



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

2025; Vol.12(2):396-412.



Numerical simulation for shell deformation using the Naghdi and Koiter models

Simulación numérica para la deformación de cáscaras usando los modelos de Naghdi y Koiter

José Luis Ponte Bejarano^{ID}, Juan Carlos Ponte Bejarano^{ID} and Alexis Rodríguez Carranza^{ID}

Received, May. 01, 2025;

Accepted, Set. 23, 2025;

Published, Dec. 27, 2025



How to cite this article:

Ponte JL, et al. Numerical simulation for shell deformation using the Naghdi and Koiter models. *Selecciones Matemáticas*. 2025;12(2):396–412. <https://doi.org/10.17268/se1.mat.2025.02.11>

Abstract

In this research work, shell deformations generated by surface forces acting on the shell are described and simulated. The Naghdi and Koiter models are used to describe shell deformations. A weak formulation for the model is obtained, and some results on the existence of solutions are presented. The finite element method is then used to obtain the deformations. In addition, simulations of shell deformations are shown for the case of sectional curvature $k = 0$.

Keywords . Shell, Naghdi and Koiter models, numerical simulation for shells, finite element method.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se describen y simulan las deformaciones de cáscaras generadas por fuerzas superficiales actuando sobre ella. Para ello se emplean los modelos de Naghdi y Koiter para describir las deformaciones de cáscaras. Se obtiene la formulación débil para el modelo y se mencionan algunos resultados sobre la existencia de soluciones. Luego, se utiliza el método de los elementos finitos para obtener las deformaciones. Además, son mostradas las simulaciones de las deformaciones de cáscaras para el caso de curvatura seccional $k = 0$.

Palabras clave. Cáscara, modelos de Naghdi y Koiter, simulación numérica para cáscaras, método de los elementos finitos.

1. Introducción. Cuando un cuerpo elástico, en el caso particular una cáscara, sufre tensiones superficiales, ella se deforma, es decir, sus puntos son trasladados a otros lugares en el espacio, tal y como se muestra en la figura 1.1. Este gráfico representa la deformación de un cuerpo elástico, donde $\hat{\Gamma}_0$ representa la configuración inicial del objeto y $\hat{\Gamma}_1$ la configuración después de la deformación.

Esto quiere decir que, fijado un sistema de coordenadas, es posible ubicar los puntos del objeto antes y después de la deformación. Por ejemplo, el punto \hat{x} está ubicado en $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, y después de la deformación este punto sufre una variación de \hat{u}_1 unidades en la dirección \hat{e}^1 , \hat{u}_2 unidades en la dirección \hat{e}^2 y \hat{u}_3 unidades en la dirección \hat{e}^3 , para finalmente ubicarse en la posición $\hat{u}_i(\hat{x})\hat{e}^i$. Notemos que para hablar de deformaciones fue necesario fijar un sistema de coordenadas para indicar que los puntos se mueven *a lo largo, ancho o alto* del espacio donde se encuentra la estructura.

*Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. **Correspondence author** (jponteb@unitru.edu.pe).

†Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (jponte@unitru.edu.pe).

‡Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (arodriguezca@unitru.edu.pe).

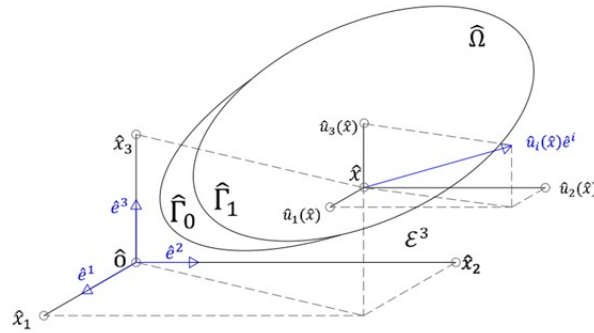


Figura 1.1: Esquema gráfico de la deformación de un cuerpo elástico.

Inicialmente, Ciarlet Philippe usó este concepto para obtener un modelo que describa las deformaciones en una cáscara ([1]), tal y como se muestra en la figura 1.2. En ella Ω^ε representa un abierto de \mathbb{R}^3 y $\hat{\Omega}^\varepsilon$ la imagen de ese abierto.

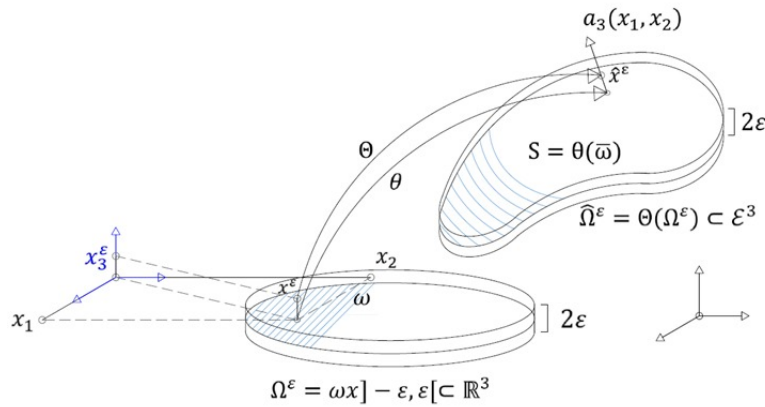


Figura 1.2: Modelo geométrico de las deformaciones en una cáscara.

El problema con dicha aproximación dada por Ciarlet Philippe es que el sistema de coordenadas queda fijo y esto trae consigo términos de curvatura en el modelo que hacen complicado la obtención de ciertas desigualdades, llamadas desigualdades de observabilidad; y en algunos casos inclusive es imposible obtener dichas desigualdades. Pengfei Yao propuso una mejora para ello, él consideró la cáscara como una subvariedad Riemanniana inmersa en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Esto implica que el modelo no depende del sistema de coordenadas para describir las deformaciones de la cáscara sometida a cargas superficiales, y queda libre la elección del sistema de coordenadas ([2]).

Las aproximaciones más conocidas para modelar las deformaciones de una cáscara, son los modelos de Koiter y Naghdi; estos modelos se representan por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales cuyas incógnitas son los desplazamientos de los puntos de la cáscara ([3], [4]). Así mismo, estos modelos describen la evolución de los desplazamientos en el tiempo de una configuración inicial de la cáscara, la cual fue sometida a ciertas condiciones de contorno y fuerzas superficiales actuando sobre ella. Por otro lado, las soluciones de dichas ecuaciones nos permitirán conocer las deformaciones sobre la cáscara en cualquier tiempo. Además, en estos modelos son considerados dos mecanismos de acción sobre la cáscara: una es de naturaleza mecánica y otra de naturaleza geométrica. La hipótesis sobre el mecanismo mecánico establece que si la espesura de la cáscara es suficientemente pequeña en comparación con las otras dimensiones, entonces las tensiones dentro de la cáscara son planares, es decir, las tensiones paralelas a la superficie media varían aproximadamente de manera lineal; y esto permite obtener los desplazamientos en la dirección normal y con ello obtener la deformación completa de la cáscara ([5], [6], [7]). La hipótesis de naturaleza geométrica, para los modelos de Koiter y Naghdi, son diferentes. En el caso del modelo de Koiter, los puntos sobre la normal a la superficie media antes de la deformación, continúan sobre dicha recta a la misma distancia de la superficie media después de la deformación; y durante la deformación, las tensiones son aproximadamente planas y paralelas al plano tangente a la superficie media. Mientras que en el modelo de Naghdi, después de la deformación la normal puede dejar de ser normal; además en este modelo se toman en

cuenta las deformaciones de la cáscara y la flexión de la superficie media en conjunto con las deformaciones transversales ([7], [4]). En ambos modelos, estas consideraciones llevan a un sistema complejo de ecuaciones diferenciales parciales que modelan sus deformaciones cuando son sometidas a cargas y condiciones de contorno, siendo el modelo de Naghdi un modelo más complejo pues tendrá más grados de libertad para deformarse. Y siendo el modelo de Koiter más eficiente para estructuras delgadas y análisis de estabilidad ([8]). En cambio, el modelo de Naghdi es más general, este incluye efectos de corte transversal y es útil en simulaciones numéricas de estructuras con espesores no despreciables ([9]). Es por ello, que en el presente trabajo de investigación se describen y simulan numéricamente las deformaciones de cáscaras usando los modelos de Naghdi y Koiter. Comencemos conceptualizando y enunciando la definición de cáscara.

2. Cáscara y formulación variacional para el modelo de deformación. Una cáscara es un objeto elástico tridimensional con la característica de que su espesor es mucho más pequeño en comparación con las otras dimensiones. Esta se deforma bajo la acción de fuerzas superficiales actuando sobre ella. La definición formal de cáscara se da a continuación.

Definición 2.1. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 con normal N . Sea g la métrica inducida en M por la métrica usual de \mathbb{R}^3 , y considere la variedad riemanniana (M, g) . Una cáscara es un cuerpo en \mathbb{R}^3 , y se define por:

$$S = \left\{ p = x + zN(x), \text{ con } x \in \Omega \text{ e } z \in \mathbb{R} \text{ siendo } |z| < \frac{h}{2} \right\},$$

donde h es el espesor de la cáscara que se asume pequeña y $N(x)$ es la normal a Ω en x .

En la definición anterior 2.1 se asume que la superficie media de la cáscara contiene una región limitada Ω de M . En general, se puede asumir que Ω representa la superficie media de la cáscara. En el gráfico de la Figura 2.1 se puede visualizar una representación geométrica de esta.

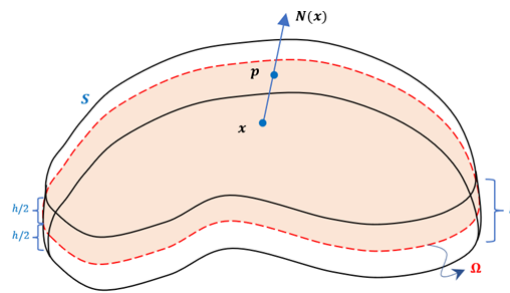


Figura 2.1: Cáscara S y superficie media Ω .

En la Figura 2.1 S es la cáscara; Ω la superficie media; x el punto en la superficie media; $N(x)$ la normal a la superficie media en el punto x , p un punto de la cáscara sobre la normal $N(x)$ y h el espesor de la cáscara.

En el modelo de Naghdi ([4]), el vector desplazamiento $\xi(p)$ de un punto $p \in S$ puede ser aproximado por:

$$\xi(p) = \xi_1(x) + z\Psi(x),$$

donde $\xi_1(x) \in \mathbb{R}^3$ denota el vector desplazamiento de la superficie media Ω y $\Psi(x)$ representa la deformación de la normal $N(x)$ para cada $x \in \Omega$. Considere que después de un desplazamiento de la cáscara ella pasa a ocupar la región $F(S) \subset \mathbb{R}^3$ siendo $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función regular. Después de la deformación la superficie media está en $F(\Omega) = \{F(x) : x \in \Omega\}$. Además, la nueva posición es dada por:

$$F(x) = x + \xi_1(x).$$

Para modelar la cáscara de Naghdi el trabajo consiste en hallar la superficie media de la cáscara deformada usando las condiciones físicas y geométricas.

Naghdi asume que la normal después de la deformación puede dejar de ser normal, pero la distancia de un punto sobre la normal a la superficie media permanece invariante, es decir, las deformaciones en la dirección normal son despreciables. Descomponiendo ξ_1 y Ψ se tiene:

$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= W_1(x) + w_1(x)N(x), \\ \Psi(x) &= V(x) + w_2(x)N(x), \end{aligned}$$

donde $W_1, V \in \chi(\Omega)$ y $w_1, w_2 \in C^\infty(\Omega)$; y siendo $\chi(\Omega)$ el conjunto de los campos vectoriales sobre Ω .

Denotemos por $\hat{\varepsilon}$ el tensor de deformación de la cáscara. Usando la formulación de Naghdi ([4]), se obtienen las siguientes relaciones tensión - deformación:

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}|_\Omega(p) &= \Upsilon(\xi) + z\chi_0(\xi), \\ i(N)\hat{\varepsilon}(p) &= \varphi_0(\xi) + \frac{z}{2}Dw_2, \\ \hat{\varepsilon}(N, N)(p) &= w_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

para $p = x + zN(x) \in S$, donde $\hat{\varepsilon}|_\Omega$ denota las componentes del tensor de deformación $\hat{\varepsilon}$ sobre la superficie media. Además, $\Upsilon(\xi)$, $\chi_0(\xi)$ y $\varphi_0(\xi)$ son los campos vectoriales llamados el tensor de deformación de Naghdi, indicados en [10].

Asumiendo que el material de la cáscara es homogéneo e isotrópico, se encuentra en [11] una expresión integral para la energía cinética de deformación de la cáscara como una integral sobre $\Omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Consideremos que $R > 0$ representa el radio de curvatura principal más pequeño de la superficie media no deformada; asumiendo que $\frac{h}{R} \ll 1$ y considerando el sistema (2.1), se tiene la siguiente aproximación de la energía cinética de deformación de la cáscara:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \alpha h \int_\Omega \left\{ |\Upsilon(\xi)|^2 + 2|\varphi_0(\xi)|^2 + \omega_2^2 + \beta (Traz(\Upsilon(\xi)) + w_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma \left[|\chi_0(\xi)|^2 + \frac{|Dw_2|^2}{2} + \beta Traz^2(\chi_0(\xi)) \right] \right\} d\Omega \end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{E}{1+\mu}$, $\beta = \frac{\mu}{1-2\mu}$ y $\gamma = \frac{h^2}{12}$; en el cual E denota el módulo de Young y μ el radio de Poisson con $0 < \mu < \frac{1}{2}$. La expresión anterior para $I(\xi)$ permite definir una forma bilineal y simétrica asociada a la energía de deformación de la cáscara en el espacio $(H^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H^1(\Omega))^2$ por:

$$B_0(\xi, \eta) = \frac{\alpha h}{2} \int_\Omega \mathcal{B}_0(\xi, \eta) dx,$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(\xi, \eta) &= 2\langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta) \rangle + 4\langle \varphi_0(\xi), \varphi_0(\eta) + 2w_2u_2 \rangle \\ &\quad + 2\beta(Traz(\Upsilon(\xi) + w_2))(Traz(\Upsilon(\eta) + u_2)) + 2\gamma\langle \chi_0(\xi), \chi_0(\eta) \rangle \\ &\quad + \gamma\langle Dw_2, Du_2 \rangle + 2\gamma\beta Traz(\chi_0(\xi))Traz(\chi_0(\eta)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $\xi, \eta \in (H^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H^1(\Omega))^2$ son dados por $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$, $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2)$. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\Omega) &= (L^2(\Omega, \Lambda))^2 \times (L^2(\Omega))^2, \\ \mathcal{H}^1(\Omega) &= (H^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H^1(\Omega))^2, \end{aligned}$$

Sea $L \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ y considere un funcional asociado con las fuerzas aplicadas en la cáscara, dado por

$$\eta \in \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \langle L, \eta \rangle.$$

Para la cáscara de Naghdi, se tiene el siguiente problema variacional: Hallar $\xi \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tal que:

$$B_0(\xi, \eta) = \langle L, \eta \rangle, \text{ para todo } \eta \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ es el espacio de las funciones en $\mathcal{H}^1(\Omega)$ que se anulan en una porción Γ_0 de $\Gamma = \partial\Omega$ y $B_0(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal (2.2). La existencia del problema variacional (2.3) fue probado en [12].

3. Resultados para la formulación Variacional: Existencia y unicidad. A continuación se indicarán los siguientes resultados sobre la forma bilineal (2.2) y el problema variacional (2.3). Para ello se pueden revisar [10] y [2].

Teorema 3.1. *Considere la forma bilineal $B_0(\cdot, \cdot)$ dada por (2.2). Dados $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$ y $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2) \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, se tiene:*

$$B_0 = (A_0\xi, \eta)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \int_\Gamma \partial(A_0\xi, \eta) d\Gamma.$$

donde

$$A_0(\xi) = -(\Delta_\beta W_1 + F_1(\xi), \gamma \Delta_\beta W_2 + F_2(\xi), \Delta w_1 + f_1(\xi), \gamma \Delta w_2 + f_2(\xi)),$$

y $F_i(\xi), f_i(\xi)$ son los términos de primer orden (≤ 1), en relación a ξ , para $i = 1, 2$. $\Delta_\beta = -[\delta d + 2(1 + \beta)d\delta]$ y Δ son los operadores de tipo Hodge - Laplace y Laplace - Beltrami, respectivamente. d es la derivada exterior y δ su forma adjunta.

Del teorema 3.1, se sigue que el problema variacional (2.3) es equivalente al siguiente problema de contorno. Para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$,

$$\begin{cases} \frac{\alpha h}{2} A_0(\xi) &= (F_1, F_2, f_1, f_2), \\ W_1|_{\Gamma_0} &= W_2|_{\Gamma_0} = w_1|_{\Gamma_0} = w_2|_{\Gamma_0} = 0, \\ \frac{\alpha h}{2} B_{01}(\xi)|_{\Gamma_1} &= \frac{\alpha h}{2} \gamma B_{02}(\xi)|_{\Gamma_1} = \alpha h \varphi_0(\xi)|_{\Gamma_1} = \frac{\alpha h}{2} \gamma \frac{\partial w_2}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{cases} B_{01}(\xi) &= 2i(\nu)\Upsilon(\xi) + 2\beta(\text{Tr}az\Upsilon(\xi) + w_2)\nu, \\ B_{02}(\xi) &= 2\gamma i(\nu)\chi_0(\xi) + 2\gamma\beta\text{Tr}az(\chi_0(\xi))\nu. \end{cases}$$

Teorema 3.2. Sea $B_0(\cdot, \cdot)$ la forma bilineal dada por la ecuación (2.2). Entonces, existe una constante $c > 0$ tal que

$$B_0(\xi, \xi) \leq c\|\xi\|_{\mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)} \text{ para } \xi \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad (3.2)$$

donde $\Gamma_0 \subset \Gamma$ con medida de Lebesgue positiva.

El siguiente resultado sigue inmediatamente del teorema 3.2.

Teorema 3.3. Para $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ el problema (3.1) tiene solución única en $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

Las ecuaciones de evolución para la cáscara de Naghdi son dadas por:

$$\begin{cases} \xi_{tt} + A\xi = 0 \text{ en } (0, \infty) \times \Omega, \\ \xi|_{\Sigma} = 0, \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty), \\ \xi(0) = \xi_0, \quad \xi_t(0) = \xi_1 \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

for $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$. La forma bilineal asociada al operador A es dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\xi, \eta) &= 2\langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta) \rangle + 4\langle \varphi(\xi), \varphi(\eta) \rangle \gamma + 2\beta \left(\text{Tr}az\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}w_2 \right) \left(\text{Tr}az\Upsilon(\eta) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}u_2 \right) \\ &+ 2\langle \chi(\xi), \chi(\eta) \rangle + 2\beta \text{Tr}az\Upsilon(\xi) \text{Tr}az\Upsilon(\eta) \\ &+ \langle Dw_2, Du_2 \rangle + \frac{1}{\gamma}w_2u_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

where $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2)$ y

$$\begin{cases} \Upsilon(\xi) &= \frac{1}{2}(DW_1 + DW_1^*) + w_1\Pi, \\ \chi(\xi) &= \frac{1}{2}(DW_2 + DW_2^*) + w_1\Pi - \sqrt{\gamma}(i(W)D\Pi - w_1c), \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{2}Dw_1 - i(W_1)\Pi + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}W_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Y la fórmula de Green para el teorema 3.1 es dada por:

$$B = (A\xi, \eta)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \int_{\Gamma} \partial(A\xi, \eta) d\Gamma, \quad (3.6)$$

donde

$$B = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\xi, \eta) dx, \quad (3.7)$$

$$\partial(A\xi, \eta) = \langle B_1(\xi), U_1 \rangle + \langle B_2(\xi), U_2 \rangle + 2\langle \varphi(\xi), \nu \rangle + \frac{\partial w_2}{\partial \nu} u_2, \quad (3.8)$$

y

$$\begin{cases} B_1(\xi) &= 2i(\nu)\Upsilon(\xi) + 2\beta \left(\text{Traz}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}w_2 \right) \nu, \\ B_2(\xi) &= 2i(\nu)\chi(\xi) + 2\beta(\text{Traz}\chi(\xi))\nu. \end{cases} \quad (3.9)$$

Se definen los espacios funcionales siguientes:

$$\begin{aligned} V &= (H_0^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2, \\ H &= (L^2(\Omega, \Lambda))^2 \times (L^2(\Omega))^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por la fórmula (3.6), se tiene la formulación variacional del problema (3.3): Hallar $\eta \in C([0, \infty]; V) \cap C^1([0, \infty]; H)$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\eta_t, \xi) + B(\eta, \xi) = 0, & \forall \xi \in V \\ \eta(0) = \eta_0 \in V, & \eta_t(0) = \eta_1 \in H \end{cases} \quad (3.11)$$

Usando el hecho que la forma bilineal simétrica B es coersiva por el teorema 3.2; y usando la teoría de semigrupos, se puede verificar que existe una única solución del sistema (3.11).

Como ya es conocida la formulación variacional para el modelo de Naghdi, en la siguiente sección se determinará la forma discreta del problema variacional asociado al modelo de Naghdi.

4. Forma discretizada del modelo por elementos finitos. En la sección anterior se determinó que el problema variacional asociado al modelo de Naghdi (3.3) tiene solución única. Así que en esta sección determinaremos la forma discretizada del problema variacional asociado al modelo de Naghdi (3.3). Para ello utilizaremos las ideas brindadas por Ciarlet en [11].

Considere la formulación variacional dada: Hallar $\xi \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tal que:

$$B(\xi, \eta) = \langle L, \eta \rangle, \text{ para todo } \eta \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ es el espacio de las funciones en $\mathcal{H}^1(\Omega)$ que se anulan en una porción Γ_0 de $\Gamma = \partial\Omega$ y $B(., .)$ es la forma bilineal (2.2).

Para el modelo de Naghdi (3.3), el término del lado derecho en la igualdad (4.1) es 0. Así, se tiene que (4.1) se escribe por:

$$B(\xi, \eta) = 0, \text{ para todo } \eta \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad (4.2)$$

donde, por el teorema 3.1,

$$B(\xi, \eta) = (A_0\xi, \eta)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \int_{\Gamma} \partial(A_0\xi, \eta) d\Gamma.$$

Considere que V_h es el espacio de elementos finitos, que es finito dimensional, asociado a $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. El problema discretizado, asociado a (4.2), es dado por la siguiente expresión: Para todo $\eta_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} D_h(\xi, \eta_h) &= B(\xi, \eta_h), \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} D_K(\xi|_K, \eta_h|_K), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde K y \mathcal{T}_h son conjuntos especificados en [11], y D_K es dado por:

$$D_K(\xi|_K, \eta_h|_K) = (A_0\xi|_K, \eta_h|_K)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \int_{\Gamma=\partial K} \partial(A_0\xi|_K, \eta_h|_K) d\Gamma.$$

En la expresión (4.3), D_h representan las proyecciones del espacio de la formulación variacional al espacio V_h .

La ecuación que describe el cálculo de las matrices por elemento, es dada por la siguiente ecuación:

$$D_h(\xi|_K, \eta_h|_K) = B(\xi|_K, \eta_h|_K), \quad (4.4)$$

y usando la ecuación (4.3) se ensamblan las matrices por cada elemento. Luego, se forma el sistema discreto usando en el modelo de Naghdi (3.3) pero con la disipación localizada en el interior, cuya forma disipada del modelo de Naghdi se indica en [10]. Así, la ecuación (2.3) se puede escribir en la siguiente forma:

$$H^{(e)}\xi^{(e)} = F^{(e)},$$

donde $H^{(e)}$ es la matriz de rigidez local para cada elemento e de 8×8 , $\xi^{(e)}$ es el vector local de desplazamientos de orden 8×1 y $F^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales, es decir, la discipación que es dada por la siguiente expresión:

$$F^{(e)} = \int_{K^{(e)}} F dx,$$

donde $K^{(e)} \in \mathcal{T}_h$ es el elemento y F es la carga actuando sobre la superficie de la cáscara. Para entender esta situación consideremos cuatro elementos cuadrangulares. Para la enumeración local de los nodos en el elemento $K^{(e)}$, $e = 1, 2, 3, 4$, se considera el elemento en la Figura 4.1. En ella se observa que cada nodo tiene dos grados de libertad, los que tienen la forma $(\xi_i^{(e)}, \eta_i^{(e)})$ con $i = 1, 2, 3, 4$, los que representan los nodos locales en el sistema del elemento e .

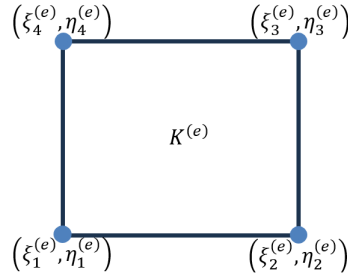


Figura 4.1: El elemento finito $K^{(e)}$.

Así, para una triangulación de cuatro elementos, se tiene en la Figura 4.2 la enumeración de cada nodo por cada elemento $K^{(e)}$.

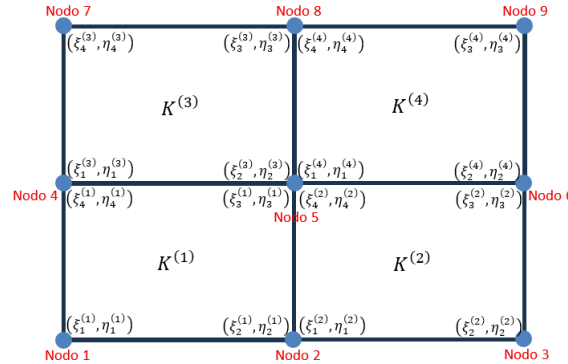


Figura 4.2: Enumeración local para los cuatro elementos.

De la Figura 4.2 se observan varios nodos coincidentes, los cuales se detallan a continuación en la Tabla 4.1. En ella se observan que en los nodos 2, 4, 5, 6 y 8 hay varias coincidencias, siendo la mayor coincidencia en el nodo 5.

Nodos	Nodales locales
Nodo 2	$(\xi_2^{(1)}, \eta_2^{(1)}) = (\xi_1^{(2)}, \eta_1^{(2)})$
Nodo 4	$(\xi_4^{(1)}, \eta_4^{(1)}) = (\xi_3^{(3)}, \eta_3^{(3)})$
Nodo 5	$(\xi_3^{(1)}, \eta_3^{(1)}) = (\xi_4^{(2)}, \eta_4^{(2)}) = (\xi_2^{(3)}, \eta_2^{(3)}) = (\xi_1^{(4)}, \eta_1^{(4)})$
Nodo 6	$(\xi_2^{(2)}, \eta_2^{(2)}) = (\xi_4^{(4)}, \eta_4^{(4)})$
Nodo 8	$(\xi_3^{(3)}, \eta_3^{(3)}) = (\xi_4^{(4)}, \eta_4^{(4)})$

Tabla 4.1: Coincidencias en los nodos locales .

Para el caso con cuatro elementos, la matriz de Rigidez local $H^{(e)}$, el vector de desplazamiento $\xi^{(e)}$ y el vector de fuerzas nodales $F^{(e)}$ son dados por las siguiente matrices:

$$H^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & \cdots & K_{18}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & \ddots & K_{28}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{81}^{(e)} & \cdots & K_{88}^{(e)} \end{bmatrix}_{8 \times 8}, \quad \xi^{(e)} = \begin{bmatrix} \xi_1^{(e)} \\ \eta_1^{(e)} \\ \xi_2^{(e)} \\ \eta_2^{(e)} \\ \xi_3^{(e)} \\ \eta_3^{(e)} \\ \xi_4^{(e)} \\ \eta_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad F^{(e)} = \begin{bmatrix} F_{\xi_1}^{(e)} \\ F_{\eta_1}^{(e)} \\ F_{\xi_2}^{(e)} \\ F_{\eta_2}^{(e)} \\ F_{\xi_3}^{(e)} \\ F_{\eta_3}^{(e)} \\ F_{\xi_4}^{(e)} \\ F_{\eta_4}^{(e)} \end{bmatrix}$$

Ahora realicemos la enumeración global para los nodos. Esta se puede observar en la Figura 4.3. En ella se establece la enumeración global de los nodos, indicando cada nodo por (u_i, v_i) , $i = 1, \dots, 9$.

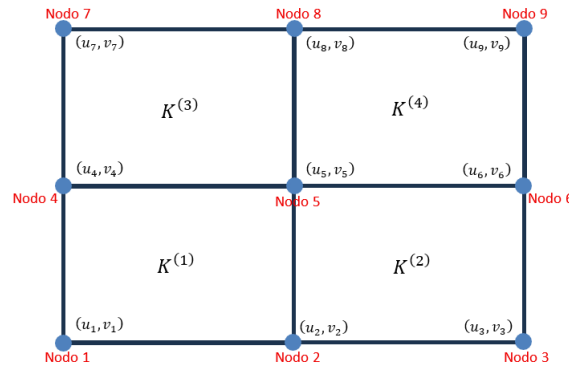


Figura 4.3: Enumeración global de los nodos.

Estableciendo la relación entre la enumeración global dada en la Figura 4.3 con la enumeración local dada en la Figura 4.2, se tiene que:

Para el elemento $e = 1$: Nodos globales 1 – 2 – 5 – 4.

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_5 & v_5 & u_4 & v_4 \end{bmatrix}^T, \\ F^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{u_1}^{(1)} & F_{v_1}^{(1)} & F_{u_2}^{(1)} & F_{v_2}^{(1)} & F_{u_5}^{(1)} & F_{v_5}^{(1)} & F_{u_4}^{(1)} & F_{v_4}^{(1)} \end{bmatrix}^T.$$

Para el elemento $e = 2$: Nodos globales 2 – 3 – 6 – 5.

$$\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_6 & v_6 & u_5 & v_5 \end{bmatrix}^T, \\ F^{(2)} = \begin{bmatrix} F_{u_2}^{(2)} & F_{v_2}^{(2)} & F_{u_3}^{(2)} & F_{v_3}^{(2)} & F_{u_6}^{(2)} & F_{v_6}^{(2)} & F_{u_5}^{(2)} & F_{v_5}^{(2)} \end{bmatrix}^T.$$

Para el elemento $e = 3$: Nodos globales 4 – 5 – 8 – 7.

$$\xi^{(3)} = \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_8 & v_8 & u_7 & v_7 \end{bmatrix}^T, \\ F^{(3)} = \begin{bmatrix} F_{u_4}^{(3)} & F_{v_4}^{(3)} & F_{u_5}^{(3)} & F_{v_5}^{(3)} & F_{u_8}^{(3)} & F_{v_8}^{(3)} & F_{u_7}^{(3)} & F_{v_7}^{(3)} \end{bmatrix}^T.$$

Para el elemento $e = 4$: Nodos globales $5 - 6 - 9 - 8$.

$$\xi^{(4)} = \begin{bmatrix} u_5 & v_5 & u_6 & v_6 & u_9 & v_9 & u_8 & v_8 \end{bmatrix}^T,$$

$$F^{(4)} = \begin{bmatrix} F_{u_5}^{(4)} & F_{v_5}^{(4)} & F_{u_6}^{(4)} & F_{v_6}^{(4)} & F_{u_9}^{(4)} & F_{v_9}^{(4)} & F_{u_8}^{(4)} & F_{v_8}^{(4)} \end{bmatrix}^T.$$

Una vez conocida los elementos el sistema de rigidez local, $H^{(e)}\xi^{(e)} = F^{(e)}$, se procede con el ensamblado, obteniéndose un sistema dado por la siguiente ecuación:

$$H\xi = F, \quad (4.5)$$

donde H es la matriz de rigidez global, la que se obtiene ensamblando las matrices de rigidez local $H^{(e)}$, siendo H una matriz simétrica de orden 18×18 ; ξ es matriz de 18×1 que contiene los desplazamientos globales en los nodos y F la matriz de 18×1 que contiene las cargas aplicadas en todos los nodos. Estas se indican a continuación:

$$\xi = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_8 \\ v_9 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_7^{(1)} + F_1^{(3)} \\ F_8^{(1)} + F_2^{(3)} \\ F_5^{(1)} + F_7^{(2)} + F_3^{(3)} + F_1^{(4)} \\ F_6^{(1)} + F_8^{(2)} + F_4^{(3)} + F_2^{(4)} \\ F_5^{(2)} + F_3^{(4)} \\ F_6^{(2)} + F_4^{(4)} \\ F_7^{(3)} \\ F_8^{(3)} \\ F_5^{(3)} + F_7^{(4)} \\ F_6^{(3)} + F_8^{(4)} \\ F_5^{(4)} \\ F_6^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Además, los $F_i^{(e)}$ son las entradas locales del vector $F^{(e)}$ en el siguiente orden:

$$F^{(e)} = \begin{bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ F_3^{(e)} \\ F_4^{(e)} \\ F_5^{(e)} \\ F_6^{(e)} \\ F_7^{(e)} \\ F_8^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{u_{n_1}}^{(e)} \\ F_{v_{n_1}}^{(e)} \\ F_{u_{n_2}}^{(e)} \\ F_{v_{n_2}}^{(e)} \\ F_{u_{n_3}}^{(e)} \\ F_{v_{n_3}}^{(e)} \\ F_{u_{n_4}}^{(e)} \\ F_{v_{n_4}}^{(e)} \end{bmatrix},$$

donde (n_1, n_2, n_3, n_4) son los nodos globales del elemento e en el orden local (antihorario), tal como se observa en la Figura 4.3.

Los elementos $K_{ij}^{(e)}$ de la matriz de rigidez global H , que es una matriz de 18×18 que se obtiene acoplando las matrices de rigidez local $H^{(e)}$, son determinados de la siguiente manera:

$$K_{ij}^{(e)} = B_e(\psi_i, \psi_j) \text{ para } i, j = 1, \dots, 8,$$

donde $B_e(\cdot, \cdot)$ es la restricción de $B(\cdot, \cdot)$ al elemento finito $K^{(e)}$, y $\{\psi_i\}_{i=1}^8$ son una base del espacio de elementos finitos $V_h \subset \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, que es finito dimensional. Además,

$$F_i^{(e)} = F_e(\psi_i) \text{ para } i, j = 1, \dots, 8,$$

donde $F_e(\cdot)$ es la restricción de la carga $F(\cdot)$ al elemento $K_{ij}^{(e)}$, y $\{\psi_i\}_{i=1}^8$ son una base del espacio de elementos finitos $V_h \subset \mathcal{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

El procedimiento dado anteriormente para la construcción de la matriz de Rigidez global H y para la matriz global de cargas F , permite elaborar el Algoritmo 1 y 2.

Algorithm 1 : Algoritmo para ensamblar la matriz de Rigidez Global H

Entrada:

- N_n : Número total de nodos globales
- N_e : Número total de elementos
- Conect : Matriz de conectividad de orden $N_e \times$ Nodos por elemento
- $H^{(e)}$: Matriz de rigidez local del elemento e de orden 8×8

Salida:

- H : Matriz de rigidez global de orden $2N_n \times 2N_n$

Procedimiento:

1. Inicializar H como matriz nula de orden $2N_n \times 2N_n$.
2. Para cada elemento $e = 1, \dots, N_e$, hacer:
 - (a) Leer los nodos del elemento:

$$[n_1, n_2, n_3, n_4] = \text{Conect}[e].$$

- (b) Construir el vector de grados de libertad globales:

$$g^{(e)} = [2n_1 - 1, 2n_1, 2n_2 - 1, 2n_2, 2n_3 - 1, 2n_3, 2n_4 - 1, 2n_4].$$

- (c) Para $i = 1, \dots, 8$:
 - i. Sea $I = g^{(e)}[i]$.
 - ii. Para $j = 1, \dots, 8$:
 - A. Sea $J = g^{(e)}[j]$.
 - B. Actualizar:

$$H[I, J] = H[I, J] + H^{(e)}[i, j].$$

3. Devolver H .
-

Si en los Algoritmos 1 y 2 se considera $N_n = 9$ y $N_e = 4$, la matriz de conectividad es:

$$\text{Conect} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Algorithm 2 :Algoritmo para ensamblar el vector de Fuerzas F **Entrada:**

N_n : Número total de nodos globales
 N_e : Número total de elementos
 Conect : Matriz de conectividad de orden $N_e \times$ Nodos por elemento
 $F^{(e)}$: Vector de fuerzas locales del elemento e de orden 8×1 .

Salida:

F : Vector global de fuerzas de orden $2N_n \times 1$.

Procedimiento:

1. Inicializar F como matriz nula de orden $2N_n \times 1$.
2. Para cada elemento $e = 1, \dots, N_e$, hacer:
 - (a) Leer los nodos del elemento:

$$[n_1, n_2, n_3, n_4] = \text{Conect}[e].$$

- (b) Construir el vector de grados de libertad globales:

$$g^{(e)} = [2n_1 - 1, 2n_1, 2n_2 - 1, 2n_2, 2n_3 - 1, 2n_3, 2n_4 - 1, 2n_4].$$

- (c) Para $i = 1, \dots, 8$:
 - i. Sea $I = g^{(e)}[i]$:
 - ii. Actualizar:

$$F[I] = F[I] + F^{(e)}[i].$$

3. Devolver F .

Esta matriz fue la que se utilizó para establecer la relación entre la enumeración local y global para luego realizar el ensamblado; y así obtener las matrices H y F , los aparecen en la ecuación (4.5).

Construido el sistema (4.5), se deben imponer las condiciones de contorno, obteniéndose un sistema matricial G , cuya solución da los desplazamientos en los puntos interiores de la malla. Con ellos se validan los efectos *regularizantes* de la disipación, es decir, cómo los efectos disipativos influyen en la *suavidad* de las soluciones, y esto está directamente ligado a la estabilidad y controlabilidad del modelo de Naghdi, resultados teóricos obtenidos en [10].

Cuando se consideran más elementos cuadrangulares el procedimiento es similar, ya que se utilizan los Algoritmos 1 y 2, sólo que en este caso las dimensiones de las matrices H y G son grandes. Para ello se elaboró algoritmos e implementó en el lenguaje de programación Fortan para el cálculo de ambas matrices. Estos se pueden visualizar en las subsecciones 5.1 y 5.2. En esta, se muestra también el código general para solucionar el sistema correspondiente a la matriz G . Además, se utilizan estos códigos para generar y exportar el archivo con extensión *.msh* para ser leído por el Software de simulación GiD, lo que se puede observar en la subsección 5.3.

Como ya es conocida la forma discretizada asociada al modelo de Naghdi; y los Algoritmos 1 y 2, en la siguiente sección procedemos a realizar las simulaciones numéricas de las deformaciones de una cáscara de Naghdi, dada por (3.3), con curvatura seccional $k = 0$. Además, se utilizan los códigos elaborados en el lenguaje de programación Fortan para realizar las simulaciones usando el Software de simulación GiD.

5. Simulación Numérica para una cáscara. En esta sección se harán las simulaciones de las deformaciones de una cáscara cuando existen fuerzas superficiales actuando sobre ella. Para ello se utilizará la forma discretizada del modelo de Naghdi (3.3) y los algoritmos determinados en la sección anterior.

A continuación se indican los códigos elaborado en el lenguaje de programación Fortan para el cálculo de las matrices H y G . Como se indico en la sección anterior, H es la matriz de rigidez global, mientras que G es la matriz de coeficientes del sistema asociado a (4.5), donde ya se implementaron las condiciones de contorno.

5.1. Cálculo de la matriz H . A continuación se muestra el código correspondiente a la matriz H , que es la matriz de rigidez global del sistema (4.5). Este fue elaborado en el lenguaje de programación Fortan.

```

1 !-----
2 ! Calculo de la matriz H
3 !-----

```

```

4
5 G = 0.
6 do i = 1, Nelem
7
8     JACOB = sqrt((Ne(el(i,1),1) - Ne(el(i,2),1))*2 +
9                (Ne(el(i,1),2) - Ne(el(i,2),2))*2) / 2.
10
11    do j = 1, Nelem
12
13        call Normal_Element(Ne(el(j,1),1), Ne(el(j,1),2),
14                           Ne(el(j,2),1), Ne(el(j,2),2), Nodel, VNorm)
15
16        if (i .ne. j) then
17            SH = 0.
18            call gauss_points(NpG, Gp, W)
19
20            do Gpt = 1, NpG
21                call cambiocor(Ne(el(j,1),1), Ne(el(j,2),1),
22                             Ne(el(j,1),2), Ne(el(j,2),2),
23                             Xloc, Gp(Gpt), Nodel)
24
25                R = sqrt((Ptm(i,1) - Xloc(1))*2 + (Ptm(i,2) - Xloc(2))*2)
26                DR1 = (Ptm(i,1) - Xloc(1)) / R
27                DR2 = (Ptm(i,2) - Xloc(2)) / R
28
29                SH = SH - (1. / R) * (DR1 * VNorm(1) + DR2 * VNorm(2)) *
30                           W(Gpt) * JACOB
31            end do
32
33            H(i,j) = SH
34        else
35            H(i,j) = pi
36        end if
37    end do
38 end do
39

```

Código 1: Cálculo de la matriz H

5.2. Cálculo de la matriz G . A continuación se muestra el código correspondiente a la matriz G , que es la matriz de coeficientes del sistema asociado a (4.5) donde ya se incorporaron las condiciones de contorno. Este fue elaborado en el lenguaje de programación Fortran.

```

1  !-----
2  !Calculo de la matriz G
3  !-----
4
5  do i = 1, Nelem
6      JACOB = sqrt((Ne(el(i,1),1) - Ne(el(i,2),1))*2 +
7                 (Ne(el(i,1),2) - Ne(el(i,2),2))*2) / 2.
8
9      do j = 1, Nelem
10         if (i .ne. j) then
11             call gauss_points(NpG, Gp, W)
12             SG = 0.
13
14             do Gpt = 1, NpG
15                 call cambiocor(Ne(el(j,1),1), Ne(el(j,2),1),
16                              Ne(el(j,1),2), Ne(el(j,2),2),
17                              Xloc, Gp(Gpt), Nodel)
18
19                 R = sqrt((Ptm(i,1) - Xloc(1))*2 + (Ptm(i,2) - Xloc(2))*2)
20                 SG = SG + 2*pi*u(R, nu, pi) * W(Gpt) * JACOB
21
22             G(i,j) = SG
23         end if
24     end do
25 end do

```

```

24     end do
25 end do
26
27 do i = 1, Nelem
28     long = sqrt((Ne(el(i,1),1) - Ne(el(i,2),1))**2 +
29               (Ne(el(i,1),2) - Ne(el(i,2),2))**2)
30     G(i,i) = (long) * (log(1. / (long / 2.)) + 1.)
31 end do

```

Código 2: Cálculo de la matriz G

Una vez obtenidas las matrices H y G , estos se utilizan para generar el archivo *post.msh* para ser leído por el software de simulación **GiD**. Este archivo, contendrá los datos de las deformaciones de la cáscara correspondientes a los nodos.

5.3. Archivo para ser leído en GiD. A continuación se muestra el código en el lenguaje de programación **Fortran** para generar el archivo *post.msh* para ser leído por el software de simulación **GiD**. Una vez conocido este archivo se podrán hacer la simulaciones de las deformaciones.

```

1  !-----
2  !Se genera el archivo para ser leído por GiD
3  !-----
4  open(unit=10,file='Resultados.post.msh',status='unknown')
5  write(10,*) 'MESH "ExtraMesh" dimension 2 ElemType Linear Nnode 2'
6  write(10,*) 'coordinates'
7  open(unit=11,file='comparar.post.msh',status='unknown')
8  write(11,*) 'MESH "ExtraMesh" dimension 2 ElemType Linear Nnode 2'
9  write(11,*) 'coordinates'
10
11 do i=1,Nelem
12     write(11,*) i, Ne(i,1), Ne(i,2), ' 1'
13 end do
14
15 j=0
16 do Nel=1,Nelem
17     do nd=1,2
18         j=j+1
19         write(10,'(I10,2F20.8)') j, (Ne(el(Nel,nd),i),i=1,2)
20     end do
21 end do
22 write(10,*) 'end coordinates'
23 write(11,*) 'end coordinates'
24
25 write(10,*) 'elements'
26 write(11,*) 'elements'
27
28 do i=1,Nelem
29     write(11,*) i, el(i,1), el(i,2), ' 1'
30 end do
31
32 DO Nel=1,Nelem
33     WRITE(10,'(I10,25I10)') Nel, ((Nel-1)*2+i,i=1,2),1
34 END DO
35
36 write(10,*) 'end elements'
37 write(11,*) 'end elements'
38 close(10)
39 close(11)
40 50 format(i5,2f14.8)
41 40 format(i3,' ',i3,' ',i3,a)

```

Código 3: Exportación del archivo *post.msh* para GiD

Para realizar las simulaciones, consideremos una cáscara con curvatura seccional $k = 0$. El tipo de material es Aluminio (material elástico, isotrópico y homogéneo), con módulo de Young $E = 69$ GPa y radio de Poisson $\mu = 0.30$. La placa considerada es cuadrada de lado 1 m, con espesor $h = 2.192$ mm

y cargada con una fuerza puntual de magnitud $F = 100$ N actuando en el centro de masa de la cáscara. Además, se considera que la placa está empotrada en sus cuatro lados. Los elementos finitos que se emplean son cuadrangulares Q_4 , con un enmallado estructural de 20×20 elementos, es decir, 400 elementos y 441 nodos.

Utilizando el archivo *post.msh* en [GiD](#) se genera la malla indicada en la Figura 5.1. En ella se indican los 441 nodos y los 400 elementos finitos que son considerados cuadrangulares.

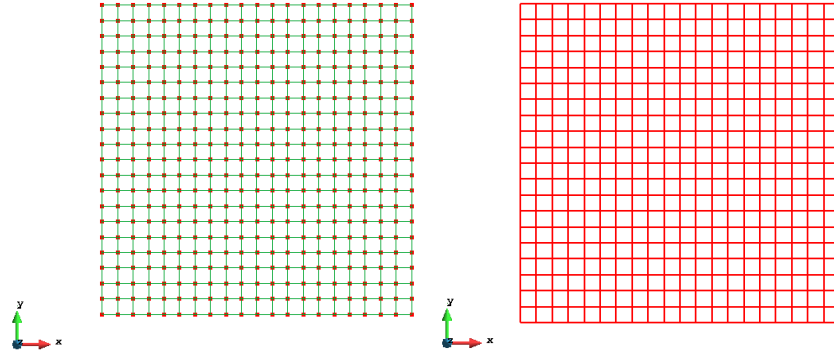


Figura 5.1: Lado izquierdo: Malla de 441 nodos. Lado derecho: Elementos finitos cuadrangulares.

Las deformaciones de la cáscara fueron obtenidas usando el lenguaje de programación [Fortran](#). Algunos valores de las deformaciones, elegidos de manera aleatoria, se muestran en la Tabla 5.1. En ella se observa que los desplazamientos ocurren en la dirección del eje Z , siendo el desplazamiento máximo 15.0189 mm. Estos desplazamientos fueron generados por una carga puntual de magnitud $F = 100$ N actuando en el centro de masa de la cáscara.

Nodos	Desplazamiento en X	Desplazamiento en Y	Desplazamiento en Z
1	00000	00000	00000
3	00000	00000	00000
4	00000	00000	-8.05668 e - 002
5	00000	00000	00000
173	00000	00000	-1.50189 e + 000
423	00000	00000	-1.00710 e + 000
424	00000	00000	-5.47007 e - 001
437	00000	00000	-8.05668 e - 002
438	00000	00000	00000
439	00000	00000	00000
440	00000	00000	00000
441	00000	00000	00000

Tabla 5.1: Resultados de los desplazamiento en la deformación de la cáscara .

Las simulaciones de las deformaciones generadas para la cáscara de Naghdi generadas por [GiD](#), se muestran en la figura 5.2. En las dos imágenes capturadas se evidencia geoméricamente las deformaciones que sufre la cáscara.

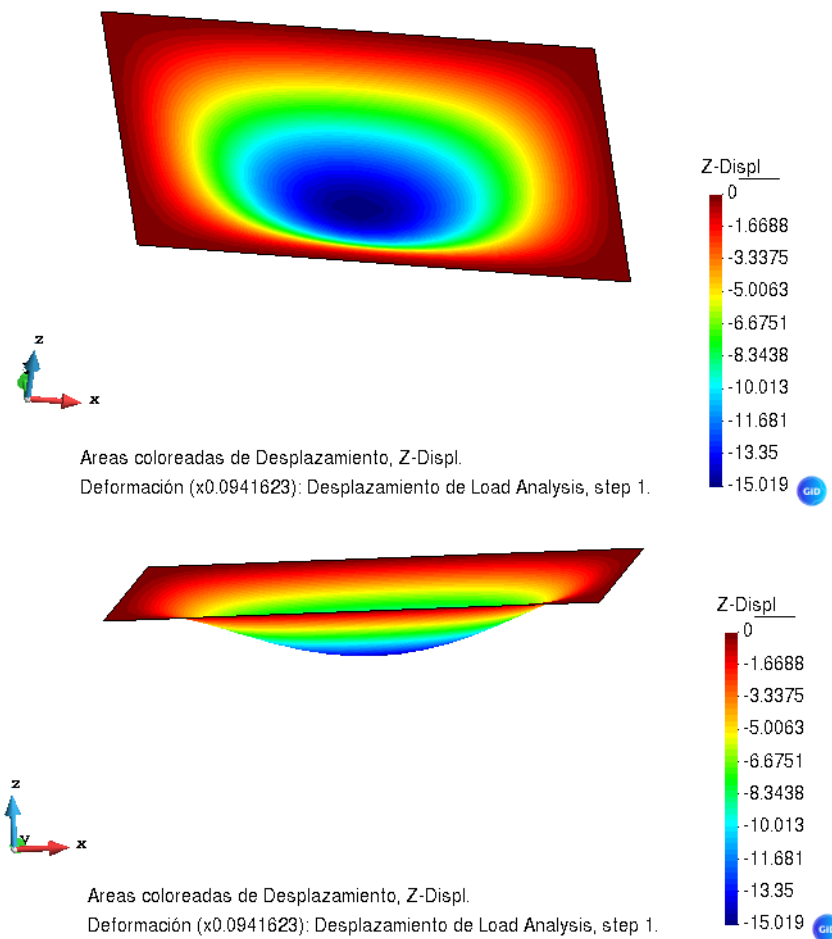


Figura 5.2: Deformación de la cáscara.

En la figura 5.3 se observan las líneas de contorno para la cáscara. En ella se puede visualizar que no hay mucha separación entre cada línea de contorno; ello es así porque las deformaciones de la cáscara son *suaves*. Y eso se puede observar de manera visual en las figuras 5.2 y 5.3.

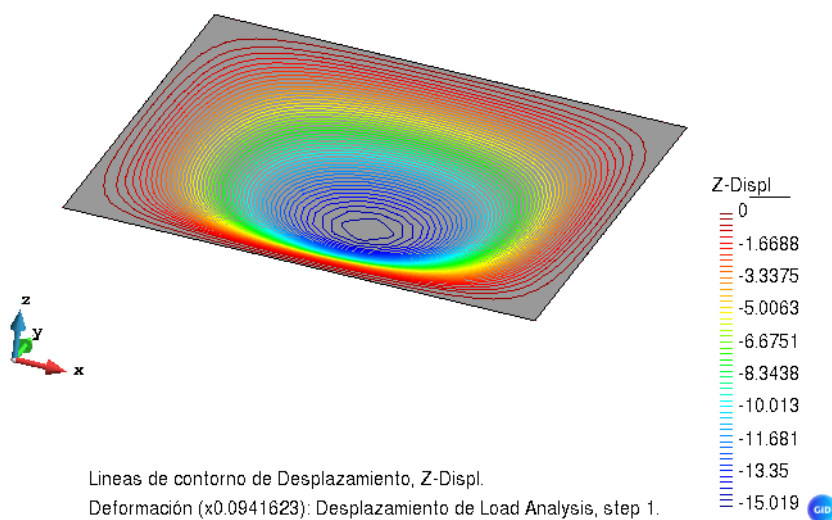


Figura 5.3: Líneas de contorno.

Además, de la figura 5.3 se puede observar que las deformaciones están siendo *controladas*. Eso se

debe a que la energía asociada al modelo de deformación esta siendo disipada. Para más detalles sobre la disipación de la energía y controlabilidad de las deformaciones revisar [10], en el cual se enuncia y prueba un resultado de controlabilidad para la cáscara de Naghdi dada por (3.3) con disipación localizada en el interior.

Para el caso del modelo de Koiter dado en [2], se procede de manera similar a lo trabajado para el modelo de Naghdi. Primero se realiza la formulación variacional para el modelo de Koiter, se mencionan resultados para establecer la existencia y unicidad de la formulación variacional asociado al modelo de Koiter, los cuales ya fueron probados por Yao [2]. Segundo, se utilizan las ideas de Ciarlet [11] para obtener la forma discretizada de la formulación variacional asociada al modelo de Koiter. Tercero, se utiliza el lenguaje de programación Fortran para elaborar códigos como los elaborados en las secciones 5.1, 5.2 y 5.3. Por último, con el archivo *post.msh* generamos las simulaciones en GiD para el caso del modelo de Koiter, obteniéndose la malla con los nodos, como la imagen 5.1, e imágenes similares a las figuras 5.2 y 5.3.

6. Conclusiones. Se presentó la formulación variacional para el modelo de Naghdi y se indicó la forma discreta asociada a la formulación variacional, indicándose las proyecciones del espacio de la formulación variacional al espacio de elementos finitos. Luego, utilizando la forma discreta del problema variacional asociado al modelo de Naghdi se describió y simuló las deformaciones de una cáscara de Naghdi con curvatura seccional $k = 0$, mostrándose las deformaciones originadas por una carga actuando en el centro de la cáscara rectangular. Para ello, se utilizó el lenguaje de programación Fortran y el software de simulación GiD. Los resultados numéricos obtenidos avalan los resultados obtenidos en [10], pues se indicó que las deformaciones son controladas, es decir, son suaves, ya que no hay mucha separación entre cada línea de contorno. Además, se indicó que para el modelo de Koiter se debe realizar el mismo esquema que se hizo para el modelo de Naghdi.

Contribuciones de los autores. Conceptualización, Alexis Rodríguez Carranza y Juan Carlos Ponte Bejarano; metodología, Juan Carlos Ponte Bejarano; software, José Luis Ponte Bejarano y Alexis Rodríguez Carranza; análisis formal, José Luis Ponte Bejarano. Todos los autores han leído y aceptado la versión publicada del manuscrito.

Financiamiento. Esta investigación no recibió financiación externa.

Conflictos de interés. Los autores declaran no tener ningún conflicto de interés

ORCID and License

José Luis Ponte Bejarano <https://orcid.org/0000-0002-4997-7950>

Juan Carlos Ponte Bejarano <https://orcid.org/0000-0002-8682-9682>

Alexis Rodriguez Carranza <https://orcid.org/0000-0002-0290-165X>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Ciarlet PG. Mathematical Elasticity, Volume III: Theory of Shells. Siam; 2000. p. 3-328. Available from: <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/1.9781611976823.fm> [cited 2025-04-13].
- [2] Yao P. Modeling and Control in Vibrational and Structural Dynamics: A Differential Geometric Approach. Hall-CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science; 2011. p. 249-286. Available from: <https://doi.org/10.1201/b11042> [cited 2025-03-01].
- [3] Shen X, Li H. The time-dependent Koiter model and its numerical computation. Applied Mathematical Modelling. 2017; 55: 131-144. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.016>.
- [4] Naghdi P. Theory of shells and Plates. In: Truesdell, C. (eds) Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. Springer, Berlin, Heidelberg; 1973. p. 425-640. Available from: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-39776-3_5 [cited 2025-04-13].
- [5] Yao P. Observability inequalities for shells. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.00CH37187). 2000; 3: 2896-2901. Available from: <https://doi.org/10.1109/CDC.2000.914251>.
- [6] Yao P. Boundary controllability for the quasilinear wave equation. Applied Mathematics and Optimization. 2010; 61: 191-233. Available from: <https://doi.org/10.1007/s00245-009-9088-7>.
- [7] Yang P, Yao P. Exact controllability of a structural acoustic system with variable coefficient and curved wall. 36th Chinese Control Conference (CCC). 2017; 8027585: 1638-1643. Available from: <https://doi.org/10.23919/ChiCC.2017.8027585>.
- [8] Ciarlet PG, Mardare C. A nonlinear shell model of Koiter's type. Comptes Rendus Mathématique. 2018; 356(2): 227-234. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.12.005>.
- [9] Tambača J, Tutek Z. A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity. Applied Mathematical Modelling. 2016; 40(23-22): 10549-10562. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.07.007>.
- [10] Rodriguez A, Martinez V, Ponte JL, Ponte JC. Exponential stability of the energy in Naghdi shell model with localized internal dissipation and internal exact controllability. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2024; 537(1):128314. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128314>.

- [11] Ciarlet PG. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Siam; 1978. p. 333-376. Available from: <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898719208> [cited 2025-06-20].
- [12] Bernadou M, Ciarlet PG, Miara B. Existence theorems for two-dimensional linear shell theories. Journal of Elasticity. 1994; 34: 111–138. Available from: <https://doi.org/10.1007/BF00041188>.