CARACTERIZACIÓN DE LA HIPÓTESIS DE LIBRE ELIMINACIÓN POR MEDIO DEL CONO NORMAL DENTRO DEL ESTUDIO DEL EQUILIBRIO GENERAL

ROSARIO DIOMEDES DELGADO VÁSQUEZ*, WAYMER ALFONSO BARRETO VEGA**, AND TEODORO LUIS ACEVEDO TENORIO***

Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio de algunas propiedades de los conjuntos analíticos que cumplan las hipótesis de libre disposición. Esta hipótesis juega un papel relevante en la teoría de equilibrio general, ya que es ampliamente utilizado para garantizar tanto la positividad de los precios de equilibrio y la eficiencia de la asignación de equilibrio. El principal resultado de este trabajo es la caracterización de esta hipótesis en términos del cono normal al conjunto de puntos en su frontera.

Palabras claves. Hipótesis libre, cono normal, equilibrio

1. Introducción . Debreu, 1959 [1] y Arrow y Hahn, 1971 [2], fueron los que presentaron y aplicaron en sus respectivos trabajos de investigación, la hipótesis de libre eliminación:

1.1. Hipótesis de Libre Eliminación. Un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ satisface la ***Hipótesis de Libre Eliminación*** (H.L.E) si,

$$\forall \nu \in \mathbb{R}^n_+ \ \text{ y } \ \forall y_0 \in Y \ \text{ se cumple que } y_0 - \nu \in Y \ [3]$$

La H.L.E es utilizada en la mayoria de trabajos donde se estudia la existencia y propiedades del equilibrio general. La existencia de la H.L.E en la teoría de equilibrio general proviene básicamente de tres hechos:

i) Permite garantizar que, de existir equilibrio de Walras, los precios de equilibrio necesariamente tienen todos sus componentes positivos.
ii) Es condición suficiente para que las producciones de equilibrio de una firma sean eficientes, es decir, estén en la frontera del conjunto de producción.
iii) Permite identificar la frontera del conjunto de producción con una variedad diferenciable. Esta identificación, que en términos matemáticos corresponde a un homeomorfismo, posibilita que el estudio de la existencia del equilibrio sea mucho más simple.

Otro concepto importante en el presente trabajo de investigación es el ***Cono Normal*** [4], que se define así:
Sea el conjunto convexo $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in fr(Y)$, el ***cono normal del análisis convexo*** a Y en y_0 es el conjunto:

$$N(Y, y_0) = \{q \in \mathbb{R}^n \ / \ q \cdot y_0 \geq q \cdot y \ \ \forall y \in Y\}$$

Si la frontera de Y es definida por el gráfico de una función diferenciable, el cono normal anterior corresponde a la semirrecta que pasa por el origen cuya dirección está dada por el gradiente de dicha función en el punto. Si la frontera no es diferenciable, entonces el cono normal se "abre" permitiendo que nuevos puntos entren al conjunto.

*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(rosariodv6@yahoo.es).
**Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(waymerb@yahoo.es).
***Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(luis_acevedo54@hotmail.com).

La estrecha relación entre la H.L.E y el cono normal esta dado mediante el siguiente enunciado [5]: "Si $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo que satisface la H.L.E, entonces todos los elementos del cono normal del análisis convexo a Y en cualquier punto de la frontera son positivos, es decir

$$\forall y_0 \in fr(Y) \text{ se tiene que } N(Y, y_0) \subseteq \mathbb{R}^n_+ \text{ "}$$

De este manera, una condición suficiente para que el precio de equilibrio de una economía tenga todas sus componentes positivas, es que Y verifique la H.L.E.

El objetivo central de este trabajo es buscar condiciones apropiadas en el conjunto Y y en el cono normal, para que Y satisfaga la H.L.E (proceso inverso al enunciado anterior).

La interrogante a ser resuelta:

¿ Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para establecer una caracterización entre la H.L.E y el cono normal dentro del estudio del equilibrio general?

1.2. Resultados. En esta parte introducimos algunos conceptos matemáticos de análisis no diferenciable:

Definición 1.1. *Sea $\| \ \|$ la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^n$. La distancia a un conjunto cerrado $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ se define:*

$$d(\cdot, Y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \| x - y \|$$

Definición 1.2. *La proyección de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ sobre Y se define por $proy_Y(x) \in Y$, tal que $d(x, Y) = \|x - proy_y(x)\|$.*

Definición 1.3. *Dado un $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado e y_0 un punto de su frontera. El cono tangente de Clarke a Y en y_0 se define como:*

$$T_C(Y, y_0) = \{q \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall y_k \in Y, \ y \to y_0, \ \exists q_k \to qt.qy_k + t_k q_k \in Y, \ con\ k \in N,$$
$$suficientemente\ grande\}$$

Y el cono normal de Clarke a Y en y_0 un punto de su frontera, se define como el polar del cono tangente, es decir,

$$N_C(Y, y_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \ / \ p \cdot q \leq 0, \ \forall q \in T_C(Y, y_0)\}$$

Proposición 1.4.

a) $N_C(Y, y) = [intT_C(Y, y)]^+$

b) Dado $p \in N_C(Y, y)$, existen sucesiones $t_k \to 0^+$, $p_k \to p$, $y_k \to y$, con $y_k \in Y$, tales que para cada $y' \in Y$ se cumple que $p_k \cdot (y' - y_k) \leq \dfrac{1}{2t_k}\|y' - y_k\|^2$.

La parte a es directa de la definición. La parte b, se llama fórmula normal proximal para el cono normal de Clarke y su demostración se encuentra en [9].

2. Análisis Y Discusiones. El teorema que a continuación demostraremos, es el que resuelve el problema planteado en este trabajo de investigación:

Teorema 2.1. *Un conjunto cerrado y no vacío $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la hipótesis de libre eliminación si y sólo si para todo $y \in fr(Y)$ se cumple que $N_C(Y, y) \subseteq \mathbb{R}^n_+$.*

Demostración:

Condición necesaria: Supongamos que $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la hipótesis de libre eliminación y sea $p \in N_C(Y, y)$. De la forma normal proximal (***Proposición* 1.4.b**) se tiene que existen sucesiones $t_k \to 0^+,\ p_k \to p,\ y_k \to y$, con $y \in Y$, tales que para cada $y \in Y$ se cumple que $p_k(y' - y_k) \leq \dfrac{1}{2t_k}\|y' - y_k\|^2$. Luego dado $e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$ cualquiera, por H.L.E el vector $y' = y_k - \alpha t_k e_i$ es también un elemento de Y. Por lo tanto, usando la fórmula normal proximal con y' anterior, sigue que:

$$p_k \cdot (y' - y_k) \leq \frac{1}{2t_k}\|y' - y_k\|^2 \Longrightarrow p_k \cdot (y_k -)\alpha t_k e_i - y_k \leq \|y_k - \alpha t_k e_i - y_k\|^2$$

De lo cual se deduce

$$p_k \cdot (\alpha t_k e_i) \leq \frac{1}{2t_k}\|y' - y_k\|^2 \Longrightarrow p_k \cdot e_i \geq \frac{-\alpha}{2}$$

Puesto que α es arbitrario y $(p_k \cdot e_i)$ es el i-ésimo componente de p_k, deducimos que éste debe ser positivo. Finalmente, como $p_k \to p$, se tiene que p debe tener todos sus componentes positivos.

Condición suficiente: La cerradura de Y implica que $Y - \mathbb{R}^n_+$ se cumple si y sólo si $Y - \mathbb{R}^n_{++}$. Por lo tanto, negando la hipótesis y considerando lo anterior, se tiene que deben existir $y_0 \in Y$ y $p_0 \in \mathbb{R}^n_+$ tales que $y_0 - p_0 \notin Y$. A este respecto, se tienen dos casos a considerar: que $y_0 \in fr(Y)$ o que $y_0 \in Int(Y)$.

Caso 1: $y_0 \in fr(Y)$

Por hipótesis sabemos que $N_C(Y, y) \subseteq \mathbb{R}^n_+$, con lo cual, de la definición de cono tangente, sigue $T_C(Y, y_0) \supseteq -\mathbb{R}^n_+$, lo que a su vez implica que $-p_0 \in T_C(Y, y_0)$. Más aún, puesto que todos los componentes de p_0 los hemos supuesto estrictamente positivos, es directo entonces que $-p_0 \in Int(T_C(Y, y_0))$.

Definamos ahora $\overline{Y}$ como la intersección de Y con el segmento de recta en $\mathbb{R}^n$ cuyos extremos son y_0 e $(y_0 - p_0)$, es decir,

$$\overline{Y} = Y \cap [y_0, y_0 - p_0]$$

Dado lo anterior, sea $q_0 \in \overline{Y}$ la proyección de $(y_0 - p_0)$ sobre $\overline{Y}$. Por lo tanto, existe $t_0 \in [0, 1[$ tal que $q_0 = t_0(y_0 - p_0) + (1 - t_0)y_0$. De esta manera es directo que

$$y_0 - p_0 - q_0 = y_0 - p_0 - t_0(y_0 - p_0) - (1 - t_0)y_0 = -(1 - t_0)p_0$$

Con lo cual $\|y_0 - p_0 - q_0\| = (1 - t_0)\|p_0\|$. Por otro lado, del hecho que $-p_0 \in T_C(Y, y_0)$, sigue que existe $\varepsilon > 0$ tal que $t \in [0, \varepsilon[$ se cumple que $q_0 + t(-p) \in \overline{Y}$. Por lo tanto, del hecho que

$$(y_0 - p_0) - (q_0 + t(-p_0)) = (y_0 - p_0 - q_0) + tp_0 = -(1 - t_0)p_0 + tp_0 = (-1 + t_0 + t)p_0$$

Se sigue que

$$\|(y_0 - p_0) - (q_0 + t(-p_0))\| = (1 - t_0 - t)\|p_0\| < (1 - t_0)\|p_0\|$$

Lo que obviamente contradice la definición de proyección, pues hemos encontrado otro vector $(q_0 + t(-p_0))$ cuya distancia a $(y_0 - p_0)$ es menor que aquella que tenía la proyección. Con esto queda probado el caso 1.

Caso 2: $y_0 \in Int(Y)$

Definamos L como el segmento de recta en $\mathbb{R}^n$ cuyos extremos son y_0 e $(y_0 - p_0)$, es decir,

$$L = [y_0, y_0 - p_0] = \{z = \lambda y_0 + (1-\lambda)(y_0 - p_0),\ \lambda \in [0,1]\}.$$

Puesto que $y_0 \in Y$ e $(y_0 - p_0) \notin Y$, es claro entonces que L debe intersectar en algún punto de la frontera de Y. Sea entonces $\bar{z} \in frY \cap L$. Luego existe $\bar{\lambda} \in]0,1]$

$$\bar{z} = \bar{\lambda} y_0 + (1-\bar{\lambda})(y_0 - p_0) = y_0 - (1-\bar{\lambda})p_0.$$

Ahora bien, de un cálculo simple es claro que $y_0 - p_0 = \bar{z} = \bar{\lambda} p_0$. Por lo tanto, si suponemos que $y_0 \in Int(Y)$, hemos probado que existe un punto $\bar{z}$ en la frontera de Y y un vector estrictamente poitivo, $\bar{\lambda} p_0$, tal que su diferencia no está en Y, lo que, por lo demostrado en el caso 1 anterior, no es posible. En consecuencia queda demostrado completamente el ***teorema* 2.1**. ∎

3. Conclusiones. El resultado central de este trabajo nos muestra que el supuesto de libre eliminación no es una hipótesis artificial dentro del modelo de equilibrio general. En esencia corresponde a exigir que los precios de equilibrio sean positivos, toda vez que estos existan. Las propiedades de los conjuntos que satisfacen la H.L.E están entonces estrechamente ligadas a las propiedades topológicas de su frontera.

Referencias

[1] Debreu, G., *Theory of valued, an Axiomatic of Economic Equilibrium*, Wiley. New York. (1959).

[2] Arrow, K. y F.Hahn., *General Competitive Análisis*, Hoden, San Francisco. (1971).

[3] Brown, D., *Equilibrium Analysis With Non-convex Technologies*, Handbook of mathematical economics, Editado por W. Hildenbrand y H. Sonnenschein. North Holland. Vol. IV. pp 1963-1995. (1991).

[4] Bonnisseau, J. M., *On Two Existente Result of Equilibria in Economies UIT Increasing Returns*, Journal of Mathematical Economics, 17 (2-3), pp. 193-207. (1988).

[5] Bonnisseau, J. M. y B. Cornet, *Existence of Equilibria When Firms Follows Bounded Losses Pricing Rules*, Journal of Mathematical Economics, 17 (2-3), pp. 103-118. (1988).

[6] Clarke, F., *Optimization and Non-Smooth Analysis of Economic Equilibrium*, Wiley. New York. (1959).

[7] Khan, A. y R. Vohra, *An Extension of the Second Welfare Theorem to Economic With Nonconvexities and Public Goods*, The Quarterly Journal of Economic, 102(2), pp. 223-241. (1987).

[8] Loewen, P., *Optimal Control Via Non-Smooth Analysis*, CRM Proceedings and Lectures notes. Vol. 2. American Mathematical Society. (1993).

[9] Rockafellar, R. T. y R. Wets, *Variational Analysis*, Springer Verland. (1998). Numer. Anal., 20 (1983), pp. 345-357.