EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS DE UNA ECUACIÓN HAMILTONEANA BASADO EN EL GRADO TOPOLÓGICO*

RAÚL SARÁCHAGA VILLANUEVA†, MARCOS FERRER REYNA‡, AND SANTOS ÑIQUE ROMERO§

Resumen

En este trabajo probamos un resultado de existencia para soluciones periódicas de una ecuación Hamiltoneana partícular dependiente del tiempo, la cual es asumida a ser asintóticamente lineal. Las soluciones periódicas son encontradas como puntos críticos de un problema variacional abstracto en un espacio de Hilbert real. Por medio de una reducción a un punto de silla este problema es reducido al problema de encontrar puntos críticos de una función definida sobre un subespacio de dimensión finita. Los puntos críticos son entonces encontrados usando argumentos del grado topológico.

Palabras claves. Hamiltoneano, simplectomorfismos, variedades simplécticas, grado topológico.

1. Introducción . Dos han sido los objetivos buscados al realizar este trabajo. Primero, poner al lector en contacto con teorías no muy difundidas en nuestro medio como lo son las Teorías de Representación de Grupos, de Índices y del Grado Topológico, para lo cual nos basamos en el capítulo 5 del libro Critical Point Theory and Hamiltonian Systems de Mawhin y Willem. Todas ellas forman parte de la primera parte del presente trabajo y lo que se pretendio hacer aquí es aclarar definiciones y resultados del libro mencionado.

En segundo lugar, analizamos un problema en concreto, la existencia de soluciones periódicas de una ecuación Hamiltoneana asintóticamente lineal. En general, la existencia de soluciones periódicas en sistemas dinámicos es una de las interrogantes que generalmente se plantean en Mecánica Clásica y también en Economía, en donde el interés por conocer si existen tales órbitas periódicas está ligado a la consistencia de modelos matemáticos que se emplean en estas y otras ramas de la Ciencia. Pero este tipo de problemas no es más que la simplificación de un problema mucho más complejo que tiene que ver con el estudio de las llamadas variedades simplécticas. Para enterder un poco el asunto, un espacio vectorial V de dimensión finita se llama simpléctico si sobre él tenemos definida una forma bilineal ω que es no degenerada y asimétrica, de donde se desprende que el espacio V debe tener dimensión par. Por lo tanto, el espacio vectorial simpléctico estándar es $\mathbb{R}^{2n}$ con la forma canónica dada por $\omega(x,y) = \langle x, Jy \rangle$, donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Así mismo, aquellas aplicaciones lineales entre espacios simplécticos que preserven la estructura simpléctica de dichos espacios se llaman simplectomorfismos. Y precisamente, ejemplos de simplectomorfismos son las ecuaciones diferenciales Hamiltoneanas, un caso particular del problema de existencia de puntos fijos de simplectomorfismos. Todo esto está enmarcado dentro de la topología simpléctica. El lector interesado en este tema debe consultar el libro de Dusa Mc-Duff y Dietmar Salamon [9]. En él se da una visión más amplia de lo que son las variedades simplécticas y se nos muestra a la vez un campo de investigación en el que se han conseguido avances importantes y que está aún vigente.

*Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Trujillo.
†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(rasv92@hotmail.com).
‡Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(ferrer_m2007@hotmail.com).
§Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(siqueromero@hotmail.com).

Es dentro de esta línea de investigación que concretamente se plantea el problema de la existencia de soluciones periódicas de sistemas Hamiltoneanos. Mucho se ha avanzado al respecto, y algunos de los resultados obtenidos los podemos encontrar en Mawhim y Willem [8]. En este sentido, el problema que abordamos generaliza resultados obtenidos anteriormente puesto que se trabaja con una funcional indefinida. Y este es un resultado obtenido por Conley y Zenhder (ver [4]), cuyo artículo es la base de nuestro trabajo. En verdad, en dicho artículo se consigue mucho más de lo que nosotros nos planteamos como problema. Al respecto, no hemos querido ser ambiciosos y lo que nos ha motivado más bien ha sido el deseo de simplificar el problema al máximo con el propósito de poner al descubierto las ideas fundamentales empleadas en el camino. Por ejemplo mencionamos que buscar soluciones periódicas de la ecuación diferencial planteada, es equivalente a encontrar los puntos criticos de una funcional asociada a la ecuación original. Por otro lado, imbuidos ya en el problema, mostramos el método debido a Amann (ver [1]) de reducción a puntos silla, mediante el cual el problema original de buscar los puntos críticos de la funcional definida sobre un espacio de dimensión infinita se reduce al caso más simple que es encontar los puntos críticos de una función definida sobre un espacio finito dimensional. Finalmente, se emplea el grado topológico para demostar casi al final, la existencia de soluciones periódicas en el campo vectorial Hamiltoneano objeto de nuestro estudio.

2. Análisis y Discusión.

2.1. Representaciones de Grupos.

2.1.1. Grupos Topológicos.

Definición 2.1. Un **grupo topológico** $\mathcal{G}$ es un espacio de Hausdorff dotado de una multiplicación continua:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

que convierte a $\mathcal{G}$ en un grupo, y donde la inversa:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

también es continua.

Ejemplos

- Todo grupo con la topología discreta.
- $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y la operación de adición de vectores.
- S^1 en el plano complejo con la topología relativa y la multiplicación compleja.

2.2. Representación de un Grupo.

Sea $\mathcal{G}$ un grupo topológico y X un espacio de Banach.

Definición 2.2. Una **representación** de $\mathcal{G}$ sobre X es una familia $\{T(g)\}_{g\in\mathcal{G}}$ de operadores lineales continuos $T(g) : X \to X$, que cumplen:

- $T(0) = Id$
- $T(g_1 + g_2) = T(g_1)\ .\ T(g_2)$
- $(g,u) \longmapsto T(g)u$ es continua como función de $\mathcal{G} \times X \longrightarrow X$

Observación 1. Las dos primeras propiedades nos dicen que T es un homomorfismo del grupo $\mathcal{G}$ al grupo de operadores lineales invertibles $\mathcal{GL}(X)$. Notemos también que $\mathcal{G}$ no necesariamente es abeliano. Por otro lado, si $u \in X$ y $\mathcal{G}$ es compacto, la tercera propiedad nos lleva a concluir que $\{T(g)u : g \in \mathcal{G}\}$ también es compacto. En efecto, siendo

$$\mathcal{G} \times X \longrightarrow X$$

$$(g,u) \longmapsto T(g)u$$

continua y $\mathcal{G} \times \{u\}$ compacto, se concluye inmediatamente que:

$$\phi(\mathcal{G} \times \{u\}) = \{T(g)u : \ g \in \mathcal{G}\} \quad \text{es compacto.}$$

El siguiente lema ilustra la importancia de trabajar con representaciones de grupos compactos.

LEMA 2.3. *Sea $\mathcal{G}$ compacto y $\{T(g)\}_{g\in\mathcal{G}}$ una representación de $\mathcal{G}$ sobre X. Sea $Y \subset X$ un subespacio vectorial cerrado e invariante que admite un complemento topológico. Entonces Y tiene un complemento topológico invariante.*

Prueba. Ver [8].

TEOREMA 2.4. *Sea $\{T(\theta)\}_{\theta\in S^1}$, una representación isométrica de S^1 sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces $T(\theta)$ tiene una representación matricial de la forma:*

$$diag(M_1, \ldots, M_k) \tag{1.1}$$

donde:

$$M_j = 1$$

ó

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \ \textit{para algún } n \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Prueba. Ver [8].

2.3. Teoría de índice.

Sea $\mathcal{G}$ un grupo topológico compacto y $\{T(g)\}_{g\in\mathcal{G}}$ una representación isométrica de $\mathcal{G}$ sobre un espacio de Banach X.

Definimos $P(X) = \{Y \subset X : Y \textit{ es invariante y cerrado}\}$.

DEFINICIÓN 2.5. Un índice para $\{T(g)\}_{g\in\mathcal{G}}$ es una función:

$$ind_{\mathcal{G}} : P(X) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \textit{ tal que}$$

i) $ind_{\mathcal{G}} A = 0 \Longleftrightarrow A = \phi$
ii) Si $\mathcal{R} : A_1 \longrightarrow A_2$ equivariante y continua, entonces $ind_{\mathcal{G}} A_1 \leq ind_{\mathcal{G}} A_2$
ii) Si A es invariante y compacto, existe una vecindad V de A, invariante y cerrada tal que $ind_{\mathcal{G}} V = ind_{\mathcal{G}} A$
iv) Si $A_1, A_2 \in P(X)$ entonces $ind_{\mathcal{G}}(A_1 \cup A_2) \leq ind_{\mathcal{G}}(A_1) + ind_{\mathcal{G}}(A_2)$.

2.4. El grado topológico en espacios de dimensión finita.
Sea $D \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto y $f \in C^m(D, \mathbb{R}^q)$ con $m \geq 1$. Para el caso especial de $f \in C^2(D, \mathbb{R}^q)$ consideremos la siguiente norma:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in D\\ 1\leq i\leq q}} |f^i| + \sup_{\substack{x\in D\\ 1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}} |f^i_j| + \sup_{\substack{x\in D\\ 1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p\\ 1\leq k\leq p}} |f^i_{jk}|$$

donde

$$f^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \;\; y \;\; f^i_{jk} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_j\, \partial x_k}$$

Definición 2.6. Un punto $x \in D$ es un punto regular de f si $Df(x)$ es sobreyectiva. Caso contrario, x se denomina punto crítico de f. Denotaremos por $C_f(D)$ al conjunto de puntos críticos de f.

Además si $p = q$, entonces $C_f(D)$ es un conjunto cerrado puesto que *det* Df es una función continua. Asimismo, cuando $q = 1$, se tiene que x es un punto crítico de f si y sólo si $Df(x) = 0$.

Definición 2.7. Un punto $y \in \mathbb{R}^q$ es un valor regular de f si $f^{-1}(y)$ contiene solamente puntos regulares. La imagen de un punto crítico se denomina valor crítico de f. Notar que $f^{-1}(y)$ puede ser vacio. Denotaremos por $S_f(D)$ al conjunto de valores críticos de f.

Sería mucho esperar que el conjunto de valores criticos de una función lisa sea finito, pero en cambio podemos decir que es pequeño en el siguiente sentido:

Teorema 2.8 (Sard). *Sean D y f como antes, entonces $S_f(D) \subset \mathbb{R}^q$ tiene medida cero.*

Una prueba de este teorema puede ser encontrado en Milnor [10].

2.4.1. EL Grado Topológico. El grado topológico es una de las herramientas más importantes del análisis para calcular el número $N(f, D, y_0)$ de soluciones $x \in D$ de una ecuación:

$$f(x) = y_0 \tag{3.1}$$

donde $D \subset E$ *e* $y_0 \in E_1$, *con* E, E_1 espacios vectoriales.

Para ciertos f, D, y_0 el problema (3) esta completamente solucionado. Sin embargo, este número puede no depender continuamente de y_0 *o de* f como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $D = (-1, 1)$ *y* $f : D \to \mathbf{R}$ definido por $f(x) = x^2$. Si $0 < \epsilon < 1$ tenemos:

$$N(f, D, y_0) = \begin{cases} 2 & , \;\; si \;\; y_0 = \epsilon \\ 1 & , \;\; si \;\; y_0 = 0 \\ 0 & , \;\; si \;\; y_0 = -\epsilon \end{cases}$$

Notesé que $N(f, D, y_0)$ no es continua respecto de y_0 en $y_0 = 0$. Por otro lado, si:

$$f_\alpha : D \to \mathbb{R}$$
$$x \to f_\alpha(x) = x^2 + \alpha, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$N(f_\alpha, D, y_0) = \begin{cases} 0 & , \;\; si \;\; \alpha > 0 \\ 1 & , \;\; si \;\; \alpha = 0 \\ 2 & , \;\; si \;\; \alpha < 0, \end{cases}$$

se tiene que N no es continua respecto de f_α en $\alpha = 0$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\begin{aligned} &y_0 \notin S_f(D) \\ &f \in C^2(D, \mathbb{R}^2) \\ &y_0 \notin f(\partial D) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Teorema 2.9. *Con las mismas hipótesis de (3.2) se cumple que $f^{-1}(y_0)$ es finito.*

Prueba. Por el absurdo, supongamos que $f^{-1}(y_0)$ es un conjunto infinito. Luego existen x_i diferentes tales que $f(x_i) = y_0$. Como $f^{-1}(y_0)$ es compacto, por ser $\overline{D}$ compacto, podemos asumir que $x_i \to x_0$. Siendo f continua $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ y, puesto que $y_0 \notin f(\partial D)$, se concluye que $x_0 \in D$. Por otro lado, $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ y $y_0 \notin S_f(D)$ nos permiten aplicar el teorema de la función inversa, por lo que podemos afirmar que existe una vecindad abierta V_{x_0} de x_0 tal que:

$$\forall\, x \in V_{x_0}(f(x) = y_0 \Rightarrow x = x_0)$$

Por lo tanto, x_0 es un punto aislado en $\overline{D}$, lo cual es una contradicción. ■

2.5. Bosquejo del problema y su solución.

Sea $h = h(t,x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ con $n \geq 2$ y periódica en el tiempo, esto es, $h(t+T, x) = h(t,x)$ para algún $T > 0$. En el contexto a seguir éstas serán llamadas hamiltoneanas periódicas. Así mismo, consideramos $n \geq 2$ porque el caso $n = 1$ ya fue estudiado por Poincaré (ver Mc-Duff y Salamon [9]).

Consideremos el campo vectorial Hamiltoneano siguiente:

$$\dot{x} = JD_x h(t,x) \tag{4.1}$$

con $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz simpléctica estandar. Estas ecuaciones se llaman Sistemas Hamiltoneanas dependientes del tiempo. Nuestro objetivo es probar la existencia de soluciones periódicas (de período $T > 0$) de la ecuación (4.1) cuando el campo vectorial Hamiltoneano considerado es de cierto tipo.

¿Como obtenemos esto?. Para conseguirlo, denotemos por $C_T(\mathbb{R})$ al espacio de funciones periódicas (de período $T > 0$) de clase C^1,

$$C_T(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n} / x \in C^1,\ x(0) = x(T), \quad T > 0\}.$$

Lo que buscamos entonces son funciones $x \in C_T(\mathbb{R})$ que sean soluciones de (4.1). Se sabe que tales funciones corresponde biunívocamente a los puntos críticos de la siguiente funcional definida sobre $C_T(\mathbb{R})$, (ver Cap 6. Mawhim y Willem, [8]).

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\langle \dot{x}, Jx \rangle - h(t, x(t)) \right\} dt. \tag{4.2}$$

El origen de esta idea lo encontramos en el principio de Dirichlet que consiste en conectar el problema de existencia de soluciones de una ecuación diferencial especial (la ecuación de Dirichlet) con la existencia de mínimos de una cierta funcional. Progresivamente, varios matemáticos la extendierón a casos más generales, desarrollando así lo que se conoce como el método directo del cálculo de variaciones (para mayores detalles ver Mawhim y Willem [8]). Sin embargo, el método resulta inaplicable cuando nos enfrentamos a una funcional no acotada, como bien ya lo observó Birkhoff, y precisamente, la funcional $\mathcal{L}$ no lo es ni superior ni inferior. En efecto, si consideramos

$$x(t) = (\cos \lambda t)c - (\sin \lambda t)Jc$$

con $\lambda = \frac{2k\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}^{2n}, \ \|c\| = 1$, se tiene que $x \in C_T(\mathbb{R})$ y $\|x(t)\| = 1$ y $\langle \dot{x}, Jx \rangle = -\lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{k\pi}{T} + \int_0^T h(t, x(t))dt$$

tiende a infinito cuando $|k|$ tiende a infinito. Por ello, no podemos hablar de mínimos ni de máximos de la funcional y por lo tanto, los puntos críticos que buscaremos serán puntos de silla. En ese sentido, necesitamos una relación entre la solución particular de (4.1) y sus correspondientes puntos críticos en (4.2).

Para precisar, el trabajo consistirá en probar el siguiente teorema que habla de la existencia de soluciones periódicas de un Sistema Hamiltoneano asintóticamente lineal, y el cual extiende resultados ya vistos para el caso de Sistemas Hamiltoneanos Autónomos y Convexos asintóticamente lineales (ver Mawhim y Willem [8], pp. 161-165).

Teorema 2.10. *Sea $h = h(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}), \ n \geq 2$ una función periódica en el tiempo y de período $T > 0$. Asumamos que:*

1) *El Hessiano de h está acotado, es decir, existe un $\beta > 0$ tal que para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ se tiene que $\|D_{xx}h(t, x)\| \leq \beta$.*
2) *El campo vectorial Hamiltoneano es asintóticamente lineal, es decir:*

$$JD_x h(t, x) = JA_\infty(t)x + o(\|x\|)$$

   uniformemente en t cuando $\|x\| \to \infty$, donde $A_\infty = A_\infty(t+T)$ es un camino continuo de matrices simétricas.
3) *La solucion trivial de la ecuación $\dot{x} = JA_\infty(t)x$, es la única solución periódica.*

Entonces, la ecuación (4.1) tiene al menos una solución periódica de período T.

Observación 2. La condición (2) en el teorema anterior debe interpretarse de la siguiente manera

$$\forall\, L > 0, \quad \exists\, K / \|l(\|x\|)\| = \|JD_x h(t, x) - JA_\infty(t)x\| < L\|x\| + K,$$

lo cual se expresa también diciendo que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{l(\|x\|)}{\|x\|} = 0.$$

Así mismo, la condición (3) puede ser escrita en forma más elegante diciendo que 1 no es multiplicador de Floquet de la ecuación $\dot{x} = JA_\infty(t)x$, lo cual por definición significa que la solución trivial es no degenerada.

Finalmente, el asumir estas condiciones se justifica plenamente por el hecho de tratarse de un caso general que se presenta dentro de los Sistemas Hamiltoneanos.

Lo que haremos en adelante será estudiar el problema (4.1) en forma abstracta y para ello ampliaremos primero $C_T(\mathbb{R})$ a un espacio más grande. Recordemos que en los problemas del cálculo de variaciones se utiliza preferentemente los espacios de Sobolev $W^{1,p}$ en lugar de C^1, pues presentan propiedades muy útiles, como la reflexividad por ejemplo, que no posee C^1 (ver Brézis [3]).

2.6. Descomposición ortogonal de $L^2(0,T;\mathbb{R}^{2n})$.
Como es sabido $H^1(0,T;\mathbb{R}^{2n})$ es el espacio de Banach formado por funciones $u \in L^2(0,T,\mathbb{R}^{2n})$, tal que su derivada (en el sentido de Sobolev), $\dot{u}$, también está en $L^2(0,T;\mathbb{R}^{2n})$. Para precisar, denotemos por I al intervalo abierto $(0,T)$. Se tiene entonces que:

$$H^1(I;\mathbb{R}^{2n}) = \left\{ u \in L^2,\ \exists\, g \in L^2 \ \textit{tal que} \int_I \langle u, \phi' \rangle = -\int_I \langle g, \phi \rangle,\ \forall\, \phi \in C_c^1(I) \right\}$$

Por teoría de los espacios de Sobolev esta g es única y por lo tanto podemos denotarla por $\dot{u}$ sin ambiguedad. Así mismo, toda función de $H^1(I;\mathbb{R}^{2n})$ admite un representante absolutamente continuo (ver capitulo 8 en Brezis [5]). Este hecho nos permite definir la función $\Phi : H^1 \to \mathbb{R}$ por $\Phi(u) = \int\limits_0^T h(t,u(t))dt$ sin ningún problema.

Sea ahora $D = \{u \in H^1(0,T;\mathbb{R}^{2n}) : \ u(0) = u(T)\}$. Así definido, D es un subespacio cerrado de H^1 y por lo tanto es de Banach. Es claro que D es la extensión de $C_T(\mathbb{R})$ que buscabamos. Por lo tanto, nuestro problema ahora consiste en encontrar un $u \in D$ que verifique

$$\dot{u} = JD_x h(t,u). \tag{5.1}$$

Por otro lado, para cada $v \in H^1$,

$$\langle \nabla\Phi(u), v \rangle = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\Phi(u+\lambda v) - \Phi(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\int_0^T h(t,u(t)+\lambda v(t))dt - \int_0^T h(t,u(t))dt}{\lambda}.$$

Notemos que $(u+\lambda v)[0,T]$ es compacto por ser u y v continuas. Así, cuando $\lambda \to 0$, el conjunto $(u+\lambda v)([0,T])$ está acotado, y por ser h continua, $h([0,T]\times(u+\lambda v)[0,T])$ está acotada. Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia de Lebesgue, la anterior expresión es igual a

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T \lim_{\lambda\to 0} \frac{h(t,u(t)+\lambda v(t)) - h(t,u(t))}{\lambda}\, dt &= \int\limits_0^T \langle D_x h(t,u(t)), v(t) \rangle dt \\ &= \langle D_x h(t,u), v \rangle,\end{aligned}$$

de modo que $\nabla\Phi(u) = D_x h(t,u(t))$. Luego, si definimos el operador lineal $A : L^2 \longrightarrow L^2 \quad via \quad Au = -J\dot{u}$ y el operador $F : H^1 \to H^1$ por $F(u)(t) = D_x h(t,u(t))$, podemos reescribir (5.1) como $Au = F(u)$ con $u \in D$.

Lo que haremos en adelante será estudiar el primer miembro de $Au = F(u)$ para así obtener información útil acerca del espacio L^2 sobre el cual estamos trabajando. Posteriormente analizaremos el segundo miembro y luego mezclaremos los resultados obtenidos y los usaremos para solucionar nuestro problema.

2.7. Reducción a un problema variacional finito dimensional.
Analicemos el caso en que el Hessiano de h es acotado, es decir, supongamos que existe un $\beta > 0$ tal que

$$-\beta \leq \|D_{xx}h(t,x)\| \leq \beta$$

para cada $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. Por lo tanto, para el operador continuo F definido anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(v)\|^2 &= \int_0^T \|F(u)(t)-F(v)(t)\|^2 dt \\
&= \int_0^T \|D_x h(t,u(t)) - D_x h(t,v(t))\|^2 dt \\
&\leq \int_0^T \beta^2 \|u(t)-v(t)\|^2 dt \quad \text{(por el T.V.M.)} \\
&= \beta^2 \|u-v\|^2,
\end{aligned}$$

lo cual nos dice que F es globalmente Lipschitz. Por otro lado, por definición de F se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle F(u)-F(v), u-v\rangle &= \int_0^T \langle F(u)(t)-F(v)(t), u(t)-v(t)\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle D_x h(t,u(t)) - D_x h(t,v(t)), u(t)-v(t)\rangle dt
\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Cauchy Schwartz y el Teorema del Valor Medio, se cumple que

$$\begin{aligned}
|\langle F(u)-F(v), u-v\rangle| &\leq \int_0^T \|D_x h(t,u(t)) - D_x h(t,v(t))\| \; \|u(t)-v(t)\|^2 dt \\
&\leq \int_0^T \sup_{x(t)\in[u(t),v(t)]} \{\|D_{xx}h(t,x(t))\|\} \; \|u(t)-v(t)\|^2 dt \\
&\leq \int_0^T \beta \|u(t)-v(t)\|^2 dt = \beta \|u-v\|^2,
\end{aligned}$$

por lo cual, el operador continuo F es β-monótona.

Tomemos ahora α *y* γ en $\mathbb{R}$ tales que $\alpha < -\beta < \beta < \gamma$. Entonces en virtud de lo anterior

$$\alpha\|u-v\|^2 \leq \langle F(u)-F(v), u-v\rangle \leq \gamma\|u-v\|^2. \tag{6.1}$$

Puesto que $\sigma(A) = \{\lambda_k = \frac{2k\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$, se tiene que

$$\ldots < \lambda_{-1} = \frac{-2\pi}{T} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 = \frac{2\pi}{T} < \ldots$$

Sin pérdida de generalidad podemos entonces asumir que α *y* γ no están en $\sigma(A)$, de manera que el $\sigma(A) \cap (\alpha, \gamma)$ tiene a lo más un número finito de autovalores. Por lo tanto, ellos satisfacen la siguiente relación,

$$\ldots < \lambda_{-(n+1)} < \alpha < \lambda_{-n} < \ldots < \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \gamma < \lambda_{n+1} < \ldots \tag{6.2}$$

Definamos ahora las proyecciones P_-, P_+ y P_Z de L^2 en L^2 de la siguiente manera:

$$P_-u = \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} u_k, \qquad P_+u = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \qquad P_Z u = \sum_{k=-n}^{n} u_k.$$

Sean $X = Im(P_-)$, $Y = Im(P_+)$ y $Z = Im(P_Z)$. Se tiene que $L^2 = X \oplus Y \oplus Z$, y Z es un subespacio finito dimensional de L^2, cuya dimensión es $dim\ Z = \sum_{k=-n}^{n} m(\lambda_k)$. Es fácil ver que X, Y y Z son espacios de Hilbert y por lo tanto también lo es $X \times Y \times Z$.

Podemos entonces definir los siguientes operadores lineales:

$$R : L^2 \longrightarrow X \quad por \quad Ru = \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} (\alpha - \lambda_k)^{-1/2} P_k u.$$

$$S : L^2 \longrightarrow Y \quad por \quad Su = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1/2} P_k u.$$

$$T : L^2 \longrightarrow Z \quad por \quad Tu = \sum_{k=-n}^{n} (\lambda_k - \alpha)^{-1/2} P_k u.$$

Lema 2.11. *Los operadores R, S y T son autoadjuntos y restringidos a X, Y y Z respectivamente, son inyectivos. Además se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\|R\|^2 \leq (\alpha - \lambda_{-(n+1)})^{-1},$$

$$\|S\|^2 \leq (\lambda_{n+1} - \alpha)^{-1}.$$

y para cada $z \in Z$

$$(\lambda_k - \alpha)^{-1}\|z\|^2 \leq \|Tz\|^2 \leq (\lambda_{-n} - \alpha)^{-1}\|z\|^2.$$

LEMA 2.12. *El punto* (x_0, y_0, z_0) *es un punto crítico de* f *si y sólo si* $Rx_0 + Sy_0 + Tz_0$ *es solución de* $Au = F(u)$.

LEMA 2.13. *Sea* $\rho = \frac{\lambda_{n+1}-\gamma}{\lambda_{n+1}-\alpha}$. *Entonces la aplicación* $D_1 f(.,y,z)$ *es* ρ*-monótona para cada* $(y,z) \in Y \times Z$, *y la aplicación* $-D_2 f(x,.,z)$ *es también* ρ*-monótona para todo* $(x,z) \in X \times Z$.

En virtud de los anteriores lemas podemos obtener el siguiente lema que es crucial en nuestro trabajo.

LEMA 2.14. *Existe una función* $(x(.), y(.)) \in C(Z, X \times Y)$ *globalmente Lipschitz tal que para cada* $z \in Z$, *el punto* $(x(z), y(z))$ *es el único punto de silla de* $f(.,.,z)$ *y satisface las siguientes relaciones*

$$x(z) + RG(Rx(z) + Sy(z) + Tz) = 0 \tag{6.3}$$

$$-y(z) + SG(Rx(z) + Sy(z) + Tz) = 0. \tag{6.4}$$

Por otro lado, la función $g : Z \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(z) = f(x(z), y(z), z)$ *es de clase* C^1 *y para cada* $z \in Z$, *su derivada* $Dg(z) = -z + TG(Rx(z) + Sy(z) + Tz)$. *Por último también se cumple que*

$$f(x(z), y, z) \leq g(z) \leq f(x, y(z), z), \qquad \forall\ (x, y, z) \in X \times Y \times Z.$$

PROPOSICIÓN 2.15. *Supongamos que* $\|JD_x h(t,x) - JA_\infty(t)x\| \leq l(\|x\|)$. *Entonces, existe una constante* M *(que depende de* h *y de* $A_\infty(t)$*) tal que si* u *es solución de la ecuación* $\dot{x} = JD_x h(t,x)$ *y* $M \leq \|u\|_2$, *entonces* u *no es periódica.*

Por último, si analizamos la ecuación $\dot{x} = JD_x h_\sigma(t,x)$, por la proposición 2.15 vemos que si u es solución de dicho sistema con $\|u\|_2 \geq M$, entonces u no es periódica. Como $u = u(z) = Rx_\sigma(z) + Sy_\sigma(z) + Tz$ es la forma que tiene toda solución periódica de $\dot{x} = JD_x h_\sigma(t,x)$, se sigue que $\|Rx_\sigma(z) + Sy_\sigma(z) + Tz\|_2 \geq \|Tz\|_2$, gracias a que R, S y T son mutuamente ortogonales. Como T es invertible (pues es inyectiva en un espacio de dimensión finita), cuando $\|z\|_2 \to \infty$, siempre podemos encontrar un $r > 0$ con $\|T_z\| > r$, tal que este r es independiente de h_σ y que sólo depende del operador T, el cual no ha variado en absoluto a lo largo de la deformación continua entre $JD_x h(t,x)$ y $JA_\infty(t)x$.

Por lo tanto, el abierto que buscábamos es la bola abierta $B(r)$ en D, sobre la cual $N_\sigma(\partial B) \neq 0$, para todo $\sigma \in [0,1]$.

Así pues, usando el grado topológico hemos probado que existe una solución periódica para la ecuación Hamiltoneana analizada. Lo que hemos visto es un caso particular del teorema de existencia para ecuaciones del tipo $Au = F(u)$ estudiado por Amann, ver [1]. Así mismo, el enfoque dado es alternativo al de Conley y Zenhder, quienes emplean el índice de Morse para probar lo mismo. El índice de Morse y su versión mejorada, el índice de Conley, es una herramienta muy importante dentro del análisis de los sistemas Hamiltoneanos. El lector que esté interesado en profundizar en este tema puede consultar el libro de Dusa Mc. Duff y Dietmar Salamon [9].

3. Resultados.

1. En el presente trabajo para demostrar el teorema central utilizamos los siguientes resultados: los lemas 2.11, 2.12 y 2.13 nos permiten obtener el lema 2.14.
2. Utilizando el lema 2.14 con la proposición 2.15 nos permiten demostrar el resultado central dado por el teorema 2.10.

4. Conclusiones.

1. Se ha logrado conocer teorías no muy difundidas, tales como: Representación de grupos, de Índices, del Grado Topológico y Variedades simplécticas.
2. La existencia de órbitas periódicas de una ecuación Hamiltoneana, es un caso particular del problema de existencia de puntos fijos de simplectomorfismos.
3. Usando el grado topológico se ha probado que existe una solución periódica para la euación Hamiltonena analizada.
4. Se estudió un caso partícular de teorema de existencia para ecuaciones del tipo $Au = F(u)$.

REFERENCIAS

[1] Aman, H., *Saddle Points and Multiple Solutions of Differential Equations.*, Mathematische Zeitschift, 169, pp.127-166, 179.
[2] Bredon, G., *Introduction to Compact Transformation Groups.*, Academic Press, London, 1972.
[3] Brézis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Masson Editeur, París, 1983.
[4] Conley C., and Zehnder, E., *Morse-type Index Theory for Flows and Periodic Solutions for Hamiltonian Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics,37, pp. 207-253, 1984.
[5] Edwards, R., *Functional Analysis, Theory and Applications*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
[6] Hoftman, K., and Kunze, R., *Algebra Lineal*, Prentice Hall, 1973.
[7] Lloyd, N., *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
[8] Mawhim, J., and Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systemas.*, Applied Mathematical Sciences 74, New York, 1989.
[9] McDuff, D., and Salamon, D., *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, New York, 1997.
[10] Milnor, J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
[11] Rothe, E.,*Introduction to verious aspects of Degree Theory in Banach spaces Providence*, R.I, American Mathematical Society, 1986.