

SIMULACION DE LA PRECIPITACIÓN EN MESO ESCALA PARA LA REGIÓN DEL PERÚ*

OBIDIO RUBIO MERCEDES**; RUTH NORIEGA SAGÁSTEGUI**AND SALOMON ESPINOZA QUIRÓZ ****

Resumen. En este artículo presentamos una descripción fenomenológica del concepto de precipitación, luego se aborda la modelación matemática de todas las variables que intervienen en la explicación del fenómeno, finalmente se describe la eficiencia del uso del Modelo computacional BRAMS, para poder simular numericamente la variable precipitación en meso escala, dentro la climatología atmosférica para la la región del Perú.

Key words. Climatología, leyes de conservación, precipitación, EDP

AMS subject classifications. 15A15, 15A09, 15A23

1. Introducción. Durante ya mas de un siglo de años los científicos han venido observando y estudiando la distribución de la precipitación en los terrenos montañosos (Barry 1992), principalmente en los Alpes, Bretania y después en todas partes del mundo, sin embargo no existen estudios detallados sobre los Andes Peruanos. En los últimos 30 años los modelos computacionales han permitido explorar el problema en extensión, esencialmente relacionados a la dinámica y la microfísica.

1.1. Precipitación. La precipitación es el agua procedente de la atmósfera, y que en forma líquida o sólida se deposita sobre la superficie terrestre. Las formas significativas de precipitación en hidrología de superficie son: llovizna, lluvia, nieve, aguanieve y granizo [17], [11].

1.1.1. Tipos de precipitación. La precipitación puede ser clasificada de acuerdo al mecanismo responsable del levantamiento de aire que produce la condensación y agregación. Se distinguen los siguientes tipos:

- Precipitación convectiva: es causada por el ascenso de aire cálido más liviano que el aire frío de los alrededores; la lluvia de este origen es breve, abundante, a veces acompañada de granizo.
- Precipitación orográfica: resulta del ascenso mecánico sobre una cadena de montañas. El aire húmedo y caliente asciende cerca de las pendientes, enfriándose adiabaticamente debido a la descompresión promovida por la menor densidad del aire en los niveles más elevados. El enfriamiento conduce a saturación de vapor, posibilitando la formación de nubes estratiformes y cumuliiformes que con la ascensión, tienden a producir lluvia. Este tipo de lluvia es característico de las regiones montañosas.
- Precipitación ciclónica: resulta del levantamiento de aire, que converge en un área de baja presión. Este tipo de precipitación puede clasificarse en frontal o no frontal.

Las lluvias de origen frontal: las frentes están asociadas a la formación de nubes que ocurren por la ascensión del aire húmedo en las zonas de baja presión para la cual convergen las masas de aire. Si éstas presentan acentuado

*Este trabajo es financiado con los recursos ordinarios asignados a la UNT.

**Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo (orubio@unitru.edu.pe).

***Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo (bbruthns@hotmail.com),

****Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo (sespinoza@unitru.edu.pe).

contraste de temperatura y humedad, se establecen superficies de discontinuidades o superficies frontales, mas o menos inclinadas, que favorecen la subida del aire más caliente sobre el aire más frío y por tanto la formación de lluvia. Esto es característico en las regiones de gran inestabilidad atmosférica y de las regiones tropicales.

Rivano(2004)[13], señala que en general las lluvias en Chile son de origen frontal orográfico.

1.1.2. Medición de la precipitación. Según MONSALVE (1999) citado por Rivano[13], la cantidad de precipitación se expresa en unidades de ámina caída y acumulada sobre una superficie plana e impermeable. Para dichas mediciones se utilizan pluviómetros y pluviógrafos. La altura pluviométrica (δh), expresada usualmente en mm , es registrada en las denominadas horas sinópticas durante el día. Generalmente se usa para expresar la precipitación diaria mensual y anual. La altura pluviográfica, al ser un registro de tipo continuo, se utiliza además para el cálculo de la intensidad de la precipitación ($i = \Delta h / \Delta t$), valor expresado generalmente en mmh^{-1} y que es fundamental en el diseño de obras hidráulicas. WIESNER (1970)[17], señala que las principales fuentes de error que surgen al usar instrumentos para evaluar la precipitación de una cuenca son:

- Deficiencias en el instrumento,
- Falta de representatividad o exposición de la estación en la cuenca,
- Redes de estaciones mal planeadas o insuficientemente.

Vamos presentando algunos puntos relacionados con el tema de precipitación orográfica[15][18][10]:

1. La precipitación aumenta con la altitud a alguna altura, luego decrece en elevaciones altas,(más en verano que en invierno). Esto representa un acoplamiento entre dinámica con la contribuciones de la humedad y la microfísica, la cual determina el tipo y la distribución local de la precipitación(Berry 1992) citado por [13]
2. La zona climática(continental versus marítima), estación(verano versus invierno), configuración del terreno(montaña aislada versus picos múltiples y valles), tipos de storn, asi como altura de la montaña y pendiente; determina la naturaleza de la precipitación orográfica.
3. En casos donde convección térmica de humedad no es importante, la precipitación es mejorado sobre terrenos montañosos.
4. El terreno induce ondas de gravedad(ondas de montañas), inestabilidad potencial, movimientos de zonas frontales y distribución areal de precipitación

A pesar de el estudio de la precipitación en los últimos años, aun falta entender mucho porque la data observada no es suficiente, principalmente porque en las regiones montañosas los instrumentos meteorológicos son colocados en habitaciones humanas , que generalmente están en los valles y se pierde data en las partes altas. Este vacío de data crea dos problemas, el primero es que las inicializaciones de los modelos numéricos no son los mejores, segundo se limita la verificación tanto del modelo de salida como del radar y datos satelitales, llevan a los meteorologistas a trabajar con vacíos.

Algunos de los tópicos necesarios son precisados para tratar la precipitación estratiforme son:

- * ¿Cuáles son los parámetros de control en la distribución vertical y horizontal de la precipitación en terrenos complejos?
- ¿Cuál es la escala de interacción: que importante es la topografía local(escala

fina) en determinar la distribución de la precipitación?. Algunos estudios dicen que montañas pequeñas aisladas o datos de escala fina influyen en la precipitación, otros investigadores sugieren que los patrones de precipitación no siguen necesariamente la topografía de escala fina o meso esala.

- ¿Cuáles son las limitaciones y sensibilizaciones de los modelos numéricos para los eventos de precipitación cargada?

Hay un número de revisores en la materia de flujo de aire para la montaña, dinámica de la nube y procesos microfísicos así como tiempo y clima en la montaña.

Un número de procesos atmosféricos han sido identificados como mecanismos de generación de precipitación orográfica. Smith (1989) identificó el número de estos procesos:

1. Ascendencia forzada suave;
2. Sistema de nubes generadores-alimentadores;
3. Convección forzada diurnamente
4. Inestabilidad Potencial
5. Advección diferencial. Desde luego que la naturaleza opera a través de un espectro de procesos. Probablemente estos procesos operan en conjunción de unos con otros.

2. Definición de Mesoescala. En primer lugar queremos saber qué significa el término 'mesoescala'. Mesoescala puede ser definida de varias formas [16].

La Atmosférica; es la primera definición, introducida durante los años 1950s, fue utilitaria u operacional, se denominan a aquellas escalas atmosféricas que no pueden ser observadas con sistemas A de observación contemporánea. Así en los 1950s la mesoescala atmosférica caía entre la escala cumulus, observada por el radar de climas, y la escala ciclón, observada por la red de observación operacional sinóptica.

Sin embargo podemos observar que los sistemas de tecnología han ido mejorando enormemente en las últimas tres décadas, escudriñemos los avances de esta definición de mesoescala.

Orlanski (1975) sugirió gestar una simple definición geométrica basada en espacios horizontales. En este esquema observamos las cubiertas de meso escala atmosférica de tres décadas espaciales: la meso-C escala (2-20 km), la meso-B escala (20-200km), y la meso-A escala (200-2000 km).

Otra definición ha sido ofrecida basada sobre dinámica similar. Pielke (1984)[11] propuso que el término 'meso escala' sea usado para referir a escalas horizontales lo suficientemente grandes que aceleraciones verticales pueden ser ignoradas pero también lo suficientemente pequeña que las fuerzas Coriolis no hagan balancear las fuerzas de presión horizontal.

3. Modelación Matemática. A continuación presentaremos los modelos matemáticos, generados a partir de las leyes físicas de conservación.

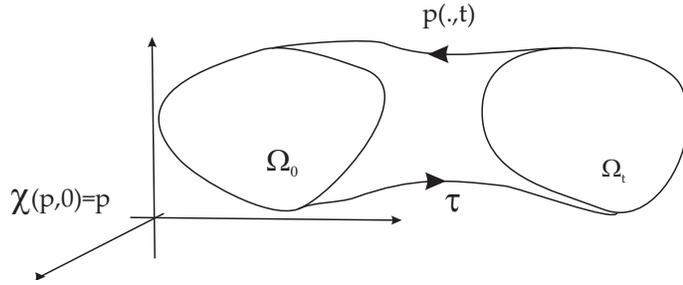
3.1. Movimiento. DEFINICIÓN 1.

Sea Ω_0 un cuerpo, un movimiento es una función

$$\begin{aligned} \chi : \Omega_0 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, t) &\rightarrow \chi(p, t) = \chi_t(p) \end{aligned}$$

tal que $\forall t$, $\chi(\cdot, t)$ es una deformación de clase C_0^1 .

$x = \chi(p, t)$ es el lugar que ocupa la partícula en el tiempo t , $\Omega_t = \chi(\Omega_0, t)$ es el espacio que ocupa el cuerpo en el tiempo t .



- a) La trayectoria del movimiento se define como $\tau = \{(x, t)/x \in \Omega_t, t \in \mathbb{R}\}$
 b) Para cada t fijo, la función

$$\begin{aligned} \chi(\cdot, t) : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ p &\rightarrow x = \chi(p, t) \end{aligned}$$

es inyectiva y sobreyectiva. Por lo que se define su inversa:

$$\begin{aligned} P_t : \Omega_t &\rightarrow \Omega_0 \\ x &\rightarrow P_t(x) = \chi_t^{-1}(x) = p = P(x, t). \end{aligned}$$

Se cumple:

$$P(\chi(p, t), t) = p, \quad y \quad \chi(P(x, t), t) = x.$$

Se define el mapeo de referencia:

$$\begin{aligned} P : \tau &\rightarrow \Omega_0 \\ (x, t) &\rightarrow P(x, t) = p \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2. Sea $\chi : \Omega_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento de clase C^1 , y p el punto material, se define la velocidad por

$$\frac{D}{Dt}\chi(p, t) := \frac{\partial}{\partial t}\chi(p, t),$$

la aceleración por

$$\frac{D^2}{Dt^2}\chi(p, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(p, t)$$

Tarea: Cuándo $\frac{D}{Dt}$ coincide con la tangente de la trayectoria?

Usando el mapeo de referencia podemos definir la velocidad en el punto espacial x por:

$$\begin{aligned} v : \mathcal{J} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, t) &\rightarrow v(x, t) := \frac{D}{Dt}\chi(P(x, t), t) \end{aligned}$$

llamada la descripción espacial de la velocidad. $v(x, t)$ se llama la velocidad del punto material que ocupa el lugar espacial x en el tiempo t .

Interpretación Lagrangiana y Euleriana:

Sea ϕ un campo cualquiera asociado a nuestro movimiento (describe una propiedad del movimiento). ϕ se llama campo material si está definido sobre:

$$\begin{aligned}\phi &: \Omega_0 \times \mathbb{R} \rightarrow V \\ (p, t) &\rightarrow \phi(p, t)\end{aligned}$$

minetra que ϕ se llama campo espacial o euleriano cuando se define sobre la trayectoria, es decir

$$\begin{aligned}\phi &: \mathcal{J} \rightarrow V \\ (x, t) &\rightarrow \phi(x, t)\end{aligned}$$

Relación entre las dos Interpretaciones

Sea

$$\begin{aligned}f &: \Omega_0 \times \mathbb{R} \rightarrow V \\ (p, t) &\rightarrow f(p, t)\end{aligned}$$

una propiedad con interpretación lagrangiana.

Sea

$$\begin{aligned}g &: \mathcal{J} \rightarrow V \\ (x, t) &\rightarrow g(x, t)\end{aligned}$$

la misma propiedad con interpretación euleriana, entonces

$$\begin{aligned}f(p, t) &= g(P(x, t), t) = g_l(p, t) \\ g(x, t) &= g(\chi(p, t), t) = f_e(x, t)\end{aligned}$$

denotamos:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}f(p, t) &= \frac{\partial}{\partial t}f(p, t) \text{ derivada material en } t \\ \frac{D}{Dt}g(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t}g(x, t) \text{ derivada espacial en } t\end{aligned}$$

Ahora veamos la relación entre las dos derivadas.

PROPOSICIÓN 1. Sean φ , ν campos espaciales, escalar y vectorial suaves respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\varphi &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi + v \cdot \text{grad}\varphi \\ \frac{D}{Dt}\nu &= \frac{\partial}{\partial t}\nu + \text{grad}\nu \cdot v\end{aligned}$$

Demostración: Sea

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\rightarrow \varphi(x, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\varphi(x, t) &= \frac{D}{Dt}\varphi(\chi(p, t), t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\chi(p, t), t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\chi(p, t), t) + \text{grad}\varphi(\chi(p, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\chi(p, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t) + \text{grad}\varphi(x, t) \cdot v((p, t), t)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{D}{Dt}\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\varphi + v \cdot \text{grad}\varphi$$

La derivada material de un campo espacial

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \text{grad}$$

□

TEOREMA 1 (Teorema del Transporte.).

$$\begin{aligned}
\chi(\cdot, t) : \Omega_0 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
p &\rightarrow \chi(p, t) = x
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{P}_0 \subset \Omega_0$, entonces $\mathcal{P}_t = \chi(\mathcal{P}_0, t)$. El volumen de \mathcal{P}_t satisface

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} dV \\
&= \int_{\mathcal{P}_0} \det F dV, \quad F = \nabla \chi(p, t) \\
&= \int_{\mathcal{P}_0} \det F \cdot \text{div} \mathbf{v} dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}(\text{Vol}\mathcal{P}(t)) &= \int_{\mathcal{P}_0} \frac{D}{Dt} \det F dV \\
&= \int_{\mathcal{P}_0} \text{div} \mathbf{v} \cdot \det F dV \\
&= \int_{\mathcal{P}_0} \text{div} \mathbf{v} dV \\
&= \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{v} \eta dA \quad (\text{la divergencia es la variaci3n del volumen del cuerpo}).
\end{aligned}$$

TEOREMA 2 (Teorema de Transporte de Volumen.).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\text{Vol}\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \text{div} \mathbf{v} dV \\
&= \int_{\partial \mathcal{P}_t} v \eta dA
\end{aligned}$$

TEOREMA 3 (Teorema de Transporte de Reynolds.). *Sea ϕ un campo, entonces $\forall \mathcal{P}_0 \subset \Omega_0$ y tiempo t*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_0} \phi d\Omega &= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{D}{Dt} \phi + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \phi v \cdot \boldsymbol{\eta} dA \end{aligned}$$

Masa.

DEFINICIÓN 3. *Una distribución de masa para Ω_0 en un tiempo t , es una función*

$$\begin{aligned} \rho : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\rightarrow \rho(x, t) \end{aligned}$$

Ley de la conservación de masa:

La masa se conserva constante:

$$m(\mathcal{P}_0) = m(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho d\Omega$$

$$0 = \frac{D}{Dt} m(\mathcal{P}_t) = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho d\Omega = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{D}{Dt} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\Omega$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) d\Omega, \quad \forall \mathcal{P}_t \subset \Omega_t$$

En forma diferencial se tiene

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{Ecuación de conservación de masa.}$$

Como

$$0 = \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega, \quad \forall \mathcal{P} \subset \Omega_t$$

se cumple:

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t} \rho d\Omega = - \int_{\partial \mathcal{P}} \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta} dA, \quad \forall \mathcal{P} \subset \Omega_t$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}} \rho d\Omega = - \int_{\partial\mathcal{P}} \rho \cdot v \cdot \eta dA.$$

La variación de la masa sobre el volumen \mathcal{P} = Flujo de masa que entra por la frontera.

División de Materiales (Fluidos).

a) Incompresibles: $\rho = cte$ en el tiempo, la ecuación de la masa es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \Rightarrow \operatorname{div} v = 0$$

b) Comprensibles: $\rho \neq cte$.

Momento Lineal: Sea $\chi : \Omega_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento y $\mathcal{P} \subset \Omega_0$. El momento lineal de \mathcal{P} en el tiempo t se define por:

$$l(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} v \cdot \rho d\Omega$$

Fuerzas: durante un movimiento mecánico hay interacción entre las partes de un cuerpo o entre un cuerpo y su ambiente, éstos se llaman fuerzas, que son de tres tipos:

- i) Fuerzas de contacto entre las partes separadas de un cuerpo.
- ii) Fuerzas de contacto ejercidas sobre la frontera de un cuerpo por su ambiente.
- iii) Fuerzas de un cuerpo ejercidas sobre los puntos interiores del cuerpo por el ambiente.

Las fuerzas del tipo (ii) serán tratadas cuando se hablen de problemas con condiciones de contorno.

Las fuerzas de contacto entre partes del cuerpo y las fuerzas del cuerpo serán tratadas en esta sección.

Sea $\mathcal{P}_t \subset \Omega$, la fuerza total sobre \mathcal{P}_t

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} S dA + \int_{\mathcal{P}_t} b d\Omega$$

Ley de Conservación de Momento: (Segunda ley de Newton)

Cambio del momento = Fuerza total

$$\frac{D}{Dt} l(\mathcal{P}, t) = \mathcal{F}(\mathcal{P}, t)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{P}_t} v \cdot \rho d\Omega = \int_{\partial\mathcal{P}_t} S dA + \int_{\mathcal{P}_t} b d\Omega$$

$b : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo

$s : J \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}^3$

$(x, t), \eta \rightarrow s(x, t\eta) = T_\eta$, \mathcal{N} = conjunto de vectores unitarios.

$T : J \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un tensor.

Aplicando las propiedades del cálculo tensorial y el teorema de transporte, se tiene:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{Dv}{Dt} d\Omega = \int_{\mathcal{P}_t} (\text{div}T + b) d\Omega, \quad \forall \mathcal{P}_t \subset \Omega_t$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Dv}{Dt} = \text{div}T + b, \quad \text{Ley de conservación de Momento.}$$

El tensor T se divide en: $T = -pI + \sigma$.

$\rho : J \rightarrow \mathbb{R}$, función escalar, presión termodinámica; σ es un tensor viscoso.

Segunda ley de Fluidos.

a) Fluidos Newtonianos: $\sigma = 2\mu\mathcal{D}$, $D = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^t)$ se tendría la ecuación de Navier-Stokes (incompresible)

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad}v \cdot v \right) = -\nabla p + \mu \Delta v + b$$

$$\text{div}v = 0$$

b) Fluidos no Newtonianos: En los cuales σ satisface otra ecuación (tensorial)

Tarea: Deducir las ecuaciones de Navier-Stokes detalladamente, del teorema de Reynold.

Leyes de Conservación

i) Conservación de masa:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div}V = 0$$

ii) Conservación de Momento:

$$\rho \frac{D}{Dt} v = \text{div}T + b = -\nabla \rho + \text{div}\sigma + b$$

iii) Conservación de Energías

- La energía interna neta sobre la parte \mathcal{P}_t la denotamos por $\mathcal{E}(\mathcal{P}_t)$.
- El flujo de calor transferido a \mathcal{P}_t (la tasa en la cual la energía es transferida en forma de calor al cuerpo), $\mathcal{Q}(\mathcal{P}_t)$
- El trabajo generado por fuerzas de cuerpo y entre partes internas de cuerpo $W(\mathcal{P}_t)$.
- La energía cinética, $K(\mathcal{P}_t)$, (energía generada por el movimiento)

La ley de conservación de la energía: satisface (Primera ley de la termodinámica)

$$\{\text{Tasa de cambio de energía total}\} = \{\text{Trabajo}\} + \{\text{Flujo de calor}\}$$

$$(3.1) \quad \frac{D}{Dt} (\mathcal{E}(\mathcal{P}_t) + K(\mathcal{P}_t)) = W(\mathcal{P}_t) + \mathcal{Q}(\mathcal{P}_t)$$

Forma global y forma local de la ley de conservación de energía.

a) Existe un campo escalar, llamado energía interna específica

$$\varepsilon : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \varepsilon dv \quad \text{postulado.}$$

b) La transferencia de energía en forma de calor se determina por

$$Q(\mathcal{P}_t) = - \int_{\mathcal{P}_t} q\eta dA + \int_{\mathcal{P}_t} r dV$$

donde q = flujo de calor (campo vectorial).

r = generación de fuente de calor.

c) $W(\mathcal{P}_t) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} T\eta \cdot v dA + \int_{\mathcal{P}_t} b v dv$

d) Energía cinética.

$$K(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \rho |v|^2 dv$$

de ahí se tiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho \varepsilon dv + \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \rho |v|^2 dv = \int_{\partial\mathcal{P}_t} T\eta dA + \int_{\mathcal{P}_t} b v dv - \int_{\partial\mathcal{P}_t} q\eta dA + \int_{\mathcal{P}_t} r dv$$

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left[\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} |v|^2 \right] = \int_{\mathcal{P}_t} (\text{div} T v + T : D) dv + \int_{\mathcal{P}_t} (r - \text{div} q) \quad (2)$$

usando la ecuación de la energía cinética

$$\rho \frac{D}{Dt} v \cdot v = \text{div} T \cdot v + b v$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} |v|^2 = \text{div} T \cdot v + b v$$

(2) se transforma en:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{D}{Dt} \varepsilon dv = \int_{\mathcal{P}_t} (T : D + r - \text{div} q) dV, \quad \forall \mathcal{P}_t \subset \Omega$$

Por lo tanto se cumple que:

$$\rho \frac{D}{Dt} \varepsilon = T : D - \text{div} q - r$$

El modelo matemático consta de ecuaciones pronósticas y acopladas para

jkdasjdasjkadjkad
a todas las variables de estado, incluyendo u , v , w , temperatura potencial, razón de
mistura.

utilizando el procedimiento de Reynolds, que consiste en descomponer una cierta
variable atmosférica $\alpha(x, t)$ en una parte media $\bar{\alpha}(x, t)$ y una parte turbulenta $\alpha'(x, t)$,
siendo esa descomposición de escalas de Reynolds definida por

$$(3.2) \quad \alpha(x, t) = \bar{\alpha}(x, t) + \alpha'(x, t)$$

De esta forma la evolución de la atmósfera es representada por un nuevo conjunto
de ecuaciones, que son expresadas en términos medios y turbulentos, de las variables
atmosféricas u , v , w , π' , θ_l , r_n , que son especificadas a continuación.

Las ecuaciones prognósticas del modelo RAMS son descritas abajo, primero para una atmósfera no hidrostática, y en seguida para una atmósfera hidrostática, donde el significado de las variables estan representados en la Tabla ?? . Las medias de Reynolds son aplicadas sobre el volúmen en torno del punto de malla, siendo omitida la notación de media (barra) solo por simplicidad.

Las ecuaciones no hidrostáticas son:

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \theta \frac{\partial \pi'}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \theta \frac{\partial \pi'}{\partial y} + f u + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \frac{\partial \pi'}{\partial z} - g \frac{\theta'_v}{\theta_0} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones pueden ser escritas en la forma tensorial como:

$$(3.3) \quad \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_I = -u_j \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{II} - \underbrace{\delta_{i3} g}_{III} - \underbrace{\epsilon_{ijk} f_j u_k}_{IV} - \underbrace{\theta \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}}_V - \frac{1}{\rho_0} \underbrace{\frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x - j}}_{VI}$$

donde

- *I* Representa el término de almacenamiento
- *II* Describe la advección.
- *III* Describe la acción de la gravedad
- *IV* Describe la influencia de la rotación de la tierra (efecto Coriolis)
- *V* Describe las fuerzas del gradiente de presión.
- *VI* Representa la divergencia del flujo turbulento.

La ecuación termodinámica:

$$(3.4) \quad \frac{\partial \theta_{il}}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta_{il}}{\partial x} - v \frac{\partial \theta_{il}}{\partial y} - w \frac{\partial \theta_{il}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial \theta_{il}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial \theta_{il}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial \theta_{il}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \theta_{il}}{\partial t} \right)_{rad}$$

donde es la temperatura potencial del agua sólida y hielo es dada por

$$(3.5) \quad \theta_{il} = \theta + L \frac{q_l}{c_p} + L' \frac{q_i}{c_p}$$

La ecuación de conservación para la precipitación es dada por

$$(3.6) \quad \frac{\partial r_n}{\partial t} = -u \frac{\partial r_n}{\partial x} - v \frac{\partial r_n}{\partial y} - w \frac{\partial r_n}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial r_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial r_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial r_n}{\partial z} \right)$$

4. Modelación Computacional .

4.1. BRAMS. BRAMS (Brazilian Regional Atmospheric Modeling System) es un modelo meteorológico que fue desarrollado por investigadores brasileiros, através de un proyecto conjunto de ATMET, IME/USP, IAG/USP e o CPTEC/INPE, financiado por FINEP (Financiadora de Estudos y Proyectos), con el objetivo de desarrollar una nueva versión del RAMS (Regional Atmospheric Modeling System) adaptado a los trópicos, teniendo un modelo único para la previsión del Tiempo regional. El

modelo RAMS surgió de la unión de tres modelos existentes en la Universidad de Colorado: el modelo de nubes/mesoescala (Tripoli y Cotton, 1982, Walko y Tremback 2001 citados por [16] ; y el modelo de brisa marítima descrito por Mahrer y Pielke (1977)[12][11].

Los modelos BRAMS y RAMS son bien semejantes, diferenciándose en algunos módulos, desarrollados para una mejor representación del estado de la atmósfera de Brasil. El RAMS es un modelo de meso escala altamente flexible y versátil, siendo posible activar y desactivar las diversas opciones y parametrizaciones contenidas en su código, conforme el interés del trabajo a ser desarrollado. El BRAMS/RAMS es un modelo de predicción numérica de Tiempo, desarrollado para simular circulaciones atmosféricas, utilizado más frecuentemente en la simulación de fenómenos de mesoescala (que comprende escalas horizontales de 2 a 2000km). Es un modelo de gran versatilidad, pudiendo ser utilizado también en otras escalas (desde la microescala hasta simulaciones de grandes torbellinos y fenómenos climáticos), desde que se haga los ajustes pertinentes al estudio de interés, posibilitando diferentes tipos de estudios, teniendo como finalidad fortalecer informaciones de previsión de tiempo, bien como soporte a la investigación científica.

4.2. Estructura del Modelo. La estructura de la malla computacional que el RAMS utiliza es alternada, del tipo C de Arakawa (Messinger e Arakawa, [4]), siendo que las variables termodinámicas y de humedad son definidas en los mismos puntos de la grade, en cuanto que las componentes u, v y w de la velocidad del viento son intercaladas en $\Delta x/2, \Delta y/2$ y $\Delta z/2$, respectivamente.

La proyección horizontal utilizada para la definición de las coordenadas de la malla es la proyección estereográfica, cuyo polo de proyección queda próximo del centro del área de dominio. Este tipo de proyección disminuye las distorsiones de la proyección del área de interés. Coordenadas cartesianas también pueden ser utilizadas por el RAMS. En la vertical, es usado el sistema de coordenadas $\sigma - z$, el cual contorna la topografía del terreno, en este sistema de coordenadas (σz), el topo del dominio del modelo es exactamente plano y la base sigue las ondulaciones del terreno. En el modelo, se usa mallas con espacios variables entre los niveles verticales, con mayor resolución próximo al suelo y menor resolución en el topo, o sea, el espacio entre cada nivel va aumentando con la altura en una proporción pre determinada.

En el RAMS, se puede usar la opción de mallas anidadas, de tal manera que se consiga obtener resoluciones espaciales más altas para determinados locales seleccionados, o sea, las ecuaciones del modelo serán resueltas de forma simultánea en diferentes resoluciones espaciales. La interacción ocurre en doble sentido (conocido como dos-formas de interacción) entre las mallas anidadas, permitiendo que los procesos ocurran de la malla de mayor hacia la de menor resolución, y vice versa.

Las ecuaciones usadas en BRAMS son aquellas para una atmósfera no hidrostática, descritas anteriormente, que permite describir procesos físicos en los cuales la velocidad vertical es intensa. Los procesos de superficie son representados numéricamente de forma bien detallada y simula aquellos asociados a la difusión turbulenta, la formación y interacción de nubes, precipitación de hidrometeoros en la fase líquida y hielo, convección de cumulus, cambio de calor sensible y latente entre y superficie y la atmósfera.

El modelo BRAMS resuelve numéricamente las ecuaciones gobernantes de la evolución de la atmósfera (ecuaciones 3.4 al 3.6, ?? y ??), utiliza la formulación de diferencias finitas de segundo orden en el espacio y en el tiempo, se resuelven en forma explícita debido a los requerimientos computacionales, siendo que los términos

de advección son colocados en la forma de flujo de manera tal que la masa, momento y energía sean conservados.

5. Resultados. Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas usando el modelo computacional BRAMS (Brazilian Regional Atmospheric Modelling system), corriendo en un cluster del Departamento de Matemática compuesto por 4 nodos de procesamiento SPARC T5120 de 4 cores cada uno, sobre el sistema SOLARIS 10, orientado al monitoreo climático de la región del Perú, para el periodo de agosto a noviembre de los años 1986 y 1987,

El modelo BRAMS se inicializó usando los resultados del modelo global del Centro de Predicción de Tiempo y Clima del Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (CPTEC/INPE), con una resolución 160000 metros en la horizontal. Para ejecutar el modelo, se inició con tres mallas anidadas, con espaciamento horizontal 160, 80 y 20 Km para las mallas 1, 2 y 3 respectivamente. El número de puntos utilizados en las tres mallas x y y fue 30 y 28 puntos en la primera malla, 38 y 40 puntos en la segunda y 86 y 122 puntos en la tercera.

Los ajustes de datos para correr el modelo se realizan en el archivo RAMSIN del control del modelo, Las tres mallas estan centradas en las coordenadas $(-08.5, -73.5)$, $(-09.5, -75.5)$ y $(-09.5, -76.0)$ respectivamente.

Las corridas se ejecutaron en un tiempo de 121 dias o sea 4 meses para cada año, con una frecuencia de data de cada tres horas. Los resultados fueron visualizados con el software GrADS.

La precipitación generada por el modelo, están dispuestos en las figuras (5.1) y (5.2). En estos gráficos están indicados la precipitación acumulada diaria promediada por mes en milímetros para la ultima malla, generadas por el modelo BRAMS.

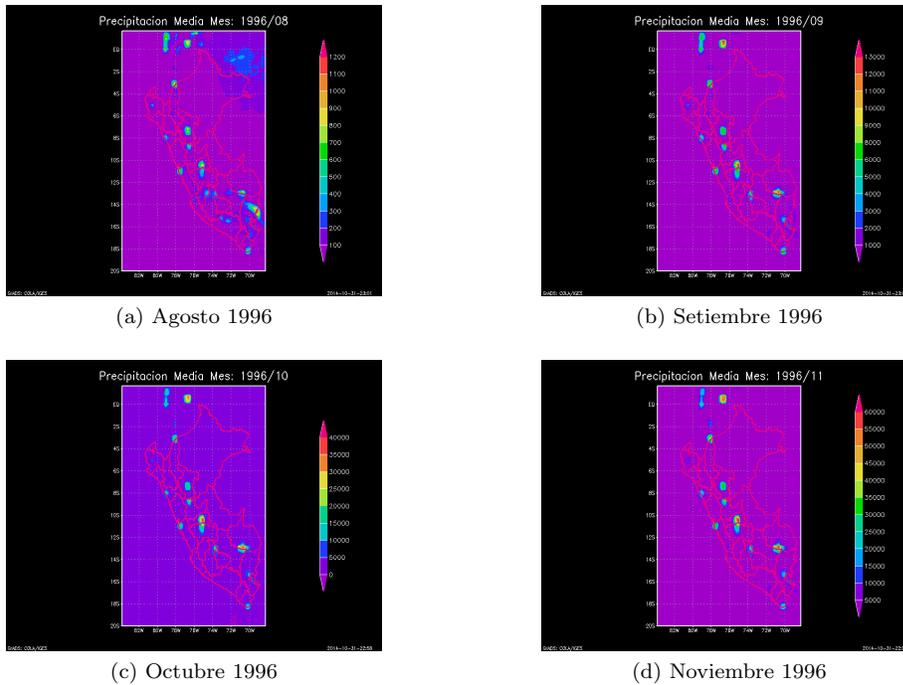


Figura 5.1: Precipitación media mensual 1996

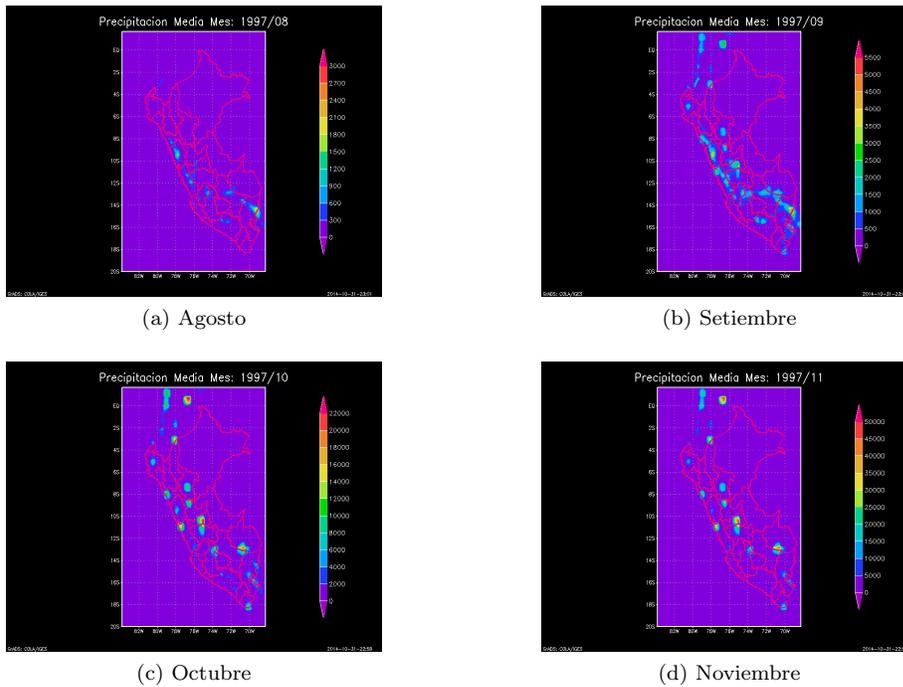


Figura 5.2: Precipitación media mensual 1997

Podemos observar los gráficos la media mensual de la precipitación para cuatro meses del año de 1996 presentados en la figura (5.1), se observa que la precipitación máxima ocurre en los meses de Octubre y Noviembre, en cambio una precipitación mas baja ocurre en el mes de Agosto del año 1996.

En la figura (5.2), se presenta las medias mensuales de las precipitaciones para los meses de agosto a noviembre del año de 1997, con una configuración similar a los del año 1996.

Finalmente podemos concluir que el modelo computacional BRAMS a demostrado ser eficiente para simular la variable precipitación atmosférica para la región del Perú, y que servirá el paso inicial para luego generar climatologías por 10 o más años, y luego en un futuro poder hacer predicciones climatológicas que serán necesarias para contribuir a estudio del cambio climático para esta región del Perú.

Agradecimientos. El autor agradece al Colega Orlando Hernandez y estudiantes: Luis Caucha, Sonia Renteria y Mayckol Jimenez que ayudaron a preparar este manuscrito.

Referencias

- [1] BATCHELOR, G., *An Introduction to FLuid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [2] CHORIN, A. AND MARSDEN, J., *Introduction to Fluid Mechanics*. Sprienger-Verlag, New York, 1979.
- [3] KRETTENAUER, K. AND SCHUMANN, U., *Direct numerical simulation of thermal convection over a wavy surface*, Meteorology and Atmospheric Physics,41(3), 2005, pp. 165-179
- [4] MESSINGER, F. AND ARAKAWA, A., *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, GARP-Publications Series, no 14, WMO/ICSU Joint Organizing Committee, 64pp.,1976.

- [5] MOENG, C-H, *A Large-Eddy Simulation Model for the Study of Planetary Boundary-Layer turbulence*. J. Atmos. Sci., 41,1984, 2052-2062.
- [6] MOENG, C-H., AND WYNGAARD, J.C., *Spectral Analysis of Large-Eddy Simulations of the Convective Boundary layer*. J. Atmos. Sci.,1988, 45, 3573-3587.
- [7] SULLIVAN, P. P., J. C. MCWILLIAMS, AND C.-H. MOENG, *A grid nesting method for large-eddy simulation of planetary boundary layer flows*. *Boundary-Layer Meteorology*, 1996, 80, 167-202.
- [8] MOENG, C-H. AND P.P. SULLIVAN, *Large Eddy Simulation*. In: Encyclopedia of Atmospheric Sciences, 2002, 1140-1150.
- [9] CUSHMAN-ROISIN,B. AND BECKERS,J. , *Introduccion to Geophysical Fluid Dynamics*. Academic Press, Cambridge, 2008.
- [10] FISURE LANZAM RAMON, *Meteorología y Oceanografía Patrones y capitanes de yate*, Servicio central de Publicaciones del Gobierno de Vasco, Colección ITSASO Nro. 29., (2009).
- [11] PIELKE, ROGER, *Mesoscale Meteorological Modeling*, Second Edition, Academic Press, 2002.
- [12] MAHRER, Y.E., PIELKE, R.A. *A Numerical Study of the Airflow over Irregular Ter- rain*, Beitrage zur Physik der Atmospharic, V.50, p.98-113, Feb,1977.
- [13] RIVANO GUTIERREZ, FULVIO, *Análisis de eventos extremos de precipitación y su efecto en el diseño de drenaje superficial de tierras agricolas del sur de Chile*, Tesis de Licenciatura, Instituto de Ingeniería Agraria y suelos, Valdivia, Chile, 2004
- [14] JUHASZ,Z. AND KACSUK,P. , *Distributed and Parallel Systems: cluster and grid computing*. Springer, Hungarian U., 2005.
- [15] SAHA, KSHUDIRAM , *The Earth's Atmosphere* , Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [16] TEICHRIEB, CLAUDIO, *Sensibilidad del BRAMS para Descripción de lluvia y Temperatura, en el Nordeste de Rio Grande do Sul, para diferentes Resoluciones Espaciales*, Disertacao de Mestrado en Física, Universidade Federal de Santa María, 2008.
- [17] Wiesner, C. *Hydrometeorology*. Londres. Chapman and Hall. 232 p. 1970.
- [18] ZDUNKOWSKI, WILFORT AND BOTT, ANDREAS, *Dynamics of the Atmosphere: a Course in theoretical Meteorology* , Cambridge University Press, 2003.