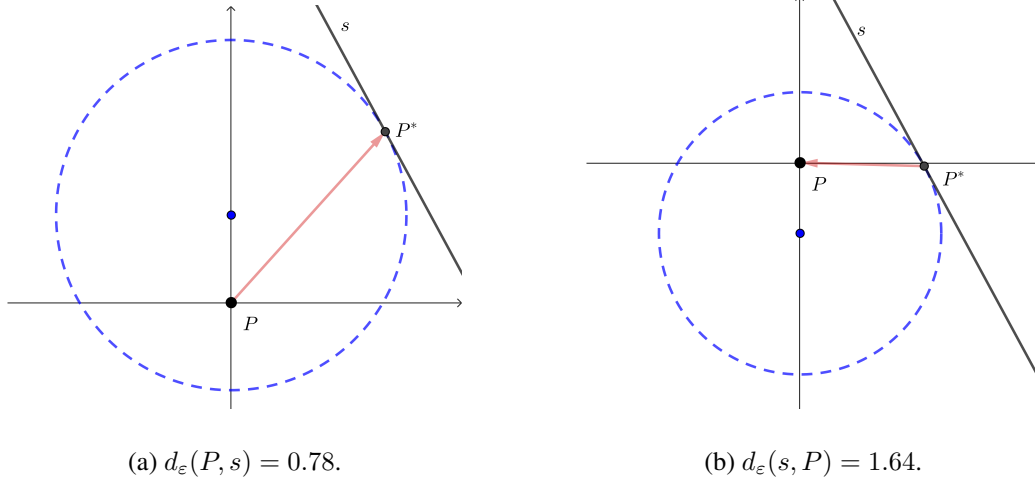
$$d_\varepsilon(s, P) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + \varepsilon b \text{sgn}(ap_1 + bp_2 + c)}}.$$

Ejemplo 3.3. Considerando $P = (0, 0)$, $s : 2x + 2y - 3 = 0$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}$, por el Corolario 3.1 y la Observación 3.4, tenemos (ver Figura 3.4a),

$$d_\varepsilon(P, s) = d_\varepsilon((0, 0), (0.55, 0.95)) = 0.78.$$

Por otro lado (ver Figura 3.4b),

$$d_\varepsilon(s, P) = d_\varepsilon((1.16, 0.34), (0, 0)) = 1.64.$$

Figura 3.4: Distancias ε -perturbadas de punto a recta y viceversa.

3.5. Distancia entre rectas. A continuación, calcularemos el tiempo y la trayectoria de viaje que un barco puede seguir si desea optimizar el recorrido de una playa a otra.

Definición 3.5. Sean s_1 y s_2 dos rectas cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Definimos la ε -distancia euclidiana de s_1 a s_2 como:

$$d_\varepsilon(s_1, s_2) = \inf \{d_\varepsilon(P, Q) : P \in s_1, Q \in s_2\}.$$

De la definición, concluimos que si las rectas s_1 y s_2 se interceptan, entonces $d_\varepsilon(s_1, s_2) = 0$. Por otro lado, tenemos el siguiente teorema,

Teorema 3.4. Sean las rectas paralelas $s_1, s_2 \subset \mathbb{R}^2$ dadas por $s_1 : ax_1 + bx_2 + c_1 = 0$ y $s_2 : ax_1 + bx_2 + c_2 = 0$, con $c_1 \neq c_2$. Entonces la ε -distancia de s_1 hasta s_2 está dada por:

$$d_\varepsilon(s_1, s_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2} - \varepsilon b \operatorname{sgn}(c_2 - c_1)}.$$

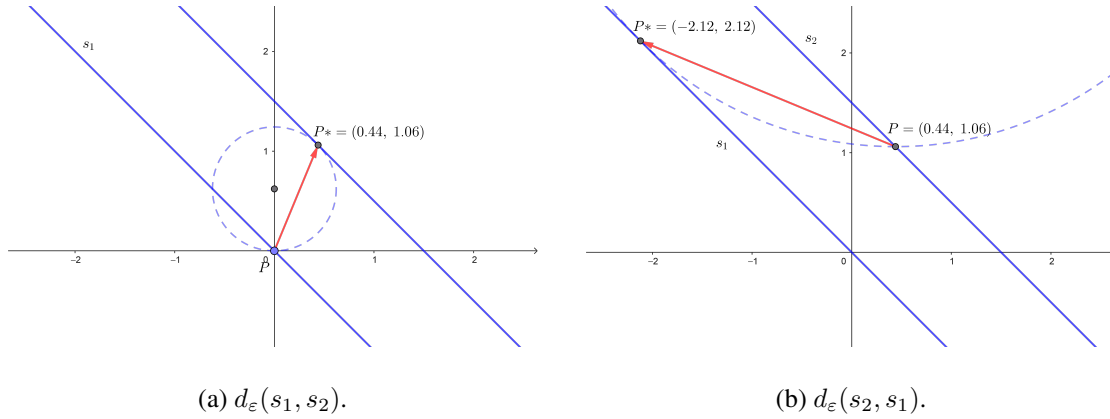
Demostración: Sea $(x_1^0, x_2^0) \in s_1$, un punto arbitrario en la recta, s_1 , entonces, por el Corolario 3.1, tenemos,

$$d_\varepsilon((x_1^0, x_2^0), s_2) = \frac{\overbrace{|ax_1^0 + bx_2^0 + c_2|}^{-c_1}}{\sqrt{a^2 + b^2} - \varepsilon b \operatorname{sgn}(\underbrace{ax_1^0 + bx_2^0 + c_2}_{-c_1})}.$$

□

Ejemplo 3.4. Considerando las rectas $s_1 : x + y = 0$ y $s_2 : 2x + 2y - 3 = 0$. Por el Teorema 3.4, tenemos,

$$d_\varepsilon(s_1, s_2) \approx 0.62.$$

Figura 3.5: ε -distancia de recta a recta.

4. Distancia de punto a curva. En las secciones anteriores se supuso que la playa o el muelle tiene forma rectilínea. En la presente sección, hallaremos las rutas y tiempos de viajes óptimos de una embarcación que parte de un punto para una playa curva. Para enfatizar la geometrización de un problema físico, usaremos construcciones geométricas para construir puntos en el eje vertical Ox_2 tal que sea posible calcular la distancia de este punto a una curva. Como ejemplo práctico usaremos la curva dada por parte de una parábola, siendo que esta técnica puede ser adaptada para otras curvas como gráfico de funciones diferenciables:

4.1. Distancia de punto a parábola. Por Teorema 3.2 y la Observación 3.2, la búsqueda de distancias puede ser construida usando construcciones geométricas euclidianas (ver ejemplos 4.1 y 4.2):

Sea $\mathcal{P} : x_2 = a(x_1 - b)^2 + c$, con $a, b, c > 0$, y $x_1 < b$ parte de una parábola. Dado $P^* = (x_1^0, x_2^0)$ un punto sobre $\mathcal{P}$. El objetivo es obtener un punto P sobre el eje Ox_2 de tal forma que

$$d_\varepsilon(P, \mathcal{P}) = d_\varepsilon(P, P^*).$$

Paso 1. Trazamos la recta perpendicular a $\mathcal{P}$ pasando por P^*

$$L : x_2 - x_2^0 = -\frac{1}{2a(x_1^0 - b)}(x_1 - x_1^0).$$

Paso 2. Obtenemos la intersección de la recta L con el eje Ox_2 :

$$A = \left(0, \frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)} + x_2^0\right).$$

Paso 3. Obtenemos la distancia euclidiana r entre A y P^* , el cual, por Observación 3.2, coincide con $d_\varepsilon(P, P^*)$,

$$r = d_\varepsilon(P, P^*) = d_\varepsilon(P, \mathcal{P}) = \sqrt{(x_1^0)^2 + \frac{(x_1^0)^2}{4a^2(x_1^0 - b)^2}}.$$

Paso 4. Obtenemos el punto P trasladando A por $A - (0, \varepsilon r)$

$$P = \left(0, \frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)} + x_2^0 - \varepsilon \sqrt{(x_1^0)^2 + \frac{(x_1^0)^2}{4a^2(x_1^0 - b)^2}}\right).$$

Observación 4.1.

1. Análogamente se puede obtener P' , para el caso $d_\varepsilon(\mathcal{P}, P')$, haciendo la traslación $A + (0, \varepsilon r)$, como se observa en la Figura 4.2.
2. Puede ser verificado que efectivamente, el punto P obtenido en paso 4 satisface la igualdad dada en el paso 3. En efecto, denotando $r = \sqrt{(x_1^0)^2 + \frac{(x_1^0)^2}{4a^2(x_1^0 - b)^2}}$, tenemos,

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(P, P^*) &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left[\sqrt{(1 - \varepsilon^2)(x_1^0)^2 + \left(\frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)} - \varepsilon r\right)^2} - \varepsilon \left(\varepsilon r - \frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)}\right) \right] \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left[\sqrt{r^2 - 2\frac{\varepsilon r x_1^0}{2a(x_1^0 - b)} + \frac{\varepsilon^2 (x_1^0)^2}{4a^2(x_1^0 - b)^2}} - \varepsilon \left(\varepsilon r - \frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)}\right) \right] \\ &= r. \end{aligned}$$

3. Como consecuencia de la obtención del punto P en el paso 4, podemos resolver x_1^0 de la ecuación

$$\frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)} + a(x_1^0 - b)^2 + c - \varepsilon \sqrt{(x_1^0)^2 + \frac{(x_1^0)^2}{4a^2(x_1^0 - b)^2}} = 0,$$

para obtener el punto en la parábola P^* (ver Ejemplo 4.2) tal que,

$$d_\varepsilon((0, 0), \mathcal{P}) = d_\varepsilon((0, 0), P^*).$$

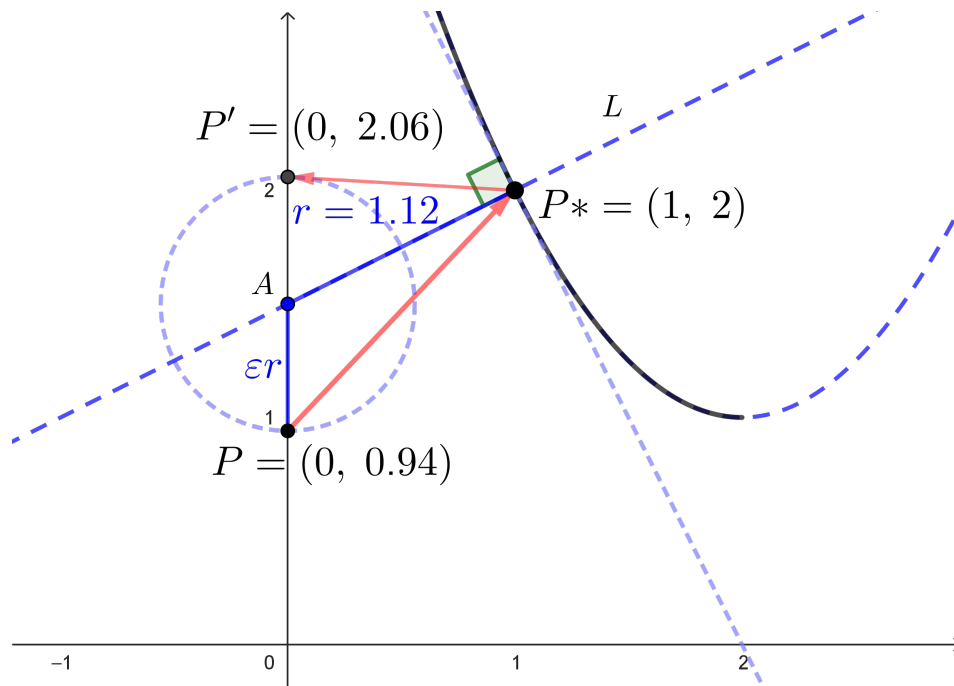
$$d_\varepsilon((0, 0.94), \mathcal{P}) \approx 1.12,$$
$$d(\mathcal{P}, (0, 2.06)) \approx 1.12.$$


Figura 4.1: Distancia punto - parábola.

Ejemplo 4.2. Considerando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y la parábola $\mathcal{P} : x_2 = (x_1 - 2)^2 + 1$. A diferencia del ejemplo anterior, podemos hacer uso de softwares matemáticos, como por ejemplo el software libre wxMaxima (ver Sección 4.2), para aproximar x_1^0 dado un punto P . Así por ejemplo, si $P = (0, 0)$ en el paso 4, tendremos que $x_1^0 \approx 1.2448356$, (ver Figura 4.2), luego,

$$d_{\varepsilon}(P, \mathcal{P}) \approx d_{\varepsilon}((0, 0), (1.2448356, 1.5702733)) = 1.4929655.$$

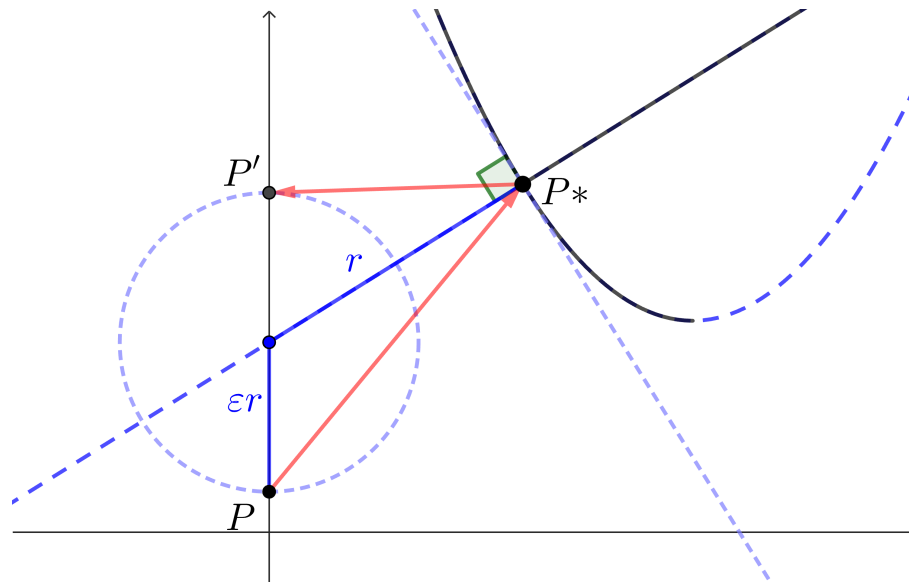


Figura 4.2: Distancia punto - parábola.

4.2. Metodología usada en wxMaxima 21.04. El algoritmo del método de Newton-Raphson se implementó mediante el paquete `newton1` de wxMaxima. El código estructurado fue:

Código 1: Implementación del método de Newton en wxMaxima.

```
load(newton1)$ (* Carga del módulo numérico *)

(* Definición de parámetros *)
a: 1$
b: 2$
c: 1$
ε: 1/2$

(* Función a resolver: *)
f(x) := x/(2*a*(x - b)) + a*(x - b)^2 + c - ε*x*sqrt(1 + 1/(4*a^2*(x - b)^2))$

(* Aplicación del método de Newton con x_0 = -1 y tolerancia 10^{-2} *)
resultado:
newton(f(x), x, -1, 1e-2)$

1.2448355935008932
```

Explicación del Flujo de Trabajo.

1. **Carga de Herramientas:** El módulo `newton1` proporciona la función `newton()` para resolver ecuaciones no lineales numéricamente.
2. **Parámetros Fijos:** Los valores $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, y $\varepsilon = 0.5$ se definen como constantes del modelo.
3. **Función Objetivo:** La ecuación original

$$\frac{x_1^0}{2a(x_1^0 - b)} + x_2^0 - \varepsilon \sqrt{(x_1^0)^2 + \frac{(x_1^0)^2}{4a^2(x_1^0 - b)^2}} = 0, \text{ donde } x_2^0 = a(x_1^0 - b)^2 + c,$$

se reescribe en formato computacional, evitando ambigüedades en la priorización de operadores.

4. Configuración del Método:

- Punto inicial: $x_0 = -1$ (seleccionado mediante análisis preliminar de la curva).
- Tolerancia: 10^{-2} , para garantizar un error absoluto controlado.

Observación 4.2. Sean la parábola $\mathcal{P} : y = a(x - b)^2 + c$ y el punto $P = (x_1, x_2)$, con $x_1 < b$. Por la propiedad de d_ε ser invariante por traslaciones tenemos,

$$d_\varepsilon(P, \mathcal{P}) = d_\varepsilon((0, 0), \overline{\mathcal{P}}),$$

donde, $\overline{\mathcal{P}} : y = a(x - \bar{b})^2 + \bar{c}$, $\bar{b} = b - x_1$, $\bar{c} = c - y_1$.

Entonces, por la Observación 4.1 (item 3), calcular $d_\varepsilon(P, \mathcal{P})$ se reduce a resolver x en la siguiente ecuación

$$\frac{x}{2a(x - \bar{b})} + a(x - \bar{b})^2 + \bar{c} - \varepsilon \sqrt{(x)^2 + \frac{(x)^2}{4a^2(x - \bar{b})^2}} = 0.$$

5. Conclusiones. En este artículo introducimos y estudiamos una nueva forma de medir distancias que no es euclidiana. Esta nueva forma de medir distancias, llamada ε -métrica euclidiana, está directamente relacionada al tiempo de viaje óptimo de un barco navegando en una laguna donde existen corrientes de viento constantes modelado por el campo vectorial constante $W = (0, \varepsilon)$. A diferencia de la geometría euclidiana, esta nueva geometría generada por la ε -métrica euclidiana no es reversible, lo que puede ser interpretado como que el tiempo de viaje de un punto a otro no es simétrico, pues la corriente de viento puede ayudar o retrasar la navegación de un barco.

La no reversibilidad de la métrica ha llevado a la definición y caracterización de dos tipos de circunferencias, lo cual ha sido fundamental para obtener fórmulas explícitas de distancias entre puntos y rectas, así como entre rectas. Estas fórmulas proporcionan herramientas analíticas para el cálculo de tiempos de viaje óptimos en diversos escenarios, como la navegación de embarcaciones en presencia de corrientes de viento.

Adicionalmente, se ha presentado una técnica de construcción geométrica para calcular la distancia de un punto a una parábola, la cual puede ser adaptada a otras curvas que modelan el borde de una playa. Esta técnica geométrica ofrece una alternativa visual y complementaria a los métodos analíticos, facilitando la comprensión y aplicación de los resultados obtenidos.

Todas las figuras en el presente trabajo fueron creadas con ayuda del software libre GeoGebra Classic 5.2 (<http://www.geogebra.org/>).

Contribuciones de los autores. Aportaciones de los autores. Todos los autores de esta publicación contribuyeron de manera equitativa en la conceptualización, investigación, análisis formal, metodología, validación, revisión y redacción del trabajo.

Financiamiento. Esta investigación fue financiada con recursos determinados provenientes del canon, sobre canon y regalías mineras, mediante la Resolución del Consejo Universitario - Rector N° 593-2024-UNASAM, emitida en Huaraz, que otorgó a este proyecto el reconocimiento como ganador en el concurso de investigación básica y aplicada.

Agradecimiento. Los autores agradecen a Dios por permitir la realización de este trabajo, así como a sus familias por su apoyo incondicional. También expresan su gratitud a la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo (UNASAM) por su respaldo institucional y la gestión de los fondos que hicieron posible esta investigación, financiada con recursos provenientes del canon, sobre canon y regalías mineras. El segundo autor agradece el apoyo financiero de la institución educativa UNILA a través del Llamado nro 121/2023/PRPPG-UNILA - PAAP (Nro de Protocolo: 23422.026477/2023-54). Los autores agradecen sinceramente las invaluable sugerencias de los revisores anónimos.

Conflicto de intereses. Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

ORCID and License

Dik D. Lujerio García <https://orcid.org/0000-0002-5360-8189>

Newton M. Solórzano Chávez <https://orcid.org/0000-0001-5492-2068>

Marck A. Molina Morales <https://orcid.org/0009-0009-2156-7528>

Bibiano M. Cerna Maguiña <https://orcid.org/0000-0002-4770-238X>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Antonelli PL, Miron R. Lagrange and Finsler geometry: applications to physics and biology. vol. 76. Springer Science & Business Media; 2013.
- [2] Ángel Javaloyes M, Pendás-Recondo E, Sánchez M. A General Model for Wildfire Propagation with Wind and Slope. SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry. 2023;7(2):414-39. Available from: <https://doi.org/10.1137/22M1477866>.

- [3] Randers G. On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity. *Phys Rev.* 1941 Jan;59:195-9. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.59.195>.
- [4] Ebbinghaus HD, Peckhaus V. *Ernst Zermelo: An approach to His Life and Work.* Springer Berlin, Heidelberg; 2015.
- [5] Bao D, Robles C, Shen Z. Zermelo navigation on Riemannian manifolds. *J Differential Geom.* 2004;66(3):377–435. Available from: <https://projecteuclid.org/journals/journal-of-differential-geometry/volume-66/issue-3/Zermelo-navigation-on-Riemannian-manifolds/10.4310/jdg/1098137838.full>.
- [6] León V, Solórzano Chávez NM, Mosquera Mosquera JE, Maganin J. Cônicas nas métricas da soma e do máximo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática.* 2025 abr;10(1):24–51. Available from: <https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/21114>.
- [7] So S. Recent Developments in Taxicab Geometry. *CUBO, A Mathematical Journal.* 2002 Jun;4(2):75–92. Available from: <https://cubo.ufro.cl/index.php/cubo/article/view/1785>.
- [8] de Oliveira Rufino E, Pontes Diógenes RJ. As Cônicas na geometria exponencial. *Inter-maths.* 2023 dez;4(2):224-44. Available from: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/13635>.
- [9] Chávez NMS, León VAM, Sosa LGQ, Moyses JR. Um problema de navegação de Zermelo: Métrica de Funk. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática.* 2021;7(1):e3010. Available from: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4574>.
- [10] Chávez NMS, Moyses JR, León VAM. Sobre as parábolas de Funk. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática.* 2024;10(1):e3001. Available from: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/6680>.
- [11] Souza MAd, Solórzano Chávez NM. Um espaço de randers especial como modelo concreto de geometria não euclidiana plana: Axioma da régua infinita de randers. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática.* 2024 dez;9(4):11–26. Available from: <https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/20843>.
- [12] Guo E, Mo X. *The geometry of spherically symmetric Finsler manifolds.* vol. VOL-1 of SpringerBriefs in Mathematics. 1st ed. Springer Singapore; 2018.
- [13] Shen Z. *Differential geometry of spray and Finsler spaces.* Springer Science & Business Media; 2013.
- [14] Bao D, Chern SS, Shen Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry.* vol. 200. Springer Science & Business Media; 2012.
- [15] Shen YB, Shen Z. *Introduction to modern Finsler geometry.* World Scientific Publishing Company; 2016.
- [16] Guo E, Mo X, et al. *The geometry of spherically symmetric Finsler manifolds.* Springer; 2018.
- [17] Xia Q. *Geometry And Analysis On Finsler Spaces.* vol. 17. World Scientific; 2025.
- [18] Shen Z. *Lectures on Finsler Geometry.* vol. VOL-1. 1st ed. World Scientific; 2001.
- [19] Lima EL. *Espaços Métricos. Projeto Euclides.* IMPA; 2011.
- [20] Lima EL. *Análise Real. v. 1. Coleção Matemática Universitária-IMPA;* 2014.
- [21] Cheng X, Shen Z. *Finsler Geometry: An approach via Randers spaces.* vol. VOL-1. 1st ed. Science Press Beijing-Springer; 2012.
- [22] Shen Z. Finsler metrics with $K = 0$ and $S = 0$. *Canad J Math.* 2003;55(1):112–132. Available from: <https://doi.org/10.4153/CJM-2003-005-6>.
- [23] Bao D, Robles C, Shen Z. Zermelo navigation on Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry.* 2004;66(3):377–435. Available from: <https://doi.org/10.4310/jdg/1098137838>.
- [24] Hilbert D. Mathematical problems (transl. MW Newson). *Bull Amer Math Soc.* 1902;8:437-79.