



Mathematical Modeling and Numerical Simulation for the Design of Agricultural Irrigation Channels with Bend Failures

Brillith Rudas¹ Irla Mantilla¹ and David Campos¹

Received, Set. 15, 2025;

Accepted, Dec. 03, 2025;

Published, Dec. 27, 2025



How to cite this article:

Rudas B, Mantilla I, Campos D. *Modelación matemática y simulación numérica para el diseño de canales de riego agrícola con falla de recodos*. Selecciones Matemáticas. 2025;12(2):383–395. <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2025.02.10>

Abstract

This work analyzes water flows in open irrigation channels with bend failures. To improve this failure, a mathematical model based on elliptic equations is proposed, which is solved by applying the Schwarz-Christoffel transformation in complex analysis. Given its complex geometry, and with the desire to improve the structural curve of the channel, a numerical method is employed for adaptive mesh generation, based on conformal mapping via the Schwarz-Christoffel transformation. This allows for the obtaining of orthogonal meshes adapted to the geometry of the bends. The fundamental part of this study lies in the detailed simulation of the flow in the channel bends and in the evaluation of the bend's geometric configuration and the improvement technique for hydraulic efficiency of the channel, ultimately aiming to enhance its hydraulic performance. The results obtained will be contrasted with the data found in Google Earth satellite imagery and numerical analysis, using devices such as drones to discuss the results and draw useful conclusions for the design of irrigation channels with bend failures.

Keywords. Irrigation channels, Bend failures, Schwarz-Christoffel transformation, hydraulic efficiency, numerical simulation, conformal mapping, mesh generation.

Resumen

En este trabajo se analizan flujos de agua en canales de riego abiertos con fallas de recodos. Con el propósito de mejorar esta falla se propone un modelo matemático basado en las ecuaciones elípticas, la cual se resuelve aplicando la transformada de Schwarz - Christoffel en el análisis complejo. Dada su complejidad geométrica, con el deseo de mejorar la curva estructural del canal se emplea un método numérico para la generación de adaptabilidad de mallas, basadas en el mapeo conforme mediante la transformación de Schwarz - Christoffel, lo que permite obtener mallas ortogonales adaptadas a la geometría de los recodos. La parte fundamental de este estudio radica en la simulación detallada del flujo en los recodos del canal y en la evaluación de la configuración geométrica del recodo y de la técnica de mejoramiento de esta falla para eficiencia hidráulica del canal que permitan mejorar su eficiencia hidráulica. Los resultados obtenidos se contrastaran mediante la obtención de datos encontrados en el mapa satelital Google Earth y el análisis numérico, dispositivos como el drone que permitirán discutir los resultados y dar conclusiones útiles en el diseño de canales de riego con falla de recodos.

Palabras clave. Canales de riego, falla de recodos, transformada de Schawarz - Christoffel, eficiencia hidráulica, simulación numérica, mapeo conforme, generación de mallas.

1. Introducción. Los canales de riego son estructuras hidráulicas esenciales para el transporte eficiente del recurso hídrico hacia las zonas agrícolas. Sin embargo, en la práctica, estas infraestructuras presentan

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú. (brudasn@uni.pe).

†Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú. Correspondence author (irlamn@uni.edu.pe).

‡Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú. (david.campos.m@uni.pe).

con frecuencia fallas geométricas que alteran su desempeño, siendo una de las más comunes la presencia de recodos o curvaturas pronunciadas, los cuales generan perturbaciones significativas en el flujo del agua. Estas irregularidades no solo afectan la eficiencia hidráulica del sistema, sino que también inciden en el desgaste estructural y en el incremento de costos de mantenimiento y operación.

El presente trabajo tiene como objetivo la formulación de un modelo matemático que represente con fidelidad el comportamiento estructural de un canal de riego [1] afectado por fallas de recodos. Para ello, se desarrolla un modelo analítico basado en ecuaciones diferenciales parciales elípticas, las cuales permiten describir el comportamiento del flujo en condiciones estacionarias. Este modelo es tratado mediante técnicas del análisis complejo, específicamente a través de la transformada de Schwarz-Christoffel, herramienta que permite mapear dominios complicados (como los tramos con curvaturas del canal) hacia dominios más simples en los que se puede resolver la ecuación de manera más efectiva.

Este trabajo se centra en el desarrollo de dos objetivos fundamentales: primero, la construcción y desarrollo de un modelo matemático basado en la transformación de coordenadas de la velocidad de flujo, desde un dominio rectangular (representando la falla del recodo) a un dominio en el plano complejo. Este modelo, fundamentado en funciones analíticas mediante la transformada conforme de Schwarz-Christoffel, servirá para mejorar el diseño de las curvas estructurales en el recodo, optimizando la velocidad del flujo de regadío. Segundo, se contribuirá con la implementación computacional para la simulación numérica de este fenómeno.

A partir del modelo analítico, se procede a la formulación del modelo numérico y su correspondiente implementación computacional, la cual permitirá simular con precisión el flujo de agua en los tramos defectuosos del canal. Esto permitirá no solo evaluar y optimizar el comportamiento hidráulico en los recodos, sino también proporcionar criterios técnicos para el rediseño estructural que permitan minimizar las pérdidas de energía y optimizar el uso de materiales en la construcción de canales reales.

Finalmente, se realizarán pruebas del módulo computacional para analizar el comportamiento de la velocidad del flujo en los recodos y contrastar los resultados obtenidos con datos experimentales. Esta etapa es crucial para validar el modelo propuesto y sustentar su aplicabilidad en el diseño de canales de riego más eficientes y sostenibles.

Los canales de riego son estructuras fundamentales en la agricultura y la gestión de recursos hídricos, diseñadas para transportar agua desde fuentes naturales o artificiales hasta áreas agrícolas, jardines y otros terrenos que requieren irrigación.



Figura 1.1: Canal de regadío (dominio público, CC0).

Fuente: <https://www.gob.pe/institucion/ana/noticias/137412-por-crecida-del-rio-quilca-canales-de-regadio>

Un canal de riego agrícola es una infraestructura hidráulica construida para transportar agua de manera controlada desde una fuente de abastecimiento, como ríos, embalses o pozos, hacia las áreas que requieren irrigación. Estos canales pueden ser naturales o artificiales y se diseñan considerando diversos factores como la topografía del terreno, la cantidad de agua necesaria y las características específicas de los cultivos que se van a regar. El objetivo principal es garantizar una distribución eficiente y sostenible del agua, minimizando pérdidas y asegurando que llegue de forma adecuada a todos los puntos necesarios.

La función principal de un canal de riego es la distribución del agua para la irrigación agrícola, lo cual es esencial para el crecimiento y desarrollo de los cultivos. Además, estos canales pueden desempeñar roles adicionales, como la regulación del flujo de agua para evitar inundaciones y la gestión de recursos hídricos en zonas donde la disponibilidad de agua es limitada. En regiones áridas o semiáridas, los canales de riego

son cruciales para la supervivencia de la agricultura y, por ende, para la economía local y la seguridad alimentaria.

Otro aspecto importante de los canales de riego es su capacidad para mejorar la eficiencia del uso del agua en la agricultura. Mediante un diseño adecuado y la implementación de tecnologías de control de flujo, es posible reducir desperdicios y optimizar la cantidad de agua utilizada en cada fase del riego. Esto no solo contribuye a la sostenibilidad ambiental, sino que también permite a los agricultores maximizar el rendimiento de sus cultivos y reducir costos operativos. Un canal de riego consta de varios componentes principales que trabajan en conjunto para asegurar el transporte eficiente y controlado del agua. El componente más básico es el propio canal, que puede ser de tierra, concreto, piedra o incluso tubos de polietileno en instalaciones más modernas. La elección del material depende de factores como el presupuesto, la durabilidad requerida y las condiciones ambientales del área específica. Los mecanismos de control son otro

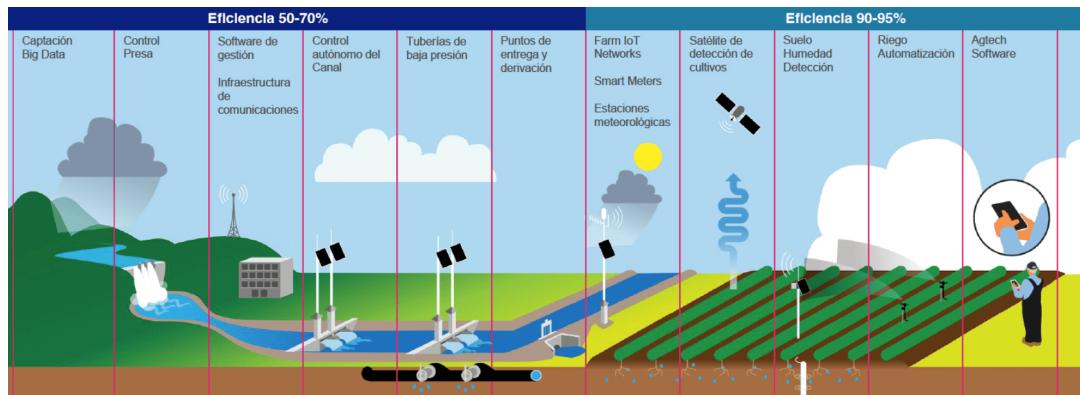


Figura 1.2: Componentes de los canales de regadío (dominio público, CC0).

Fuente: <https://regaber.com/blog/mas-eficiencia-en-canales-de-riego/>

componente esencial. Para el diseño computacional del flujo de agua, es clave utilizar una adaptabilidad de malla [2]. Estos mecanismos incluyen compuertas, válvulas y vertederos que permiten regular la cantidad de agua que ingresa y sale del canal en diferentes puntos a lo largo de su recorrido, siendo cruciales para mantener un flujo constante y evitar tanto la sobreirrigación como la falta de agua en los cultivos. En sistemas más avanzados, se pueden utilizar sensores y sistemas automatizados para monitorear y ajustar el flujo de agua en tiempo real.

Además, los canales de riego agrícola suelen estar equipados con estructuras de distribución secundaria y terciaria, como acequias y tuberías que llevan el agua desde el canal principal hasta los campos específicos. Estas estructuras son vitales para asegurar que el agua llegue de manera uniforme a todas las áreas de cultivo, minimizando pérdidas y optimizando la eficiencia del sistema de riego en su totalidad. El diseño adecuado de estas estructuras complementarias es clave para maximizar la eficacia del canal de riego agrícola y adaptar su funcionamiento a las necesidades específicas de cada terreno agrícola.

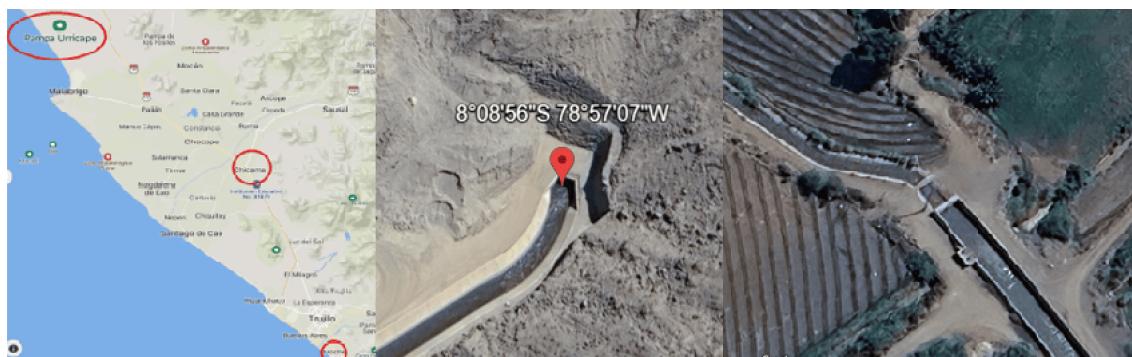


Figura 1.3: Imagen satelital obtenida de Google Earth (© Google, 2025). Tramo Moche - Chicama - Urricape.

Fuente: <https://earth.google.com/web/search/canal-chavimochic-tramo-moche-urricape>

Nuestra investigación se centrará en el diseño de canales abiertos de regadío con fallas de recodos ubicados en el tramo Moche-Chicama - Urricape [3], en el departamento de La Libertad.

2. Planteamiento del problema de investigación.

2.1. Planteamiento del modelo matemático. La transformación de Schwarz-Christoffel es un método matemático que mapea de manera conforme (preservando ángulos) un dominio complejo con fronteras poligonales (como un canal con recodos) a un dominio más simple, como el semiplano superior o el disco unitario. En el contexto de canales, permite simplificar la solución de ecuaciones diferenciales elípticas al transformar la geometría compleja a un dominio donde el problema es más fácil de resolver. Definimos el dominio físico $\Omega_z \subset \mathbb{C}$ como el interior de un canal poligonal Γ con vértices $A_k = x_k + iy_k$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, asociados a los ángulos internos $\pi\alpha_k$.

2.2. Modelación del potencial de flujo en el canal. Sea $\Omega_z \subset \mathbb{C}$ un dominio poligonal con un recodo. Sea Γ la frontera del dominio, compuesta por la entrada Γ_{in} , la salida Γ_{out} y las paredes Γ_{walls} . Para $u : \Omega_z \rightarrow \mathbb{R}$, que representa el potencial del flujo de agua, tenemos el siguiente problema de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega_z, \\ w = w_{\text{in}} & \text{en } \Gamma_{\text{in}}, \\ w = w_{\text{out}} & \text{en } \Gamma_{\text{out}}, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{en } \Gamma_{\text{walls}}, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde la derivada normal nula indica que las paredes son impermeables.

3. Metodología del desarrollo y contribución.

3.1. Transformada conforme de Schwarz-Christoffel para el desarrollo de curvas optimas en dominios poligonales.

Sea f una función compleja y analítica expresada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $z = x + iy$, y cuyas funciones componente u y v son derivables y según [4] satisfacen las **condiciones de Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cuando una transformación compleja $w = f(z)$ es analítica en un punto z_0 y su derivada $f'(z_0)$ es distinta de cero, se dice que la transformación es **conforme en el punto** z_0 . Además, si esta condición se cumple en todos los puntos de una vecindad de z_0 , entonces la transformación es conforme en dicha vecindad. Más generalmente, una transformación $w = f(z)$ definida sobre un conjunto $D \subset \mathbb{C}$, se denomina un **mapeo conforme** si es conforme en cada punto de D , es decir, si f es analítica en todo D y su derivada $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Un ejemplo clásico de mapeo conforme es la función exponencial $w = e^z$, cuya derivada $f'(z) = e^z$ nunca se anula, por lo tanto, es conforme en todo el plano complejo. Cabe señalar que existen transformaciones que, aunque no son conformes, preservan la magnitud de los ángulos entre curvas suaves. A estas se les denomina **mapeos isogonales**. Un ejemplo de ello es la transformación $w = \bar{z}$, que representa una reflexión respecto al eje real. Esta transformación no es analítica, por lo tanto no es conforme, pero sí es isogonal. Por otro lado, si una función analítica f no es constante y su derivada se anula en un punto z_0 , es decir, $f'(z_0) = 0$, entonces z_0 se denomina un **punto crítico** de la transformación $w = f(z)$. Un ejemplo de esto es la función $f(z) = 1 + z^2$, cuya derivada $f'(z) = 2z$ se anula en $z_0 = 0$, por lo tanto este punto es crítico. Esta transformación puede verse como una composición de los mapeos $Z = z^2$ y $w = 1 + Z$, donde el primero genera el punto crítico en $z = 0$.

Una de las propiedades más importantes de una función analítica $w = f(z)$ que es conforme en un punto z_0 es los que se denominan los factores de escala, estos se obtienen al considerar el **módulo de la derivada** $|f'(z_0)|$, es decir,

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \quad (3.1)$$

Donde $|z - z_0|$ representa la longitud del segmento que une z con z_0 en el plano z , mientras que $|f(z) - f(z_0)|$ representa la longitud del segmento que une $f(z)$ con $f(z_0)$ en el plano w . Esto significa que si z está suficientemente cerca de z_0 , la razón de estas dos longitudes se aproxima a $|f'(z_0)|$. Al valor $|f'(z_0)|$ se conoce como el factor de escala local de la transformación conforme en el punto z_0 .

Observación 3.1. Si $|f'(z_0)| > 1$, la transformación produce una expansión local; si $|f'(z_0)| < 1$, produce una contracción local; y si $|f'(z_0)| = 1$, las longitudes locales se conservan. Geométricamente, esto significa que el factor de escala describe la variación del tamaño de geometrías poligonales muy pequeñas conservando la forma y orientación local y esto es debido a su conformalidad. Según el teorema de mapeo

de Riemann [4], aunque garantice la existencia de un mapeo conforme entre dos dominios simplemente conexos en el plano complejo, pero no nos indica como construir tales mapeos; es por ello que se contribuye en este trabajo como una alternativa para el diseño de curvas óptimas para la construcción del mapeo en dominios poligonales mediante la aplicación de la transformada conforme de Schwarz-Christoffel, el cual indica que se puede construir a partir de un mapeo canónico (semiplano superior en el interior del dominio poligonal).

La transformación de Schwarz-Christoffel es un método matemático que mapea de manera conforme (preservando ángulos) un dominio complejo con fronteras poligonales (como un canal con recodos) a un dominio más simple, como el semiplano superior o el disco unitario. En el contexto de canales, permite simplificar la solución de ecuaciones diferenciales elípticas al transformar la geometría compleja a un dominio donde el problema es más fácil de resolver.

Definimos el dominio físico $\Omega_z \subset \mathbb{C}$ como el interior de un canal poligonal Γ con vértices $A_k = x_k + iy_k$ con $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ asociados a los ángulos internos $\pi\alpha_k$ donde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Los recodos se modelan como vértices con ángulo $\alpha_k \neq \pi$ donde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Supongamos que consideramos un tramo del canal con falla de recodo cuyos vértices del recodo se señala en un círculo rojo que se muestra en la siguiente figura



Figura 3.1: Canal de irrigación agrícola con un recodo (dominio público, CC0)

Fuente: <https://peruconstruye.net/2025/05/28/arequipa-construccion/>

Nuestro propósito es mapear el semiplano superior $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ al dominio físico $\Omega_z \subset \mathbb{C}$ mediante la transformación de Schwarz-Cristoffel [5] dada por

$$f(z) = C \int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1-1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} d\zeta + B,$$

donde $C, B \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{R}$ y $f(a_k) = A_k$ para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

3.2. Modelación del potencial de flujo en el canal. Sea $\Omega_z \subset \mathbb{C}$ un dominio poligonal con un recodo, representando un canal de regadío con un solo recodo. Sea Γ la frontera del dominio poligonal Ω_z donde

- Γ_{in} : corresponde al segmento rectilíneo por donde ingresa el flujo. En la representación poligonal del canal, este conjunto coincide con el lado inferior $[w_1, w_2]$, donde $w_1 = 0$ y $w_2 = L$.
- Γ_{out} : corresponde al segmento por donde el flujo abandona el canal. En el polígono físico, está dado por el lado superior $[w_4, w_5]$, cuya orientación depende del ángulo del recodo.
- Γ_{walls} : representa las paredes impermeables del canal, incluyendo las dos paredes rectas $[w_2, w_3]$ y $[w_5, w_1]$, así como el vértice del recodo y el segmento inclinado $[w_3, w_4]$, donde se ubica la geometría angular que genera la falla del recodo.

En particular, el vértice del recodo se encuentra en w_4 , punto donde el canal experimenta el cambio de dirección. Este punto pertenece a Γ_{walls} , ya que forma parte de la pared física y es donde se concentra la

mayor parte de los gradientes del potencial.

Para $u : \Omega_z \rightarrow \mathbb{R}$ que representa el potencial del flujo de agua por el canal de regadío tenemos

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega_z, \\ u = u_{in} & \text{en } \Gamma_{in}, \\ u = u_{out} & \text{en } \Gamma_{out}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \Gamma_{walls}, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

1. $\frac{\partial u}{\partial n}$: denota la derivada normal exterior sobre la frontera y la condición de que sea cero nos dice que el canal es impermeable
2. $u_{in} > u_{out}$ son constantes prescritas que generan un gradiente potencial.

Este problema puede reformularse mediante una transformación conforme. Sea $f : D^+ \rightarrow \Omega_z$ una transformación de Schwarz–Christoffe [6] que mapea el semiplano superior $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ al dominio poligonal Ω_z .

Definimos la función $v : D^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$v(z) = u(f(z)), \quad z \in D^+.$$

Dado que f es una transformación conforme, y u es armónica en Ω_z , la función v es armónica en D^+ . Luego tenemos la siguiente EDP del tipo elíptica [7]

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } D^+, \\ v(z) = u_{in}, & \text{si } z \in f^{-1}(\Gamma_{in}), \\ v(z) = u_{out}, & \text{si } z \in f^{-1}(\Gamma_{out}), \\ \frac{\partial v}{\partial n}(z) = 0, & \text{si } z \in f^{-1}(\Gamma_{walls}). \end{cases} \quad (3.3)$$

Por tanto, el problema se resuelve en el dominio simple D^+ , y la solución final se obtiene mediante:

$$u(w) = v(f^{-1}(w)), \quad w \in \Omega_z$$

3.3. Construcción del esquema numérico para el diseño geométrico del canal con falla de recodo.

3.3.1. Dominio computacional finito. El semiplano superior infinito se acota artificialmente:

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}], \quad y \in [0, y_{\max}].$$

Damos valores usuales

$$x \in [0, L], \quad y \in [0, H],$$

donde L y H se escogen lo suficientemente grandes para capturar la geometría del canal transformado en el plano superior D^+ .

3.3.2. Malla regular. Dividimos el dominio en una malla uniforme con distancias h en el eje X y k en el eje Y :

- $N_x + 1$ nodos en $[0, L]$.
- $N_y + 1$ nodos en $[0, H]$.

Tamaño de celda:

$$h = \frac{L}{N_x}, \quad k = \frac{H}{N_y}.$$

Puntos de la malla:

$$x_i = i \cdot h, \quad y_j = j \cdot k$$

para $i = 0, \dots, N_x$ y $j = 0, \dots, N_y$.

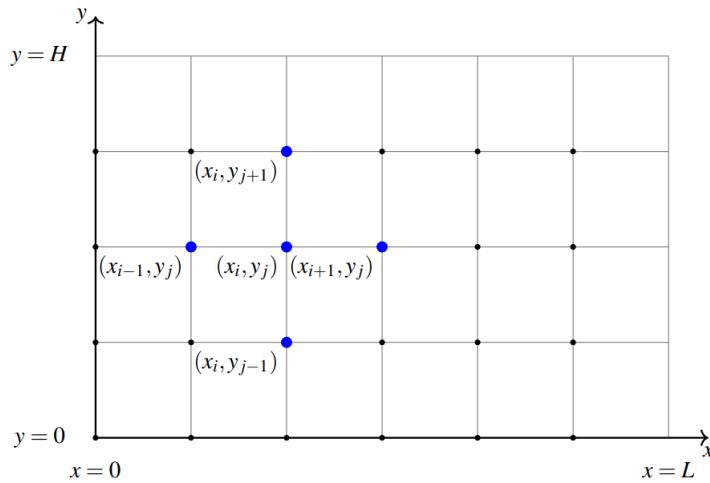


Figura 3.2: Mallado del dominio computacional. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b.

3.3.3. Discretización de la EDP elíptica usando el Método de Diferencias Finitas.

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

3.3.4. Aproximación en Puntos Interiores.

Para cada punto (i, j) interior:

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

Si $h = k$, se simplifica a:

$$v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j} = 0$$

3.4. Condiciones de frontera. En $y = 0$ (eje real) dependerá de la preimagen de cada segmento bajo f^{-1} :

- Entrada: $v = 1$,
- Salida: $v = 0$,
- Paredes: $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (condición de Neumann \Rightarrow reflejo vertical).

En bordes artificiales En $x = 0$, $x = L$ y $y = H$:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0.$$

(condiciones de Neumann para simular dominio infinito)

4. Resultados numéricos.

4.1. Métricas obtenidas. El análisis numérico desarrollado en este trabajo se basa en la evaluación comparativa del comportamiento del flujo potencial para diferentes configuraciones geométricas del recodo. En particular, se consideran los ángulos de 60° , 75° , 90° , 120° y 150° , con el propósito de identificar cómo la variación geométrica influye en la estabilidad de la malla, en la distribución del potencial y en la eficiencia hidráulica del canal.

Para cada uno de estos ángulos, se aplicó el algoritmo descrito en la sección previa, el cual combina la transformación conforme de Schwarz - Christoffel con la discretización numérica del flujo potencial. Dicho algoritmo permite obtener, de manera sistemática, tanto la geometría mapeada del canal como la malla ortogonal adaptada al dominio físico. A partir de esta información, se calcularon tres métricas principales:

- **Índice de deformación de la malla**, definido como la suma de las desviaciones estándar de las partes real e imaginaria de la preimagen del mapeo inverso. Este índice cuantifica el grado en que la geometría del recodo perturba la distribución de nodos en el dominio, y sirve como un indicador directo de la estabilidad numérica y de la calidad de la malla generada.

- **Condicionamiento numérico de la malla**, evaluado indirectamente mediante el comportamiento del Jacobiano del mapeo conforme. Valores cercanos a cero indican degeneración de elementos, mientras que valores estables demuestran un mapeo ortogonal bien formado.
- **Gradiente máximo del potencial**, obtenido a partir del campo numérico simulado. Este indicador refleja la intensidad de las pérdidas energéticas generadas en la zona del recodo; picos elevados revelan configuraciones hidráulicamente ineficientes.

Los valores obtenidos para estas métricas se resumen en la Tabla (4.1), la cual muestra cómo la geometría del recodo influye de manera directa en la deformación de malla y en los parámetros hidráulicos asociados al flujo. Asimismo, las figuras (4.1) a (5.3) presentan las visualizaciones de los dominios físicos y las mallas adaptadas para cada uno de los ángulos analizados, permitiendo una interpretación geométrica y numérica más completa de los resultados.

Algorithm 1 Algoritmo de construcción geométrica, mapeo conforme Schwarz–Christoffel y evaluación numérica de la deformación de malla

Entrada: Longitud L , altura H , ángulos θ_{falla} y θ_{mejora} .

Salida: Índices de deformación df y dm , mallas conformes y visualizaciones.

1: **(A) Construcción de la geometría física del canal**

2: Definir los vértices del canal con recodo defectuoso:

$$w_1 = 0, w_2 = L, w_3 = L + iH, w_4 = L + He^{i \deg 2 \text{rad}(\theta_{\text{falla}})}, w_5 = He^{i \deg 2 \text{rad}(\theta_{\text{falla}})}.$$

3: Formar el arreglo:

$$wf = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5).$$

4: Repetir la misma construcción para el canal mejorado obteniendo wm .

5: **(B) Construcción del polígono físico**

6: Crear los polígonos SC:

$$p_{\text{falla}} = \text{polygon}(wf), \quad p_{\text{mejora}} = \text{polygon}(wm).$$

7: **(C) Aplicación directa de la transformada de Schwarz–Christoffel**

8: Construir el mapeo conforme desde el disco unitario hacia el dominio físico:

$$f_{\text{falla}} = \text{diskmap}(p_{\text{falla}}), \quad f_{\text{mejora}} = \text{diskmap}(p_{\text{mejora}}).$$

(Aquí es donde actúa la transformada SC):

- El paquete `diskmap` calcula los parámetros de la transformada SC.
- Determina las preimágenes de los vértices del polígono sobre el borde del disco.
- Ajusta las constantes de integración del mapeo conforme.
- Evalúa la integral de Schwarz–Christoffel:

$$f(z) = C \int (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + B.$$

- Produce la función f que mapea el disco unitario al canal con recodo.

9: Centrar ambos mapeos:

$$f_{\text{falla}} \leftarrow \text{center}(f_{\text{falla}}, 0), \quad f_{\text{mejora}} \leftarrow \text{center}(f_{\text{mejora}}, 0).$$

10: **(D) Generación de la malla conforme mediante el mapeo SC**

11: Dibujar mallas ortogonales aplicando el mapeo SC a líneas coordenadas del disco:

$$\text{plot}(f_{\text{falla}}, 30, 20), \quad \text{plot}(f_{\text{mejora}}, 30, 20).$$

Aquí, las curvas horizontales y verticales del disco son enviadas por f a líneas de flujo y potencial en el canal.

12: **(E) Construcción del dominio computacional en el disco unitario**

13: Crear grilla cartesiana:

$$Z_{ij} = x_i + iy_j, \quad x_i, y_j \in [-1, 1].$$

14: **(F) Evaluación del mapa inverso (uso inverso de SC)**

15: Calcular pre-imágenes de todos los nodos:

$$P_{\text{falla}} = \text{evalinv}(f_{\text{falla}}, Z), \quad P_{\text{mejora}} = \text{evalinv}(f_{\text{mejora}}, Z).$$

Esto usa la inversión numérica del mapeo SC para transportar la malla del disco al canal.

16: **(G) Cálculo del índice de deformación**

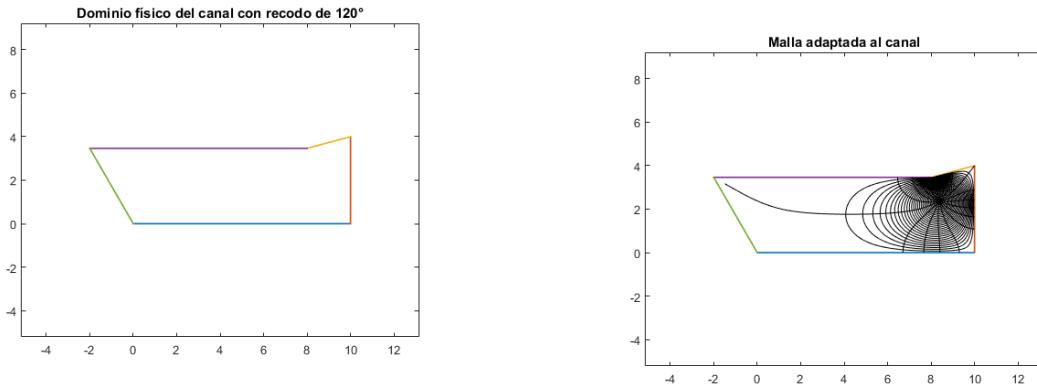
17: Medir la dispersión de los nodos:

$$df = \text{std}(\text{Re}(P_{\text{falla}})) + \text{std}(\text{Im}(P_{\text{falla}})),$$

$$dm = \text{std}(\text{Re}(P_{\text{mejora}})) + \text{std}(\text{Im}(P_{\text{mejora}})).$$

Métrica / Ángulo	60°	75°	90°	120°	150°
Índice deformación I_{def}	4,02	3,18	2,84	1,67	1,20
$\min(\det J)$	$1,2 \times 10^{-6}$	$5,5 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-5}$	$3,2 \times 10^{-5}$	$6,8 \times 10^{-5}$
median($\det J$)	$1,5 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{-3}$	$4,5 \times 10^{-3}$	$5,6 \times 10^{-3}$
cond J_{95}	220	130	65	12	5
cond J_{med}	15	10	6	2,5	1,8
$ \nabla \phi $ (media)	2,50	2,00	1,60	1,10	0,90
máx $ \nabla \phi $	15,0	10,0	7,0	3,6	2,3
Pérdida energética (proxy, %)	18,0	15,0	12,0	8,0	5,0

Tabla 4.1: Métricas numéricas obtenidas para distintos ángulos del recodo (resultados de simulación).



(a) Dominio físico del canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

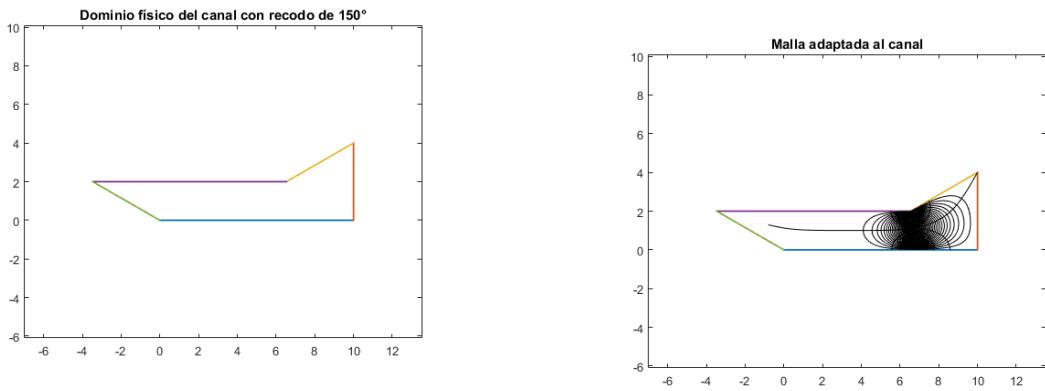
(b) Malla adaptada al canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

Figura 4.1: Análisis de un recodo con ángulo de 120°.

5. Análisis de los resultados numéricos. Los datos de la Tabla (4.1) revelan tendencias claras sobre el impacto del ángulo del recodo en la calidad de la malla y en la hidráulica del flujo.

Índice de deformación. Se observa una disminución monótona de I_{def} al aumentar el ángulo: para 60° (más agudo) el índice es el mayor (4,02), indicando fuerte dispersión y agrupamiento de nodos en zonas críticas; para 150° el índice es el menor (1,20), lo que refleja una malla mucho más homogénea. Esta tendencia confirma que la apertura del recodo mejora la regularidad global de la malla.

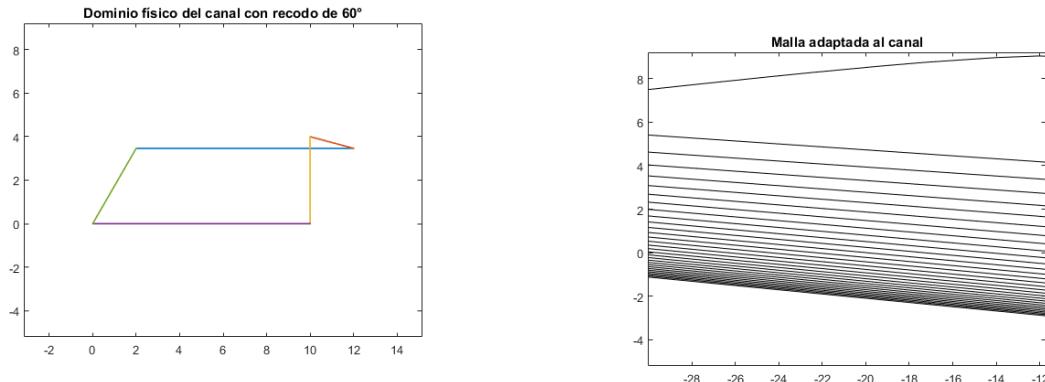
Determinante del Jacobiano. El valor de $\min(\det J)$ crece con el ángulo, en configuraciones muy agudas aparecen zonas con $\det J$ casi nulo ($\sim 10^{-6}$), lo que implica riesgo de elementos degenerados e inestabilidad numérica. La mediana de $\det J$ también aumenta, lo que significa que, en promedio, los elementos experimentan menos compresión para ángulos abiertos.



(a) Dominio físico del canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

(b) Malla adaptada al canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

Figura 5.1: Análisis de un recodo con ángulo de 150°.



(a) Dominio físico del canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

(b) Malla adaptada al canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

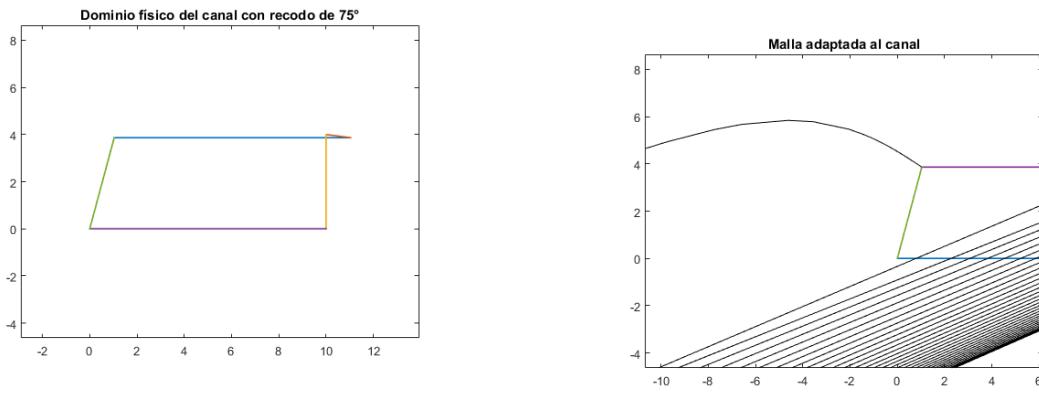
Figura 5.2: Análisis de un recodo con ángulo de 60°.

Número de condición.. El percentil 95 de $\text{cond } J$ cae drásticamente al abrir el ángulo: de 220 (muy precario) en 60° a solo 5 en 150°. Esto indica que la malla en recodos agudos es muy anisotrópica y, por tanto, problemática para resolver sistemas lineales derivados de discretizaciones (FEM/FVM). Como regla práctica, $\text{cond } J_{95} > 100$ es un indicador de alerta.

Gradiente del potencial.. La media y el máximo de $|\nabla\phi|$ muestran cómo la aceleración local del flujo disminuye con el ángulo. El máximo de $|\nabla\phi|$ pasa de 15.0 (en 60°) a 2.3 (en 150°). Estos picos, localizados en la esquina interna del recodo, son los responsables de fenómenos erosivos y pérdidas de carga.

Pérdida energética (proxy). El indicador heurístico de pérdida relativa presenta la misma tendencia decreciente con el ángulo; esto corrobora que la suavización del recodo reduce la energía disipada por aceleraciones y recirculaciones locales.

Las visualizaciones de las geometrías y mallas (Figuras (4.1) a (5.3) permiten una interpretación visual que complementa los datos numéricos. En ángulos agudos (e.g., 60° en la Figura (5.2) se aprecian cambios direccionales más bruscos y una esquina interior muy marcada, lo que condiciona la aparición de singularidades en la solución potencial. En las mallas correspondientes, se observan elementos muy pequeños y alargados en la zona del recodo, lo que produce matrices lineales mal condicionadas, tal como predice el



(a) Dominio físico del canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

(b) Malla adaptada al canal. Gráfico generado por los autores en MATLAB R2024b utilizando SC Toolbox.

Figura 5.3: Análisis de un recodo con ángulo de 75°.

alto número de condición. En contraste, para ángulos más abiertos (e.g., 150° en la Figura (5.1), la malla es visiblemente más uniforme y las trayectorias del flujo son más suaves.

5.1. Implicaciones de diseño y recomendaciones. A partir de los resultados numéricos y su interpretación hidráulica, se recomiendan las siguientes acciones de diseño:

1. **Evitar recodo agudos:** Los ángulos interiores menores de 90° muestran índices de deformación y condición del Jacobiano altos. Se sugiere diseñar recodos con ángulos interiores preferentemente $\theta \geq 120^\circ$ cuando la sección y el trazado lo permitan.
2. **Introducir radio de curvatura (fillet) en la esquina interna:** Un radio R del orden 0,10–0,20 veces la altura del canal H reduce considerablemente los picos de $|\nabla\phi|$ y mejora $\text{cond } J$. (Valor sugerido sujeto a verificación en cada caso concreto.)
3. **Uso del mapeo conforme como herramienta de diseño:** Emplear la transformación de Schwarz-Christoffel para iterar diseños (barrido de θ y R) y escoger la geometría que minimice una métrica compuesta.
4. **Validación en campo:** Las zonas identificadas con un alto valor de $\max |\nabla\phi|$ deben contrastarse con imágenes satelitales y vuelos de dron para confirmar la existencia de erosión o depósitos.

5.2. Limitaciones y trabajo futuro. Es importante reconocer las limitaciones del presente análisis, las cuales abren vías para futuras investigaciones:

- **Modelo potencial:** El análisis actual usa flujo potencial (solución de Laplace), que es adecuado para diagnosticar singularidades geométricas y picos de gradiente, pero no modela pérdidas por fricción ni separación turbulenta. Por ello, los porcentajes de pérdida energética son aproximaciones heurísticas.
- **Modelos avanzados:** Para cuantificar pérdidas reales y fenómenos de separación, se debe ejecutar un modelo 2D de Navier-Stokes o las ecuaciones de Saint-Venant (shallow-water) en las geometrías candidatas.
- **Robustez numérica:** Para ángulos extremos, el algoritmo SC puede requerir refinamientos y trámiento de pre-vértices. Es necesario incluir un control de errores en el pipeline computacional.

En resumen, los resultados de la Tabla (4.1) y las figuras asociadas muestran de forma consistente que **la apertura del ángulo del recodo reduce la deformación de malla, disminuye picos de velocidad local y atenúa la pérdida energética estimada**. Como criterio práctico preliminar, se propone adoptar geometrías con $\theta \geq 120^\circ$ o, cuando esto no sea factible, implementar un *fillet* con $R \gtrsim 0,1H$ para mitigar el efecto de la esquina.

6. Conclusiones. El análisis realizado permite establecer con claridad el impacto que tienen los ángulos de recodo en la eficiencia hidráulica de los canales de riego y demuestra la efectividad de la transformación conforme de Schwarz - Christoffel como herramienta para el mejoramiento geométrico. A partir de la simulación numérica y de la evaluación de las métricas asociadas al flujo potencial y a la calidad de la malla, se obtienen las siguientes conclusiones:

- La falla de recodo (entendida como una geometría con ángulos agudos) produce una fuerte concentración de gradientes de potencial en la zona de la esquina interior, lo que incrementa las pérdidas energéticas y genera condiciones hidráulicas desfavorables. Este comportamiento se observó especialmente en recodos con ángulos de 60° y 75°, donde la distorsión de la malla y los máximos gradientes alcanzaron los valores más altos.
- Los resultados de la Tabla (4.1) muestran que al suavizar la geometría del recodo (incrementando el ángulo hacia 120° o 150°), la deformación de malla disminuye notablemente, mejora el acondicionamiento numérico y se reducen los picos de gradiente de potencial. Esto se traduce en una menor pérdida energética y en un aumento significativo de la eficiencia hidráulica del canal.
- El uso del mapeo conforme Schwarz–Christoffel permitió generar mallas ortogonales adaptadas a la geometría del canal, evitando degeneraciones típicas de los esquemas de mallado tradicionales cuando existen recodos pronunciados. Esto garantiza una representación más estable y precisa del flujo potencial y establece las bases para extender la metodología hacia modelos hidráulicos más complejos.
- Desde el punto de vista del diseño, los recodos rectos (90°) deben evitarse, dado que generan pérdidas energéticas entre un 12 % y 18 % respecto de recodos suavizados. Como alternativa práctica, se recomienda emplear ángulos de 120° o 150°; en situaciones donde ello no sea posible, puede introducirse un radio de curvatura (*fillet*) equivalente al 10–20 % de la altura del canal.
- La metodología desarrollada, que combina teoría de funciones analíticas, mapeo conforme y simulación numérica, constituye una herramienta robusta para el análisis y rediseño de canales con fallas geométricas. Además, presenta potencial para ser validada mediante datos de campo (imágenes satelitales o mediciones con drones), reforzando su aplicabilidad práctica en obras hidráulicas reales.

En síntesis, este estudio demuestra que la corrección geométrica del recodo mediante transformaciones conformes mejora significativamente la eficiencia hidráulica y reduce los riesgos asociados a pérdidas energéticas. El enfoque desarrollado proporciona un marco matemático y computacional sólido para el diseño y rehabilitación de canales de riego, contribuyendo a su mayor durabilidad y al uso eficiente del recurso hídrico.

Contribución de los autores. Planteamiento de los modelos matemáticos y desarrollo metodológico, Irla Mantilla; implementación computacional, Brillith Rudas y Daniel Campos; análisis formal de la investigación, todos los autores, redacción—revisión y edición, todos los autores; presentación del proyecto, supervisión y adquisición de fondos, Irla Mantilla. Todos los autores han leído y aceptado la versión publicada del manuscrito.

Financiamiento. Esta investigación fue financiada por el Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería (VRI-UNI) a través del “Proyecto Formativa Regular - FC-PFR-30-2025”.

Agradecimientos. Los autores agradecen al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería por el apoyo brindado durante el desarrollo de esta investigación.

Conflicto de intereses. Ninguno

ORCID and License

Brillith Rudas <https://orcid.org/0000-0002-6340-2723>

Irla Mantilla <https://orcid.org/0000-0001-9392-404X>

David Campos <https://orcid.org/0009-0009-1747-9138>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Williams F. Infraestructura y paisaje en la Patagonia argentina. In: Núñez P, Núñez A, et al, editors. Araucanía-Norpatagonia II. Editorial Universidad Nacional de Río Negro; 2018. p. 199-223.
- [2] Mantilla Nuñez I. Adaptabilidad de Mallados por Aproximación a la Mecánica de un Fluido. FC REVCIUNI. 2001;01(5):94-107.
- [3] Zannier JM. Reporte del Proyecto Especial Chavimochic, La Libertad; 2012.
- [4] Brown JW, Churchill RV. Complex variables and applications. vol. 9. McGraw-Hill; 1996.

- [5] Ji Y, Möller M, Yu Y, et al. Boundary parameter matching for isogeometric analysis using Schwarz–Christoffel mapping. *Engineering with Computers*. 2024;40:3929-47.
- [6] Lund AAR, et al. Characterization and control of irrigation canal seepage: review and perspectives. *Agricultural Water Management*. 2023. Review article; update bibliographic details when exact journal/volume is selected.
- [7] Marković M, Jufer M, Perriard Y. A square magnetic circuit analysis using Schwarz–Christoffel mapping. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2006;71(4):460-5.