Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2025; Vol.12(1):243-260.

REVIEW

On pullback attractors in non-autonomous dynamical systems

Sobre atractores pullback en sistemas dinámicos no autónomos

Carlos Felipe Vidarte Chavez

Received, Dec. 15, 2024; *Accepted, Jun. 03, 2025;* *Published, Jul. 27, 2025*

How to cite this article:
Vidarte Chavez C. *Sobre atractores pullback en sistemas dinámicos no autónomos*. Selecciones Matemáticas. 2025;12(1):243–260. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2025.01.17

Abstract

The theory of pullback attractors constitutes an important tool to interpret the dynamics of physical, biological or engineering phenomena, as it addresses the study of the asymptotic behavior of non-autonomous dynamic systems, where differential equations explicitly depend on time. The objective of this article seeks to synthesize recent advances, present some general techniques such as the energy estimations or asymptotic compactness. This work stick out the importance of pullback attractors to model systems with variable coefficients, memory, delays or in non-cylindrical domains and also points out some challenges such as extension to stochastic systems or complex geometries.
Keywords . Dynamic system, pullback attractor, energy estimations, dissipativeness, asymptotic compactness.

Resumen

La teoría de atractores pullback constituye una herramienta importante para interpretar la dinámica de fenómenos Físicos, Biológicos o de Ingeniería, pues abordan el estudio del comportamiento asintótico de sistemas dinámicos no autónomos, donde las ecuaciones diferenciales dependen de forma explícita del tiempo. El objetivo de este artículo busca sintetizar avances recientes, presentar algunas técnicas generales como las estimaciones de energía o la compacidad asintótica. Este trabajo resalta la importancia de los atractores pullback para modelar sistemas con coeficientes variables, memoria, retardos o en dominios no cilíndricos y también señala algunos desafíos como la extensión a sistemas estocásticos o geometrías complejas.
Palabras clave. Sistema dinámico, atractor pullback, estimaciones de energía, disipatividad, compacidad asintótica.

1. Introducción. Los sistemas dinámicos no autónomos representan una generalización de modelos descritos por ecuaciones diferenciales cuya evolución dependen de forma explícita del tiempo. Esta estructura se presenta de forma natural en estudios de diversos fenómenos como físicos, biológicos y de ingeniería donde las fuerzas externas, parámetros o condiciones de frontera varían con el tiempo.

A diferencia de los sistemas dinámicos autónomos donde el comportamiento de la dinámica se centra en el atractor global invariante, los sistemas dinámicos no autónomos requieren de herramientas más avanzadas para describir su comportamiento asintótico. En ese contexto, los atractores pullback representan herramientas que permiten describir la evolución del sistema mediante

*Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. **Correspondence author** (p880300324@unitru.edu.pe).

conjuntos compactos e invariantes que atraen soluciones, cuya explicación se fundamenta con las definiciones, propiedades y condiciones establecidas por Carvalho et al. [1].

El estudio de los atractores pullback ha experimentado un desarrollo significativo en las últimas décadas, impulsado por la necesidad de analizar sistemas con coeficientes variables, términos no autónomos y retardos.

En 2013, Conti et al. [2] investigaron atractores para procesos en espacios dependientes del tiempo, aplicando los resultados a ecuaciones de onda semilineales amortiguadas con velocidad de propagación variable, demostrando que, bajo condiciones adecuadas de disipación y crecimiento no lineal, es posible construir una familia de conjuntos compactos que atraen soluciones en un sentido ”pullback”, es decir, considerando datos iniciales en tiempos cada vez más remotos.

Luego, en 2014, Conti y Pata [3] profundizaron al estudiar la estructura asintótica de los atractores pullback, mostrando su convergencia hacia el atractor global para la ecuación parabólica cuando el tiempo tiende al infinito, lo cual sentó las bases para entender cómo los atractores pullback pueden heredar propiedades de sistemas autónomos asociados, algo que se ha retomado incluso en estudios más recientes.

En 2016, Ma et al. [4] extendieron los resultados de Conti a ecuaciones de reacción-difusión no clásicas con términos de forzamiento menos regulares, demostrando la existencia de atractores pullback en espacios dinámicos definidos mediante normas dependientes del tiempo. Su enfoque combinó estimaciones de energía con técnicas de descomposición de soluciones, separando el proceso en una parte contractiva y otra compacta, lo que permitió probar la compacidad asintótica necesaria para la existencia del atractor.

Un año después, Meng y Liu [5] establecieron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de atractores pullback en ecuaciones de onda no lineales con coeficientes dependientes del tiempo. Su trabajo introdujo la llamada condición ”C_t”, la cual consiste en asegurar que la evolución del sistema, a medida que se retrocede en el tiempo, puede aproximarse arbitrariamente bien por elementos en un subespacio de dimensión finita, esto garantiza la compacidad asintótica sin requerir espacios de mayor regularidad, ampliando así la aplicabilidad de la teoría a modelos más generales.

Otro eje importante en el desarrollo de esta teoría ha sido el análisis de sistemas con memoria y retardos. En 2018, Ma et al. [6] analizaron el comportamiento asintótico de ecuaciones de onda con memoria lineal, y demostraron que el atractor pullback correspondiente converge al atractor de la ecuación parabólica límite cuando el parámetro de regularización tiende a cero.

El resultado obtenido en [6] fue complementado en [7], donde estudiaron atractores pullback para ecuaciones de difusión no clásicas asociadas con difusión no local, donde proporcionan estimaciones de energía que permiten controlar la influencia de los términos no locales sobre la dinámica asintótica.

En 2022, Lopez et al. [8] abordaron problemas en dominios no cilíndricos y con operadores de retardo constituyendo así, un paso más al extender la teoría de atractores pullback a configuraciones geométricas más generales.

En cuanto a los fluidos no newtonianos, en [9] estudiaron un modelo de Navier – Stokes - Voigt no autónomo, donde se demostró la existencia de atractores pullback en espacios de fase de dimensión infinita.

Los avances recientes han explorado la interacción entre no autonomía y estocasticidad tal como es el caso de que en 2024, Zhang et al. [10] analizaron atractores pullback débiles para la ecuación fraccionaria de Schrödinger estocástica, donde se muestra que la teoría de atractores pullback puede ser usada en espacios aleatorios donde la dependencia temporal y las perturbaciones estocásticas se combinan. Mientras que en [11] estudiaron medidas muestrales invariantes en sistemas de FitzHug - Nagumo con ruido no lineal.

Los resultados en [9] y [12] resaltan la importancia de las técnicas de descomposición y estimaciones de energía para manejar no linealidades fuertes y términos de retardo.

Por tanto, el objetivo de este artículo de revisión es integrar dichos avances y proporcionar un marco único para la existencia y estructura de atractores pullback en sistemas no autónomos. Se comentan las técnicas principales que aparecen en la literatura, desde estimaciones de energía y métodos de compacidad hasta descomposiciones de procesos y análisis en espacios dependientes del tiempo. También se indican problemas abiertos, tales como el estudio de sistemas supercríticos, la robustez de los atractores cuando se producen perturbaciones y la extensión a dominios no acotados o a dominios con geometrías complejas.

2. Conceptos preliminares. En [1, 13] se presentan definiciones, propiedades y condiciones que fundamentan la teoría de sistemas dinámicos y atractores pullback.

Definición 2.1. *Un semigrupo de operadores es una familia de aplicaciones* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre un espacio* X.

El semigrupo cumple las siguientes propiedades explicados en [13]:

i) Identidad en $t = 0$: $T(0) = \text{id}$.

ii) Propiedad de composición: $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$ $\forall t, s \geq 0$.

iii) Continuidad: $T(t) : X \to X$ es continua para cada $t \geq 0$.

Un semigrupo es una estructura característica de sistemas autónomos donde la evolución depende únicamente del tiempo transcurrido.

Definición 2.2. *Un sistema dinámico no autónomo, tal y como se estudia en [13], se describe mediante una ecuación diferencial ordinaria dependiente del tiempo:*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^d,$$

añadiendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

La solución del sistema viene expresada como $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ y es dependiente tanto del tiempo actual t como del estado inicial x_0 en el tiempo inicial t_0, a diferencia de los sistemas autónomos que sólo tienen el tiempo que ha pasado $t - t_0$.

Este sistema adecuadamente establecido, satisface:

i) Condición inicial:
$$x(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

ii) Propiedad de semigrupo con dos parámetros:
$$x(t_2, t_0, x_0) = x(t_2, t_1, x(t_1, t_0, x_0)),$$
esto cumple para todo $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

iii) Continuidad:
$$(t, t_0, x_0) \mapsto x(t, t_0, x_0),$$
se trata de funciones continuas.

Definición 2.3. *[13] Un proceso es una familia de aplicaciones que generaliza los semigrupos a contextos no autónomos, se define como:*

$$\varphi : T^2_{\geq} \times X \to X, \quad \text{donde } T^2_{\geq} := \{(t, t_0) \in T \times T : t \geq t_0\}.$$

El proceso φ cumple:

i) Condición inicial:
$$\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

ii) Propiedad de semigrupo con dos parámetros:
$$\varphi(t_2, t_0, x_0) = \varphi(t_2, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) \quad \forall t_0 \leq t_1 \leq t_2.$$

iii) Continuidad:
$$(t, t_0, x_0) \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$$
es continua.

Esto representa una familia de transformaciones $\{\varphi_{(t,t_0)}\}$ que cumplen una estructura de semigrupo en dos parámetros.

Los espacios funcionales son conjuntos de funciones que satisfacen ciertas propiedades y sobre los cuales se definen normas o topologías adecuadas. En el contexto de sistemas dinámicos desarrollado en [13], se usan espacios como: $C_b(\mathbb{R}, X)$ de funciones continuas y acotadas, espacios de Banach o de Hilbert como soporte de la evolución dinámica y espacios métricos completos (X, d_X) donde ocurren las trayectorias.

Estos espacios proporcionan el contexto topológico y analítico necesario para garantizar existencia, unicidad, continuidad y propiedades asintóticas de las soluciones de los sistemas dinámicos. Son fundamentales para formular propiedades como compacidad, atracción, o convergencia en sistemas dinámicos.

Definición 2.4. *Un atractor pullback es una familia de conjuntos $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ relacionado con un proceso $S(t, s) : X \to X$.*

El atractor pullback cumple las siguientes propiedades:

i) Compacidad: $A(t) \subset X$ es compacto para cada $t \in \mathbb{R}$.

ii) Invariancia: El atractor es invariante bajo el proceso
$$S(t, s)A(s) = A(t), \quad \forall t \geq s.$$

iii) Atracción pullback de conjuntos acotados: Para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, se tiene
$$\lim_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(S(t,s)B, A(t)) = 0.$$

iv) Minimalidad: $A(t)$ es el conjunto mínimo (con respecto a la inclusión) que satisface las tres propiedades anteriores, es decir, si $C(t)$ también cumple (i) – (iii), entonces $A(t) \subset C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Las condiciones para determinar la existencia de los atractores pullback se fundamentan en [1], las cuales son:

i) Disipatividad pullback acotada: Existe una familia de conjuntos acotados $B(t) \subset X$ que cumple $\forall D \subset X$ acotado, $\forall \tau \leq t$,
$$\lim_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(S(\tau,s)D, B(t)) = 0.$$

ii) Compacidad pullback asintótica: Para toda sucesión $s_k \to -\infty$ y $x_k \in X$ acotada, $\{S(t,s_k)x_k\}$ tiene una subsucesión convergente.

El Teorema 2.12 en [1] establece que, si el proceso $S(\cdot,\cdot)$ cumple las dos condiciones anteriores, entonces existe un atractor pullback compacto $A(\cdot)$ definido por:
$$A(t) = \omega(B(t),t) = \bigcap_{\sigma\leq t} \overline{\bigcup_{\tau\leq\sigma} S(t,\tau)B(t)}$$
y, además, $\bigcup_{s\leq t} A(s)$ es acotado para cada $t \in \mathbb{R}$.

La unicidad establecida en el Teorema 2.50 de [1], está garantizada si se cumple la minimalidad y si el atractor es uniformemente acotado, es decir, existe un conjunto acotado $B \subset X$ tal que $A(t) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Semicontinuidad y dimensión de los atractores. En el capítulo 4 de [14], los atractores en sistemas dinámicos son analizados bajo tres ópticas principales: Semicontinuidad superior, semicontinuidad inferior y dimensión de un atractor que está relacionada con la estructura de los atractores. En este capítulo se presentan las propiedades estructurales y cuantitativas de los atractores, se enuncian resultados fundamentales que describen su comportamiento y complejidad en sistemas dinámicos.

3.1. Semicontinuidad superior. La semicontinuidad superior abordado en [14] se refiere a cómo un atractor $A_\eta(t)$, que depende de un parámetro η, se aproxima al atractor $A_0(t)$ cuando $\eta \to 0$. Formalmente, se define que $\{A_\eta(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es semicontinuo superiormente hacia $\{A_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ si:
$$\limsup_{\eta\to 0} d_H(A_\eta(t), A_0(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
donde $d_H(A_\eta(t), A_0(t))$ es la distancia de Hausdorff entre los conjuntos $A_\eta(t)$ y $A_0(t)$.

La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos mide cuán lejos están uno del otro en un espacio métrico. Específicamente, cuantifica la mayor distancia que hay que recorrer desde un punto de un conjunto hasta el otro conjunto más cercano. Formalmente, si d es la métrica del espacio, la distancia de Hausdorff d_H entre dos conjuntos A y B se define como:
$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(b,a)\right\}.$$

Para un punto fijo a en A, el $\inf_{b\in B} d(a,b)$ calcula qué tan cerca está a del conjunto B, en otras palabras, busca el punto más cercano en B a a. Ahora, al variar todos los $a \in A$, $\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b)$ toma el punto en A que esté más lejos de su vecino más cercano en B. De forma simétrica, se evalúa también qué tan lejos están los puntos de B respecto a A con $\sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(b,a)$, finalmente, se toma el máximo de estos dos valores. Esto garantiza que la distancia es simétrica, es decir, $d_H(A,B) = d_H(B,A)$.

Los conjuntos $A_\eta(t)$ y $A_0(t)$ son atractores globales dependientes del tiempo asociados a procesos con parámetros distintos, por ejemplo, η podría representar una perturbación o parámetro de regularización. Entonces, la distancia de Hausdorff entre ellos describe cómo varía la estructura del atractor cuando el parámetro $\eta \to 0$.

Si se demuestra que $d_H(A_\eta(t), A_0(t)) \to 0$ cuando $\eta \to 0$, eso implica que los atractores convergen en el sentido de Hausdorff, lo cual es una forma fuerte de estabilidad estructural. Dicho resultado muestra que los atractores de los sistemas perturbados no están alejados arbitrariamente de los atractores del sistema no perturbado, existe una semicontinuidad superior en el límite.

3.2. Semicontinuidad Inferior. Por otro lado, la semicontinuidad inferior (ver [14]) se preocupa de la convergencia en un sentido contrario, es decir, garantiza que los atractores perturbados $A_\eta(t)$ convergen bastante al atractor $A_0(t)$. Esto se expresa como:

$$\liminf_{\eta\to 0} \operatorname{dist}(A_0(t), A_\eta(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La semicontinuidad inferior se encarga de garantizar que, a pesar de perturbaciones tan pequeñas, el atractor original siga siendo representativo del comportamiento dinámico del sistema.

3.3. Dimensión de los Atractores. El análisis de la dimensión dado en [14] se enfoca en cuantificar la complejidad de los atractores. Para ello se utiliza como herramientas de caracterización de la dimensión de Hausdorff o dimensión fractal para estimar el tamaño de los atractores y su estructura.

En el mencionado capítulo 4, se presentan resultados sobre la finitud de la dimensión de los atractores incluso en sistemas infinitos dimensionales. Esto implica que, aunque el espacio de fase sea complejo, el comportamiento dinámico del sistema puede ser descrito de manera finita en términos de grados de libertad.

Un resultado importante es que el sistema dinámico que tiene asociada un semigrupo o un proceso, si es asintóticamente compacto y tiene propiedades disipativas, entonces el atractor tiene dimensión finita. Esta idea queda estructurada en estimaciones de Lyapunov o siguiendo desigualdades energéticas:

$$\dim_H(A) \leq C,$$

donde C es una constante que depende de los parámetros del sistema.

De este modo, el capítulo 4 en [14] proporciona una base teórica para entender cómo se comportan los atractores bajo perturbaciones y cómo cuantificar su complejidad. Estas características son importantes para aplicaciones prácticas, porque garantizan la estabilidad y la predictibilidad en sistemas reales.

4. Sistemas con memoria y retardo. Los trabajos se centran en sistemas dinámicos no autónomos, en especial los modelos con ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) que tienen explícitamente dependencia temporal en coeficientes, términos forzantes o incluso dominios, a diferencia de los sistemas autónomos, estos modelos incorporan:

- **No linealidades dependientes del tiempo:** Términos de amortiguamiento $\varepsilon(t)$ en ecuaciones de onda como las dadas en [3, 6] o difusión no local $a(l(u))$ dado en [7, 15].
- **Retardos y memoria:** Operadores como $\varphi(t, u_t)$ en [16] o integrales de historia toman la forma
$$\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\, ds$$
discutidas en [6].
- **Dominios variables:** Problemas que su dinámica ocurre en dominios no cilíndricos como se puede ver [8].

A continuación voy a presentar algunos ejemplos destacados:

Ejemplo 4.1. *Ecuaciones de onda amortiguadas:*

$$\varepsilon(t)u_{tt} + \alpha u_t - \Delta u + f(u) = g(x),$$

donde $\varepsilon(t) \to 0$ *en [3, 5].*

Ejemplo 4.2. *Reacción-difusión no clásica:*

$$u_t - \varepsilon(t)\Delta u_t - \Delta u + \lambda u = f(u) + g(t, x),$$

con $\varepsilon(t)$ *decreciente dado en [4, 17].*

Los espacios se adaptan a la dependencia temporal y la estructura del problema:

- **Espacios dinámicos**

  Los espacios dinámicos son estructuras matemáticas que acompañan la variación temporal del sistema que se modela. No son objetos preexistentes, sino construcciones cuidadosamente adaptadas para abordar sistemas donde el entorno funcional debe moverse con el tiempo, como si el propio ”espacio” también formara parte del sistema en evolución.

  Si las ecuaciones incluyen coeficientes como $\varepsilon(t)$ que cambian con el tiempo, por ejemplo, en difusión o amortiguamiento, las normas y los dominios funcionales también deben reflejar ese cambio. Así surge el espacio dinámico con normas que varían en el tiempo como en [4, 15]:
  $$\|u\|_{H_t}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon(t)\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

que traduce una "geometría funcional"que cambia con t.

Cuando se desea obtener resultados sobre compacidad, atracción, o existencia de atractores pullback, se deben adaptar los espacios en los que se mide la regularidad y energía, haciendo uso de estas normas dependientes de t.

Para garantizar continuidad, unicidad y dependencia continua respecto del tiempo en ecuaciones con términos no autónomos, los espacios funcionales en los que se trabaja deben ser coherentes con esta evolución.

- **Espacios de fases para retardos**

  Los espacios de fase son conjuntos de todas las configuraciones posibles que puede adoptar el sistema en un instante dado. Para una ecuación ordinaria $u'(t) = f(u(t))$, el espacio de fase puede ser simplemente $\mathbb{R}^n$. Para una ecuación en derivadas parciales (EDP), será un espacio de funciones como $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, etc. Esto garantiza que, si se especifica un punto en el espacio de fase, se está dando toda la información necesaria para predecir (bajo las reglas del sistema) su evolución futura.

  Cuando un sistema no sólo depende del estado actual, sino también de su historia pasada, el espacio de fase se expande para incluir toda esa información. Así aparecen: $L^2_\mu(\mathbb{R}^+; H^1)$ en [9], que describe memorias distribuidas con peso μ y $C_H = C([-h, 0]; H)$ en [16], donde un punto del espacio de fase es una función en el intervalo pasado.

  El espacio de fase se elige para que el sistema dinámico esté bien planteado garantizando existencia, unicidad, continuidad de soluciones; se puedan usar herramientas topológicas y funcionales para garantizar compacidad, continuidad, convergencia; con ello, se formulen conceptos como atracción, invariancia y atractores pullback.

- **Espacios de Sobolev fraccionarios:**

  Los espacios de Sobolev fraccionarios, denotados típicamente como $H^\sigma(\Omega)$ para $\sigma \in \mathbb{R}$, surge de la acción de operadores espectrales, la interpolación funcional y el análisis de diferencias finitas.

  Para un operador autoadjunto y positivo como $A = -\Delta$ con condiciones de Dirichlet, se pueden definir potencias fraccionarias A^σ usando su desarrollo espectral. Así, para regularidad intermedia como en [15], se define $H^\sigma(\Omega) := D(A^{\sigma/2})$, es decir, el conjunto de funciones cuya imagen por $A^{\sigma/2}$ está en $L^2(\Omega)$.

  Utilizando interpolación real o compleja entre $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, se obtienen espacios intermedios como $H^\sigma(\Omega) = [L^2(\Omega), H^1(\Omega)]_\sigma$, lo que es útil para $0 < \sigma < 1$.

En casos particulares como Navier-Stokes-Voigt en [9] se utilizan espacios $H \times V$ para velocidad y presión, en dominios móviles [8] se utilizan espacios $L^2(\mathcal{O}_t)$ definidos sobre dominios $\mathcal{O}_t$.

Estos sistemas generan procesos no autónomos $U(t, \tau) : X_\tau \to X_t$ (semigrupos con dos parámetros), que satisfacen:

i) Propiedad de semigrupo:

$$U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau) \quad \text{para } t \geq s \geq \tau.$$

ii) Dependencia continua:

$$\lim_{(t',\tau')\to(t,\tau)} \|U(t', \tau')x - U(t, \tau)x\|_{X_t} = 0$$

como en [3, 18].

Ejemplo 4.3. *Para ecuaciones con retardo u_t, el proceso actúa en C_H:*

$$U(t, \tau)(u_\tau, \varphi) = (u(t), u_t),$$

donde $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, como en [15].

Se definen atractores pullback de la forma $A = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ como familias de conjuntos compactos que satisfacen:

i) Invarianza: $U(t, \tau)A_\tau = A_t$ para $t \geq \tau$.

ii) Atracción pullback: $\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_{X_t}(U(t, \tau)B_\tau, A_t) = 0$ para familias acotadas $\{B_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ dadas en [4, 7].

iii) Minimalidad: Es el conjunto más pequeño que atrae conjuntos acotados.

iv) Regularidad: $A_t \subset H^2(\Omega)$ para ecuaciones de orden superior [5].

v) Convergencia asintótica: Si $\varepsilon(t) \to 0$, $\Pi_t A_t$ converge al atractor de la ecuación límite parabólica en [6].

La existencia de atractores pullback en estos sistemas se determina bajo las condiciones:

i) Disipatividad uniforme:
Existencia de un conjunto absorbente $B = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ como en [4, 17] tal que:

$$U(t,\tau)B_\tau \subset B_t \quad \text{para } \tau \leq t - t_0(B).$$

Estimaciones de energía:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{H_t} + \delta\|u\|^2_{H_t} \leq C.$$

ii) Compacidad asintótica
Método de descomposición: $U = U_1 + U_2$, donde U_1 es contractivo y U_2 compacto, dado en [6].
Condición (C_t): Existencia de subespacios de dimensión finita que aproximan las soluciones como en [5].

iii) Control de no linealidades
Crecimiento subcrítico: $|f(u)| \leq C(1 + |u|^p)$ con $p < p^*$ dado en [7].
Condiciones de disipación: $\liminf\limits_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} > -\lambda_1$, donde λ_1 es el primer valor propio de $(-\Delta)$.

iv) Hipótesis sobre términos externos
$g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; H^{-1})$ con integralidad temperada en [9, 15]:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\sigma s}\|g(s)\|^2\, ds < \infty.$$

Estos sistemas presentan una estructura común: No autonomía en coeficientes o fuerzas externas, espacios adaptativos para capturar dependencia temporal y atractores pullback como herramientas esenciales para describir comportamiento asintótico, aunque sin tasas exponenciales.

Las condiciones fundamentales son disipatividad uniforme, compacidad asintótica y control de no linealidades, con técnicas que varían según la presencia de retardos, memoria o dominios variables como en [8, 18]. La ausencia de atractores exponenciales se debe a la complejidad de los términos no autónomos o la falta de condiciones de decaimiento rápido.

5. Sistemas con atractores pullback exponenciales. Los atractores pullback exponenciales son también herramientas fundamentales en el estudio de los sistemas dinámicos no autónomos, y describen el comportamiento asintótico de las soluciones con una tasa de decaimiento exponencial. Los trabajos en [19, 20, 21] presentan sistemas que abordan específicamente este tipo de atractores:

5.1. Sistema de evolución semilineal. En [19] se estudia un problema semilineal de evolución no autónoma de segundo orden, que modela el fenómeno de propagación en varillas elásticas no lineales y las ondas iono-acústicas no lineales. El modelo dado es:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \eta_\epsilon(t)\Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u), & t > s,\ x \in \Omega, \\ u = 0, & t \geq s,\ x \in \partial\Omega, \\ u(s,x) = u_0(x), \quad u_t(s,x) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Formulan el problema (5.1) considerando que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ es un dominio acotado con frontera suave, $\epsilon \in [0,1]$ es un parámetro, la función $\eta_\epsilon : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ es continua y satisface $0 < a_1 \leq \eta_\epsilon(t) \leq a_2 < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$, con $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \|\eta_\epsilon - \eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz y cumple condiciones de crecimiento y disipatividad.

El problema (5.1) de [19] se analiza en el espacio de Hilbert $H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$, que se identifica con $X^{1/2} \times X^{1/2}$, donde X^α representa la escala de potencias fraccionarias generada por el operador $\tilde{A} = I - \Delta$ en $L^2(\Omega)$. En particular se tiene: $X^{-1/2} = H^{-1}(\Omega)$, $X^{1/2} = H_0^1(\Omega)$ y $X^1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Se utilizan las siguientes inclusiones compactas:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad \text{si } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{N} > 0.$$

El problema (5.1) se reformula como un sistema de primer orden mediante el cambio de variables $z = (I - \Delta)u$ y $w = z_t$, obteniendo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + Q_\epsilon(t)\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right), \quad t > s, \\ \begin{bmatrix} z(s) \\ w(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{5.2}$$

donde los términos $Q_\epsilon(t) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \Lambda & \eta_\epsilon(t)\Lambda \end{bmatrix}$, con $\Lambda = I - (I - \Delta)^{-1}$, $F\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ f^\epsilon(z) \end{bmatrix}$, y $f^\epsilon(z) = f \circ (I - \Lambda)(z)$.

El proceso de evolución asociado es:

$$S^{(\epsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(\epsilon)}(t,s,(u_0,v_0)) \\ u_t^{(\epsilon)}(t,s,(u_0,v_0)) \end{bmatrix},$$

y se descompone como $S^{(\epsilon)}(t,s) = L^{(\epsilon)}(t,s) + U^{(\epsilon)}(t,s)$, donde $L^{(\epsilon)}(t,s)$ es la parte lineal, que decae exponencialmente $\|L^{(\epsilon)}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X^{1/2}\times X^{1/2})} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, y $U^{(\epsilon)}(t,s)$ es la parte no lineal, que satisface propiedades de suavizado.

Definen el atractor pullback exponencial $\{M_\theta^\epsilon(t) : t \in \mathbb{R}\}$ como una familia de conjuntos compactos en $X^{1/2} \times X^{1/2}$ que cumple:

i) Invarianza positiva:
$$S^{(\epsilon)}(t,s)M_\theta^\epsilon(s) \subset M_\theta^\epsilon(t), \quad \forall t \geq s.$$

ii) Dimensión fractal uniformemente acotada:
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \dim_F \left(M_\theta^\epsilon(t); X^{1/2} \times X^{1/2}\right) < \infty.$$

iii) Atracción exponencial pullback:
$$\lim_{s\to-\infty} e^{\omega s} \operatorname{dist}_{X^{1/2}\times X^{1/2}} \left(S^{(\epsilon)}(t,t-s)D, M_\theta^\epsilon(t)\right) = 0,$$
para algún $\omega > 0$ y todo conjunto acotado $D \subset X^{1/2} \times X^{1/2}$.

Además, el atractor pullback exponencial es estable bajo perturbaciones del parámetro ϵ:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}^{\text{symm}}_{X^{1/2}\times X^{1/2}} \left(M_\theta^\epsilon(t), M_\theta^0(t)\right) \leq c\|\eta_\epsilon - \eta_0\|^\zeta_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

para $0 < \zeta < 1$ y $c > 0$ independiente de ϵ.

Determinan la existencia del atractor pullback exponencial bajo las condiciones:

i) Descomposición del proceso: $S^{(\epsilon)} = U^{(\epsilon)} + L^{(\epsilon)}$, donde $U^{(\epsilon)}$ satisface una propiedad de suavizado en un espacio compactamente embebido $W = X^{1/2-\gamma/2} \times X^{1/2-\gamma/2}$
$$\|U^{(\epsilon)}(t+\widetilde{T},t)u - U^{(\epsilon)}(t+\widetilde{T},t)v\|_{X^{1/2}\times X^{1/2}} \leq \kappa\|u-v\|_W,$$
y $L^{(\epsilon)}$ es una contracción en el conjunto absorbente B
$$\left\|L^{(\epsilon)}(t+\widetilde{T},t)u - L^{(\epsilon)}(t+\widetilde{T},t)v\right\|_{X^{1/2}\times X^{1/2}} \leq \lambda\|u-v\|_{X^{1/2}\times X^{1/2}}, \quad \lambda \in (0,1).$$

ii) Existencia de un conjunto absorbente B: B absorbe uniformemente a todos los conjuntos acotados de $X^{1/2} \times X^{1/2}$.

iii) Continuidad Lipschitz del proceso:

$$\sup_{\epsilon\in[0,1]}\sup_{r\in[0,\widetilde{T}]}\left\|S^{(\epsilon)}(r+t,t)u-S^{(\epsilon)}(r+t,t)v\right\|_{X^{1/2}\times X^{1/2}}\leq L_{\widetilde{T}}\left\|u-v\right\|_{X^{1/2}\times X^{1/2}}.$$

iv) Condiciones sobre f: Crecimiento subcrítico $|f(s)|\leq c(1+|s|^{\rho})$ con $\rho<\frac{N+2}{N-2}$ y disipatividad

$$\limsup_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{s}<\lambda_1.$$

Estas condiciones garantizan la existencia del atractor pullback exponencial así como también la estabilidad de dicho atractor bajo perturbaciones del parámetro ϵ.

5.2. Sistema Oregonator no autónomo. En [20] estudian la dinámica global a largo plazo de sistemas no autónomos de Oregonator, que surgen de la reacción de Belousov - Zhabotinskii. El sistema consiste en tres ecuaciones de reacción - difusión acopladas, que modelan la dinámica de tres especies químicas u,v y w en un dominio espacial acotado $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\leq 3)$ con frontera suave $\partial\Omega$ sujetas a fuerzas externas dependientes del tiempo o fuerzas cuasi-periódicas. Las ecuaciones del sistema con fuerzas cuasi-periódicas:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}&=d_1\Delta u+a_1u+b_1v-\alpha u^2-\beta_1uv+h_1(x)g_1(\widetilde{\sigma}(t)),\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=d_2\Delta v-b_2v+c_2w-\beta_2uv+h_2(x)g_2(\widetilde{\sigma}(t)),\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=d_3\Delta w+a_3u-c_3w+h_3(x)g_3(\widetilde{\sigma}(t)),\end{cases}\tag{5.3}$$

Formulan el problema (5.3) considerando que $x\in\Omega, t>\tau$ y $\widetilde{\sigma}(t)=(xt+\sigma)\ \text{mód}\ (T^m)$ y g_i son funciones Lipschitz continuas.

Los espacios funcionales utilizados son:

- Espacio de fase: Definido por $H=[L^2(\Omega)]^3$, con norma $\|\psi\|=\left(\|u\|^2+\|v\|^2+\|w\|^2\right)^{1/2}$.
- Espacio de energía: Definido por $E=[H_0^1(\Omega)]^3$, cuya norma es expresada de la sigueinte manera $\|\psi\|_E=\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2+\|\nabla w\|^2\right)^{1/2}$.
- Espacio $D(B)=[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]^3$: Con operador lineal dado por

$$B=\begin{pmatrix}-d_1\Delta&0&0\\0&-d_2\Delta&0\\0&0&-d_3\Delta\end{pmatrix}.$$

El sistema descrito en (5.3) genera un proceso continuo $U(t,\tau)$ en H que está definido mediante

$$U(t,\tau)(u_\tau,v_\tau,w_\tau)=\Phi(t,\tau;\Phi_\tau)$$

donde $\Phi(t,\tau;\Phi_\tau)$ es la solución débil del sistema.

Para el caso cuasiperiódico, se define una familia de procesos $\{U^\sigma(t,\tau)\}_{\sigma\in T^m}$ que satisface la identidad de traslación:

$$U^\sigma(t+s,\tau+s)=U^{T(s)\sigma}(t,\tau).$$

Definen el atractor pullback exponencial $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que satisface:

i) Compacidad: $A(t)$ es compacto en H para todo t.

ii) Dimensión finita: $\sup_{t\in\mathbb{R}}\dim_f A(t)<\infty$.

iii) Invarianza positiva: $U(t,\tau)A(\tau)\subset A(t)$ para $t\geq\tau$.

iv) Atracción exponencial: Existen $a>0$ y funciones Q,T tal que:

$$\text{dist}_H(U(t,\tau)B,A(t))\leq Q(\|B\|_H)e^{-a(t-\tau)},\quad \tau+T(\|B\|_H)\leq t.$$

Las condiciones que garantizan la existencia del atractor pullback exponencial en [20] son las siguientes:

i) Existencia de un conjunto absorbente: Hay un conjunto $B_0\subset H$ que es acotado, cerrado y atrae soluciones.

ii) Compacidad asintótica: El proceso $U(t,\tau)$ es pullback D – asintóticamente, también con propiedades compactas.

iii) Propiedades de Lipschitz: El proceso satisface para $\varphi_\tau, \psi_\tau \in Y(\tau)$, donde $Y(\tau)$ es una familia de conjuntos acotados:

$$\|U(t+\tau,\tau)\varphi_\tau - U(t+\tau,\tau)\psi_\tau\| \le L(t)\|\varphi_\tau - \psi_\tau\|.$$

iv) Decaimiento exponencial en subespacios de dimensión finita: Existen $t^* > 0, \gamma \in (0,1/2)$, y un subespacio X_N tal que:

$$\|(I-P_N)(U(t^*,\tau)\varphi_\tau - U(t^*,\tau)\psi_\tau)\| \le \gamma\|\varphi_\tau - \psi_\tau\|,$$

donde P_N es una proyección acotada sobre X_N.

Estas condiciones se cumplen utilizando estimaciones de energía, desigualdades de Sobolev y el lema de Gronwall, como se detalla en las pruebas del trabajo en [20].

5.3. Sistema en dominios no cilíndricos. En [21] estudian el comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales (2D-Navier-Stokes, NS) en dominios no cilíndricos (dominios que varían en el tiempo). El sistema se describe mediante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = f(t), & \text{en } \bigcup O_t \times \{t\}, \quad t \in (\tau,+\infty), \\ \text{div } u = 0, & \text{en } \bigcup O_t \times \{t\}, \quad t \in (\tau,+\infty), \\ u = 0, & \text{en } \bigcup \partial O_t \times \{t\}, \quad t \in (\tau,+\infty), \\ u(\tau) = u_\tau, & \text{en } O_\tau. \end{cases} \tag{5.4}$$

Formulan el problema (5.4) considerando que $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ es el campo de velocidad, $\pi(x,t)$ es la presión, $f(x,t)$ representa una fuerza externa no autónoma, $\{\mathcal{O}_t \subset \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ es una familia de dominios acotados que varían en el tiempo.

Se definen los espacios funcionales para cada instante $t \in \mathbb{R}$:

- Espacio de funciones de prueba: $V_t := \{\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_t)^2 : \text{div}\,\varphi = 0\}$.
- Espacios de Sobolev: Donde H_t es la clausura de V_t en la norma $L^2(\mathcal{O}_t)^2$ y V_t que es la clausura de V_t en la norma $W^{1,2}(\mathcal{O}_t)^2$ cuyas normas asociadas son

$$|u|_t = \|u\|_{L^2(\mathcal{O}_t)^2} \quad \text{y} \quad \|u\|_{1,t} = \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{O}_t)^2}.$$

- Espacios de Bochner: $L^p(\tau,T;X_t)$ para intervalos de tiempo $[\tau,T]$ donde $X_t \in \{H_t, V_t, V_t^*\}$.

El sistema dinámico asociado a (NS) se define mediante un proceso de evolución $S(t,\tau)$, que describe la solución en el tiempo t con dato inicial en τ: $S(t,\tau) : H_\tau \to H_t$ tal que

$$S(t,\tau)u_\tau = u(t;\tau,u_\tau)$$

donde $u(t;\tau,u_\tau)$ es la solución débil de (NS) con condición inicial u_τ. Este proceso presenta:

i) Propiedad de semigrupo: Con $S(t,s)\circ S(s,\tau) = S(t,\tau)$ tal que $\tau \le s \le t$.

ii) Propiedad de identidad: Con $S(\tau,\tau) = \text{Id}_{H_\tau}$.

Definen el atractor pullback exponencial para el proceso $S(t,\tau)$ como la familia de conjuntos compactos $\{M(t) \subset H_t : t \in \mathbb{R}\}$ que satisface las propiedades de:

i) Invarianza positiva:

$$S(t,\tau)M(\tau) \subset M(t) \quad \text{con} \quad \tau \le t.$$

ii) Dimensión fractal uniformemente acotada:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d_f^{H_t}(M(t)) < \infty.$$

iii) Atracción exponencial: Donde existe $\beta > 0$ tal que para todo $\hat{D} \in \mathcal{D}_\lambda^H$ (universo temperado):

$$\lim_{s\to+\infty} e^{\beta s}\, \text{dist}_{H_t}(S(t,t-s)D(t-s), M(t)) = 0.$$

Las condiciones para garantizar la existencia del atractor pullback exponencial son:

i) Hipótesis del dominio: (H1) - (H3) con regularidad del dominio $\mathcal{O}_t$ y comportamiento acotado de

$$\Omega_t = \bigcup_{s \leq t} \mathcal{O}_s.$$

ii) Hipótesis de la fuerza externa: (H4) donde la fuerza externa $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H_t)$ y cumple con satisfacer

$$M_f(t) := \sup_{s \leq t} \int_{s-1}^{s} |f(r)|_r^2 \, dr < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Propiedad de suavizado: El proceso $S(t,\tau)$ satisface estimaciones de regularidad que permiten controlar las normas V_t y $D_t(A)$ (dominio del operador de Stokes).

iv) Control de la dimensión fractal: Se aplica la compacidad de la inmersión $V_t \hookrightarrow H_t$ y estimaciones del número de bolas necesarias para cubrir conjuntos en H_t.

v) Condiciones de disipación: Existencia de un conjunto absorbente pullback

$$\hat{B}_0 = \{B_{H_t}[0, R(t)]\}$$

en el universo temperado $\mathcal{D}_\lambda^H$.

Dadas estas condiciones permiten aplicar el Teorema 2.16 de [21], garantizando así la existencia del atractor pullback exponencial para el sistema (NS) en dominios no cilíndricos.

5.4. Otras perspectivas. Los trabajos en [22, 23, 24, 25] enriquecen el marco teórico de los atractores pullback en sistemas de tipo no autónomo al abordar:

5.4.1. Geometrías complejas. En el trabajo [22] estudian la dinámica asintótica de una ecuación de calor semilineal sobre dominios con variación temporal, extendiendo la teoría de atractores pullback a problemas no autónomos en geometrías no cilíndricas. Es un trabajo importante porque permite modelizar fenómenos físicos a partir de la evolución de un dominio espacial cambiante, como pueden ser los problemas de interfase o los problemas de los materiales con frontera móvil.

Sea O un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera ∂O de clase C^2, se considera una función vectorial $r \in C^1(\overline{O} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $r(\cdot, t) : O \to O_t$ es un difeomorfismo de clase C^2. El problema con valor inicial y de frontera para la ecuación parabólica semilinear está dada por:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(u) = f(t), & \text{en } Q_t, \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma_t, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), & x \in O_\tau. \end{cases} \tag{5.5}$$

Formulan el problema (5.5) considerando que $Q_t := \bigcup_{t \in (\tau,\infty)} O_t \times \{t\}$ es el dominio espacio-temporal, $\Sigma_t := \bigcup_{t \in (\tau,\infty)} \partial O_t \times \{t\}$ es la frontera lateral, $f : Q_t \to \mathbb{R}$ es el término forzante y $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisface las siguientes condiciones de crecimiento y Lipschitz:

$$-\beta + \alpha_1 |s|^p \leq g(s)s \leq \beta + \alpha_2 |s|^p, \quad g'(s) \geq -l \quad \forall s \in \mathbb{R},$$
$$|g(u) - g(v)| \leq c_0(1 + |u|^{p-2} + |v|^{p-2})|u - v| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Los espacios funcionales relevantes para el estudio del problema (5.5) son:

- Espacios de Lebesgue y Sobolev: Donde $L^2(O_t)$ es el espacio de funciones cuadradas integrables en O_t, $H_0^1(O_t)$ es el espacio de Sobolev de funciones con derivadas parciales en $L^2(O_t)$ y traza nula en ∂O_t, $H^{-1}(O_t)$ es el espacio dual de $H_0^1(O_t)$.
- Espacios de funciones dependientes del tiempo: Como $L^q(\tau, T; X_t)$ que es el espacio de funciones u tales que $u(t) \in X_t$ para casi todo $t \in (\tau, T)$ y $|u(\cdot)|_{X_t} \in L^q(\tau, T)$.

El sistema genera un proceso no autónomo $U(t,\tau) : L^2(O_\tau) \to L^2(O_t)$ que está definido como

$$U(t,\tau)u_\tau := u(t; \tau, u_\tau) = u(t),$$

donde $u(t)$ es la solución débil o fuerte del problema (5.5). Este proceso describe la evolución de la solución desde el tiempo τ hasta el tiempo t.

Consideran el atractor pullback $\widehat{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ como una familia de conjuntos compactos en $L^2(O_t)$ que atrae las soluciones en el sentido pullback. Sus propiedades incluyen:

i) Invarianza:
$$U(t,\tau)A(\tau) = A(t) \quad \text{para todo } t \geq \tau.$$

ii) Atracción: $\text{dist}_{L^2(O_t)}(U(t,\tau)D(\tau), A(t)) \to 0$ cuando $\tau \to -\infty$, para cualquier familia acotada
$$\widehat{D} = \{D(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}.$$

iii) Regularidad adicional: Bajo ciertas condiciones, el atractor pullback también atrae en la topología de H^1
$$\text{dist}_{H_0^1(O_t)}(U(t,\tau)D(\tau), A(t)) \to 0 \quad \text{cuando } \tau \to -\infty.$$

Determinan la existencia del atractor pullback mediante:

i) Regularidad del dominio y del difeomorfismo: ∂O es de clase C^2, $r \in C^1(\overline{O} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$, $r(\cdot,t)$ es un difeomorfismo de clase C^2 y la función inversa $\bar{r} = r^{-1}$ satisface $\bar{r} \in C^{2,1}(\overline{Q}_{\tau,T}; \mathbb{R}^N)$.

ii) Condiciones sobre el término no lineal: g satisface las condiciones de crecimiento y Lipschitz dadas en (1.4) y (1.5) de [22].

iii) Condiciones sobre el término forzante: $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; H^{-1}(O_t))$, para algún $\lambda > 0$ se cumple
$$\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s} \|f(s)\|^2_{H^{-1}(O_s)}\, ds < \infty$$
para $t \in \mathbb{R}$, adicionalmente $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^2(O_t))$ para garantizar continuidad en H^1.

iv) Acotación del difeomorfismo:
$$r \in C_b(\overline{O} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N).$$

Estas condiciones garantizan la existencia de soluciones únicas, junto a la continuidad respecto de los datos iniciales en H^1, y la existencia de un atractor pullback que atrae soluciones en los espacios L^2 y H^1.

El trabajo [22] muestra cómo abordar dominios no cilíndricos en sistemas no autónomos, aplicando métodos de estimación de energía y compacidad en espacios dinámicos. Este enfoque puede extenderse a otros problemas con geometría variable.

5.4.2. Estabilidad bajo perturbaciones. En el trabajo [23] estudian la semicontinuidad superior uniforme de atractores pullback, que es crucial para entender la robustez de los atractores frente a perturbaciones en el retardo. El modelo principal es una ecuación de reacción-difusión con retardo no autónoma, definida en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera suave $\partial\Omega$:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h(u(t-\rho),x) + g(t,x), & x \in \Omega, \quad t > \tau, \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > \tau, \\ u(\tau+\sigma) = \varphi(\sigma), & \sigma \in [-\rho,0], \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Formulan el problema (5.6) considerando que $u(t,x)$ es la función de estado, $\rho \geq 0$ es el parámetro de retardo, $h : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ es el término no lineal con retardo que satisface $h(0,\cdot) = 0$ y la condición de Lipschitz $|h(s_1,x) - h(s_2,x)| \leq L_h|s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},\, x \in \Omega$ con $L_h \in \left(0, \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda/\theta\rho}\right)$, donde λ es la constante de Poincaré. La función $g : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ es un término forzante no autónomo que pertenece al espacio $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, con $H = L^2(\Omega)$, y satisface $\int_{-\infty}^{t} |g(s)|^2\, ds < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$. La condición inicial es $\varphi \in C([-\rho,0]; H)$.

El sistema sin retardo ($\rho = 0$) correspondiente es:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h(u,x) + g(t,x), & x \in \Omega, \quad t > \tau, \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > \tau, \\ u(\tau) = \varphi^0, & \tau \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Para el sistema con retardo (5.6), se define el proceso $S_\rho(t,\tau)$ en el espacio $C_H^\rho = C([-\rho,0]; H)$ como
$$S_\rho(t,\tau)\varphi = u_t(\cdot,\tau,\varphi),$$
donde $u_t(\sigma) = u(t+\sigma,\tau,\varphi)$ para $\sigma \in [-\rho,0]$, y u es la solución del sistema con retardo.

El proceso satisface:

i) $S_\rho(t,t) = I$ (identidad).

ii) $S_\rho(t,s) = S_\rho(t,\tau)S_\rho(\tau,s)$ para $t \geq \tau \geq s$.

iii) $(t,s,\varphi) \mapsto S_\rho(t,s)\varphi$ es continuo.

Para el sistema sin retardo (5.7), el proceso $S_0(t,\tau)$ actúa directamente en H:

$$S_0(t,\tau)\varphi^0 = u(t,\tau,\varphi^0),$$

donde u es la solución del sistema sin retardo.

Definen el atractor pullback $\mathcal{A}_\rho = \{A_\rho(t) : t \in \mathbb{R}\}$ para el sistema con retardo como una familia de conjuntos compactos, invariantes y también pullback absorbentes en C_H^ρ. Análogamente, $\mathcal{A}_0 = \{A_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es el atractor pullback para el sistema sin retardo en H bajo las condiciones:

i) Absorbencia Pullback
Existe un conjunto $\mathcal{K}_\rho = \{K_\rho(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que:

$$K_\rho(t) = \left\{\varphi \in C_H^\rho :\leq ce^{\lambda(\rho+1)}\left(1 + \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\lambda}{4}r}\|g(r+t)\|^2\, dr\right)\right\},$$

que absorbe conjuntos acotados en $\mathcal{D}_\rho$, donde:

$$\mathcal{D}_\rho = \left\{D_\rho : \lim_{\tau\to+\infty} e^{-\frac{\lambda}{4}\tau}\|D_\rho(t-\tau)\|^2_{C_H^\rho} = 0\right\}.$$

ii) Compacidad Asintótica Pullback
Equicontinuidad: La familia $\{S_\rho(t,t-\tau_n)\varphi_n\}$ es equicontinua en C_H^ρ.
Compacidad Puntual: Para cada $\sigma \in [-\rho,0]$, $\{(S_\rho(t,t-\tau_n)\varphi_n)(\sigma)\}$ es relativamente compacto en H.

iii) Invarianza: $A_\rho(t) = S_\rho(t,\tau)A_\rho(\tau)$ para todo $t \geq \tau$.

También se establece las condiciones fundamentales para la Continuidad Uniforme Superior Semicontinua:

i) Convergencia Multi-índice
Para sucesiones $\rho_n \to 0$, $t_n \to t_0$, y $\sup_{\sigma\in[-\rho_n,0]} \|\varphi_n(\sigma) - \varphi_0\|_X \to 0$, se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in[-\rho_n,0]} \|(S_{\rho_n}(t_n,t_n-\tau)\varphi_n)(\sigma) - S_0(t_0,t_0-\tau)\varphi_0\|_X = 0.$$

ii) Convergencia Puntual Local
Para cada sucesión $\rho_n \to 0$ y $x_n \in \bigcup_{|\xi|\leq 1} A_{\rho_n}(t+\xi)$, existe $x_0 \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\sigma\in[-\rho_n,0]} \|x_n(\sigma) - x_0\|_X = 0.$$

iii) Controlabilidad Local
Existe un conjunto $\mathcal{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}_0$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\bigcup_{|\xi|\leq 1} A_{\rho_n}(t+\xi)\right\|_{C_X^{\rho_n}} \leq \|B(t)\|_X.$$

Finalmente demuestran que:

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{t\in I} \operatorname{dist}_\rho(A_\rho(t), A_0(t)) = 0,$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado y dist_ρ es una métrica adecuada.

Para el sistema de reacción-difusión con retardo (5.6), se verifican las tres condiciones anteriores mediante estimaciones energéticas y propiedades de compacidad. Por ejemplo, la convergencia multi-índice se demuestra usando la desigualdad de Gronwall y la continuidad de las soluciones respecto al retardo. La controlabilidad local se deduce de las estimaciones del conjunto absorbente K_ρ.

El trabajo [23] generaliza resultados previos sobre continuidad de atractores pullback, incorporando dependencia temporal uniforme y retardo. Las condiciones técnicas garantizan que el atractor pullback del sistema con retardo converja al del sistema sin retardo cuando $\rho \to 0$, de manera uniforme en intervalos de tiempo acotados. Este trabajo brinda herramientas mediante las cuales es posible analizar la estabilidad de los atractores pullback bajo perturbaciones, un tema sumamente importante dentro de la teoría de los sistemas no autónomos. Los resultados obtenidos son aplicables a los modelos biológicos y de control con retardo.

5.4.3. No linealidades no locales. En el trabajo [24] analizan el comportamiento asintótico de un modelo de difusión no clásica tridimensional tipo Ladyzhenskaya con retardo, al generalizar trabajos anteriores efectuados para fluidos no newtonianos. El trabajo presenta no linealidades no locales y memoria, relevantes para los modelos de materiales viscoelásticos.

El sistema de ecuaciones que describe el modelo es:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} S(Du) + \text{div}(u \otimes u) + \nabla \Pi = f(t, u_t) + g(t, x), & \text{en } \Omega \times (\tau, \infty), \\ \text{div } u = 0, & \text{en } \Omega \times (\tau, \infty), \\ u(x, \tau) = u_\tau(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (\tau, \infty), \\ u_t(\theta, x) = u(\tau + \theta, x) = \varphi(\theta), & \theta \in (-h, 0), \quad h > 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Formulan el problema (5.8) considerando que u es el campo de velocidades, $S(Du)$ es el tensor de tensiones no newtoniano que satisface ciertas condiciones de coercitividad y crecimiento (ver ecuaciones (3) y (4) de [24]), $f(t, u_t)$ es un término de retardo que depende del historial de u, $g(t, x)$ es una fuerza externa y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado con frontera Lipschitz.

Los espacios funcionales utilizados son:

- Espacio de funciones de prueba: $V = \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)^n : \text{div}\, \varphi = 0\}$.
- Espacios de clausura: H siendo clausura de V en la norma $L^2(\Omega)^n$ y V_p que es la clausura de V en la norma $W^{1,p}(\Omega)^n$ para $p \geq 2$.
- Espacios de funciones con retardo: Donde se tienen los términos dados por $C_H = C([-h, 0]; H)$, $C_{V_p} = C([-h, 0]; V_p)$, $L_H^p = L^p(-h, 0; H)$ y $L_{V_p}^p = L^p(-h, 0; V_p)$.
- Espacio de fase: $M_H = H \times (C_H \cap L_{V_p}^2)$, con norma $\|(\xi, \zeta)\|_{M_H} = \|\xi\|_H + \|\zeta\|_{L_{V_p}^2} + \|\zeta\|_{C_H}$.

El sistema genera un proceso $U(t, \tau) : M_H \to M_H$ dado por

$$U(t, \tau)(u_\tau, \varphi) = (u(t), u_t),$$

donde $u(t)$ es la solución débil del sistema con condición inicial (u_τ, φ).

El proceso mencionado en el parrafo anterior satisface:

i) Propiedad inicial: Con $U(\tau, \tau)(u_\tau, \varphi) = (u_\tau, \varphi)$.

ii) Propiedad de semigrupo: $U(t, \tau) = U(t, s) \circ U(s, \tau)$ para $\tau \leq s \leq t$.

Definen el atractor pullback $\mathcal{A}_D = \{A_D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ como una familia de conjuntos compactos que satisface:

i) Compacidad: $A_D(t)$ es compacto en M_H para cada t.

ii) Atracción pullback: $\lim_{\tau \to -\infty} \text{dist}_{M_H}(U(t, \tau)D(\tau), A_D(t)) = 0$, para cualquier familia $\hat{D} \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es un ü niverso"de conjuntos acotados.

iii) Invarianza: $U(t, \tau)A_D(\tau) = A_D(t)$ para $\tau \leq t$.

iv) Minimalidad: Es el conjunto más pequeño que atrae a todas las familias en $\mathcal{D}$.

Establecen las condiciones para la existencia del Atractor Pullback:

i) Hipótesis sobre f: Se tiene el supuesto (H_f) donde f es Lipschitz en C_H y que satisface

$$\|f(t, \xi) - f(t, \eta)\|_H \leq L_f \|\xi - \eta\|_{C_H},$$

y el supuesto (H_1) donde existe $\eta > 0$ tal que

$$\int_\tau^t e^{\eta s} \|f(s, u_s) - f(s, v_s)\|_H^2 \, ds \leq C_f^2 \int_{\tau - h}^t e^{\eta s} \|u(s) - v(s)\|_H^2 \, ds.$$

ii) Hipótesis sobre g: (H_g), $g \in L_{\text{loc}}^{p'}(\mathbb{R}; V_p^*)$ y satisface

$$\int_{-\infty}^t e^{\eta s} \|g(s)\|_{V_p^*}^{p'} \, ds < \infty.$$

iii) Control de parámetros: Para un valor de $n = 3$ y considerando $p \geq \frac{5}{2}$, se requiere que

$$\nu_1 c_0^2 \lambda_1 - d_1 \|u\|_{1,p}^{\frac{2p}{2p-3}} - d_2\lambda_1 - C_f - \frac{\lambda}{2} > 0$$

y para $n = 2$ con $p = 2$ se requiere que

$$\nu_1 c_0^2 \lambda_1 - \frac{\lambda_1 + \lambda}{2} - C_f - \frac{c^2\|u\|_{1,2}(1+\alpha^2\lambda_1)}{2\alpha} > 0.$$

Estas condiciones garantizan la existencia de soluciones débiles, la acotación uniforme de las soluciones y la compacidad asintótica necesaria para la existencia del atractor pullback.

El trabajo [24] muestra cómo incorporar retardos y no linealidades no locales en la teoría de atractores pullback, con aplicaciones en mecánica de fluidos complejos. Las técnicas de descomposición de soluciones son transferibles a otros sistemas disipativos.

5.4.4. Incorporación de aleatoriedad o estocasticidad. En el trabajo [25] estudian la ecuación de Cahn-Hilliard estocástica en retículos, extendiendo la teoría de atractores pullback a sistemas estocásticos no autónomos con ruido no lineal. El modelo describe transiciones de fase en aleaciones con fluctuaciones aleatorias:

$$\begin{cases} du_i(t) + [(A(Au + f(u)))_i + \lambda u_i - g_i(t, u_i)]\, dt = (ku_i + h_i(t))\, dW(t), & t > \tau, \\ u_i(\tau) = u_{\tau i}, & i \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Formulan el problema (5.9) considerando que A es un operador lineal discreto definido como $(Au)_i = 2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}$, f es una no linealidad localmente Lipschitz, $g(t, u)$ es un término no autónomo no lineal, el término $W(t)$ representa un proceso de Wiener unidimensional, $k \geq 0$ y $h(t)$ es una función determinista.

La ecuación en (5.9) modela fenómenos de transición de fase en sistemas aleatorios, como la separación de fases en aleaciones binarias, con aplicaciones en dinámica de fluidos y biología.

Los espacios utilizados son:

- Espacio de Banach: ℓ^p ($p \in [1, \infty]$) de secuencias bi-infinitas $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ siendo la norma $\|u\|_p = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i|^p\right)^{1/p}$ con $p < \infty$ y $\|u\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |u_i|$.
- Espacio de Hilbert: ℓ^2 con producto interno $(u, v) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i v_i$.
- Espacios para medidas y soluciones estadísticas: Con $V = \ell^2 \cap \ell^q$ y $H = \ell^2$, con $q > 2$ y $V^* = \ell^2 + \ell^p$ (dual de V), donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Para el sistema (5.9) se tiene en cuenta: Una transformación a sistema aleatorio tal que para $k > 0$, se introduce

$$v(t) = e^{-kz(\theta_t\omega)}\left(u(t) + k^{-1}h(t)\right)$$

donde $z(\theta_t\omega)$ viene a ser la solución estacionaria de la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck

$$dz + z\, dt = dW(t)$$

y para $k = 0$, se usa $v(t) = u(t) - z(\theta_t\omega)h(t)$.

El sistema dinámico aleatorio viene dado por

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times \ell^2 \to \ell^2$$

como $\varphi(t, \tau, \omega, u_\tau) = u(t + \tau, \tau, \theta_{-\tau}\omega, u_\tau)$ donde θ_t es un sistema métrico dinámico ergódico.

También se tiene en cuenta las propiedades de un semigrupo como continuidad donde φ es continuo en (t, u_τ) e invarianza ya que satisface la propiedad de cociclo

$$\varphi(t + s, \tau, \omega, \cdot) = \varphi(t, \tau + s, \theta_s\omega, \varphi(s, \tau, \omega, \cdot)).$$

Definen el atractor pullback aleatorio A como una familia de conjuntos compactos $\{A(\tau, \omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ que satisface:

i) Invarianza: Donde
$$\varphi(t, \tau, \omega, A(\tau, \omega)) = A(\tau + t, \theta_t\omega).$$

ii) Atracción pullback: Tal que para todo conjunto $D \in \mathcal{D}$ (universo de conjuntos aleatorios) se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}_{\ell^2}(\varphi(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)), A(\tau, \omega)) = 0;$$

iii) Medidas invariantes: Ya que el atractor soporta medidas de probabilidad invariantes $\{\mu_{\tau,\omega}\}$ que satisfacen una ecuación de tipo Liouville estocástica.

Establecen las condiciones para la existencia del atractor pullback:

i) Hipótesis estructurales sobre f: (F), f es localmente Lipschitz y además satisface

$$|f_i(u_i)| \leq \alpha_{1i}|u_i|^{q-1-\epsilon} + \alpha_{2i}, \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \ell^1;$$

$(G1)-(G3)$ g es diferenciable y satisface condiciones tanto de crecimiento como también acotamiento, esto es,

$$g_i(t,u_i)u_i \leq -\beta|u_i|^q + \psi_{1i}(t), \quad \psi_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R};\ell^1);$$

$(H1)-(H2)$, h es derivable y $h, h' \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R};\ell^2)$.

ii) Absorción y compacidad: Existe un conjunto aleatorio cerrado $K \in \mathcal{D}$ que absorbe a todos los conjuntos en $\mathcal{D}$ y el NRDS es pullback $\mathcal{D}$-asintóticamente compacto en ℓ^2.

iii) Estimaciones energéticas: Se prueban cotas uniformes para soluciones donde se utiliza técnicas de energía, así como desigualdades como Gronwall. Por ejemplo, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + \lambda\|v(t)\|^2 \leq cQ_1(t,\omega).$$

Estas condiciones garantizan la existencia del atractor pullback y su estructura fractal, así como la existencia de soluciones estadísticas muestrales.

El trabajo [25] integra estocasticidad y no autonomía, mostrando cómo adaptar la teoría de atractores pullback a sistemas con ruido. Los resultados pueden ser aplicados en modelos de materiales y en biología matemática.

Los trabajos [22, 23, 24, 25] muestran la versatilidad de los atractores pullback para modelizar sistemas complejos, consolidando un marco unificado para investigaciones futuras en el campo de la dinámica no autónoma.

6. Atractor pullback en modelos fenomenológicos. Los avances en la teoría de atractores pullback brindan una sólida base matemática para abordar problemas complejos que tienen aplicaciones en Física, Biología y otros campos.

Un sistema clásico de la relevancia de los atractores pullback es la modelización climática analizada en [26]. El clima, un sistema no autónomo y muy dinámico, se ve afectado por la variabilidad temporal y espacial de otros factores como sería la radiación solar, la presión atmosférica y la interacción entre océano - atmósfera. Es así que los atractores pullback permiten captar la variabilidad y los patrones climáticos que se presentan en función de ciertos parámetros del sistema, para entender situaciones como el cambio climático.

El trabajo en [27] expone el planteamiento global del análisis de los atractores pullback en sistemas predador - presa no autónomos, utilizando técnicas de truncamiento, pero también teoría de bifurcaciones, con el objeto de estudiar la existencia de puntos de equilibrio en sistemas perturbados de fluctuaciones temporales muy persistentes. De este modo, permite conocer las condiciones que garantizan que el sistema mantenga un comportamiento estable o se vuelva inestable y sujeto a colapsos.

En el 2024, se estudia un sistema predador - presa con perturbaciones impulsivas y cosecha no lineal en [28], teniendo como objeto de estudio la estabilidad global y asintótica del sistema. Para analizar la estabilidad, se hizo uso de teoremas de comparación y la teoría de Floquet a fin de establecer condiciones bajo las cuales el sistema permanezca estable o persista temporalmente. A pesar de que el enfoque principal no giró en torno a los atractores pullback, este análisis de estabilidad resulta ser de trascendencia para dilucidar las dinámicas que se desarrollan a largo plazo en los sistemas predador - presa y podría relacionarse con la determinación de los atractores pullback en sistemas similares.

También se modeliza la transición del flujo en medios porosos desde el régimen descrito por la ley de Darcy hasta flujos no lineales dominados por efectos inerciales. En [29], utilizando simulaciones numéricas de las ecuaciones de Navier-Stokes en medios porosos heterogéneos, se analizan propiedades clave como la vorticidad, la permeabilidad efectiva, el arrastre por fricción y la relación entre el gradiente de presión macroscópico $-\Delta P$ y la velocidad del fluido v. Dicho estudio establece un marco teórico y numérico para comprender la transición de flujo en medios porosos heterogéneos. Los resultados que se obtienen enfatizan los aspectos de la vorticidad como mecanismo base en la transición hacia flujos no lineales, y concluyen que la función cúbica que se propone para $-\Delta P$ y v es mucho mejor que la ecuación que tradicionalmente se emplea de Forchheimer.

Otras modelizaciones van dirigidas al análisis de las propiedades de existencia y unicidad de los atractores pullback y exponenciales pullback como en el contexto de ecuaciones con un operador p-Laplaciano desarrollado en [30]. Un estudio que analiza cómo la continuidad de estos atractores es afectada por variaciones en los parámetros del sistema y por perturbaciones externas, lo que es crucial para comprender la dinámica a largo plazo de sistemas complejos en entornos no autónomos.

7. Comentarios finales. Los atractores pullback constituyen una herramienta versátil que pueden ser aplicados a sistemas cuyas ecuaciones poseen coeficientes variables, retardos, memoria y dominios no cilíndricos; y de manera notable, tienen su aplicación en diversas áreas.

En este sentido, este trabajo de revisión consolida los avances teóricos que permiten establecer condiciones rigurosas como es la disipatividad, compacidad asintótica y control de la no linealidad que garanticen la existencia de atractores pullback, mostrando su estructura compacta, invariante y mínima.

En la actualidad existen desafíos en el estudio de sistemas con geometrías complejas, siendo ahí, que los atractores pullback tienen un impacto significativo en diversas ciencias como la Física para modelar fenómenos del clima, en Biología para el tratamiento del análisis predador – presa y en Ingeniería para el estudio de flujos de medios porosos.

En síntesis, el presente trabajo muestra con rigor matemático el conocimiento existente a cerca de los atractores pullback y también da a conocer el potencial que los atractores pullback poseen para modelar sistemas reales complejos y describir de manera dinámica el fenómeno de cómo el sistema cambia o evoluciona con el tiempo.

Authorcontributions. En el presente trabajo, el autor ha realizado la revisión de los temas relacionados y sus respectiva referencias bibliográfica para la posterior redacción y edición del artículo de revisión.

Funding. No se ha recibido ningún tipo de financiamiento en el desarrollo de la investigación.

Acknowledgment. Agradecer de antemano a los expertos profesionales por la recepción y revisión de este artículo.

Conflicts of interest. Declaro que no existe ningún tipo de conflicto de intereses con otro autor o institución para la publicación del presente artículo de revisión.

ORCID and License

Carlos Felipe Vidarte Chavez https://orcid.org/0000-0001-8888-248X

Referencias

[1] Carvalho A, Langa JA, Robinson J. Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems. vol. 182. Springer Science & Business Media; 2012.

[2] Conti M, Pata V, Temam R. Attractors for processes on time-dependent spaces. Applications to wave equations. Journal of Differential Equations. 2013;255(6):1254-77.

[3] Conti M, Pata V. Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2014;19:1-10.

[4] Ma Q, Wang X, Xu L. Existence and regularity of time-dependent global attractors for the nonclassical reaction-diffusion equations with lower forcing term. Boundary Value Problems. 2016;2016:1-11.

[5] Meng F, Liu C. Necessary and sufficient conditions for the existence of time-dependent global attractor and application. Journal of Mathematical Physics. 2017;58(3).

[6] Ma Q, Wang J, Liu T. Time-dependent asymptotic behavior of the solution for wave equations with linear memory. Computers & Mathematics with Applications. 2018;76(6):1372-87.

[7] Peng X, Shang Y, Zheng X. Pullback attractors of nonautonomous nonclassical diffusion equations with nonlocal diffusion. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018;69(4):110.

[8] López-Lázaro H, Nascimento MJ, Rubio O. Finite fractal dimension of pullback attractors for semilinear heat equation with delay in some domain with moving boundary. Nonlinear Analysis. 2022;225:113107.

[9] García-Luengo J, Marín-Rubio P. Existence and regularity of pullback attractors for a 3D non-autonomous Navier–Stokes–Voigt model with finite delay. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2024;2024(14):1-35.

[10] Zhang A, Zhang Y, Zhai S, Lin L. Weak pullback attractors for damped stochastic fractional Schrödinger equation on $\mathbb{R}^n$. arXiv preprint arXiv:241102781. 2024.

[11] Ruiyan H, Dingshi L, Tianhao Z. Pullback measure attractors for non-autonomous stochastic FitzHugh-Nagumo system with distribution dependence on unbounded domains. arXiv preprint arXiv:250103622. 2025.

[12] Qin Y, Jiang H. A generalized existence theorem of pullback attractors and its application to the 3D non-autonomous Navier-Stokes-Voigt equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. 2025;18(9):2545-62.

[13] Kloeden P, Yang M. An introduction to nonautonomous dynamical systems and their attractors. vol. 21. World Scientific; 2020.

[14] Camacho M. Sistemas dinámicos no autónomos [Trabajo fin de grado]. Sevilla, España: Universidad de Sevilla; 2017. Facultad de Matemáticas, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico.

[15] Qin Y, Yang B. Existence and regularity of pullback attractors for a non-autonomous diffusion equation with delay and nonlocal diffusion in time-dependent spaces. Applied Mathematics & Optimization. 2023;88(1):10.

[16] Yang B, Qin Y, Miranville A, Wang K. Pullback attractors for nonclassical diffusion equations with a delay operator. Studies in Applied Mathematics. 2025;154(3):e70039.

[17] Wang J, Ma Q. Asymptotic dynamic of the nonclassical diffusion equation with time-dependent coefficient. Journal of Applied Analysis & Computation. 2021;11(1):445-63.

[18] Bortolan MC, Caraballo T, Pecorari Neto C. Generalized φ-pullback attractors for evolution processes and application to a nonautonomous wave equation. Applied Mathematics & Optimization. 2024;89(3):62.

[19] Azevedo VT, Bonotto EM, Cunha AC, Nascimento MJ. Existence and stability of pullback exponential attractors for a nonautonomous semilinear evolution equation of second order. Journal of Differential Equations. 2023;365:521-59.

[20] Liu N, Yu YY. Pullback and uniform exponential attractors for non-autonomous Oregonator systems. Open Mathematics. 2024;22(1):20240071.

[21] Neyra JH, López-Lázaro H, Rubio O, Junior CRT. Pullback exponential attractor of dynamical systems associated with non-cylindrical problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2025:129332.

[22] Hong M, Zhou F, Sun C. Continuity and pullback attractors for a semilinear heat equation on time-varying domains. Boundary Value Problems. 2024;2024(1):9.

[23] Zhang Q, Caraballo T, Yang S. Time-dependent uniform upper semicontinuity of pullback attractors for non-autonomous delay dynamical systems: Theoretical results and applications. Proceedings of the American Mathematical Society. 2024;152(11):4809-20.

[24] He S, Yang XG. Asymptotic behavior of 3D Ladyzhenskaya-type fluid flow model with delay. Discrete and Continuous Dynamical Systems-S. 2025;18(3):832-53.

[25] Wang J, Zhu D, Li C. Invariant sample measures and sample statistical solutions for nonautonomous stochastic lattice Cahn-Hilliard equation with nonlinear noise. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2025:108782.

[26] Chekroun MD, Simonnet E, Ghil M. Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2011;240(21):1685-700.

[27] Lazaar O, Serhani M, Alla A, Raissi N. On the stability analysis of a reaction-diffusion predator-prey model incorporating prey refuge. International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2022;8(4):207.

[28] Zhou Z, Jiao J, Dai X, Wu L. Dynamics of a Predator–Prey System with Impulsive Stocking Prey and Nonlinear Harvesting Predator at Different Moments. Mathematics. 2024;12(15):2369.

[29] Arbabi S, Sahimi M. The transition from Darcy to nonlinear flow in heterogeneous porous media:I-Single-phase flow. Transport in Porous Media. 2024;151(4):795-812.

[30] Aouadi M. Continuity properties of pullback and pullback exponential attractors for non-autonomous plate with p-Laplacian. Applied Mathematics & Optimization. 2024;89(1):10.