REGULARIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL PARABÓLICA NO LINEAL

Dr. Milton Cortez Gutierrez

mcortezgutierrez@yahoo.es

Resumen. En este trabajo se estudia la existencia y regularidad de la solución para una ecuación diferencial parcial parabólica no lineal.

Palabras claves: ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones parabólicas no lineales, regularidad.

1. INTRODUCCION

Las ecuaciones en derivadas parciales relacionado con difusión en placas, vigas, etc., conducen a ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico. Todos estos problemas provenientes de la ingeniería y ciencias afines tienen su método analítico de poder encontrar sus soluciones. Para el caso de una ecuación diferencial parcial parabólica no lineal la regularidad de la solución en otros espacios funcionales, han sido tratados en Lions-Magenes [2]. En lo que concierne al presente trabajo de investigación se considera como modelo la ecuación de difusión que modela una ecuación parabólica no lineal.

2. MATERIAL Y METODO

Inicialmente se tiene el siguiente modelo:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \text{ en } \Omega \times (0,\mathrm{T})$$

$$u(x,0) = u_0(x)\ , \quad \text{en} \quad \Omega$$

$$u(x,t) = 0\ , \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times (0,T)$$

donde $u = u(x,t)$ denota las configuraciones de la difusión en un instante t y en punto x de Ω, para Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con frontera Γ , u_0 es una función dada.

3. RESULTADOS

Sea $(\omega_\nu)_{\nu \in N} \in \mathbb{R}^n$ una base de $V = W_0^{1,3}(\Omega)$ y considere el subespacio V_m generado por los m vectores $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$.

Definamos para cada m:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j ,$$

donde $u_m(t)$ es la solución del siguiente problema aproximado:

$$\left(u_m'(t), \omega_j\right) + \left(Au_m(t), \omega_j\right) = (f(t), \omega_j)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \in [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]$$

donde $u_{0m} \rightarrow u_0$, en $L^2(\Omega)$ y el operador A es definido por:

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

A continuación obtenemos la primera estimativa, en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(s)\|^3 \, ds \leq \int_0^t \|f(s)\| \|u_m(s)\| \, ds + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2$$

Usando las desigualdades de Cauchy y el Lema de Gronwall se deduce que u_m pertenece a un conjunto acotado de $L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^3(0,T; V)$.

Consecuentemente, se puede extraer una subsucesión de u_m de tal forma que se obtiene las siguientes convergencias:

$u_m \rightharpoonup u$, débil estrella en $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$;

$u_{\mathrm{m}} \rightharpoonup u$, débil en $L^3(0,T;V)$;

$u_{\mathrm{m}}(T) \rightharpoonup u(\mathrm{t})$, débil en $L^2(\Omega)$;

$Au_{\mathrm{m}} \rightharpoonup Au$, débil en $L^{\frac{3}{2}}(0,T;V')$.

Consecuentemente, pasando al límite cuando $m \to \infty$, se obtiene:

$$u' + Au = f$$

Para la unicidad de solución se procede de manera estándar; es decir, dadas dos soluciones del modelo parabólico, u y $\hat{u}$, se toma la diferencia de estas soluciones, $z = u - \hat{u}$, ésta satisface la igualdad:

$$\mathrm{z}' + \mathrm{A}(u) - \mathrm{A}(\hat{u}) = 0,$$

$$\mathrm{z}(0) = 0.$$

Luego,

$$(\mathrm{z}'(t), z(t)) + (Au - A(\hat{u}), u - \hat{u}) = 0,$$

$$z' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{|\mathrm{z}'|^2\} \leq 0.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$z = u - \hat{u} = 0$$

La regularidad para la solución u del modelo parabólico no lineal se obtiene:

$$u' \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$$

En efecto, derivando el problema aproximado, respecto a t, y suponiendo que:

$$Au_{0m} \in L^2(\Omega)$$

Consecuentemente, aplicando las mismas técnicas de estimativas se deduce que:

$$u_m' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

Es decir,

$$u_m \in L^3(0,T;W^{1,3}(\Omega))$$

Extrayendo una subsucesión que denotamos nuevamente por u_m, se tiene:

$$u_m \rightharpoonup u \text{ , débil en } L^3(0,T;W^{1,3}(\Omega)) \;\Rightarrow\; u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

4. ANALISIS Y DISCUSION

Es importante observar que en los resultados obtenidos se han usado principalmente los teoremas relacionados al operador A.

Además de la desigualdad de Young y de Gronwall, cabe resaltar que los procedimientos mediante las técnicas multiplicativas son efectivas para el estudio de las convergencias débiles.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se concluye que para la ecuación diferencial parcial parabólica no lineal se obtiene una regularidad de solución fuerte así como también la unicidad de solución.

Se recomienda para futuro estudio este mismo modelo parabólico no lineal pero en espacios funcionales con peso.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Brezis, H.: *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Ed. Masson, Paris, 1983.

[2] Lions, J. L.; Magenes, E.: *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 2004.

[3] Friedman, A.: *Remarks on nonlinear parabolic equations*, Proceedings Symposia in Applies Mathematics, XVII (1965), 3-49.

[4] Medeiros, Luis A.: *Espaços de Sobolev*, IMUFRJ, 2000.

[5] Tartar, L.: *Topics in Nonlinear Analysis*, Université de Parissud – Pub. d'Orsay, Paris, 2006.

[6] Treves, François: *Partial of differential equation of type parabolic*, Acad. Press, New York, 1990.