SHADOWING PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARABÓLICOS SEMILINEALES PARA INTERVALOS DE TIEMPO GRANDES*

ULICES ZAVALETA**, NELSON ARAGONÉS***, AND ROXANA RODRÍGUEZ****

Resumen. Se presenta un resultado de shadowing para un problema de evolución parabólico no autónomo. Utilizando el método de Euler hacia atrás se demuestra que bajo ciertas hipótesis de regularidad se puede aproximar usando shadowing la solución de un problema de la forma

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t),$$

donde $A(t)$ es el generador de un semigrupo analítico sobre un espacio de Banach.

Key words. difusión-reacción, simulación, reacción

AMS subject classifications. 15A15, 15A09, 15A23

1. Introducción. Existe una gran cantidad de referencias bibliográficas que muestran la amplia variedad de aplicaciones que son modeladas por sistemas de ecuaciones parabólicos no lineales de la forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(D(x,u)\nabla u) + f(x,u), \quad (x,t) \in \Omega \times R \tag{1.1}$$

donde Ω es un dominio en R^n, $u = (u_1, u_2, ..., u_m) \in R^m$, $D(x,u)$ una matriz definida positiva y f una función cinética de $R^n \times R^m$ en R^m . La variable u usualmente denota cantidades como densidad de población biológica en ecología, concentraciones de sustancias en reacciones químicas o las concentraciones y la temperatura en las reacciones, por ejemplo para el caso de mixing molecular, el sistema (1.1) debe ser acoplado con las ecuaciones de conservación de masa y las ecuaciones de Navier-Stokes, ver [2], [3], [10], [14], [17].

Como una ilustración de la importancia de los sistemas de ecuaciones de la forma (1.1), se tiene el sistema propuesto en 1952 por A.L. Hodgkin e A.F. Huxley, que describe la transmisión de impulsos eléctricos a través del nervio axón, el cual tiene la forma:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -g_1(u_1, u_2, u_3, u_4) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = k_1(u_1)(h_1(u_1) - u_2) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = k_2(u_1)(h_2(u_1) - u_3) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} - d_4 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} = k_3(u_1)(h_3(u_1) - u_4) \tag{1.5}$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) : \Omega \times R \longrightarrow R^4$, con $\Omega = (0, L)$, $g_1(u) = -\gamma_1 {u_2}^3 u_3(\delta_1 - u_1) - \gamma_2 {u_4}^4(\delta_2 - u_1) - \gamma_3(\delta_3 - u_1)$; $\delta_1 > \delta_3 > 0 > \delta_2$. Además $k_i > 0$, $0 < h_i < 1, d_i > 0$, $i =$

*Este trabajo fue financiado parcialmente por la Universidad Nacional de Trujillo, con los recursos del Fondo Especial de Desarrollo Universitario (FEDU).

**Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo (ulices@unitru.edu.pe).,
***Universidad Nacional de Trujillo (omararagones@yahoo.com).
****Universidad Nacional de Trujillo(rfrod@hotmail.com) .

$1, 2, 3$. En este modelo, u_1 representa el potencial eléctrico en el nervio y $u_2, u_3, u_4 \geq 0$ denotan las concentraciones químicas. Smoller [14] y Temam [17] demuestran la existencia de una región invariante para éste sistema. Observe que el operador lineal A, en el sistema (1.2), es independiente del tiempo, $A = diag(d_1, \ldots, d_4)$

Por otro lado, es ampliamente conocido que en general, no es posible hallar la solución exacta para problemas de la forma (1.1), por lo que se recurre a métodos numéricos para aproximarla. No obstante la existencia de eficientes métodos numéricos, que permiten aproximar la solución, dependiendo de la naturaleza particular del problema, por ejemplo para sistemas de ecuaciones que modelan mixing molecular, ellos no dan resultados óptimos para tiempos grandes, pues el incremento del intervalo de tiempo origina el crecimiento exponencial del error numérico, lo que significa que una verdadera trayectoria, en general, no es uniformemente aproximada por una trayectoria numérica que tiene la misma condición inicial que el problema original. Ver [4].

En este trabajo, se pretende realizar un estudio del problema parabólico de la forma:

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t) \tag{1.6}$$

$$u(0) = u_0 \tag{1.7}$$

donde $u : [0, T] \longrightarrow X$ y $f : [0, T] \longrightarrow X$, con X un espacio de Banach complejo y $A(t) : X \longrightarrow X$ un operador lineal dependiente del tiempo.

Uno de los métodos que permite aproximar la verdadera solución por una trayectoria numérica es el método de shadowing, el cual aproxima la solución utilizando una condición inicial diferente y reduciendo considerablemente la acumulación del error numérico, ver [13] y [8]. Para pequeños intervalos de tiempo, Gonzalez y Palencia [5], presentan resultados óptimos utilizando el método de Runge-Kutta, sin embargo para intervalos de tiempo grandes la convergencia tiende a quebrarse debido al crecimiento exponencial de la acumulación de errores .

Teniendo en cuenta que para los casos en los que es posible separar las componentes estables e inestable de un problema parabólico, shadowing es una alternativa para estimar errores numéricos para intervalos de tiempo grandes, motivados por el trabajo [11], asumiendo condiciones para el operador $A(t)$ se pretende mostrar la existencia de solución para el problema continuo (1.6)-(1.7) y, usando el método de Euler hacia atrás, obtener una solución numérica del problema de valor inicial (1.6)-(1.7) que es shadowed (sombreado) por una verdadera trayectoria de (1.6).

Larson y Pilyugin [9] utilizando shadowing obtienen resultados para intervalos de tiempo largos en una vecindad del atractor global de un problema semilineal parabólico en una variable, demostrando para cualquier trayectoria calculada cerca del atractor, la existencia de una sombra (shadows) con una trayectoria con estimado de error uniforme en el tiempo.

Tanabe [16] usando la teoría de semigrupos analíticos demuestra la existencia de una solución fundamental para el problema (1.6), y Osterman - Palencia, [11], asumiendo hipótesis similares a las que introduce Tanabe, lo cual detallaremos en este trabajo, demuestran la existencia de una única solución débil para el problema. En base a ello, usando el método de Euler hacia atrás, se mostrará que es posible la existencia de una solución numérica que es shadows de la verdadera solución de (1.6)-(1.7) para intervalos de tiempo grandes. En este trabajo se presentan los principales resultados del artículo [11] obtenidos por Ostermann-Palencia.

2. Resultados. Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $u : [0,T] \longrightarrow X$ la solución del problema parabólico de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = A(t) + f(t), \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.2}$$

Utilizando el el método de Euler hacia atrás con $0 < h < H$ se genera una sucesión (u_n), $n = 0, 1, 2 \ldots, N$ en X^{N+1}, definida de la siguiente manera:

$$u_{n+1} = T_n u_n + hT_n f(t_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{2.3}$$

donde N se escoge de tal manera que $Nh \leq T$. Considerando una posible reducción de T, siempre se puede asumir que $Nh = T$.

El resultado principal del trabajo es el siguiente:

Teorema 2.1. *Suponga que son validas las condiciones (3.5), (3.7), (3.8) y (3.9), y además se verifica que f es de clase C^2 sobre $[0,T]$ y la aplicación $\mathcal{A}[0,T] \to y\mathcal{L}(\mathcal{X})$*[1] *tal que*

$$\mathcal{T}(t) = A(t)A(0)^{-1} \tag{2.4}$$

es de clase C^2

Si $u \in C^2([0,T], X)$ es la solución del problema de valor inicial (2.1) - (2.2), y $(u_n)_{n=0}^N$ es la aproximación numérica utilizando el método de Euler hacia atrás (2.3) con tamaño de paso h tal que $0 < h \leq H$, entonces para H y $\max_{0\leq j\leq 2} \lambda_j(T,0)$ suficientemente pequeño, existe una constante C y una nueva solución $w \in C^2([0,T], X)$ del problema (2.1) - (2.2) tal que

$$\max_{0\leq n\leq N} \|w(t_n) - u_n\| \leq Ch\Theta \tag{2.5}$$

$$\Theta = \max_{0\leq j\leq 2} \|u^{(j)}(0)\| + \|Q(T)u_n\| + \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(T)\| + \int_0^T \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(s)\| ds,$$

donde C es una constante positiva que depende sólo de m, ϕ, ω, ρ y K pero no de T.

3. Análisis y Discusión.

3.1. Definiciones. En esta parte se presentan algunas definiciones a las que se hace referencia en la discusión de los resultados, para los detalles y propiedades consultar, por ejemplo, Dautray - Lions [1], Henry [7], Pazy [12] y [16], entre otros.

3.1.1. Semigrupo Analítico. Definición 3.1. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Banach complejo y*

$$\Delta = \{z \in C : \ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \ \ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}.$$

Una familia $\{G(z)\}_{z\in\Delta}$ de elementos $G(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es un semigrupo en $\mathcal{X}$ analítico en Δ, si

(i) $G(0) = I$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$ para cada $z_1, z_2 \in \Delta$,

(ii) $\lim_{z\to 0 z\in\Delta} \|G(z)u - u\| = 0$ para todo $u \in \mathcal{X}$.

[1] $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ denota el espacio de operadores lineales y acotados sobre el espacio de Banach $\mathcal{X}$

(iii) Para cada $u \in \mathcal{X}$, la aplicación $z \in \Delta \setminus \{0\} \longrightarrow G(z)u \in \mathcal{X}$ es analítica para cada $u \in \mathcal{X}$.

Un semigrupo $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ es analítico si es analítico en algún sector Δ que contenga el eje real no negativo. Para las propiedades sobre semigrupos y condiciones bajo las cuales un semigrupo fuertemente continuo se puede extender a un semigrupo analítico, ver [1], [12] y [16]. La restricción de un semigrupo analítico al eje real es un semigrupo fuertemente continuo.

Definición 3.2. *Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo analítico sobre $\mathcal{X}$, el generador (infinitesimal) de $\{G_t\}_{t\geq 0}$ es el operador lineal A tal que*

$$Au = \lim_{t\to 0^+} \| \frac{T(t)u - u}{t} \|,$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los elementos $u \in \mathcal{X}$ para los cuales existe el límite. La notación $G(t) = e^{tA}$ indica que A es el generador del semigrupo analítico $\{G_t\}_{t\geq 0}$. El siguiente resultado establece que si A es un operador sectorial, entonces $-A$ es el generador de un semigrupo analítico, para la prueba ver por ejemplo [12] y [7]. Por ejemplo, si

$$Au(x) = -\Delta u(x),$$

con $x \in \Omega \subset R^n$, $u \in C_0^2(\Omega)$ y A la clausura en $L^p(\Omega)$ de $\Delta|_{C_0^2(\Omega)}$, para $1 \leq p < \infty$, entonces A es un operador sectorial sobre $\mathcal{X}$ si su conjunto resolvente está en el semiplano izquierdo, y si esto se cumple entonces $-\Delta$ es el generador de un semigrupo analítico. Ver [7]

3.1.2. Ecuaciones parabólicas. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = A(t) + f(t), \quad t < 0 < T \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3.2}$$

donde el operador A depende de t. Se asume que para cada t $A(t)$ genera un semigrupo. Considere los siguientes operadores $W(t,s)$:

1. $W(t,s)$ es una función fuertemente continua sobre $0 \leq s \leq t \leq T$, y toma valores en $\mathcal{L}(X)$.
2. $W(t,r)W(r,s) = U(t,s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$
3. $W(s,s) = I$ para cada $s \in [0,T]$
4. $\dfrac{\partial}{\partial t} W(t,s) = A(t)W(t,s)$
5. $\dfrac{\partial}{\partial s} W(t,s) = -W(t,s)A(t)$

La función de valor operador $W(t,s)$ se llama solución fundamental de (3.1)-(3.2). Cuando la solución fundamental existe, la solución de (3.1)-(3.2) se escribe en la forma

$$u(t,s) = W(t,0)u_0 + \int_0^t W(t,s)f(s),$$

y es llamada solución débil.

Definición 3.3. *Una ecuación de la forma (3.1) se dice que es parabólica si $A(t)$ para cada $t \in [0,T]$ genera un semigrupo analítico.*

Para la existencia y unicidad de la solución de éste tipo de problemas ver, por ejemplo, [12] y [16].

3.1.3. Método de Euler. En general, los métodos numéricos para resolver problemas de la forma (3.1)-(3.2) se basan en la discretización de la variable independiente t (tiempo o espacio) sustituyendo el intervalo $[0,T]$ por una malla finita de N+1 puntos o nodos t_k, $k=1,\dots,N+1$, en los que se obtiene la solución de modo aproximado. La distancia entre dos nodos consecutivos de la malla $h_k = t_{k+1} - t_k$ se denomina paso. El objetivo es definir una estrategia que nos permita producir una sucesión z_k con $k = 1,...,N$ que aproxime a la solución exacta $u(t)$ en los puntos t_k de la malla. A esa sucesión se le llama solución numérica del problema (3.1)-(3.2). El método de Euler es el más simple de todos los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, y para aproximar la solución del problema de la forma (3.1)-(3.2) utilizaremos el método de Euler hacia atrás ("backward Euler") que es el método numérico implícito más simple. Ver por ejemplo [15].

3.1.4. Shadowing.

La idea central de "shadowing" es la comparación de la solución numérica con una verdadera trayectoria, la cual verifica una condición inicial diferente, ver [6], [13], y [15].

Definición 3.4. *Sea X un espacio de Banach y S una aplicación sobre X.*

1. *La sucesión $(x_n)_{n=k}^N$ es una órbita de S si $x_{n+1} = S(x_n)$. Es decir,*
$$x_n = S^{n-k}(x_k)$$
para $k \le n < N$. Se admite que k puede ser $-\infty$ y $N = \infty$.
2. *La sucesión $(y_n)_{n=k}^N$ es una δ-pseudo-órbita u órbita con ruido para S, si*
$$\sup_{k\le n<N} \|y_{n+1} - S(y_n)\| \le \delta.$$

En este trabajo una órbita es una sucesión discreta de puntos, una solución es una curva continua y una trayectoria será una órbita o una solución, según el contexto en que se le utilice. El prefijo pseudo indicará una órbita aproximada o solución aproximada.

Definición 3.5. *El error entre el paso n y el paso $n+1$ de la pseudo-órbita $(y_n)_{n=k}^N$ es dada por $e_{n+1} = y_{n+1} - S(y_n)$*

Definición 3.6. *Una trayectoria (exacta) $(x_n)_{n=k}^N$ ϵ-shadows una pseudo-trayectoria $(y_n)_{n=k}^N$, si $\sup_{k\le n<N} \|y_n - x_n\| \le \epsilon$.*

3.2. Resultados básicos . Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach complejo con la norma $\|.\|$, $u : [0,T] \longrightarrow \mathcal{X}$ y consideremos el problema parabólico lineal no autónomo, que tiene la forma:

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t), \quad 0 < t \le T \tag{3.3}$$
$$u(0) = u_0 \tag{3.4}$$

donde $A(t)$ es un operador lineal cerrado con dominio denso en $\mathcal{X}$ que genera un semigrupo analítico sobre $\mathcal{X}$. En este contexto, denotando por $B = \{\xi \in C : |\xi - (\omega+\rho)| < \rho\}$, y $S = \{\xi \in C : |arg(-\omega - \xi)|\} < \phi$ se asumirán las siguientes hipótesis.

(H1) Existen constantes $M \ge 1$, $\rho > 0$, $\omega > 0$, y $0 \le \phi < \pi/2$ tal que

$$\| (\xi - A(t))^{-1} \| \le \frac{M}{1+|\xi|} \quad para \quad \xi \in (B\cup S)^c \tag{3.5}$$

uniformemente en $t \in [0, T]$, donde $(B \cup S)^c$ denota el complemento de $B \cup S$, con B la bola abierta $B = \{\xi \in C : |\xi - (\omega + \rho)| < \rho\}$ y S el sector $S = \{\xi \in C : |arg(-\omega - \xi)| < \phi\}$ en el semiplano $Re\xi \leq -\omega$.

Observación 3.7. *Los problemas de la forma $u'(\tau) = A(t)u(\tau) + f(\tau)$ son uniformemente parabólicos. Si $\left\{e^{\tau A(t)})\right\}_{t \geq 0}$ es el semigrupo generado por $A(t)$, entonces*

$$\|e^{\tau A(t)}\| \leq Ce^{(\omega+2\rho)\tau}, \quad \tau \in [0, \infty) \tag{3.6}$$

donde C es una constate que no depende de T.

(H2) La parte del espectro de $A(t)$ que está B está constituido por un número finito de autovalores de multiplicidad finita.

(H3) El dominio D de $A(t)$ es independiente de t, y la aplicación $\mathcal{A} : [0, T] \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que

$$\mathcal{A}(t) = A(t)A(0)^{-1} \tag{3.7}$$

es de variación acotada.

(H4) Si $\lambda(t, s)$ es la variación total de la aplicación $\mathcal{A}$ sobre $[s, t]$, con respecto a la norma del operador, entonces se verifica la condición de Lipschitz

$$|\lambda(t, s)| \leq C\, |t - s|^{\alpha}\,, \tag{3.8}$$

para algún $\alpha \in (0, 1]$

(H5) Existe una constante K tal que

$$\|A(0)A(s)^{-1}\| \leq K, \tag{3.9}$$

para $s \in [0, T]$

De (3.5) y (3.9) se sigue que

$$\|\,(\zeta - A(t))^{-1} - (\zeta - A(s))^{-1}\,\| \leq K\frac{M)M+1)}{1+|\zeta|}\lambda(t, s), \tag{3.10}$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$ y $\zeta \in (B \cup S)^c$.

Observación 3.8.

1. *Considerando B y S como en (3.5) se define las proyecciones espectrales Q y P sobre B y S, respectivamente, de la sgte. manera:*

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} (\xi - A(t))^{-1}\, d\xi, \quad y \tag{3.11}$$

$$P(t) \qquad = I - Q(t) \tag{3.12}$$

donde ∂B denota la frontera de B orientada positivamente.

2. *Las proyecciones espectrales P y Q descomponen el espacio $\mathcal{X}$ en la suma directa*

$$X = X_1(t) \oplus X_2(t),$$

donde $X_1(t) = Im\ P(t)$ y $X_2(t) = Im\ Q(t)$ son subespacios.

3. *De la hipótesis* **H2** *se tiene que $X_2(t)$ es un subespacio de dimensión finita.*

4. *De la desigualdad (3.5) se sigue P y Q son acotados y esta acotación es independiente de t. Por ejemplo,*

$$\|Q(t)\| = \|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}(\zeta - A(t))^{-1}\,d\zeta\| \tag{3.13}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\|(\zeta - A(t))^{-1}\|d\zeta \tag{3.14}$$

$$\leq \frac{M\rho}{2\pi(1+|\zeta|}2\pi\rho \leq \frac{M\rho}{1+\omega} \tag{3.15}$$

3.3. Problema de valor a la frontera. Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach con norma $\|.\|$ y $N \in N$. Para cada n tal que $0 \leq n \leq N$ considere las proyecciones P_n y $Q_n = I - P_n$ sobre $\mathcal{X}$, y

$$X_n = Im(P_n), \qquad Y_n = Im(Q_n).$$

Suponga además que para todo n, existe una constante c tal que

$$\|P_n\| \leq c, \quad y \quad \|Q_n\| \leq c, \tag{3.16}$$

y el espacio de Banach $\mathcal{X}$ tiene la descomposición[2]

$$\mathcal{X} = X_n \oplus Y_n \cong X_n \times Y_n$$

Si,

$$X = X_0 \times X_1 \times \ldots \times X_N, \quad y \quad Y = Y_0, \times Y_1 \times \ldots \times Y_N,$$

entonces dado $(x, y) \in X \times Y$, se tiene que $(x, y) \equiv (z_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, con $z_n \in \mathcal{X}^{N+1}$, y $P_n z_n$, $Q_n z_n = y_n$.

Considere, sobre el espacio $\mathcal{X}$, la familia de operadores lineales y acotados $\{T_n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N_1$, y asuma que existe una sucesión de números positivos (ρ_n), $n = 1, 2\ldots, N$ y una constante positiva C tales que

$$\|P_{n+1}T_n Q_n\| \leq \rho_{n+1} \tag{3.17}$$

$$\|Q_{n+1}T_n P_n\| \leq \rho_{n+1} \tag{3.18}$$

$$\|\prod_{l=j}^{i-1} P_{l+1}T_l P_l\| \leq C, \qquad 0 \leq j \leq i \leq N. \tag{3.19}$$

Suponga además que los operadores

$$Q_{l+1}T_l Q_l : Y_l \longrightarrow Y_{l+1},\ son\ \ isomorfismos \quad 0 \leq l \leq N-1 \tag{3.20}$$

y que

$$\|\prod_{l=i}^{j-1}(Q_{l+1}T_l Q_l)^{-1}\| \leq C, \quad 0 \leq i \leq j \leq N. \tag{3.21}$$

[2]Las normas en $X_n \oplus Y_n$ son uniformemente equivalentes.

Finalmente, también asumamos que existe una constante $\gamma < 1$ tal que

$$\sum_{j=0}^{i-1} \rho_{j-1} \| \prod_{l=j+1}^{i-1} P_{l+1} T_l P_l \| \le \gamma, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.22}$$

$$\sum_{j=i}^{N-1} \rho_{j-1} \| \prod_{l=i}^{j} (Q_{l+1} T_l Q_l)^{-1} \| \le \gamma, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.23}$$

Teniendo en cuenta las condiciones (3.17) - (3.23), se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.9. *Sea* $(z_n)_{n=1}^{N}$ *una sucesión arbitraria en* Z, $\zeta \in Im(P_0)$ *y* $\eta \in Im(Q_N)$. *Si se verifican las condiciones (3.16) y (3.17)-(3.23), entonces el problema lineal discreto de valor a la frontera*

$$w_{n+1} = T_n w_n + z_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3.24}$$

$$P_0 w_0 = \zeta, \qquad Q_N w_N = \eta \tag{3.25}$$

tiene una única solución (w_n) *en* $\mathcal{X}^{N+1}$, *para* $n = 0, 1, \ldots, N$. *Además, la solución es acotada y satisface*

$$\max_{0 \le n \le N} \|w_n\| \le \frac{C}{1-\gamma} \left(\|\zeta\| + \|\eta\| + \sum_{n=1}^{N} \|z_n\| \right) \tag{3.26}$$

donde la constante C *es independiente de* N *y sólo depende de las constantes en (3.16), (3.19) y (3.21). El Teorema 3.9 permite obtener el resultado de shadowing para el problema parabólico de valor inicial (1.6)-(1.7). Para su demostración, como ya hemos indicado anteriormente, ver [11].*

3.4. Problema continuo. Considere el problema de valor a la frontera

$$w'(t) = A(t)w(t) + f(t), \quad t \in (0, T) \tag{3.27}$$

$$P(0)w(0) = u_0, \quad Q(T)w(T) = v_T \tag{3.28}$$

La prueba del resultado que establece las condiciones bajo las cuales el problema de valor a la frontera (3.27)-(3.28) tiene una única solución se basa en los Lemas siguientes, cuya prueba puede verse en [11]

Lema 3.10. *Suponga que se satisfacen las condiciones (3.5), (3.7), (3.8) y (3.9). Entonces existen constantes positivas* C_0, C_1 *y* H, *que dependen sólo de* M, ϕ, ω, *y* K, *tales que para* $0 < h \le H$ *se tiene que*

$$\|P(t_{n+1}) T_n^h Q(t_n)\| \le C_1 \lambda t_{n+1}, t_n e^{(\omega+2\rho)h}, \tag{3.29}$$

$$\|Q(t_{n+1}) T_n^h P(t_n)\| \le C_1 \lambda t_{n+1}, t_n e^{-\omega h}, \tag{3.30}$$

$$\| \prod_{l=j}^{i-1} P(t_{l+1}) T_l^h P(t_l) \| \le C_1 e^{C_0 \lambda(t_i, t_j) - (t_i - t_j)\omega}, \quad j \le i; \tag{3.31}$$

donde los operadores $Q(t_{l+1}) T_l^h Q(t_l) : Y(t_l) \longrightarrow Y(t_{l+1})$ *son inversibles, y*

$$\| \prod_{l=i}^{j-1} \left(Q(t_{l+1}) T_l^h Q(t_l) \right)^{-1} \| \le C_1 e^{C_0 \lambda(t_j, t_i) - (t_j - t_i)\omega}, \quad i \le j. \tag{3.32}$$

Lema 3.11. *Suponga que se satisfacen las condiciones (3.5), (3.7), (3.8) y (3.9). Entonces*

$$\prod_{l=i}^{j-1} e^{hA(t_l)} \longrightarrow W(t_j,t_i), \qquad si\ h \to 0^+, \tag{3.33}$$

uniformemente para $0 \le t_i \le t_j \le T$ *y uniformemente sobre subconjuntos compactos de* $\mathcal{X}$.

Teorema 3.12. *Suponga que se satisfacen las condiciones (3.5), (3.7) y (3.8). Entonces existen constantes positivas* C_1 *y* C_2 *que dependen sólo de* M, ϕ, Ω, ρ *y* K, *tales que si* $\lambda(T,0) \le C_2$, *entonces el problema de valor a la frontera (3.27)-(3.28) tiene una única solución débil* $w \in C([0,T],X)$ *para cualquier* $u_0 \in X_1(0)$, $v_T \in X_2(T)$ *y* $f \in C([0,T],X)$. *Además*

$$\max_{0\le t\le T} \|w(t)\| \le C_1 \left(\|u_0\| + \|v_T\| + \int_0^T \|f(s)\| ds \right) \tag{3.34}$$

Demostración.
Existencia:
Dado cualquier N entero positivo, defina el tamaño de paso h como $h = \frac{T}{N}$. Entonces los correspondientes puntos de la malla serán $t_n = nh$. Esto permite obtener los operadores de evolución

$$T_n^h = e^{hA(t_n)}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{3.35}$$

Teniendo en cuenta los operadores de evolución (3.35) considere para cada $n = 0,1,\ldots N-1$ el problema de valor a la frontera

$$w_{n+1}^h = T_n^h w_n^h + \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t_{n+1},s) f(s) ds, \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \tag{3.36}$$

$$P(0)w_0^h = u_0, \quad Q(T)w_N^h = v_T, \tag{3.37}$$

donde $W(t,s)$ denota el operador de evolución correspondiente al problema homogéneo

$$w'(t) = A(t)w(t).$$

Para hallar la solución del problema (3.36)- (3.37) se aplica el Teorema 3.9 con $P_l = P(t_l)$ y $Q_l = Q(t_l)$.

Por un Lema 3.10 se tiene que las condiciones necesarias (3.17)-(3.21) que se asumen en el teorema (3.9) se satisfacen para h suficientemente pequeño, y las condiciones (3.22) y (3.23) se satisfacen para $\lambda(T,0)$ también suficientemente pequeño.

Por lo tanto, por el Teorema 3.9, existen constantes H y λ tales que para $0 < h \le H$ y $\lambda(T,0) \le \Lambda$ el problema (3.36)- (3.37) tiene una única solución que satisface la desigualdad:

$$\max_{0\le n\le N} \|w_n^h\| \le C \left(\|u_0\| + \|v_T\| + \int_0^T \|f(s)\| ds \right). \tag{3.38}$$

Para $h \in (0,H]$ denote por $w_h \in C([0,T],\mathcal{X})$ la parte interpolante lineal con valores nodales $w_h(t_n) = w_n^h$, para $n = 0,1,\ldots,N$. Entonces, resolviendo recursivamente el problema (3.36) se obtiene:

$$w_h(t_1) = w_h(0)$$
$$w_h(t_2) = T_0^h w_h(0)$$
$$w_h(t_2) = T_0^h T_1^h w_h(0) + T_1^h \int_{T_0^{t_1}} W(t_1, s) f(s) ds$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

En general, se obtiene que

$$w_h(t_n) = \left(\prod_{l=0}^{n-1} T_l^h\right) w_h(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{l=j+1}^{n-1} T_l^h\right) \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(t_{j+1}, s) f(s) ds \tag{3.39}$$

Por el Lema 3.11, la ecuación 3.39 también puede escribirse en la forma

$$w_h(t_n) = W(t_n, 0) w_h(0) + \int_0^{t_n} W(t_n, s) f(s) ds + \delta_n^h$$

donde $\delta_n^h \to 0$ si $h \to 0^+$ uniformemente para $n = 0, 1, \ldots, N$. Usando la continuidad de W, se obtiene que

$$w_h(t) = W(t, 0) w_h(0) + \int_0^t W(t, s) f(s) ds + \delta_h(t), \tag{3.40}$$

donde $\delta_h \to 0$ si $h \to 0^+$, uniformemente en $t \in [0, T]$.

Utilizando (3.38) se tiene que la familia $Q(0)w_h(0) = Q(0)w_0^h \in Y(0)$ es acotada para $< h \leq H$. Puesto que $Y(0)$ es de dimensión finita, se puede escoger una sucesión h_m tal que $h_m \longrightarrow 0$ tal que

$$Q(0) w_{h_m} \to v_0,$$

para algún $v_0 \in Y(0)$.

Por otro lado, puesto que $P(0)w_h(0) = u_0$ es independiente de h, de (3.40) se puede inferir que

$$u_{h_m}(t) \longrightarrow w,$$

uniformemente en $t \in [0, T]$, con w algún elemento en el espacio $C([0, T], \mathcal{X})$. Por lo tanto, puesto que $d_h \longrightarrow 0$ si $h \to 0^+$, w es una solución débil del problema (3.27)-(3.28), y en consecuencia de (3.38)

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\| \leq C_1 \left(\|u_0\| + \|v_T\| + \int_0^T \|f(s)\| ds\right).$$

Unicidad:
Considere la aplicación lineal $L : Y(0) \longrightarrow Y(T)$ tal que

$$L\eta = Q(T) W(T, 0)\eta.$$

L es obviamente un operador lineal. De la demostración de la existencia, se tiene que L es sobre. Por otro lado, también se tiene que la dimensión de Y(t), dim Y(t), es independiente de $t \in [0, T]$. Por lo tanto L es un isomorfismo, y en consecuencia la solución del problema (3.27)-(3.28) es única. $\square$

3.5. Problema de valor a la frontera discreto. En esta sección se establecerá un resultado análogo al Teorema 3.12 pero para el caso discreto. Dado un entero positivo $N \geq 1$ definir el tamaño de paso $h = T/N$ y los correspondientes puntos de la malla: $t_n = nh$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_n &= P(t_n), \\ Q_n) &= Q(t_n), \\ X(t_n) &= X_n, \\ y(t_n) &= Y_n \end{aligned}$$

Puesto que $\| (\xi - A(t))^{-1} \| \leq M/(1+|\xi|)$, ver (3.5), entonces para $h \in (H, \frac{1}{\omega+2\rho})$, los operadores

$$T_n = (I - hA(t_{n+1}))^{-1},$$

son uniformemente acotados con respecto a n.

Dada una sucesión $\{z_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ en $\mathcal{X}^N$ y los valores de frontera $u_0 \in X_0$, $v_T \in Y_N$. Teniendo en cuenta ésto, se plantea el problema de valor a la frontera obtenido mediante el método de discretización de Euler hacia atrás

$$w_{n+1} = T_n w_n + z_n, \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{3.41}$$

$$P_0 w_0 = u_0, \quad Q_N w_N = v_T \tag{3.42}$$

¿ El problema de valor a la frontera (3.41)-(3.42) tiene solución?. La respuesta a ésta pregunta se formula en el siguiente Teorema, el cual se demuestra haciendo uso del Teorema 3.12.

Teorema 3.13. *Suponga que se satisfacen las condiciones (3.5), (3.7), (3.8) y (3.9) y sea $h \in (0, H]$. Entonces para H suficientemente pequeño, existen constantes positivas C y Λ, que dependen sólo de M, ϕ, ω, ρ, y K, tales que si $\lambda(T, 0) \leq \Lambda$, entonces el problema de valor a la frontera (3.41)-(3.42) tiene una única solución (w_n), $n = 0, 1, \ldots, N$ en $\mathcal{X}^{N+1}$, para $u_0 \in X_0$, $v_T \in Y_N$ y $z_n \in \mathcal{X}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, arbitrarios. Además,*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|w_n\| \leq C \left(\|u_0\| + \|v_T\| + \sum_{n=1}^{N} \|z_n\| \right), \tag{3.43}$$

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|w_n\| \leq Ch^{-1} \left(\|u_0\| + \|v_T\| + \max_{1 \leq n \leq N} \|z_n\| \right). \tag{3.44}$$

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Teorema (3.12) considerando su correspondiente formulación discreta, pues las condiciones establecidas en el Teorema son válidas para cada n y cada operador $T_n = (I - hA(t_{n+1}))^{-1}$, con h fijo tal que $h \in (0, H]$. □

3.6. Resultado de shadowing. Considere el problema de valor inicial: hallar $u : [0, T] \longrightarrow X$, tal que

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t) \tag{3.45}$$

$$u(0) \qquad = u_0 \tag{3.46}$$

donde $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach, $A(t)$ un operador lineal cerrado con dominio denso en $\mathcal{X}$ que genera un semigrupo analítico, y $f : [0, T] \longrightarrow \mathcal{X}$.

Utilizando la discretización de Euler hacia atrás, escogiendo $N \geq 1$ se define el tamaño de paso $h = T/N$ y los correspondientes puntos de la malla $t_n = nh$. Teniendo en cuenta la hipótesis (3.5) se tiene que para $h < H < \dfrac{1}{\omega + 2\rho}$, los operadores

$$T_n = (I - hA(t_{n+1}))^{-1}$$

son uniformemente acotados. Por lo tanto, considerando el tamaño de paso $0 < h < H$, se genera la sucesión (u_n), $n = 0, 1, \ldots N$, definida por

$$u_{n+1} = T_n u_n + hT_n t(t_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{3.47}$$

donde N puede ser escogido de tal manera que $Nh = T$.

Teorema 3.14. *Suponga que son validas las hipótesis (3.5), (3.7), (3.8) y (3.9). Además, suponga que $f \in C^2[0,T]$, $\|A^{(j)}(t)A(0)^{-1}\| \leq K$ para $0 \leq j \leq 2$ y alguna constante K, y la aplicación $\mathcal{A} : [0,T] \longrightarrow L(X,X)$ tal que*

$$\mathcal{A}(t) = A(t)A(0)^{-1} \tag{3.48}$$

es de clase C^2 sobre $[0,T]$.

Si $u \in C^2([0,T],X)$ es la solución del problema de valor inicial (3.45)- (3.46), y $(u_n)_{n=0}^N$ su aproximación numérica por el método de Euler hacia atrás (3.47) con tamaño de paso h tal que $0 < h \leq H$ y $\lambda_j(t,s)$ es la variación total de $\tau \mapsto A(t)A(0)^{-1}$ sobre el intervalo $[s,t]$, entonces para H y $\max_{0\leq\leq 2} \lambda_j(T,0)$ suficientemente pequeño, existe una constante C y una nueva solución $w \in C^2([0,T],X)$ de la ecuación (3.45) tal que

$$\max_{0\leq n\leq N} \|w(t_n) - u_n\| \leq Ch\Theta \tag{3.49}$$

donde C es una constante positiva que depende sólo de m, ϕ, ω, ρ y K pero no de T. y

$$\Theta = \max_{0\leq j\leq 2} \|u^{(j)}(0)\| + \|Q(T)u_n\| + \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(T)\| + \int_0^T \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(s)\| ds,$$

con $Q(t)$ la proyección espectral sobre B.

Demostración. En primer lugar denotemos por $w \in C^2([0,T],X)$ la solución del problema de valor a la frontera

$$\begin{gathered} w'(t) = A(t)w(t) + f(t), \quad 0 < t < T \\ P(0)w(0) = P(0)u(0), \quad Q(t)w(T) = Q(T)u_N \end{gathered}$$

tal solución existe por el Teorema 3.12. Además, por el Teorema 3.13 se tiene que

$$\max_{0\leq t\leq T} \|w''(t)\| \leq C_2 \max_{0\leq j\leq 2} \|u^{(j)}(0)\| + \|Q(T)u_n\| + \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(T)\| + \int_0^T \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(s)\| ds. \tag{3.50}$$

Es decir,

$$\max_{0\leq t\leq T} \|w''(t)\| \leq C_2\Theta,$$

donde

$$\Theta = \max_{0\leq j\leq 2} \|u^{(j)}(0)\| + \|Q(T)u_n\| + \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(T)\| + \int_0^T \max_{0\leq j\leq 2} \|f^{(j)}(s)\|.$$

Por otro lado, si el error de truncamiento de w se denota por:

$$\Delta_{n+1} = \frac{w(t_{n+1}) - w(t_n)}{h} - A(t_{n+1})w(t_{n+1}) - f(t_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1\ ,$$

entonces

$$\|\Delta_{n+1}\| \leq \frac{h}{2} \max_{0\leq t\leq T} \|w''(t)\|, \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{3.51}$$

Puesto que los operadores $T_n = (I - hA(t_{n+1}))^{-1}$ son uniformemente acotados en n, entonces

$$\|T_n \Delta_{n+1}\| \leq \|T_n\|\|\Delta_{n+1}\| \leq C_2 \Theta \frac{h}{2}$$

Puesto que el error global $e_n = w(t_n) - u_n$ satisface el problema de valor a la frontera

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= T_n e_n + h T_n \Delta_{n+1} \\ P(0)e_0 = 0, &\qquad Q(T)e_N = 0, \end{aligned}$$

por el Teorema 3.13

$$\max_{0\leq n\leq N} \|w_n(t_n) - z_n\| \leq C_2 h^{-1} h C' h \Theta.$$

Por lo tanto,

$$\max_{0\leq n\leq N} \|w_n(t_n) - z_n\| \leq C h \Theta.$$

□

4. Conclusiones. Considere el problema de evolución

$$\frac{du}{dt} = A(t) + f(t), \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{4.2}$$

donde $u : [0,T] \longrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $A(t)$ un operador lineal cerrado con dominio denso en $\mathcal{X}$ generador de un semigrupo analítico.

- Asumiendo ciertas hipótesis de regularidad que debe asumir el operador $A(t)$ y usando el método de Euler hacia atrás, se obtiene que si z_n es la solución numérica que aproxima la solución exacat del problema (4.1)-(4.2), entonces

  $$\max_{0\leq n\leq N} \|z_n - u(t_n)\| \leq Ch,$$

  donde C es una constante y h el tamaño del paso de la malla en la discretización.

Referencias

[1] J.L. Dautray, R. and Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology*, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[2] S. Elliott, CH. and Larson, *A finite element model for the time-dependent joule heating problem*, Math. Comp. **64** (1995), no. 212, 1433–1453.
[3] Q. Fang, *Inertial manifold theory for a class of reaction-diffusion equations on thin tubular domains*, Hirshima Math. J. **23** (1993), no. 3, 459–508.
[4] A. Palencia C. and Thalhammer M. González, C. Ostermann, *Backward euler discretization of fully nonlinear parabolic problems*, Math. Comp.
[5] C. González, C. and Palencia, *Stability of time stepping methods for abstract time dependent parabolic problems*, SIAM J. Anal. **35** (1998), 973–989.
[6] W. Hayes, *Rigorous shadowing of numerical solutions of ordinary differential equations by containment*, Doctor´s thesis., University of Toronto, Graduate Departament of Computer Sciences, 2001.
[7] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolics equations*, vol. 840, Springer-Verlag, 1981.
[8] J. M. Larson, S. and Sanz-Serna, *A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations*, Mathematics of Computation **68** (1999), no. 225, 55–72.
[9] S.Y Larson, S. and Pilyugin, *Numerical shadowing near the global attractor for a semilinear parabolic equation*, Preprint.
[10] J.D. Mimura, M. and Murray, *Prey-predator model which exibits patchiness*, *J. Theor. Biol.* **75** *(1979), 249–262.*
[11] C. Ostermann, A. and Palencia, Shadowing for nonautonomous parabolic problems with applications to long-time error bounds*, SIAM J. Numer. Anal.* **37** *(2000), no. 5, 1399–1419.*
[12] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.*
[13] S. Pilyugin, Shadowing in dynamical systems*, vol. 1706, Springer-Verlag, 1999.*
[14] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.*
[15] A.M. Stuart and A.R Humphries, Dyamical systems and numerical analysis*, Cambridge - University Press, New York, 1996.*
[16] H. Tanabe, Equation of evolution*, Pitman, London, 1979.*
[17] R. Temam, Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York, 1988.*