

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL USANDO EL MÉTODO DE GALERKIN Y WAVELETS B-SPLINES CARDINALES*

RONALD LEÓN NAVARRO**

Resumen. En el presente artículo, resolvemos numéricamente una ecuación diferencial ordinaria elíptica con condiciones de frontera tipo Dirichlet. El tratamiento numérico se realiza usando el clásico método de Galerkin y un tipo especial de bases wavelets; estas son wavelets B-splines cardinales. Los resultados de la experimentación numérica realizada muestran que, aún considerando coeficientes, y función en el segundo miembro, de la ecuación diferencial, como funciones discontinuas con salto finito grande, el sistema que se genera es estable si se aplica preconditionamiento y la solución numérica es suficientemente exacta para bajos niveles de aproximación.

Key words. Método Galerkin, bases, wavelets, B-splines, Análisis Multiresolución, ED elíptica.

1. Introducción. Una forma de definir una *wavelet* ([11]) es mediante una función ψ de promedio cero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0,$$

la cual es dilatada con un parámetro s , y trasladada por u :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

Existen muchas otras formas de definir tal función, en forma explícita como antes o implícitamente, o a través de otra función (“función escala”); lo cierto es que, fundamentalmente estas funciones deben ser bien localizadas en “tiempo” y “frecuencia”, y dependiendo de la base de funciones que se desee construir para algún tipo de representación funcional que se quiera realizar, se adicionan otras propiedades. En la historia, se conoce que Alfred Haar, en 1910, construyó la primera wavelet, después aparecieron el análisis de Fourier como una alternativa a la transformada de Fourier estándar, y en las últimas dos décadas del siglo pasado y el primero de este siglo, podemos encontrar a numerosos matemáticos, físicos e ingenieros que han contribuido a enriquecer la teoría de wavelets.

Por otro lado, el método de Galerkin es uno de los mejores métodos para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales. Este método consiste en hallar una base funcional para el espacio solución de la ecuación, luego proyectar la solución sobre la base funcional, y minimizar el “residual” respecto a la base funcional.

Las traslaciones de una wavelet para todas las dilataciones forman una base ortonormal incondicional de $L^2(\mathbb{R})$ ([6]) y las traslaciones de una función escala para todas las dilataciones forman una base ortonormal incondicional para $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, lo cual es una gran mejora sobre bases de polinomios estándar o bases trigonométricas para el método de Galerkin. Así es explicable que, el uso de esquemas numéricos basados en wavelets hayan tenido un crecimiento significativo en las últimas décadas. Además, las wavelets tienen varias propiedades que son especialmente útiles para representar soluciones de ecuaciones diferenciales (EDs), tal como ortogonalidad, soporte compacto

*Este trabajo es financiado con los recursos ordinarios asignados a la UNT.

**Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo (rleon@unitru.edu.pe).

y representación exacta de polinomios de un cierto grado. Su capacidad de representar datos en diferentes niveles de resolución permiten al cálculo eficiente y estable de funciones con gradientes grandes o singularidades, que necesitarían una malla densa o elementos del mas alto orden en un análisis de Elemento Finito ([14]).

En el presente trabajo aplicamos una versión del clásico método de Galerkin usando bases wavelets B-splines cardinales centralizadas para hallar una solución aproximada de una ecuación diferencial ordinaria elíptica con condiciones de frontera tipo Dirichlet. Las wavelets B-splines tienen una estructura muy simple y propiedades especiales que nos permitieron obtener resultados con un alto orden de exactitud y algoritmos asociados con una complejidad baja.

2. El método de Galerkin y eficiencia computacional. Los modelos matemáticos que aparecen en la ciencia e ingeniería usualmente toman la forma de una ecuación operador

$$(2.1) \quad Tf = g$$

donde $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal entre ciertos espacios funcionales X y Y . Sin embargo, no siempre es posible resolver (2.1) exactamente. Así, se tiene que depender de métodos de aproximación que sean computacionalmente los mas simples de manejar; el método de Galerkin tiene estas características y es muy usado en ecuaciones diferenciales.

2.1. El método de Galerkin. Como un primer paso para resolver (2.1) buscamos una aproximación \bar{f} de f que se encuentre en cierto subespacio de dimensión finita de X . Así, suponemos que X y Y son espacios producto interno con bases ortonormales enumerables $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ y $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$, respectivamente ([3, 8]). Considerando que la ecuación (2.1) tiene una única solución, se debería buscar una aproximación de la solución f en

$$X_M := \text{gen}\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}.$$

De la ecuación (2.1) obtenemos:

$$(2.2) \quad \langle Tf, \psi_i \rangle = \langle g, \psi_i \rangle \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, necesitamos buscar un $\bar{f} \in X_M$ tal que

$$(2.3) \quad \langle T\bar{f}, \psi_i \rangle = \langle g, \psi_i \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}.$$

Escribiendo

$$(2.4) \quad \bar{f} := \sum_{j=1}^M \alpha_j \varphi_j,$$

obtenemos

$$(2.5) \quad T\bar{f} = \sum_{j=1}^M \alpha_j T\varphi_j$$

tal que (2.3) es igual a

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^M \langle T\varphi_j, \psi_i \rangle \alpha_j = \langle g, \psi_i \rangle, \quad i \in \{1, \dots, M\}$$

Luego, llegamos al problema de resolver una ecuación matricial

$$(2.7) \quad Ax = b$$

donde $A := [a_{ij}]$ es la matriz de $M \times M$ con ij -ésima entrada $a_{ij} = \langle T\varphi_j, \psi_i \rangle$ y $b = [b_i]$ es el M -vector con i -ésima entrada $b_i = \langle g, \psi_i \rangle$. Una vez que la ecuación (2.7) es resuelta, \bar{f} es tomada como en (2.4).

El procedimiento anterior de obtener una solución aproximada para (2.1) es llamado *el método de Galerkin*.

Para problemas que se representan en ecuaciones diferenciales, usualmente se tiene que resolver una ecuación de la forma

$$(2.8) \quad Lf = g$$

donde $L : X_0 \subseteq X \rightarrow X$ es un operador no acotado definido densamente. Usualmente X_0 es un espacio de Hilbert con respecto a otro producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ el cual induce una norma fuerte $\| \cdot \|_0$; es decir, existe $c_0 > 0$ tal que

$$\| f \| \leq c_0 \| f \|_0 \quad \forall f \in X_0.$$

También se tienen condiciones de la forma

$$|\langle Lu, v \rangle| \leq c_1 \| u \|_0 \| v \|_0 \quad \forall u, v \in X_0,$$

$$\langle Lu, u \rangle \geq c_2 \| u \|^2 \quad \forall u \in X_0,$$

para algunas constantes positivas c_1, c_2 . Observar que

$$a(u, v) := \langle Lu, v \rangle, \quad u, v \in X_0,$$

define una forma bilineal acotada sobre $X_0 \times X_0$, tal que las condiciones anteriores asegurarán, usando el teorema de representación de Riesz, que para cada $g \in X$, existe una única $u \in X_0$ tal que

$$\langle Lu, v \rangle = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in X_0.$$

La última ecuación es la *formulación débil* de (2.7).

EJEMPLO 1. Consideremos el problema de valor de frontera de Dirichlet:

$$(Lu)(t) := -\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{du}{dt} \right) + q(t)u(t) = g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

$$u(\alpha) = 0 = u(\beta).$$

En este caso, $X = L^2(\alpha, \beta)$, y

$$X_0 = H_0^1 := \{f \in L^2[\alpha, \beta] / f \text{ es absolutamente continua, } f' \in L^2, f(\alpha) = f(\beta)\}$$

con producto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_0 := \langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle, \quad u, v \in H_0^1,$$

$$a(u, v) := \langle Lu, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} [p(t)u'(t)v'(t) + q(t)u(t)v(t)] dt.$$

Suponiendo que $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ satisfacen

$$0 < a_0 \leq p(t) \leq a_1, \quad 0 < q(t) \leq b_0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta],$$

puede ser probado ([10]) que

$$c_0^2 a_0 \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u, u), \quad |a(u, v)| \leq \max\{a_0, b_0\} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1},$$

donde $c_0 > 0$ es tal que $\|u\|_0 \leq c_0 \|u\|$. Entonces, el método de Galerkin para el problema (2.1) corresponde a la ecuación matricial (2.6) con $A := [a_{ij}]$ y $b = [b_i]$, donde

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \psi_i), \quad b_i = \langle g, \psi_i \rangle_{L^2}$$

Además, también

$$(2.9) \quad \|f - \bar{f}\| \leq c \inf_{\varphi \in X_M} \|f - \varphi\|,$$

donde $c > 0$ es una constante independiente de f y M . En consecuencia, la aproximación Galerkin \bar{f} es la mejor entre todas las aproximaciones de X_M , hasta una constante positiva.

2.2. Algunas propiedades deseables. Mientras investigamos el problema de resolver la ecuación matricial (2.6), tomando aspectos computacionales en cuenta, no es suficiente que pueda ser resuelto únicamente. Nos gustaría resolver la ecuación (2.6) eficientemente lo que resultaría en pequeños errores computacionales, e incurriría en menor costo computacional. Tal deseable situación aparece si:

- A tiene un número condición pequeño, y
- A es dispersa.

El número condición de una matriz es medido en términos de la norma de la matriz. Debemos recordar que, si $\|\cdot\|$ es una norma natural definida sobre \mathbb{R}^n , entonces la correspondiente norma natural de la matriz A , de $n \times n$, es

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \right\}.$$

Una importante propiedad de esta norma es que

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

con $\|I\| = 1$, donde I es la matriz identidad.

El número condición de una matriz invertible A , es dado por

$$\mathcal{K}_A := \|A\| \|A^{-1}\|.$$

A diferencia del número condición, no hay una definición precisa para una *matriz dispersa*. Sin embargo, significa que “la mayoría de sus entradas” son ceros. Es claro que los cálculos realizados con una matriz “más dispersa” deberían ser mucho menores que aquellos realizados con una matriz “menos dispersa”.

Veamos como un número condición alto influencia en errores de cálculo.

Para vectores $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, consideremos x y \tilde{x} tales que $Ax = b$ y $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Entonces, tenemos

$$x - \tilde{x} = A^{-1}(b - \tilde{b})$$

tal que

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\|.$$

Además, tenemos que $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, tal que

$$(2.10) \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} = \kappa_A \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

En efecto, existen $x, \tilde{x}, b, \tilde{b}$ tales que la igualdad ocurre en (2.10). Para observar esto, sean x y u vectores diferentes de cero tales que

$$\|Ax\| = \|A\| \|x\|, \quad \|A^{-1}u\| = \|A^{-1}\| \|u\|$$

y sean

$$b = Ax, \quad \tilde{b} = b + u, \quad \tilde{x} = x + A^{-1}u.$$

Entonces, tenemos:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}u\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|u\|}{\|x\|} = \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \|u\|}{\|Ax\|} = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Por lo tanto, aún si el *error relativo* en b es pequeño, un número condición grande puede conducir a un error relativo grande en la solución x .

3. Wavelets B-splines. Existen varias familias de wavelets que se pueden clasificar según conformen bases ortonormales, semiortonormales o biortogonales. Ellas pueden ser generadas desde un *Análisis Multiresolución*; a continuación estudiaremos solo una clase de ellas.

3.1. Análisis Multiresolución.

DEFINICIÓN 1. Un *Análisis Multiresolución (AMR)* de $L^2(\mathbb{R})$ es una sucesión de subespacios cerrados enlazados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ tales que

1. $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$, y $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.
2. $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$.
3. Existe una función $\phi \in V_0$, tal que $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma una base de Riesz de V_0 .

La función ϕ , en la definición anterior, es llamada *generador* o *función escala* del AMR. Definamos ahora las funciones

$$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$$

y $\phi_k = \phi_{0k}$. Entonces, $\{\phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma una base de Riesz de V_j . El subespacio W_j es definido como el complemento ortogonal de V_j con respecto a V_{j+1} ,

$$(3.1) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j.$$

El espacio $L^2(\mathbb{R})$, por tanto, tiene una descomposición $L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$. Ha sido probado ([5]) que existe una función $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma una base de W_j

y por lo tanto $\{\psi_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ es una base de $L^2(\mathbb{R})$. La función ψ es llamada *wavelet semi-ortonormal* dado que

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{j'k'} \rangle = 0, \quad j \neq j'.$$

Llamaremos $\{\psi_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ una *Base Wavelet* de $L^2(\mathbb{R})$. Análogamente, ψ es llamada una *wavelet ortonormal* si

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{j'k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'},$$

y la base $\{\psi_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ generada por una wavelet ortonormal ψ es llamada una *Base Wavelet Ortonormal* de $L^2(\mathbb{R})$.

OBSERVACIÓN 1. *Algunas veces, el subespacio W_j definido por (3.1) no necesita satisfacer la condición $W_j \perp V_j$. Entonces, la correspondiente wavelet ψ no es semi-ortonormal. En este caso, una función $\psi^* \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada wavelet dual de ψ con respecto a $L^2(\mathbb{R})$ si*

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{j'k'}^* \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'}.$$

El par de (ψ, ψ^*) es llamado biortonormal.

OBSERVACIÓN 2. *Un análisis multiresolución y bases wavelet para otros espacios diferentes a $L^2(\mathbb{R})$ pueden ser definidos en forma similar a la definición anterior. Es claro que la función escala ϕ satisface la función de refinamiento*

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$$

donde la sucesión (p_k) es llamada la *máscara de ϕ* y la serie de Laurent $p(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k z^k$ es llamada el *símbolo de ϕ* . En la mayoría de aplicaciones, se necesita que ϕ sea compactamente soportada o tenga un decaimiento exponencial.

3.2. Wavelets splines. Los splines son buenos ejemplos de funciones escala, especialmente los B-splines cardinales que definimos a continuación.

Sea χ la función característica del intervalo unitario $[0, 1)$.

DEFINICIÓN 2. *Sea $m \in \mathbb{Z}^+$. La función $N_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recursivamente definida por*

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt$$

donde $N_1(x) = \chi_{[0,1)}(x)$, es llamada B-spline cardinal de orden m .

En aplicaciones, es común usar los splines con orden par. En este trabajo, suponemos también que el spline siempre es de orden par. Algunas veces omitiremos el subíndice m de las notaciones como N_m si eso no induce a alguna confusión.

Varias de las propiedades de las B-splines se resumen en la siguiente proposición, cuya demostración se puede ver en [5, 16].

PROPOSICIÓN 1. *Los B-splines Cardinales tienen las siguientes propiedades:*

- Ellos son compactamente soportados con $\text{sop} N_m \subset [0, m]$.*
- Los B-splines son no-negativos, i.e. $N_m(x) \geq 0$ y $N_m(x) > 0$ para $x \in (0, m)$.*
- Ellos forman una partición de la unidad; es decir,*

$$\int_{\mathbb{R}} N_m(x) dx = 1, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_m(x-k) = 1.$$

d) $N_m \in C^{m-2}(\mathbb{R})$ y $N'_m(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x-1)$.

e) Los B-splines Cardinales son refinables con $N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N_m(2x-k)$.

f) $N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right)$.

g) $N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1)$.

h) Se cumple:

$$N_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1},$$

donde $x_+^n := (x_+)^n = \chi_{[0,\infty)}(x)x^n$.

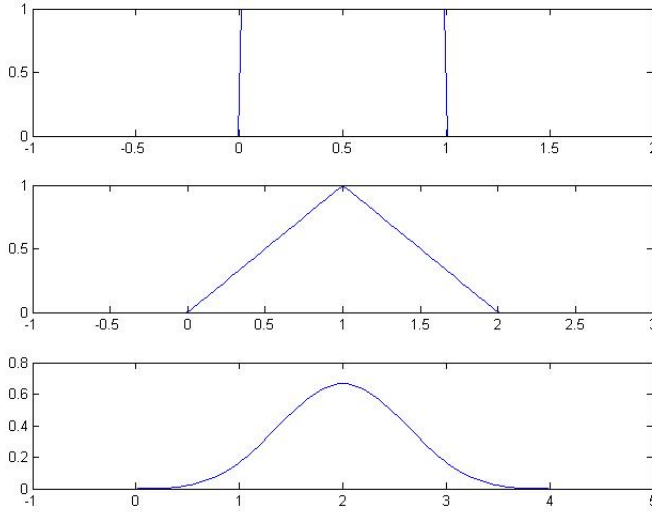


FIGURA 3.1. B-splines cardinales de orden 1, 2 y 4

La transformada de Fourier de $N(x)$ es

$$\hat{N}(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{\omega} \right)^m.$$

Se verifica que $N(x)$ satisface la ecuación de refinamiento

$$(3.2) \quad N(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N(2x-k).$$

El B-spline $N(x)$ genera un AMR de $L^2(\mathbb{R})$, es decir, los espacios splines $V_k := \text{clos}_{L^2}(\text{gen}\{N_{m;k,j} : j \in \mathbb{Z}\})$, $k \in \mathbb{Z}$, constituyen un análisis multiresolución de L^2 en el sentido que

- (i) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$;
- (ii) $\text{clos}_{L^2}(\cup_{k \in \mathbb{Z}} V_k) = L^2$;
- (iii) $\cap_{k \in \mathbb{Z}} V_k = \{0\}$;
- (iv) para cada k , $\{N_{m;k,j} : j \in \mathbb{Z}\}$ es una base incondicional de V_k ;
- (v) $V_{k+1} = V_k \oplus W_k$, para toda $k \in \mathbb{Z}$;
- (vi) $W_k \perp W_j$, para toda $k \neq j$;
- (vii) $L^2 = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k$.

OBSERVACIÓN 3. La importancia de las propiedades de aproximación (ii)-(iii) y las propiedades (v)-(vi) es que cada función f en L^2 puede ser aproximada tan cerca como se desee por algún $f_k \in V_k$, para un valor suficientemente grande de k , y que f_k tiene una (única) descomposición ortogonal

$$(3.3) \quad f_k = g_{k-1} + \dots + g_{k-l} + f_{k-l}$$

donde $g_j \in W_j$, $j = k-l, \dots, k-1$, y $f_{k-l} \in V_{k-l}$, y l es un entero positivo arbitrariamente grande, tal que $\|f_{k-l}\|_2$ es tan pequeño como se desee. Llamaremos a (3.3) una descomposición wavelet de f_k .

3.3. Wavelets splines sobre intervalos finitos. Ahora construimos una base semi-ortogonal del espacio $L^2(I)$, donde I es un intervalo finito.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $I = [0, M]$, $M \in \mathbb{N}$ y que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un AMR generado por el B-spline cardinal N de orden m . Además, sea $V_j^I \subset L^2(\mathbb{R})$ el subespacio que contiene las restricciones sobre I de las funciones en V_j . Luego $\{V_j^I\}_{j \geq 0}$ es un AMR de $L^2(I)$ y $\dim V_j = m + 2^j M - 1$. Para construir la base de V_j , hacemos $N_{jk}^I = N_{jk} \chi_I$, y $S_j = \{2^{-j}k : \text{sop}\{N_{jk}\} \cap I \neq \emptyset\}$. Así se tiene que $|S_j| = \dim V_j$ y algunos resultados que mostramos a continuación.

PROPOSICIÓN 2. $\{N_{jk}^I\}_{2^{-j}k \in S_j}$ forma una base de V_j^I , y existen dos constantes positivas C_1 y C_2 independientes de j tales que

$$C_1 \sum_{2^{-j}k \in S_j} |c_{jk}|^2 \leq \left\| \sum_{2^{-j}k \in S_j} c_{jk} N_{jk}^I \right\|^2 \leq C_2 \sum_{2^{-j}k \in S_j} |c_{jk}|^2.$$

En la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), las soluciones algunas veces deben satisfacer ciertas condiciones de frontera homogéneas. Así, necesitamos que las bases wavelets estén en el espacio

$$H_0^s(I) = \{f \in C_0^{s-1}(I); f^{(s-1)} \in L^2(I)\}, 0 \leq s \leq m-1$$

Convenimos que $H_0^0(I) = L^2(I)$. Dado que los B-splines truncados no están en el espacio $H_0^s(I)$, $s \geq 1$, tenemos que adaptar aquellos construidos sobre todo \mathbb{R} a aquellos definidos sobre I tal que pertenezcan al espacio $H_0^s(I)$. Los B-splines con múltiples nodos son las herramientas apropiadas para tal adaptación.

Sea $[x_1, \dots, x_n]f$ la diferencia dividida de f en x_1, \dots, x_n . Denotamos la sucesión de nodos

$$\overbrace{0, 0, \dots, 0}^m, 1, 2, \dots, \overbrace{M, M, \dots, M}^m$$

por $\{t_i\}_{i=m+1}^{m+M-1}$, y definimos

$$(3.4) \quad \phi_k^I(x) = [t_{k-\frac{m}{2}}, t_{k+1}, \dots, t_{k+\frac{m}{2}}](\cdot - x)_+^{m-1}, \quad -\frac{m}{2} + 1 \leq k \leq M-1 + \frac{m}{2}$$

El soporte de ϕ_k^I es $[t_{k-\frac{m}{2}}, t_{k+\frac{m}{2}}]$, y $\phi_k^I(x) = N_{k-\frac{m}{2}}(x)$, $\frac{m}{2} \leq k \leq M - \frac{m}{2}$. Por conveniencia, el AMR de $H_0^s(I)$ aún es denotado por $\{V_j^I\}_{j=0}^\infty$.

PROPOSICIÓN 3. $\Phi_0 := \{\phi_k^I\}_{k=s+1-\frac{m}{2}}^{M-1-s+\frac{m}{2}}$ es una base de V_0^I , $0 \leq s \leq \min\{m-1, \lfloor \frac{m+M}{2} \rfloor - 1\}$. Cuando $\frac{m}{2} \leq k \leq M - \frac{m}{2}$, ϕ_k^I es la traslación del B-spline central; es decir, $\phi_k^I = N(x - k + \frac{m}{2})$.

Para construir las bases de V_j^I , dilatamos las funciones escala en Φ_0 . Definimos $\phi_{jk}^I(x) = 2^{j/2} \phi_k^I(2^j x)$ para $s+1-\frac{m}{2} \leq k \leq \frac{m}{2}-1$ y $2^j M - \frac{m}{2} + 1 \leq k \leq 2^j M - 1 - s + \frac{m}{2}$; definimos $\phi_{jk}^I(x) = 2^{j/2} N(2^j x - k - \frac{m}{2})$ para $\frac{m}{2} \leq k \leq 2^j M - \frac{m}{2}$. Entonces,

$$(3.5) \quad \Phi_j := \{\phi_{jk}^I\}_{k=s+1-\frac{m}{2}}^{2^j M - 1 - s + \frac{m}{2}}$$

es una base de V_j^I . Escribimos $S_j^L = 2^{-j} \{s+1-\frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2}-1\}$, $S_j^C = 2^{-j} \{\frac{m}{2}, \dots, 2^j M - \frac{m}{2}\}$, $S_j^R = 2^{-j} \{2^j M - \frac{m}{2} + 1, \dots, 2^j M - 1 - s + \frac{m}{2}\}$. Entonces, $\Phi_j^L := \{\phi_{jk}^I : 2^{-j} k \in S_j^L\}$ contiene las funciones escala con frontera izquierda en Φ_j , mientras que $\Phi_j^R := \{\phi_{jk}^I : 2^{-j} k \in S_j^R\}$ contiene las funciones escala de frontera derecha en Φ_j . Las funciones escala centrales están en $\Phi_j^C := \{\phi_{jk}^I : 2^{-j} k \in S_j^C\}$. Cuando $s = m-1$, Φ_j^L y Φ_j^R son vacíos. Haciendo $S_j = S_j^L \cup S_j^C \cup S_j^R$, obtenemos una aplicación inyectiva S_ϕ de Φ_j a S_j tal que $S_\phi(\phi_{jk}^I) = 2^{-j} k \in S_j$.

Bases wavelets semi-ortogonales del espacio $H_0^s(I)$. Sea W_j^I el subespacio wavelet de $H_0^s(I)$ tal que $W_j^I \oplus V_j^I = V_{j+1}^I$ y $W_j^I \perp V_j^I$. Haciendo $\bar{S}_j = (S_{j+1} \setminus S_j) \cap [0, M]$, obtenemos $\dim W_j^I = |\bar{S}_j|$. El conjunto \bar{S}_j es simétrico con respecto a $\frac{M}{2}$, es decir, si $d \in \bar{S}_j$, entonces $M-d \in \bar{S}_j$. Sin pérdida de generalidad, solo discutiremos la construcción de la base wavelet de W^I . (Por conveniencia, cualquier subíndice 0 será omitido). Se verifica que $\dim W^I = \min(M, (2M + m - 2s - 1)_+)$. La base de W^I no es única. En aplicaciones, dos propiedades principales son usualmente necesarias. Primera, los soportes de los elementos en bases wavelets de W^I son requeridos tan pequeños como sea posible. Segunda, las bases son esperadas que tengan cierta simetría.

Ahora descomponemos el conjunto \bar{S}_j en la forma

$$(3.6) \quad \bar{S}_j = \bar{S}_j^L \cup \bar{S}_j^C \cup \bar{S}_j^R,$$

donde $\bar{S}_j^C = \{m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, \dots, M - m + \frac{1}{2}\}$, $\bar{S}_j^L = \bar{S}_j \cap (0, m-1]$, y $\bar{S}_j^R = \bar{S}_j \cap [M - m + 1, M)$. Observar que si $M < 2m - 1$, entonces $\bar{S}_j^C = \emptyset$. Puede ser verificado que la matriz

$$\mathbf{A} = (\langle \phi_l^I, \phi_{1k}^I \rangle)_{l \in S, \frac{k}{2} \in S_1}$$

es una matriz de rango completo. La ecuación lineal $\mathbf{A}\mathbf{d} = 0$ tiene M soluciones linealmente independientes $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^M$. Ahora escribimos $S = \{k_1, \dots, k_M\}$, donde $k_1 < \dots < k_M$, y hacemos $\psi_{k_l}^I = (\mathbf{d}^l)^T \Phi_1$. Entonces $\{\psi_d^I\}_{d \in \bar{S}}$ es una base de W^I . Seleccionando cuidadosamente vectores $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^M$, podemos hacer $\psi_d^I(x) = \psi_{M-d}^I(M-x)$ para $d \in \bar{S}^L$ y $\psi_d^I(x) = \sqrt{2}w(2(x-d) + m - \frac{1}{2})$ para $d \in \bar{S}^C$ donde w es definido por

$$\hat{w}(\omega) = \left(\frac{1-e^{-i\omega/2}}{2} \right)^m \prod_m (e^{-i\omega/2}) \hat{N}(\omega/2)$$

con $\prod_m(z) := \sum_{k=0}^{2m-2} N_{2m}(k+1)z^k$ y N es un B-spline de orden m ; w así definido es una wavelet semi-ortogonal con respecto a N .

EJEMPLO 2. Considerar bases wavelet del espacio $H_0^{m-1}(I)$. En este caso, las bases de W^I pueden ser construidas de la siguiente forma.

1. Si $M < m - 1$, entonces $V^I = \{0\}$ y $V_1^I = W^I$. Una base de V_1^I es también una base de W^I .
2. Si $m \leq M \leq 2m - 2$, entonces, para cualquier $d \in \bar{S}$ con $d \leq \frac{M}{2}$, podemos hallar $(q_l^k)_{l=k}^{M-m+1+k}$ tal que la función

$$(3.7) \quad \psi_d^I = \sum_{l=k}^{M-m+k-1} q_l^k \phi_{1l}, \quad k = 2d$$

es ortogonal al espacio V_1^I y $\|\psi_d^I\|_2 = 1$. Definimos $\psi_d^I(x) = \psi_{M-d}^I(M-x)$ para $d \in \bar{S}$ con $d > \frac{M}{2}$. Entonces $\{\psi_d^I\}_{d \in \bar{S}}$ es una base de W^I .

3. Si $M \geq 2m - 1$, tenemos $\bar{S}^L = \{\frac{m}{4}, \frac{m}{4} + \frac{1}{2}, \dots, \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\} \cup \{\frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, \frac{2m-3}{2}\}$. Hagamos $K = \min\{M, 3m - 3\}$. Es posible verificar que la matriz

$$\mathbf{A} = (\langle \phi_k, \phi_{1l} \rangle)_{k,l=\frac{m}{2}}^{K-\frac{m}{2}, K+\frac{m}{2}-1}$$

es de rango completo. Por lo tanto, la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ tiene $m-1$ soluciones independientes $\mathbf{c}^l, 1 \leq l \leq m-1$. Podemos elegir \mathbf{c}^l tal que sus últimas $(m-1-l)$ componentes sean ceros. Sea $\psi_d^I = \Phi_1 \mathbf{c}^l$, donde

$$d = \begin{cases} \frac{m}{4} + \frac{l-1}{2}, & 1 \leq l \leq \frac{m}{2} \\ l - \frac{1}{2}, & \frac{m}{2} + 1 \leq l \leq m-1 \end{cases}$$

Entonces el soporte de ψ_d^I es

$$\text{sop}\psi_d^I = [0, \frac{K+l}{2}] \subset [0, \frac{K-1+m}{2}].$$

Consideremos $\psi_d^I(x) = \psi_{M-d}^I(M-x)$ para $d \in \bar{S}^R$ y sea $\psi_d^I(x) = \sqrt{2}w(2(x-d) + m - \frac{1}{2})$, para $d \in \bar{S}^C$. Así, el conjunto $\{\psi_d^I\}_{d \in \bar{S}}$ forma una base de W^I .

OBSERVACIÓN 4. Si I es un intervalo diádico, por ejemplo $I = [2^{-J}k, 2^{-J}(k+l)]$, para J fijo, la construcción de la base de funciones escala de V_j^I y la base de wavelets de W_j^I es análogo. Definimos los conjuntos S_j y \bar{S}_j de la misma forma como anteriormente lo hicimos. Consecuentemente, tenemos aún que $\dim W_j^I = |\bar{S}_j|$. Una evidente modificación se necesita realizar para la construcción de la base de wavelets de W_j^I .

4. Solución Numérica de una ecuación diferencial mediante el método Galerkin y wavelets B-splines cardinales. Es de conocido que en los métodos de Galerkin el sistema discreto para la resolución numérica de problemas elípticos en un dominio acotado es mal condicionado, si se usan métodos de elementos finitos o diferencias finitas. Usualmente, el número condición del sistema discreto para un problema elíptico de segundo orden en dos dimensiones es del orden $O(1/h^2)$; utilizando métodos de pre-condicionamiento, podemos reducir el número condición a $O(1/h)$.

Sin embargo, si las bases wavelets son utilizadas, el preconditionamiento alcanza un número condición de orden $O(1)$, por lo cual, los métodos wavelet conducen a estabilizaciones numéricas en la resolución de tales EDs. Además, los algoritmos iterativos son muy populares en la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales, especialmente en las PDEs, y el método wavelet puede acelerar la convergencia de algoritmos iterativos.

A continuación realizamos una aplicación del método de Galerkin en la resolución de una ecuación diferencial elíptica unidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet utilizando bases wavelet B-splines cardinales. Consideramos el siguiente Problema de Dirichlet.

$$(4.1) \quad -u''(x) + cu(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), c \geq 0, u(0) = u(1) = 0,$$

donde $f \in L_2(0, 1)$.

En sección “Método de Galerkin” establecimos, como un primer paso del procedimiento, elegir el espacio que contenga la solución del problema planteado, al que llamaremos *espacio muestral* (al espacio de llegada del operador que define la ecuación diferencial se le llama *espacio test*), luego formulamos el problema variacional asociado. Realizada esta formulación, debemos garantizar que existe una solución del problema. Finalmente, utilizamos bases wavelet B-splines cardinales para construir soluciones aproximadas del problema variacional y consecuentemente del problema original.

4.1. Formulación Variacional. Sea el espacio de funciones Test:

$$C_0^\infty((0, 1)) := \{v \in C^\infty((0, 1)) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial con una función test $\phi \in C_0^\infty((0, 1))$ y aplicando integración por partes, considerando que $\phi(0) = \phi(1) = 0$, obtenemos:

$$(4.2) \quad \int_0^1 f(x)\phi(x)dx = \int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx + c \int_0^1 u(x)\phi(x)dx$$

Observamos que esta última ecuación está bien definida si u y ϕ están en el espacio de Sobolev $H_0^1((0, 1))$, definido por:

$$H_0^1((0, 1)) = \{v \in H^1((0, 1)), v(0) = v(1) = 0\}$$

donde $H^1((0, 1)) = \{v \in L_2((0, 1)) : v' \in L_2((0, 1))\}$. Utilizando como espacio muestral y Test a $X := H_0^1((0, 1))$, la *formulación variacional (o débil)* se enuncia como sigue:

Hallar $u \in X$ tal que

$$(4.3) \quad a(u, v) = (f, v)_{0;(0,1)}, \quad v \in X,$$

donde $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal definida por

$$(4.4) \quad a(u, v) := (u', v')_{0;(0,1)} + c(u, v)_{0;(0,1)}$$

$$(4.5) \quad = \int_0^1 [u'(x)v'(x) + cu(x)v(x)]dx.$$

DEFINICIÓN 3. Sea $u \in L_2((0, 1))$. Una función $v \in L_2((0, 1))$ es llamada derivada débil de u , es decir, $v = u'$ si

$$(4.6) \quad \int_0^1 v(x)\phi(x)dx = - \int_0^1 u(x)\phi'(x)dx$$

para todas las funciones test $\phi \in C_0^\infty((0, 1))$.

DEFINICIÓN 4. Sea $m \in \mathbb{N}$.

a) El espacio de Sobolev de orden m es definido por

$$H^m((0, 1)) := \{v \in L_2((0, 1)) : v^{(k)} \in L_2((0, 1)), 1 \leq k \leq m\},$$

donde las derivadas son entendidas en sentido débil. Una norma sobre $H^m((0, 1))$ es definida por

$$\|u\|_{m;(0,1)} := \left(\sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_{0;(0,1)}^2 \right)^{1/2},$$

la cual es inducida por el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{m;(0,1)} := \sum_{k=0}^m \langle u^{(k)}, v^{(k)} \rangle_{0;(0,1)}.$$

b) El espacio de Sobolev con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas generalizadas es definido por

$$H_0^m((0, 1)) := \text{clos}_{\|\cdot\|_{m;(0,1)}}(C_0^\infty((0, 1))).$$

4.2. Existencia y unicidad. Para averiguar si existe una única solución del problema planteado, debemos analizar las propiedades de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, antes definida, como veremos a continuación.

Primero, usando la desigualdad de Hölder se demuestra que $a(\cdot, \cdot)$ es acotada; es decir,

$$(4.7) \quad a(u, v) \leq C\|u\|_{1;\Omega}\|v\|_{1;\Omega}.$$

Segundo, debemos demostrar que la forma bilineal a es *coerciva*; es decir,

$$(4.8) \quad a(u, v) \geq \alpha\|u\|_{1;\Omega}^2$$

Las constantes C y α son también conocidas como constantes de *continuidad* y *coercividad*, respectivamente. Una forma bilineal que es coerciva y acotada es llamada *elíptica*. Para demostrar que se cumple la última desigualdad necesitamos el siguiente resultado, conocido como la desigualdad de *Poincaré - Friedrichs*.

PROPOSICIÓN 4. Para cualquier intervalo acotado $\Omega := [a, b]$, existe una constante $C_\Omega = (b - a) > 0$ tal que

$$(4.9) \quad \|v\|_{0;\Omega} \leq C_\Omega \|v'\|_{0;\Omega}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. *Demostración:* Consideremos una función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\phi(x) = \phi(0) + \int_a^x \phi'(\xi)d\xi = \int_a^x \phi'(\xi)d\xi.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \int_a^b |\phi(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \left[\int_a^x 1^2 d\xi \right] \left[\int_a^x |\phi'(\xi)|^2 d\xi \right] dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_a^b |\phi'(\xi)|^2 d\xi = (b-a)^2 \|\phi'\|_{0;\Omega}^2. \end{aligned}$$

Desde que, por definición, el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ es la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$, el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en H_0^1 tal que la desigualdad anterior se extiende también para $\phi \in H_0^1(\Omega)$ lo cual prueba la proposición. \square

Con esta preparación, (3.8) es fácilmente probado. En efecto,

$$a(u, u) = \|u'\|_{0;\Omega}^2 \geq \frac{1}{2C_\Omega^2} \|u\|_{0;\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|u'\|_{0;\Omega}^2 \geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C_\Omega^2}\right\} \|u\|_{1;\Omega}^2,$$

i.e., se obtiene (4.8) con $\alpha := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C_\Omega^2}\right\}$.

Con estas propiedades y aplicando el Teorema de Lax-Milgram aseguramos la existencia de una única solución del problema variacional formulado.

4.3. Discretización. Consideremos subespacios finito-dimensionales $X_\Lambda \subset X$, $\dim X_\Lambda = |\Lambda| < \infty$, donde Λ es el conjunto de grados de libertad, el cual es supuesto a ser finito para poder ser capaces de tratar el correspondiente problema numérico. Luego, la versión discreta de (4.3) se enuncia:

Hallar $u_\Lambda \in X_\Lambda$ tal que

$$(4.11) \quad a(u_\Lambda, v_\Lambda) = \langle f, v_\Lambda \rangle_{0;(0,1)}, \quad v_\Lambda \in X_\Lambda.$$

Aunque este problema no es completamente accesible en una computadora, cuenta el hecho de tener una base de X_Λ para manipular, digamos

$$X_\Lambda = \text{gen} \Theta_\Lambda, \quad \Theta_\Lambda = \{\vartheta_\lambda : \lambda \in \Lambda\},$$

y Θ_Λ es una familia de elementos linealmente independientes de X . Entonces la solución de (4.11) puede ser escrita como

$$(4.12) \quad u_\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda \vartheta_\lambda =: \mathbf{u}_\Lambda^T \Theta_\Lambda, \quad \mathbf{u}_\Lambda := (u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda},$$

donde ahora el vector de coeficientes u_Λ necesita ser determinado por

$$(4.13) \quad a(u_\Lambda, \vartheta_\mu) = \sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda a(\vartheta_\lambda, \vartheta_\mu) = (f, \vartheta_\mu)_{0;(0,1)}, \quad \mu \in \Lambda$$

Esto puede ser formulado equivalentemente en la forma matriz-vector

$$(4.14) \quad \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{u}_\Lambda = \mathbf{f}_\Lambda$$

donde $\mathbf{A}_\Lambda := (a(\vartheta_\lambda, \vartheta_\mu))_{\lambda, \mu \in \Lambda}$ es la matriz de rigidez y el vector $\mathbf{f}_\Lambda := ((f, \vartheta_\mu)_{0;(0,1)})_{\mu \in \Lambda}$ es parte derecha de la igualdad.

Observar en (4.11), que el espacio test y el espacio muestral coinciden, es decir, ambos son X_Λ ; esto es común en el método clásico de Galerkin.

4.4. Estabilidad. Antes de tratar con la solución numérica de (4.11), investigamos sobre la estabilidad y propiedades de aproximación del método de Galerkin. A continuación observamos un estimado.

PROPOSICIÓN 5. *La solución de (3.11) es estable independiente de la elección del subespacio X_Λ , es decir,*

$$\|u_\Lambda\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{X'}.$$

Demostración: Elegir $v_\Lambda = u_\Lambda$ en (3.3) y usar la elipticidad para obtener

$$\alpha \|u_\Lambda\|_X^2 \leq a(u_\Lambda, u_\Lambda) = \langle f, u_\Lambda \rangle \leq \|f\|_{X'} \|u_\Lambda\|_X$$

lo que prueba la aserción. \square

4.5. Estimaciones de error. Ahora, sea $u \in V$ la solución de (4.3) y $u_\Lambda \in V_\Lambda$ la solución de (4.11), es decir,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle & \forall v \in X, \\ a(u_\Lambda, v_\Lambda) &= \langle f, v_\Lambda \rangle & \forall v_\Lambda \in X_\Lambda. \end{aligned}$$

Dado que $X_\Lambda \subset X$, podemos también satisfacer la primera ecuación para $v_\Lambda \in X_\Lambda$. Así, restando miembro a miembro ambas ecuaciones obtenemos:

$$(4.15) \quad a(u - u_\Lambda, v_\Lambda) = a(u, v_\Lambda) - a(u_\Lambda, v_\Lambda) = \langle f, u_\Lambda \rangle - \langle f, u_\Lambda \rangle = 0.$$

Esta ecuación es llamada *Ortogonalidad de Galerkin*.

A continuación enunciamos, sin demostración, el *Lema de Céa*, el cual muestra que el orden de aproximación de un método de Galerkin depende de la potencia de aproximación de los espacios de prueba X_Λ . Así, necesitamos construir apropiados espacios X_Λ de tal forma que se pueda alcanzar un orden óptimo de aproximación con un mínimo número de grados de libertad N .

TEOREMA 1. *Sea $a(\cdot, \cdot)$ elíptica. Entonces, se cumple*

$$(4.16) \quad \|u - u_\Lambda\|_X \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_\Lambda \in X_\Lambda} \|u - v_\Lambda\|_X.$$

El término

$$(4.17) \quad E_\Lambda(u) := \inf_{v_\Lambda \in X_\Lambda} \|u - v_\Lambda\|_X$$

es conocido como *el error de la mejor aproximación* en X_Λ .

A partir del Lema de Céa se derivan una serie de estimaciones del error de aproximación para el método de Galerkin que no los usamos en el presente trabajo.

5. Resultados. En esta parte, utilizamos un Análisis Multiresolución (AMR) para la discretización Galerkin de problemas con valor de frontera. En la literatura, esto es algunas veces llamado *Método Wavelet-Galerkin*.

5.1. Discretización multiescala y preconditionamiento. Es conocido hace algún tiempo que las soluciones de muchos problemas de valor en la frontera exhiben comportamientos que se detectan en escalas de longitud ligeramente diferentes. Se ha demostrado que esquemas numéricos que usan esta información pueden ser altamente eficientes [urban]. En consecuencia, nos interesamos en discretizaciones multiescala.

Estas son usualmente realizadas considerando una familia completa de espacios muestrales y Test

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_j \subset X_{j+1} \subset \dots \subset X.$$

El intercambio entre estos espacios para diferentes valores de j es la clave para la eficiencia del método resultante.

En métodos clásicos tales como discretizaciones con diferencias finitas o elemento finito, la jerarquía multiescala puede fácilmente ser formada mediante un parámetro de tamaño de malla $h_j \rightarrow 0$ para $j \rightarrow \infty$ (por ejemplo, $h_j = 2^{-j}$) y X_j como un espacio de elemento finito correspondiente a una malla de tamaño h_j . Luego, métodos conjugado gradiente (*cg*) tipo preconditionado BPX o métodos multigrad tienen un rendimiento óptimo, lo que significa que el problema de Galerkin sobre X_j puede ser resuelto en $O(\dim X_j)$ operaciones; es decir, complejidad lineal. En este trabajo usamos un AMR generado por un B-spline cardinal centralizado $S = \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ para la discretización, esto es, $X_j := V_j$. El esquema resultante es llamado *Método multiresolución - Galerkin*, también abreviado como MGM o método MG. Describimos el método con un poco de mas detalle. Suponemos que los espacios Test y muestral son dados en términos de bases, es decir,

$$X_j = V_j = \text{gen}\{\Phi_j\}, \quad \Phi_j := \{\varphi_{j,k} : k \in I_j\}.$$

Así, la sucesión I_j representa conjuntos de grados de libertad, $|I_j|$, tal que $|I_j| \rightarrow \infty$ para $j \rightarrow \infty$, típicamente en una forma exponencial, es decir,

$$|I_j| \sim 2^j.$$

Por lo tanto, el número de operaciones para la multiplicación matriz-vector con $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_{V_j}$ crece (exponencialmente) cuando crece j . Usando un esquema iterativo, esto típicamente significa que la cantidad de trabajo por paso es $O(|I_j|)$. En orden de tener un mejor esquema numérico posible en mano, es deseable que el número de iteraciones del esquema sea acotado independiente de j , tal que aumente el mismo número de iteraciones para reducir el error mediante un factor dado independiente de cuan fina sea la discretización. Teniendo el estimado del error, por ejemplo para el método *CG*, esto significa que el número condición debería también ser acotado independiente de j , esto es, $\text{cond}_2(\mathbf{A}_j) = O(1), j \rightarrow \infty$.

Para una base de funciones escalas, esto no es alcanzable. Se necesitará un preconditionador D_j a \mathbf{A}_j tal que

- D_j sea simétrico y definido positivo;
- la aplicación de $D_j^{-1/2}$ a un vector dado v_j puede ser realizado en $O(|I_j|)$ operaciones;
- $\text{cond}_2(D_j^{-1/2} \mathbf{A}_j D_j^{-1/2}) = O(1)$ para $j \rightarrow \infty$.

5.2. Una aplicación Galerkin - Wavelets B-splines. En esta parte presentamos los resultados de experimentación numérica realizada. Hemos aplicado una discretización multiescala multiresolución a casos especiales; utilizamos funciones escala y bases wavelets B-splines cardinales centralizaods para realizar las correspondientes discretizaciones. Si bien la teoría desarrollada nos garantiza únicas soluciones para el problema de Dirichlet homogéneo cuando c es una constante positiva, consideramos el caso cuando c es una función constante por tramos con soporte, el intervalo $[0, 1]$. Esta experimetación numérica nos permite verificar algunos de los resultados obtenidos y discutidos en las secciones anteriores. El problema que se eligió para realizar la experimentación numérica es el siguiente:

$$(5.1) \quad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde:

$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0; 0,5) \\ -R, & \text{si } x \in [0,5; 1) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y además

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 4x - 8, & \text{si } x \in [0; 0,5) \\ 4Rx^2 - 4Rx - 8, & \text{si } x \in [0,5; 1) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se tiene entonces un Problema de Dirichlet donde el coeficiente $c(x)$ y la función $f(x)$ son funciones discontinuas. Se trata de hacer variar el parámetro R y ver como es el comportamiento de la solución. Como es de nuestro interés, las bases wavelets elegidas para aproximar la solución son las wavelets B-splines cardinales centralizadas de orden 2 y 4, respectivamente. Se utilizó el método de Galerkin para discretizar el problema y se determinó si los sistemas resultantes son bien condicionados o no, a través de los números condición de la matrices de coeficientes. Mostramos resultados para los sistemas sin preconditionamiento y con preconditionamiento. El método que se utilizó para resolver los sistemas de ecuaciones lineales generados fue el de Conjugado Gradiente y Conjugado Gradiente Precondicionado, dadas las características de los sistemas a resolver; es decir, sistemas con matrices de coeficientes simétricas y definidas positivas.

A continuación presentamos un listado de los resultados obtenidos (ver Cuadro 5.1, Cuadro 5.2 y Cuadro 5.3); solo presentamos para los casos de $R = 10$ y $R = 500$, los cuales son casos extremos. Dado que se cuenta con la solución explícita ha sido posible obtener información que permite comparar el comportamiento de la solución aproximada obtenida con la exacta y los errores correspondientes.

Nivel j	Error res.	Error l_2	Nro. iter
4	6.48982e-14	9.72701e-02	15
6	6.55582e-13	2.55338e-02	63
8	9.74582e-11	6.46227e-03	255
10	2.83888e-09	1.61521e-03	1023

CUADRO 5.1

Errores de aproximación residual y l_2 usando B-splines de orden 2, $R=10$, sin preconditionamiento

6. Conclusiones. De lo investigado, podemos establecer las siguientes conclusiones:

- El método de Galerkin involucra la elección de una base del espacio que contiene la solución, la formulación del Problema Variacional, la determinación de la existencia de una solución del problema y la formulación del Problema Discreto.

Nivel j	Error res.	Error l_2	Nro. iter
4	5.80149e-11	7.57413e-01	17
6	4.60217e-10	3.51286e+00	68
8	1.50453e-09	3.28961e-01	262
10	7.99947e-09	7.65207e-02	1048

CUADRO 5.2

Errores de aproximación residual y l_2 usando B-splines de orden 2, $R=500$, sin preconditionamiento

Nivel j	Error res.	Error l_2	Nro. iter
4	5.5351e-14	7.57413e-01	1
6	4.52399e-10	3.51286e+00	65
8	1.38431e-09	3.28961e-01	109
10	3.11206e-09	7.65207e-02	131

CUADRO 5.3

Errores de aproximación residual y l_2 usando B-splines de orden 2, $R=500$, con preconditionamiento

- Un B-spline cardinal genera un Análisis Multiresolución.
- Es posible construir una base con B-splines cardinales de $L^2(I)$ adaptando la base con B-splines cardinales de $L^2(\mathbb{R})$.
- Aplicando el método de Galerkin al problema (4.1), se determinó que el Problema Variacional obtenido tiene única solución y es estable.
- El orden de aproximación correspondiente a un método de Galerkin depende de la potencia de aproximación de los espacios Test; en nuestro caso, los espacios wavelets.
- Usando bases wavelet con B-splines cardinales centralizados de orden 2, y por la experimentación numérica realizada, se determinó que las aproximaciones tienen bajo error y tienden a decrecer cuando se incrementa el nivel de resolución j ; es decir, cuando se trabaja en espacios de mayor resolución.
- Dado que la matriz de coeficientes del sistema, correspondiente al problema discreto, es mal condicionada, los resultados con alto orden de exactitud se obtienen con un nivel j relativamente alto; sin embargo, cuando se usa preconditionamiento, el error decrece exponencialmente, logrando altos niveles de exactitud con un nivel de resolución bajo.

Referencias

- [1] K. AMARATUNGA, J. WILLIAMS, S. QIAN Y J. WEISS, *Wavelet-Galerkin solutions for one dimensional partial differential equations*, IESL Technical Report No. 92-05, Intelligent Engineering Systems Laboratory, M.I.T., 1992.
- [2] G. BEYLKIN, R. COIFMAN Y V. ROKHLIN, *Fast wavelet transforms and numerical algorithms I*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**(1991) pp. 141–183.
- [3] H. BRÉZIS, *Análisis Funcional*, Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.
- [4] R. BURGOS, R. SILVA Y M. SANTOS, *Direct solution of differential equations using the wavelet-Galerkin method*, *Mecánica Computacional*, **29**(2010) pp. 4573–4584.
- [5] C. CHUI Y J-Z WANG, *On Compactly Spline Wavelets and a Duality Principle*, *Transactions of the American Mathematical Society*, **330** (1992) pp. 903–915.
- [6] I. DAUBECHIES, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM Publications, Philadelphia, 1992.
- [7] W. R. GLOWINSKI, W. LAWTON, M. RAVACHOL Y E. TENENBAUM, *Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic and hyperbolic problems in one space dimension*, *Proc.*

- 9th International Conference on Numerical Methods in Applied Sciences and Engineering, SIAM, Philadelphia, 1990.
- [8] S. KESAVAN, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1989.
 - [9] W. LAWTON, W. MORRELL, E. TENEBBAUM, Y J. WEISS, *The wavelet galerkin method for partial differential equations*, Technical Report AD901220, Aware, Inc., 1990.
 - [10] A. LOUIS, D. MAASS Y A. RIEDER, *Wavelets: Theory and Applications*, Johb-Wiley & Sons, USA, 1997.
 - [11] S. MALLAT, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1999.
 - [12] M. NAIR, *Wavelet-Galerkin Method*, Talk at QIP-short Term Course, Department of Mathematics, IIT Madras, Diciembre, 2004.
 - [13] H. NGUYEN Y G. EVANGELISTA, *A continuous wavelet-Galerkin method for the linear wave equation* [Elektronisk resurs], SIAM Journal on Scientific Computing., 2007
<http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:24195/FULLTEXT01>
 - [14] S. QIAN Y J. WEISS, *Wavelets and the numerical solution of partial differential equations*, Journal of Computational Physics, **106** (1992) pp. 155–175.
 - [15] K. URBAN, *Wavelets in Numerical Simulation Problem Adapted Construction and Applications*, Ed. Springer, Heilderberg, 2002.
 - [16] K. URBAN, *Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Oxford Science Publications, Oxford, 2009.
 - [17] J. WANG, *Cubic spline wavelet Bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation*, Appl. Compu. Harm. Anal., **3** no.2 (1996) pp. 154–163.
 - [18] R. WELLS Y X. ZHOU, *Wavelet Solutions for the Dirichlet Problem*, AFOSR Technical Report No. 90-0334, Aware, Inc., 1993.