



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

2025; Vol.12(1):186-217.



REVIEW

Fatou's Theorem; its contribution to harmonic analysis

El teorema de Fatou; su contribución al análisis armónicos

Alejandro Ortiz Fernández 

*Con mucho cariño a Luz Marina,
Leopoldo, Iván y Miryan.*

Received, Dec. 02, 2024;

Accepted, Feb. 20, 2025;

Published, July 27, 2025



How to cite this article:

Ortiz F. *Fatou's Theorem; its Contribution to Harmonic Analysis..* Selecciones Matemáticas. 2025;12(1):186–217. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2025.01.15>

Abstract

The objective of this article is to see how Fatou's theorem, given at the beginning of the 20th century, motivated new developments in harmonic analysis and partial differential equations in the second half of that century. In this writing we give a brief tour of some of the contributions given by distinguished analysis and in this way our interest is to make such progress known in Peru and thus contribute to the development of this beautiful branch of mathematical analysis, which we believe is almost unknown in our country. In particular we have paid some attention to the work of Jerison - Kenig [1] because such work contains an overview that helps meet our objective.

Keywords . Fatou, harmonic measure, Lipschitz, H^p , BMO, integral area, function $N(u)$, A_p - class.

Resumen

El objetivo de este artículo es ver como el teorema de Fatou, dado a inicios del siglo XX, motivó nuevos desarrollos en el análisis armónico y en las ecuaciones en derivadas parciales en la segunda mitad de tal siglo. En este escrito damos un breve recorrido por algunas de las contribuciones dadas por distinguidos analistas y de esta manera nuestro interés es dar a conocer en el Perú tales progresos y así contribuir con el desarrollo de esta bella rama del análisis matemático, que creemos es casi desconocida en nuestro país. En particular hemos puesto cierta atención al trabajo de Jerison - Kenig [1] por contener tal trabajo un panorama que ayuda a cumplir con nuestro objetivo.

Palabras clave. Fatou, medida armónica, Lipschitz, H^p , BMO, integral área, función $N(u)$, clase A_p .

1. Introducción e Ideas Generales. Como se sabe, alrededor del inicio del siglo XX en la matemática hay inquietud por el surgimiento de nuevas ideas; la teoría de conjuntos de G. Cantor contribuye a tal inquietud pues se ha logrado domar al infinito y esto contribuyó a ordenar el edificio matemático; aún más, la teoría de la medida e integral de Lebesgue permitió clarificar dificultades tenidas en el análisis matemático y como consecuencia surgió el análisis funcional. En este panorama la teoría de Fourier fue la fuente de inspiración de casi muchas de nuevas teorías. Conforme pasaban las décadas de tal siglo el análisis armónico o análisis de Fourier fue también progresando debido a las contribuciones de notables matemáticos, como fueron: I. Priwaloff, A. Plessner, D. C. Spencer, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, S. Saks, R. Salem, G. O. Thorin, los hermanos F. y M. Riesz, N. Wiener,

*Profesor Emérito Vitalicio de la Universidad Nacional de Trujillo. Exprofesor de la PUCP. author correspondence: (jortiz@pucp.edu.pe).

A. Zygmund y la Escuela creada en su entorno en la cual se destaca su discípulo J. Marcinkiewicz. Años después, a fines de los años 40's, Zygmund descubre a otro brillante discípulo, como fue A. P. Calderón. Bien, retrocedamos al inicio del siglo pasado; en tal ambiente un matemático francés en 1906 presentó un trabajo sobre las series trigonométricas y las series de Taylor; tal matemático fue Pierre Fatou quien en [2] estudia ciertas cuestiones sobre las series mencionadas en donde destaca la utilidad de la teoría de la medida y de la integral definida en forma general (Lebesgue) haciendo la observación que el problema de la medida de conjuntos fue establecida por primera vez por G. Cantor, lo que motivó posteriores investigaciones debidas a M. Jordan, E. Borel, ..., lo que fue completado de un modo general por H. Lebesgue con su teoría de la medida. Fatou en dicho artículo hace interesantes comentarios históricos de aquella época. Luego pasa a estudiar a la integral de Poisson relacionándola con el problema de Dirichlet; es en esta situación que introduce una idea y un resultado de convergencia, que años después fue investigada dando lugar a una evolución que mereció contribuciones de notables analistas.

Tal idea fue la noción de “convergencia no-tangencial” la que está contenida en el teorema (en el plano complejo)(en un lenguaje más actualizado):

“Sea $u(z)$ una función armónica y limitada sobre $|z| < 1$, entonces u tiene límite no-tangencial sobre todo punto $e^{i\theta}$ c.t.p. de la frontera de la bola”.

Es decir, si se toma un triángulo (un cono en general) con vértice en $e^{i\theta}$, punto frontera de la bola unitaria, entonces el límite de $u(z)$ existe conforme z , estando en el triángulo, tiende a $e^{i\theta}$. Posteriormente se verificó que se tiene el teorema si solo se exige que u sea limitada inferiormente o que u sea limitada sobre conos con vértices en un subconjunto medible contenido en la frontera o contorno de la bola. Se observó que las técnicas usadas en este teorema provienen del análisis complejo pues con ayuda de la aplicación conforme el teorema de Fatou se verifica para dominios suficientemente regulares, más generales que la bola. De esta manera el paso de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ se hace complicado pues se pierden algunos de tales recursos, como la aplicación conforme y esto creó un reto a resolver. Por otro lado, es oportuno mencionar que el saber cómo los puntos de un dominio D tienden a un punto de la frontera del dominio, ello está relacionado con el clásico problema de Dirichlet que consiste en encontrar una función armónica en D , continua en $\overline{D}$ (cerradura de D) y que coincide con una función dada f , continua sobre ∂D (contorno de D). Formalmente escribimos: $\lim_{x \rightarrow Q \in \partial D} u(x) = f(Q)$. Al respecto debemos precisar que el comportamiento de los $x \in D$ al acercarse a un punto del contorno de D puede ser una tarea complicada pues hay dominios en cuyo contorno hay “puntas” o vértices, como por ejemplo es el caso de un rectángulo o de dominios cuyos contornos son curvas y así un punto en el dominio tiene dificultades para llegar al contorno. Además, las funciones dadas en el contorno no necesitan ser funciones continuas, podrían pertenecer a otras clases de espacios de funciones, por ejemplo a los espacios de Lebesgue L^p , $1 \leq p \leq \infty$, a $\bigwedge_\alpha$ (funciones de Lipschitz), a los espacios de oscilación media acotada BMO, a los espacios de Hardy H^p .

Remarquemos que es la discontinuidad de los datos de contorno lo que fuerza a tener que precisarse la forma cómo convergen los $x \in D$ hacia el contorno. De alguna manera esto motivaría la introducción de la idea de límite no - tangencial; además, el contorno ∂D no precisa ser tan regular, esto es, si φ es la función que la define, ella no precisa que sea C^∞ ; se podría pedir menos, por ejemplo que sea $\varphi \in C^1$ ó que φ sea una función de Lipschitz, o otras condiciones de regularidad.

1.1. Un Esquema sobre la Evolución del Teorema de Fatou. El siguiente esquema nos da una idea de como el teorema de Fatou evolucionó en su etapa inicial y fundamental. Veamos.

1950	trabajo de A. Calderón.
1962	aporte de L. Carleson.
1968	trabajo de R. Hunt - R. Wheeden.
1976	aporte de B. Dahlberg.
1980	trabajo de D. Jerison - C. Kenig.
:	:

En la próxima sección desarrollaremos, brevemente, estos aportes y otras ideas colaterales.

2. El Teorema de Fatou. En esta sección discutiremos este importante resultado del análisis armónico y del cual ya hemos dado una idea pero por completitud la recordamos:

“ Sea $u(z)$ una función armónica y limitada sobre la bola unitaria D ; entonces existe el límite no-tangencial de $u(z)$, cuando $z = re^{i\theta}$ tiende a $e^{i\theta} \in \partial D$ ”.

Como se dijo, la novedad del teorema es que el límite no es tangencial sino que la aproximación al contorno es a través de conos con vértices en $e^{i\theta}$ y contenidos en D . Veamos, previamente, a la

integral de Poisson; en $\mathbb{R}^2$ sea D la bola unitaria abierta y ∂D su contorno; si $0 \leq r < 1$ y θ es real, el núcleo de Poisson es definido siendo $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$. Se verifica que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$. Sea $f \in L^1(\partial D)$, entonces la integral de Poisson de f es definida siendo

$$IP(f)(\theta) = (P_r * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \psi) f(\psi) d\psi \equiv u_f(re^{i\theta})$$

donde la última notación es usado porque $P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$.

De un modo general, la integral de Poisson de una medida de Borel compleja μ sobre ∂D es definida siendo $u_\mu(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \psi) d\mu(\psi)$. Se verifica que u_μ es una función armónica en D ; en particular lo es cuando $f \in L^1(\partial D)$.

Como motivación de la necesidad de la noción de convergencia no - tangencial, veamos dos ejemplos extraídos del libro de Helms [3], pag. 54.

Ejemplo 2.1. Sea D_r , el disco o bola con centro en 0 y radio r_j en $\mathbb{R}^2$; sea δ_Q la delta de Dirac en el punto $Q \in \partial D$; esto es, sea la medida unitaria con soporte en $\{Q\}$. Ahora, sea la integral de Poisson $IP(x) = P_r * \delta_Q(x) = \frac{1}{\sigma_n r} \frac{r^2 - |x|^2}{|Q - x|^2}$ sobre D_r , $x \in \mathbb{R}^2$. Sea ahora, $x = \lambda Q$, $0 \leq \lambda < 1$, y hagamos que $\lambda \rightarrow 1$. Entonces se tiene $\lim_{\lambda \rightarrow 1} IP(x) = \frac{1}{\sigma_n r} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{r^2 - \lambda^2 r^2}{(1 - \lambda^2)r^2} = +\infty$.

Esto es, si $x \in D_r$ se aproxima a Q a lo largo del radio r , $IP(x) \rightarrow +\infty$, algo no deseado.

Ejemplo 2.2. Veamos ahora otra forma de hacer converger x a Q ; para ello se considera coordenadas polares (θ, ρ) , donde θ es el ángulo entre los vectores x y Q , con $\rho = |x|$. Se dice que $x \rightarrow Q$ si se tiene $\rho = r \cos \theta$.

Ver figura adjunta (Figura 2.1).

Luego se tiene

$$\lim IP(x) = \lim_{\theta \rightarrow Q} \frac{1}{\sigma_n r} \frac{r^2(1 - \cos^2 \theta)}{r^2(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{\sigma_n r}.$$

De esta manera si se converge al contorno de formas diferentes, se obtienen límites diferentes ($+\infty$ y $\frac{1}{\sigma_n r}$); se verifica que con otras formas de convergencia se obtendrían otros límites. Se observó que vía un argumento geométrico tales convergencias son a lo largo de curvas tangentes (internamente) al contorno en el punto Q .

Así se tiene una pluralidad de límites “tangentes” lo que conduce a que no se considere tales formas de convergencia. Entonces: ¿qué hacer? ... y ¿si la convergencia fuera a través de conos? ... es decir vía la convergencia no - tangencial en donde se tiene la observación: sea $Q \in D$ fijo; un cono C con vértice en Q , con eje el segmento que une el centro 0 con Q , con semi - ángulo θ , $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, es el conjunto

$$C = \{x / \cos \theta \leq \frac{\langle -Q, x - Q \rangle}{|Q||x - Q|} \leq 1\}.$$

Por definición: si u es una función definida sobre el disco D_r , el límite no - tangencial de $u(x)$ es

$u(x) = \lim_{x \rightarrow Q, x \in D_r \cap C} u(x)$, siempre que el límite existe.

Notación. Con θ - $\lim u(x)$ se denota el límite no - tangencial de $u(x)$.

Ahora se va poner el teorema de Fatou en el lenguaje general de la medida y por razones de completitud vamos a repasar brevemente algunas ideas de tal lenguaje. Veamos. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ - álgebra en X . $(X, \mathcal{A})$ es llamado un espacio medible. Una medida μ es positiva si $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ satisface ciertas condiciones.

Si $U \in \mathcal{A}$, $\mu(U)$ es su medida. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama un espacio medida. Si $\mu : \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, +\infty)$ y satisface

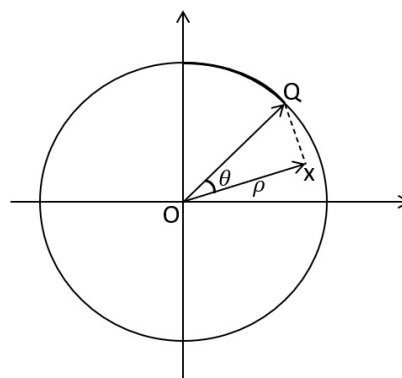


Figura 2.1: Convergencia $x \rightarrow Q$.

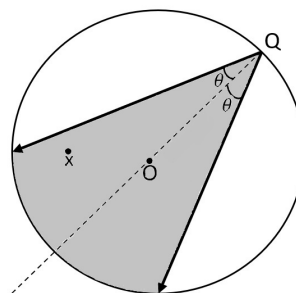


Figura 2.2: Convergencia a través de conos.

- (i) $\mu(\phi) = 0$ y
(ii) si $\{U_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$, de conjuntos mutuamente disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n);$$

Bajo estas condiciones μ es llamada una medida con signo y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama un espacio medible con signo. Por otro lado, μ es llamada una medida finita si $\mu(X) < \infty$; y es llamada σ -finita si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, con $\mu(U_n) < \infty$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medida con signo; si $U \in \mathcal{A}$, sea

$$\begin{aligned}\mu^+ &= \sup\{\mu(V)/V \subset U, V \in \mathcal{A}\}, \\ \mu^- &= -\inf\{\mu(V)/V \subset U, V \in \mathcal{A}\},\end{aligned}$$

entonces

- (i) si μ es finita ó σ -finita, se tiene que μ^+ es finita ó σ -finita;
(ii) μ^- es una medida finita;
(iii) $\mu = \mu^+ - \mu^-$, descomposición de Jordan de μ .

La variación total de μ es, por definición, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.
Remarcamos que si una medida μ con signo es limitada, ella es llamada de variación limitada (una medida con signo finita es de variación limitada). Por otro lado, si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible y μ, v son dos medidas con signo sobre $\mathcal{A}$, por definición se dice que v es absolutamente continua con respecto a μ si $v(E) = 0$ para todo conjunto medible E para el cual $|\mu|(E) = 0$. En este caso se escribe $v \ll \mu$. La idea es que v es pequeño si μ lo es. Se dice que μ es singular con respecto a v si existen dos conjuntos disjuntos A y B tal que $X = A \cup B$, $|\mu|(B) = 0$ y $|v|(A) = 0$.

Bien, retornemos a Fatou. Sea μ una medida con signo, de variación limitada sobre $\partial D_r(y)$; entonces $IP(\mu, D)$ es la integral de Poisson de μ , donde

$$IP(\mu, D)(x) = \frac{1}{\sigma_n r} \int_{\partial D_r} \frac{r^2 - |y - x|}{|Q - x|^n} d\mu(Q).$$

Lema 2.1. (ver Helms, [3]). Sea v una medida sobre ∂D_r , tal que $\mathcal{D}v(Q) = 0$ (donde $\mathcal{D}v(Q) = \lim_{\sigma(K) \rightarrow 0, Q \in K} \frac{v(K)}{\sigma(K^2)}$ si el límite existe, donde σ es la medida de la superficie usual definida sobre el contorno y K es un conjunto cerrado con ciertas propiedades). Entonces se tiene

$$\theta - \lim_{x \rightarrow Q} IP(v, \mathcal{D})(x) = 0$$

Ahora estamos en condiciones de ver el teorema de Fatou en un contexto general.

Teorema 2.2. Sea μ una medida con signo de variación limitada sobre subconjuntos de Borel de ∂D_r . Si $H(x) = IP(\mu, \mathcal{D})$ sobre D_r , entonces existe $\theta - \lim_{x \rightarrow Q} H(x)$ y se tiene que

$$\theta - \lim_{x \rightarrow Q} H(x) = \mathcal{D}\mu(Q) \text{ ctp.}(\sigma).$$

Demostración. Consideremos la descomposición $\mu = \mu_a + \mu_s$ de μ relativo a la medida de superficie σ donde μ_a es la parte continua absolutamente continua de μ y μ_s es la parte singular. Aún más, sea $\mu_s = \mu_s^+ - \mu_s^-$, donde μ_s^+ y μ_s^- son las variaciones positivas y negativas de μ_s . Ahora, veamos un resultado de Lebesgue (ver [3]): “sea μ una medida con signo de variación limitada, definida sobre subconjuntos de Borel de ∂D . Si f es integrable sobre ∂D y $\mu(M) = \int_M f d\sigma$, para cada conjunto de Borel $M \subset \partial D$, entonces $\mathcal{D}\mu = f$ ctp. (σ) . Además, si μ fuera singular relativo a σ , entonces, $\mathcal{D}\mu = 0$, ctp. (σ) ”.

De esta manera, vía este resultado se tiene que $\mathcal{D}\mu_s^+ = 0$ ctp. (σ) y $\mathcal{D}\mu_s^- = 0$, ctp. (σ) . Bien, ahora considerando que μ_s^+ y μ_s^- son medidas, por el Lema 2.1, se tiene que

$$\theta - \lim_{x \rightarrow Q} IP(\mu_s^\pm, \mathcal{D})(x) = 0 \text{ ctp.}(\sigma).$$

Veamos ahora la parte absolutamente continua μ_a .

Bien, para cada Borel M y algún $f \in L^1(\partial D)$, escribamos $\mu_a(M) = \int_M f d\sigma$. Por el resultado de Lebesgue se sabe que $\mathcal{D}\mu_a = f$ ctp. Así mismo, para cada Borel M se tiene

$$\begin{aligned}(\mu_a - f(Q)\sigma)(M) &= \int_M [f(y) - f(Q)] d\sigma(y) \text{ y} \\ |\mu_a - f(Q)\sigma|(M) &= \int_M |f(y) - f(Q)| d\sigma(y).\end{aligned}$$

Ahora se va a usar la siguiente versión del teorema de diferenciación de Lebesgue [“si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable y $F(x) = \int_0^x f(y)dy$, entonces

$F'(x) = f(x)$, ctp. Esta igualdad es equivalente a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(y)dy = f(x)$, donde $\{I_n\}$ es una sucesión arbitraria de intervalos, siendo x un extremo de tales intervalos y tal que $|I_n| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. $\{I_n\}$ se contrae a x ”] para funciones medibles: “Sea f una función medible sobre ∂D , integrable respecto a la medida $d\sigma$. Para cada Borel $M \in \partial D$, pongamos $\mu(M) = \int_M f d\sigma$. Entonces se tiene

$$\lim_{\sigma(K) \rightarrow 0, x \in K} \frac{1}{\sigma(K)} \int_K |f(y) - f(x)| d\sigma(y) = 0, \text{ ctp } (d\sigma), x \in \partial D”.$$

Bien, entonces se tiene $\mathcal{D}|\mu_a - f(Q)\sigma|(Q) = 0$ ctp (σ) para $Q \in \partial D$. Ahora se pone $E_\alpha = \{Q \in \partial D / \mathcal{D}|\mu_a - f(Q)\sigma|(Q) \neq 0\}$. Luego, si $Q \notin E_\alpha$ se tendrá $\mathcal{D}|\mu_a - f(Q)\sigma|(Q) = 0$, y por el lema 1.2. se concluye que $\theta - \lim_{x \rightarrow Q} IP(|\mu_a - f(Q)\sigma|)(x) = 0$. Pero, desde que

$$|IP(\mu_a - f(Q)\sigma, \mathcal{D})(Q)| \leq IP(|\mu_a - f(Q)\sigma|, \mathcal{D})(Q), \text{ se tiene que}$$

$$\theta - \lim_{x \rightarrow Q} IP(\mu_a - f(Q)\sigma, \mathcal{D})(x) = 0 \text{ ó } \theta - \lim_{x \rightarrow Q} [IP(\mu_a, \mathcal{D})(x) - f(Q)] = 0 \text{ ó } \theta - \lim_{x \rightarrow Q} [IP(\mu_a, \mathcal{D})(x) - f(Q)] = 0 \text{ para } Q \notin E.$$

Como se verifica que $\sigma(E_\alpha) = 0$, se incluye en el conjunto E_α aquellos puntos Q donde $\mathcal{D}\mu_a(Q) \neq f(Q)$, lo que no afecta tener $\sigma(E_\alpha) = 0$.

De esta manera, para $Q \notin E_\alpha$ se tiene $\theta - \lim_{x \rightarrow Q} IP(\mu_a, \mathcal{D})(x) = f(Q) = \mathcal{D}\mu_a(Q)$ ctp (σ) , de donde se obtiene finalmente $\theta - \lim_{x \rightarrow Q} H(x) = \theta - \lim_{x \rightarrow Q} IP(\mu, \mathcal{D})(x) = \theta - \lim_{x \rightarrow Q} [IP(\mu_a, \mathcal{D})(x) + IP(\mu_s^+, \mathcal{D})(x) - IP(\mu_s^-, \mathcal{D})(x)] = \mathcal{D}\mu(Q)$ ctp (σ) , que es la tesis. $\square$

A continuación pasamos a desarrollar, brevemente, el esquema mencionado anteriormente y ello nos conducirá a teorías desarrolladas en la segunda mitad del siglo pasado y que, creemos, aún se están investigando en relación con el análisis armónico y las ecuaciones en derivadas parciales. Veamos.

3. El Aporte de A.P. Calderón. En [4], Calderón estudia un tema propuesto por su profesor A. Zygmund; se trata de investigar el comportamiento de una función armónica en el contorno de un determinado dominio. Veamos en primer lugar un resumen de sus ideas para comprender su contribución. Bien, ya mencionamos que la extensión del teorema de Fatou, de la teoría $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^n$, requiere de nuevas técnicas, de nuevas ideas. Calderón propone considerar $\mathbb{R}_+^{n+1}$, el semi-espacio superior cuyo contorno es $\mathbb{R}^n$ y prueba que si u es una función armónica en $\mathbb{R}_+^{n+1}$ y es limitada en un cono truncado $\Gamma(x)$, con vértice en $x \in E$, donde E es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$, entonces u tiene límite no-tangencial para casi todo $x \in E$.

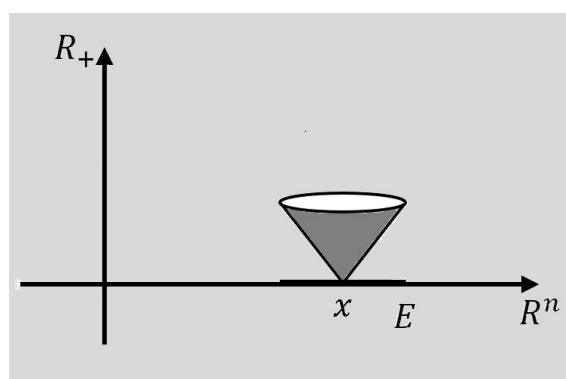


Figura 3.1: Fatou según Calderón.

Además, se verifica que si $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / u(x, t) \text{ es limitada sobre } \Gamma(x)\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / \text{existe } \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t), \text{ cuando } (x, t) \in \Gamma(x)\}$ entonces se tiene que $E_1 = E_2$, a menos de un conjunto de medida nula. De esta manera se puede decir que si u es una función armónica sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$ y E es un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^n$, tal que para todo $x \in E$ existe un cono $\Gamma(x)$ tal que $\sup_{(x,t) \in \Gamma(x)} |u(x, t)| < \infty$, entonces en casi todo punto de E , u tiene un límite no-tangencial.

Bien, con tal panorama entremos a ver algunos argumentos del trabajo [4] de Calderón, el cual se inicia mencionado dos clásicos resultados:

Teorema 3.1. (Priwaloff, 1923). “Sea $F(x, y)$ una función armónica para $y > 0$; supongamos que para todo punto $(x, 0)$ de un conjunto E , de medida positiva, sobre el eje x existe un región triangular con vértice en aquel punto, donde la función F es acotada, entonces $F(x, y)$ posee un límite cuando (x, y) tiende no - tangencialmente a $(x, 0) \in E$, ctp (E)”.

Calderón observa que cuando este resultado es aplicado a funciones analíticas, entonces se obtiene un resultado más fuerte, como es el:

Teorema 3.2. (Plessner, 1928). “Sea $F(z)$, $z = x + iy$, una función analítica para $y > 0$. Entonces ctp en todo punto $(x, 0)$ del eje x la función F tiene un límite finito cuando z tiende no - tangencialmente a $(x, 0)$ ó el rango de $F(z)$ en toda región triangular con vértice en aquel punto, es denso en todo el plano complejo”.

Se observa que en estos casos el dominio que se considera es de la forma (Figura 3.2)

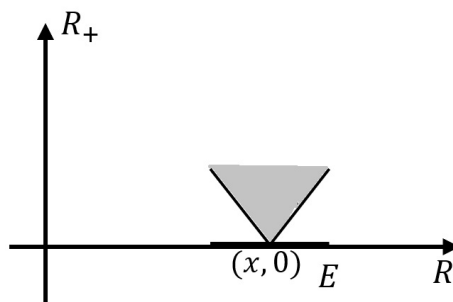


Figura 3.2: Teorema de Fatou.

El problema que se planteó fue investigar estos resultados a dimensiones mayores que 2! Calderón pasa a demostrar el teorema 1.3. para el caso $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3. ([4]). “ $F(P)$, $P = (x_1, \dots, x_n)$, una función armónica para $x > 0$ tal que para todo punto Q de un conjunto E de medida positiva del hiperplano $x_n = 0$ existe una región Γ_Q limitada por un cono con vértice en Q y un hiperplano $x_n = \text{constante}$, en donde $F(P)$ es acotada. Entonces ctp en E , la función F tiene un límite conforme P converge a $Q \in E$ no-tangencialmente a $x_n = 0$ ”.

Luego Calderón observa que agregando una adicional generalización del teorema 1.3., entonces se puede extender el teorema 3.2. a funciones de varias variables complejas; mas concretamente se tiene el

Teorema 3.4. Sea $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ el producto cartesiano de espacios E_k de puntos $P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, y $F(P)$ con $P = (P_1, P_2, \dots, P_m) \in E$, una función definida y continua en $x_n^{(k)} > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, es armónica en P_k y satisface $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{(\partial x_i^{(k)})^2} = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Sea $B_k \subset E_k$ el espacio $x_n^{(k)} = 0$, y sea $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$ el llamado contorno distinguido de $x_n^{(k)} > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, y supongamos que para todo punto $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$, $Q_i \in B_i$, de un conjunto; de medida positiva de B , existen regiones Γ_{kQ} , limitadas por conos con vértices en los puntos Q_k y por hiperplanos $x_n = \text{constante}$, tal que la función $F(P)$ es acotada en $\Gamma_Q = \Gamma_{1Q} \times \Gamma_{2Q} \times \dots \times \Gamma_{mQ}$.

Entonces, ctp. en E , $F(P)$ tiene un límite conforme $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ converge a $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m) \in E$ de un modo tal que todos los puntos P_k convergen a Q_k simultáneamente y no - tangencialmente.

Tan pronto Calderón prueba este teorema, pasa a demostrar el

Teorema 3.5. Si $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$ es una función analítica de $z_k = x_k + iy_k$, regular para $y_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, entonces ctp, en todo punto $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ del contorno distinguido B , $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$, ó $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$ tiene un límite finito cuando todos los z_k convergen a x_k simultáneamente y no - tangencialmente, ó el rango de la función F en toda región $\Gamma_Q = \Gamma_{1Q} \times \Gamma_{2Q} \times \dots \times \Gamma_{mQ}$ producto de regiones triangulares Γ_{kQ} de los planos z_k con vértices en x_k , es denso en el plano complejo total.

Veamos algunos comentarios sobre el aporte de Calderón. La idea, simplificada, de su aporte se podría establecer en la forma siguiente donde se visualiza mejor la idea:

Teorema 3.6. “Sea $\mathbb{R}_+^{n+1}$ el semi-espacio superior cuyo contorno es $\mathbb{R}^n$. Si F es una función armónica sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$ y E es un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^n$, tal que para todo $Q \in E$ existe un cono Γ_Q tal que $\sup_{(x,t) \in \Gamma_Q} |F(x, y)| < \infty$, entonces ctp $Q \in E$, F tiene un límite no - tangencial”.

Calderón observa que el teorema 3.4. contiene al teorema 3.3. éste es un caso especial de aquel. Por otro lado, en 1950 también fue publicado el trabajo [5] de Calderón donde se resuelve el siguiente problema el que está contenido en el

Teorema 3.7. “Sea $F(P)$, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, una función armónica para $x > 0$, tal que para todo Q de un conjunto E , $|E| > 0$, sobre el hiperplano $x_n = 0$, existe una región contenida en $x_n > 0$ limitada por un cono con vértice en Q y un hiperplano $x_n = \text{constante}$, donde la función es acotada, entonces ctp, la integral $\int \frac{1}{x_n^{n-2}} \text{grad}^2 F dw$ extendida sobre cualquier región limitada por un cono con vértice en $Q \in E$, un hiperplano $x_n = \text{constante}$ y contenida en $x_n > 0$, es finita”.

Nota 3.1. El recíproco del teorema 3.7. fue demostrado por Spencer en 1943.

El teorema 3.7. tiene otra versión con los siguientes argumentos.

Sea $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) / x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^+\}$ y $F(x, y)$ es armónica respecto a las $n + 1$ variables. Vimos que a veces F es tomada siendo la integral de Poisson de una conveniente función f , definida en $\mathbb{R}^n$, es decir $F = IP(f)$. Sea $\Gamma = \{(x, y) / |x| < y\}$ un cono con vértice en el origen y Γ' es el cono truncado (“local”), $\Gamma' = \Gamma \cap \{0 < y < 1\}$. Si $Q \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma(Q)$ y $\Gamma'(Q)$ son los correspondientes conos con vértices en Q , entonces la integral de área (visto antes) adquiere la forma

$$A(F)(Q) = \left(\int_{\Gamma(Q)} |\nabla F|^2 y^{1-n} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $|F|^2 = \left| \frac{\partial F^2}{\partial y} \right| + \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F}{\partial x_j} \right|^2$. Ahora bien, la función maximal F^* de F es definida vía: $F^*(Q) = \sup_{(x,y) \in \Gamma(Q)} |F(x, y)|$. Entonces se obtiene la versión local del teorema de Calderón 3.7.

Teorema 3.8. Sea F una función armónica en $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Si $F_{loc}^*(Q) < \infty$, entonces $A_{loc}(F)(Q) < \infty$, ctp $Q \in \mathbb{R}^n$. El recíproco de este resultado es cierto; se tiene: “sea F una función armónica en $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Si $A_{loc}(F)(Q) < \infty$, entonces se tiene $F_{loc}^*(Q) < \infty$, ctp $Q \in \mathbb{R}^n$ ”.

Se tiene la siguiente caracterización:

Teorema 3.9. Sea F una función armónica en $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Entonces ctp $Q \in \mathbb{R}^n$ se tiene: F tiene un límite no-tangencial en Q si y solo si $A(F)(Q) < \infty$.

Para la demostración de este resultado ver [6], pag. 206.

4. La Contribución de L. Carleson, [7]. Carleson en 1962 publica un artículo donde obtiene la misma conclusión que Calderón pero sólo exige que la función u sea limitada inferiormente sobre el cono $\Gamma(x)$. Precisemos sus ideas; sea

$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x, t) / |x - x_0| < \alpha(t)\}$ un cono con vértice en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y apertura $\alpha > 0$. Sea el punto $P = (x, t)$ en el cono. Entonces Carleson demuestra el

Teorema 4.1. “si $u(P)$ es armónica en $t > 0$ y si para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe un cono $\Gamma_\alpha(x)$ tal que $u(P)$ es limitada inferiormente sobre $\Gamma_\alpha(x)$, entonces existe ctp $\lim u(P)$ cuando $P \rightarrow (x, 0)$ y $P \in \Gamma_\alpha(x)$ ”.

Se observó que en este trabajo Carleson introduce la idea de medida armónica asociada al dominio $D = \bigcup_{x \in E} \Gamma_\alpha(x)$, donde los conos $\Gamma_\alpha(x)$ son asumidos truncados (locales) y $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible.

Además, con cargo a dar la definición posteriormente, se verifica que D es un “dominio de Lipschitz”(gráficamente se observa que D es un dominio “dentado”).

Nota 4.1. Para lo detalles de este teorema ver [7]. Por otro lado, la técnica usada por Carleson fue importante en el desarrollo posterior de nuevas ideas como, por ejemplo, ampliar la teoría para dominios más generales que el semi-espacio $\mathbb{R}_+^{n+1}$ y en donde la convergencia no-tangencial tenga significado. En efecto, esto se produjo pues surgieron diversos trabajos, todo lo cual enriqueció al análisis armónico y a las ecuaciones en derivadas parciales. Esta es la tarea que haremos brevemente.

5. El Trabajo de R. Hunt - R. Wheeden. [8]. En su citado trabajo los autores resaltan al teorema de Fatou indicando que el teorema tiene una versión local, es decir, “si $u(z)$ es una función armónica en $z < 1$ y en cada punto e de un conjunto medible E existe algún cono es acotada superior ó inferiormente, entonces $u(z)$ tiene un límite no - tangencialmente en casi todo $e \in E$ ”. Se menciona también que tales resultados, con la ayuda de la aplicación conforme, son válidos para regiones del plano que son más generales que la bola $|z| < 1$. Además, se dice, que los métodos usados para la bola unitaria se pueden aplicar a funciones que son armónicas en la bola unitaria en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ pero en esta situación no se tiene el teorema de la aplicación conforme para dominios más generales $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y esto origina una situación delicada en el problema. Hunt-Wheeden, en el mencionado trabajo, obtienen valores de contorno no - tangenciales para funciones que son armónicas aún en dominios más generales $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y que son limitadas superior ó inferiormente en conos. Anuncian que considerarán todos los dominios regulares para los cuales se tienen solución del problema de Dirichlet!

Hunt-Wheeden consideran un dominio regular en el siguiente sentido: sea $E \subset \partial D$ y se supone que para cada $Q \in E$ existe un cono con vértice en Q el cual es **exterior** a D . Entonces, si u es armónica en D y es acotada super ó inferiormente en un cono con vértice Q , para cada $Q \in E$, u tiene un límite no - tangencial finito en cada $Q \in E$, excepto para un conjunto de “medida armónica” cero. Veamos la idea de esta clase de medida, así como de otras ideas.

5.1. Dominios de Lipschitz.. La función $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una función de Lipschitz si se tiene $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M|x - x'|$. Un dominio limitado $D \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un dominio de Lipschitz si a cada punto $Q \in \partial D$ le corresponde un sistema de coordenadas local (x, t) , $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, así como una vecindad N de Q (vecindad que puede ser una bola con centro en Q ó un cilindro circular con centro Q) tal que

$$\begin{aligned} N \cap D &= N \cap \{(x, t)/t > \varphi(x)\} \\ N \cap \partial D &= N \cap \{(x, t)/t = \varphi(x)\} \end{aligned}$$

donde φ es una función de Lipschitz.

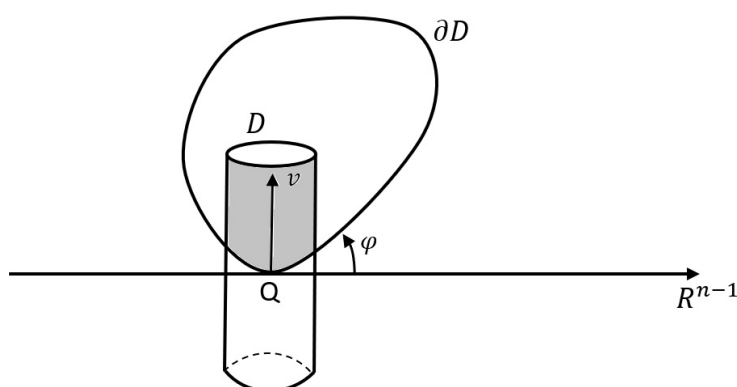


Figura 5.1: Dominio de Lipschitz.

Se observa que en un dominio de Lipschitz el contorno es “parchado”localmente con curvas de Lipschitz, las que tienen cierta regularidad y así se puede evitar ciertos puntos “peligrosos”. Por ejemplo un rectángulo es un dominio de Lipschitz. Bien, ahora si las funciones φ (como ∂D es compacto se puede determinar un número finito de tales φ 's) son, además, continuamente diferenciales entonces D es llamado un dominio C^1 . Aún más, si el gradiente $\nabla \varphi$ satisface

$$|\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(x')| \leq c|x - x'|^\alpha$$

entonces D es llamado un dominio $C^{1,\alpha}$.

5.2. Idea de Medida Armónica. Ver [9], sección 2. Sea D un conjunto abierto, acotado y conexo en $\mathbb{R}^n$ y f una función continua de valor real definida sobre ∂D . [Una distribución w definida en un conjunto abierto D es llamada subarmónica si $\varphi \geq 0$ implica $\langle w, \nabla \varphi \rangle \geq 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Las funciones subarmónicas tienen estas dos propiedades:

- (i) Si $w \in C^2(D)$, entonces w es subarmónica si y solo si $\Delta w \geq 0$ en D .
- (ii) Principio del Máximo: “sea w una función subarmónica en D y supongamos que $\limsup_{x \rightarrow Q} w(x) \leq M$ para todo $Q \in \partial D$, entonces ó $w \equiv M$ ó $w < M$ en D , siendo D conexo”.

Por otro lado, una familia no-vacía $\mathcal{P}$ de funciones subarmónicas en D es llamada una familia de Perron si

- (iii) si $w_1, w_2 \in \mathcal{P}$, entonces $\max\{w_1, w_2\} \in \mathcal{P}$.
- (iv) si $w \in \mathcal{P}$ y $\overline{B} \subset D$, entonces $M_B^w \in \mathcal{P}$, donde si P_B^w es la integral de Poisson en B (bola) de $w|_{\partial B}$, entonces

$$M_B^w = \begin{cases} P_B^w & , x \in B \\ w(x) & , x \in D - B; \end{cases}$$

si w es subarmónica en D , entonces M_B^w es subarmónica y se tiene $M_B^w \geq w$

Sea ahora h una función continua de valor real sobre ∂D y sea $\mathcal{P}(h) = \{w \text{ funciones subarmónicas en } D / \limsup_{x \rightarrow Q} w(x) \leq h(Q), \text{ para todo } Q \in \partial D\}$. Sea $M = \sup\{|h(Q)| / Q \in \partial D\}$ y $H_f(x) = \sup\{w(x) / w \in \mathcal{P}(h)\}$.

Ahora continuamos con la idea de medida armónica. Por el principio del máximo se tiene que la función armónica H_f satisface $|H_f(x)| \leq \sup |f|$ (el supremo está en el contorno). Luego, la aplicación $f \rightarrow H_f$, para $x \in D$ fijo, define una funcional lineal, continua, positiva, sobre $C^0(\partial D)$ y por el teorema de representación de F. Riesz existe una única medida de Borel positiva w^* sobre ∂D tal que se tiene $H_f(x) = \int_{\partial D} f(Q) dw^*(Q)$.

Se observa que si $f \equiv 1$, $H_f(x) \equiv 1$; esto es $\int_{\partial D} dw^*(Q) = 1$ lo que dice: w^* tiene una masa total igual a 1. [Desigualdad de Harnack: sea K un subconjunto compacto de D ; entonces existe una constante positiva M , que depende solo de K y D , tal que para todo x e y en K se tiene $M^{-1}u(y) \leq u(x) \leq Mu(y)$ para toda función armónica u en D .] w^{x_1} y w^{x_2} son mutuamente absolutamente continuas, por la desigualdad de Harnack. Luego para $1 \leq p \leq \infty$, se tiene $L^p(dw^{x_1}) = L^p(w^{x_2})$. Se tiene el

Teorema 5.1. Sea $f \in L^1(dw^*)$ para todo $x \in D$, entonces $u(x) = \int_{\partial D} f(Q) dw^*(Q)$ es una función armónica en D .

Definición 5.1. Sea $x_0 \in D$; pongamos $w = w^{x_0}$ entonces w es llamada medida armónica para D .

El siguiente resultado relaciona estos argumentos con el problema de Dirichlet.

Teorema 5.2. Sea D un dominio regular para el problema de Dirichlet. Un conjunto de Borel $E \subset \partial D$ [puede ser obtenido de los conjuntos abiertos y de los conjuntos cerrados aplicando repetidamente las operaciones de unión e intersección a un número numerable de conjuntos] tiene medida armónica cero si y sólo si existe una función armónica positiva u en D tal que $\lim_{x \rightarrow Q} u(x) = +\infty$ para todo $Q \in E$.

Nota 5.1. Este resultado es muy útil para dar consistencia en lo sucesivo con los dominios de Lipschitz, según Hunt - Wheeden [8]. Al respecto ellos nos dicen que: “es natural que el conjunto excepcional sea un conjunto de medida armónica cero desde que si $E \subset \partial D$ es cualquier conjunto de medida armónica cero entonces es posible construir una función armónica positiva con valor en contorno igual a $+\infty$ en cada punto de E ”. Por otro lado, en la teoría del potencial el concepto de medida armónica está relacionado con la teoría de las funciones armónicas en el contexto del problema de Dirichlet. También está relacionada con teoría de probabilidades. Para mayores detalles ver el libro [10], cap. 11, en particular la sección 3.

Continuemos con [8]. El resultado principal que se anuncia es:

Teorema 5.3. “Sea $u(P)$ una función armónica, limitada inferiormente (ó superiormente) en un dominio de Lipschitz estrellado D . Entonces u tiene un límite finito no - tangencial en cada $Q \in \partial D$, excepto para un conjunto de medida armónica cero”.

Respecto a un dominio de Lipschitz “estrellado” se tiene la definición, [9]: “sea (r, θ) coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, $0 \leq r < \infty$, $\theta \in S^{n-1}$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Entonces se dice que un dominio D en $\mathbb{R}^n$ es llamado un dominio de Lipschitz “estrellado” (“starlike”), con respecto al origen, si existe $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, donde φ es una función estrictamente positiva y $|\varphi(\theta) - \varphi(\theta')| \leq M|\theta - \theta'|$ para todo $\theta, \theta' \in S^{n-1}$; entonces por definición $D = \{(r, \theta) / 0 \leq r < \varphi(\theta)\}$ ”.

Nota 5.2. En [8], pag. 309, los autores definen, con otras palabras equivalentes, a los dominios de Lipschitz estrellados. El lector interesado en mayores detalles sobre este tema ver [8].

6. La contribución de B. Dahlberg. [11], [12]. [13]. Recordemos que el punto de partida fue el teorema de Fatou; pues bien, su evolución y sus relaciones con diversas ideas de la teoría del potencial, en especial con el teorema de Dirichlet, fue fundamental para el surgimiento de nuevas teorías en el análisis armónico en las últimas décadas del siglo pasado. Así, hemos visto la contribución de Hunt - Wheeden en esta ruta al estudiar, por primera vez, los problemas de contorno sobre dominios más generales, como son los dominios de Lipschitz, lo que motivó otras contribuciones, como las dadas por el matemático sueco Bjorn Dahlberg en las décadas citadas y quién desarrolló un ingenioso método para desarrollar nuevas ideas en la teoría del potencial en el contexto de los espacios de Lipschitz y de las medidas armónicas. Veamos el siguiente esquema de algunas de sus contribuciones.

¿Qué relación existe entre la medida armónica w sobre un dominio de Lipschitz $D \subset \mathbb{R}^n$ con la medida de superficie σ (ó medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional? ... Esta es una cuestión que estudia Dahlberg en su trabajo [11]. Él verifica que si $E \subset \partial D$ es un conjunto de Borel entonces se tiene

$$w(E) = 0 \text{ si y solo si } \sigma(E) = 0.$$

De esta manera establece que la medida armónica w es absolutamente continua con la medida de superficie (de Lebesgue); en este contexto w y σ son equivalentes sobre ∂D . Esto conduce a que el resultado de Hunt-Wheeden pueda ser escrito en la forma:

“ Sea u una función armónica positiva sobre un dominio de Lipschitz, entonces existe un subconjunto $G \in \partial D$, con $\sigma(G) = 0$, tal que $u(Q)$ tiene límite no - tangencial para $Q \in \partial D - G$ ”.

Ahora veamos algunos argumentos del trabajo [12]. Como se sabe el problema de Dirichlet es planteado con dado de contorno f , una función continua; Dahlberg estudia al citado problema con dados de contorno f en el espacio L^p en el contexto de los dominios de Lipschitz y C^1 .

De esta manera nos dice, sea D un dominio de Lipschitz y sea Hf la solución del problema de Dirichlet con valores de contorno f ; Dahlberg verifica que si $f \in L^p(\sigma)$, donde σ es la medida de superficie de ∂D y $2 \leq p < \infty$, entonces la función maximal no - tangencial asociada a Hf está también en L^p . Observa que el exponente 2 es lo crucial; pero también observa que si D fuera un dominio C^1 , entonces el resultado es verdadero para $1 < p < \infty$. En esta ruta se tiene el clásico resultado:

“ sea D la bola unitaria (en $\mathbb{R}^n$), f una función integrable con respecto a la medida armónica w y Hf su integral de Poisson familiar, entonces para $1 < p < \infty$ se verifica que:

$$\int_{\partial D} \sup_{0 < r < 1} |Hf(rQ)|^p d\sigma(Q) \leq C_p \int_{\partial D} |f(Q)|^p d\sigma(Q). \quad (6.1)$$

Dahlberg extiende esta desigualdad cuando D es un dominio de Lipschitz. Él prueba que desigualdades del tipo (6.1) son equivalentes a cierta relación entre las medidas de conjuntos en un dominio de Lipschitz D . Así se tiene el,

Teorema 6.1. “ Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 3$ un dominio de Lipschitz, $2 \leq p < \infty$ y μ - una medida positiva sobre D , entonces: existe una constante K tal que para todo $f \in L^p(\sigma)$ se tiene

$$\int_D |Hf|^p d\mu \leq K \int_{\partial D} |f|^p d\sigma$$

si y sólo si existe una constante M tal que para todo $Q \in \partial D$ y todo $r > 0$ se tiene

$$\mu\{P \in D / |P - Q| < r\} \leq Mr^{n-1}.$$

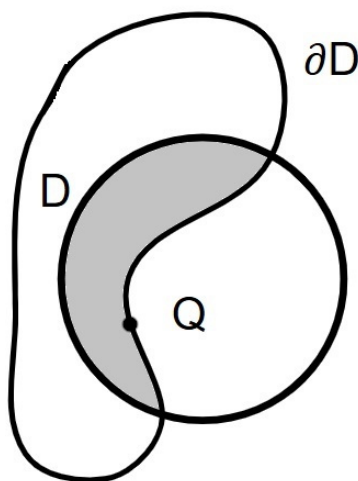


Figura 6.1: Fatou en dominios de Lipschitz.

Se recuerda que la medida de la bola es asumida ser r^n y que la medida de su superficie es r^{n-1} .

Se enfatiza que si D es un dominio C^1 , entonces el teorema 6.1. es cierto para $1 < p < \infty$. Además, se observa que el teorema sigue siendo válido en el caso $n = 2$. Dahlberg demuestra el teorema 6.1., al final de su trabajo [12], pag.21; y aún demuestra dos teoremas más relacionados con este tema.

Pasamos ahora a ver algunos aspectos del trabajo de Dahlberg [13]. Previamente veamos algunos antecedentes. Se observa que en el teorema de Fatou, y en sus extensiones, la acotación (ó acotación inferior ó superior) de la función armónica u sobre conos truncados contenido en el dominio, es parte esencial en la hipótesis del teorema, condición que en posteriores argumentos presenta ciertas dificultades analíticas para tener la caracterización de la existencia del límite no-tangencial de u ; por ello se buscó otra forma de obtener tal caracterización. Estos esfuerzos se remontan a los trabajos de Marcinkiewicz - Zygmund (“A theorem of Lusin”, 1938) y de D. Spencer (“A function theoretic

identity”, 1943). En esta ruta las ideas de función integral área y de función maximal no -tangencial serán de utilidad. Así se tiene el resultado en el plano de Marcinkiewicz - Zygmund (la condición necesaria) y de Spencer (la condición suficiente) (con notación anterior):

“La función $u(z)$ tiene límite no - tangencial ctp $d\theta$ en E si y sólo si la integral área:

$$A_\alpha(u)(e^{i\theta}) = \left[\int_{\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |\nabla u(x + iy)|^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}}$$

es finita ctp $d\theta$ en E ”.

Posteriormente A.P. Calderón en [5], ver Teorema 3.7., extiende parcialmente (en 1950) el resultado de Marcinkiewicz - Zygmund pues demuestra que “si u es una función armónica limitada sobre conos truncados $\Gamma_\alpha(x)$ con vértices en

$E \subset \mathbb{R}^n = \partial(\mathbb{R}^{n+1})$, entonces la función integral área

$$A_\alpha(u)(x) = \left[\int_{\Gamma_\alpha} \text{dist}(Q, \mathbb{R}^n)^{1-n} |\nabla u(x)|^2 dQ \right]^{\frac{1}{2}}$$

es finita ctp dx en E ”.

Se observa que la condición suficiente era un problema abierto hasta 1961 cuando E. M. Stein demostró tal condición. Ver [14] para mayores detalles, en particular ver la Introducción donde Stein da detalles de resultados anteriores en relación con el tema que estamos tratando. Las investigaciones siguieron posteriormente en esta dirección donde contribuyeron matemáticos como Burkholder, Gundy, Wheeden, . . . Llegamos a 1978, fecha en que Dahlberg publica su trabajo [13] donde estudia la función integral área con su relación con la función maximal no - tangencial sobre dominios de Lipschitz en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, extendiendo así diversos resultados análogos. Demuestra desigualdades integrales pesadas entre la integral área de Lusin y la función maximal no - tangencial de una función armónica en un dominio de Lipschitz. Los resultados de Dahlberg extienden a los obtenidos por Gundy - Wheeden, ver [15], donde ellos demuestran desigualdades análogas pero para funciones armónicas en el semi-espacio $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Veamos brevemente [13]. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de Lipschitz donde se asume que para cada $Q \in \partial\Omega$ le está asociado un cono abierto $\Gamma(Q)$ con vértice en Q tal que $\Gamma(Q) \subset \Omega$. Sea u una función armónica en Ω ; se define

$$A(u, Q) = \left[\int_{\Gamma(Q)} |Q - P|^{2-n} |\nabla u(P)|^2 dm P \right]^{\frac{1}{2}}$$

la función integral área y

$$N(u, Q) = \sup_{\Gamma(Q)} |u(P)|$$

la función maximal no-tangencial, donde ∇u es el gradiente de u y m es la medida de Lebesgue. Sea $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función no limitada, no decreciente, continua y tal que $\Phi'(2t) \leq c\Phi'(t)$. Entonces bajo ciertas condiciones de regularidad sobre los conos $\Gamma(Q)$ Dahlberg demuestra que para u armónica en el dominio de Lipschitz D con $u(Q^*) = 0$, $Q^* \in D$ fijo, se tiene que existen constantes C_1 y C_2 tal que se tiene:

$$C_1 \int_{\partial D} \Phi[A(u)] d\mu \leq \int_{\partial D} \Phi[N(u)] d\mu \leq C_2 \int_{\partial D} \Phi[A(u)] d\mu$$

donde μ varía en una clase ancha de medidas, que incluyen a las medidas de superficie y a las medidas armónicas. Más explícitamente, μ es una medida positiva que no se anula sobre cualquier componente de $\partial\Omega$ y existen los números $A > 0$ y $\theta > 0$ tal que para todo $Q \in \partial\Omega$ y todo $r > 0$ se tiene $E \subset A(Q, r)$, entonces se tiene

$$\frac{\mu(E)}{\mu(A(Q, r))} \leq A \left[\frac{\sigma(E)}{\sigma(A(Q, r))} \right]^\theta \quad \text{y} \quad \mu[A(Q, 2r)] \leq C\mu[A(Q, r)] \quad [6.2]$$

donde σ es una medida de superficie sobre $\partial\Omega$ y $A(Q, r) = \partial\Omega \cap B(Q, r)$ siendo $B(Q, r)$ la bola con centro Q y radio r .

Definición 6.1. Una medida que satisface estas suposiciones se dice que satisface la “condición A_∞ ”.

Observamos que la naturaleza de la función Φ , de la medida μ y del dominio D producen resultados particulares previos de la teoría que se está tratando; por ejemplo si Φ es la función identidad entonces en las desigualdades [6.2] está el germen de la cuestión: “reemplazar la acotación de u sobre

conos por la función área”. Por otro lado, si $\Phi(t) = t^p$, $p > 0$, se obtiene el resultado de Fefferman - Stein, [16], cuando μ es la medida de superficie y D es $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Además, la introducción de la clase general Φ es debido a Burkholder - Gundy, [17], donde el objetivo es demostrar algunas inecuaciones de la función distribución para la integral área y así demostrar como esas inecuaciones pueden servir para estudiar el comportamiento local y global de funciones armónicas. Veamos algunos argumentos de [17] a fin de reafirmar definiciones que se están usando. Sea u una función armónica en $\mathbb{R}_+^{n+1}$; la integral área de u es la función no - negativa $A = A_\alpha(u)$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ vía

$$A^2(x) = A_\alpha^2(u, x) = \int \int_{\Gamma(x)} y^{1-n} |\nabla u(s, y)|^2 ds dy$$

donde $\alpha > 0$ real y el cono $\Gamma(x) = \Gamma(x; \alpha) = \{(s, y) / |x - s| < \alpha y\}$; ∇u es el gradiente de u . La función maximal no - tangencial $N = N_\alpha(u)$ es definida vía

$$N(x) = \sup_{(s, y) \in \Gamma(x)} |u(s, y)|.$$

Ahora Burkholder - Gundy consideran a la función Φ definida sobre $[0, \infty]$ tal que $0 < \Phi(1) < \infty$ y $\Phi(b) = \int_0^b \varphi(\lambda) d\lambda$, $0 \leq b \leq \infty$, para alguna función medible no negativa φ definida sobre $[0, \infty)$ satisfaciendo la condición de “crecimiento”

$\varphi(2\lambda) \leq c\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$. Bajo estas condiciones se demuestra el teorema:

“Se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(A) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(N) dx;$$

si la integral de la izquierda fuera finita, entonces se tiene que el $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y)$ existe, es finito y constante para $x \in \mathbb{R}^n$. Si este límite fuera cero, entonces se tiene la desigualdad inversa, esto es, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(N) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(A) dx”.$$

En la sección 3 los autores estudian al comportamiento local de las funciones armónicas, en particular un resultado de Stein, [14], relativo a que la función armónica u tiene límite finito no - tangencial ctp en todo punto de E . Por otro lado, Gundy - Wheeden, [15], amplían la clase de medidas al considerar medidas que pertenecen a la clase A_∞ .

Volvamos al trabajo de Dahlberg [13]. Con el objeto de fijar las ideas recordemos algunos conceptos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitado es llamado un dominio de Lipschitz si $\partial\Omega$ puede ser cubierto por un número finito de cilindros circulares rectos abiertos cuyas bases tienen una distancia positiva de $\partial\Omega$ y, además, corresponde a cada cilindro L un sistema de coordenados (x, y) , donde $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, con el eje $-y$ paralelo a L , y una función $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo una condición de lipschitz $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x - y|$ tal que $L \cap \Omega = \{(x, y) / y > \varphi(x)\} \cap L$ y $L \cap \partial\Omega = \{(x, y) / y = \varphi(x)\} \cap L$. Dahlberg asume que un cono será convexo, truncado y circular recto. En estas condiciones supone que $\{\Gamma(Q)/Q \in \partial\Omega\}$ es una familia de conos tal que el vértice de $\Gamma(Q)$ es Q para todo $Q \in \partial\Omega$. Entonces afirma que esta familia es regular con respecto al dominio de Lipschitz Ω si existe un cubrimiento de $\partial\Omega$ con un número finito de conjuntos abiertos U tal que se tiene:

“A cada conjunto U existe un cilindro circular recto, abierto L tal que $\overline{U} \subset L$ y $\partial\Omega$ está definido dentro de L por una función de Lipschitz. Además, a esta U le está asociada tres conos Γ_i , $i = 1, 2, 3$, todos con vértices en 0 y sus ejes están a lo largo del eje de L tal que se tiene $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 - \{0\}$ y para todo $Q \in L \cap \partial\Omega$ se tiene

$$\Gamma_1 + Q \subset \Gamma(Q) \subset \overline{\Gamma(Q)} - \{Q\} \subset \Gamma_2 + Q \quad \text{y} \quad \Gamma_3 + Q \subset \Omega \cap L.$$

Por otro lado se pone (como antes):

$$A(u, \Gamma, Q) = \left[\int_{\Gamma(Q)} |\nabla u|^2 |Q - P|^{2-n} dm(Q) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad N(u, \Gamma, Q) = \sup_{\Gamma(Q)} |u(P)|.$$

Una medida positiva μ sobre $\partial\Omega$ que satisface [6.2] se dice que satisface la condición A_∞ , ver [15] para mayores detalles sobre este tipo de medidas. Ahora Dahlberg anuncia su resultado principal:

Teorema 6.2. “Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 2$, un dominio de Lipschitz y sea $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua, no - decreciente, no limitada tal que $\Phi(0)$ y $\Phi(2\lambda) \leq C\Phi(\lambda)$. Sea P^* un punto fijo en Ω y se supone que $\{\Gamma(Q)/Q \in \partial\Omega\}$ es una familia regular de conos. Además, se supone que μ es una medida positiva sobre $\partial\Omega$ satisfaciendo la condición A_∞ . Entonces existen las constantes positivas C_1 y C_2 tal que si u es armónica en Ω y se anula en P^* , entonces

$$C_1 \int \Phi(N) d\mu \leq \int \Phi(A) d\mu \leq C_2 \int \Phi(N) d\mu$$

donde N y A denotan $N(u, \Gamma, \cdot)$ y $A(u, \Gamma, \cdot)$ respectivamente; las constantes C_1 y C_2 son independientes de u pero dependen de otros factores”.

Luego de algunos resultados técnicos, el teorema 6.2. es demostrado al final del artículo; es una demostración técnica luego de usar algunos lemas auxiliares.

Antes de presentar la contribución de Jerison - Kenig veamos algunos argumentos hacia tal contribución. Sea D un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; una función $u \in C^2(D)$ es armónica si $\Delta u = 0$, donde Δ es el laplaciano familiar. Si D es además regular y limitado en $\mathbb{R}^n$, entonces se tienen los clásicos problemas de valor de contorno:

- (i) **Problema de Dirichlet.** “Dado $f \in C^0(\partial D)$, encontrar u armónica en D , continua en $\overline{D}$ tal que $u = f$ en ∂D .”
- (ii) **Problema de Neumann.** “Dado $g \in C^0(\partial D)$, encontrar $u \in C^1(D)$ tal que $\Delta u = 0$ en D y $\frac{\partial u}{\partial N} = g$ sobre ∂D , donde N es la normal interior unitaria a ∂D ”.

Estos problemas tienen su origen en la física; así, el problema de Dirichlet corresponde al problema de encontrar la temperatura u dentro de un cuerpo D cuando se conoce la temperatura f en la superficie del cuerpo (por ejemplo, cuando uno está enfermo y nos ponen un termómetro bajo el brazo); respecto al problema de Neumann se trata de encontrar la temperatura u dentro de un cuerpo D cuando se conoce el flujo de calor g sobre la superficie del cuerpo.

Con el progreso del análisis en sus distintas modalidades se consideraron espacios de funciones más variados y esto condujo a que tales problemas sean formulados con funciones f que no precisaban ser continuas sobre ∂D sino pertenecer a espacios como son L^p , $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de Lipschitz Λ_α , los espacios de oscilación media acotada BMO , ... Por otro lado, el dominio D y su contorno ∂D no precisan ser regulares, esto es, ser de clase C^∞ sino ser solamente C^1 o ser dominios con esquinas (un rectángulo, por ejemplo), o ser dominios de Lipschitz, dominios C^1 , ..., como ya hemos visto antes. Además, y en relación al teorema de Fatou, la no continuidad de los datos de contorno f trajo algunas dificultades en el sentido de la convergencia de puntos $x \in D$ hacia puntos $Q \in \partial D$, y así se introdujeron nuevas ideas sobre tipos de convergencia, como es la convergencia no - tangencial a través de conos.

En relación al trabajo de Dahlberg, él usando ciertas estimativas para la medida armónica resuelve el problema de Dirichlet con dato de contorno $f \in L^p(\partial D, d\sigma)$ para $p \geq 2$ si D es un dominio de Lipschitz; y para $p > 1$ si D es un dominio C^1 . Sin embargo su método parece no funcionar cuando se ataca al problema de Neumann sobre tales dominios, y esto motivó otras investigaciones. En esta dirección veamos brevemente la contribución de Fabes - Jodeit - Riviere (FJR), [18]. En su trabajo ellos retornan al clásico método de las camadas de potenciales, vía ecuaciones integrales, para resolver problemas de valor de contorno cuando el dominio es C^1 . En [18] (FJR) resuelven el problema de Neumann cuando D es un dominio C^1 dejando abierta la cuestión de saber si el método de las camadas funciona para resolver los problemas de Dirichlet y Neumann cuando el dominio es de Lipschitz. En otro artículo presentaremos un estudio detallado del trabajo de (FJR).

7. La Contribución de Jerison - Kenig. [19]. En las décadas de los 1970's - 80's se dió mucho impulso a las EDP en el contexto de nuevos avances surgidos sobre todo por las contribuciones pioneras de A. P. Calderón, [20], 1977, en donde establece ciertas propiedades de la integral de Cauchy sobre curvas de Lipschitz y su trabajo de 1965 “Commutator of singular integral operators” fueron fundamentales para tal desarrollo. En base a estas contribuciones, fundamentalmente, se dieron otras investigaciones en tal dirección como las que hemos expuesto en este escrito; algunos de ellos de la Escuela de Chicago, como es el caso de lo que trata esta sección. En efecto, D. Jerison y C. Kenig desarrollaron un proyecto de avances en las EDP usando nuevas técnicas de análisis armónico. Entre otros temas estudiaron a los problemas de Dirichlet y de Neumann. En esta oportunidad veremos, brevemente, el trabajo [19] en donde resuelven el problema de Neumann para dominios de Lipschitz D .

Veamos. Si $g \in L^2(d\sigma)$ con $\int_{\partial D} g d\sigma = 0$, entonces existe una única función u tal que $\Delta u = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial N} = g$ sobre ∂D ; además, $\int_{\partial D} u d\sigma = 0$ y $\|M(\nabla u)\|_{L^2(d\sigma)} \leq c\|g\|_{L^2(d\sigma)}$, donde $M(v)$ es la función maximal no - tangencial de v sobre D . Jerison - Kenig consideran además otros tipos de dominios, como los dominios no - tangencialmente accesibles (NTA) los que incluyen a los dominios de Lipschitz y a otros clásicos dominios; además, por ejemplo, ellos extienden el teorema de Fatou cuando el dominio es NTA y así mismo extienden a estos dominios el teorema relativo a la función integral área al establecer que el conjunto de puntos de ∂D donde la función área de u , armónica en D , es igual ctp respecto a w (una medida armónica), al conjunto de puntos donde u tiene límite no - tangencial.

Los dominios NTA son dominios que tienen forma enroscada, pensemos en un “tirabuzón” y en llegar a un punto en la frontera puede ser muy difícil desde un punto interior del dominio. En [1] Jerison - Kenig desarrollan una geometría para estos dominios así como consideran otros tipos de dominios los cuales tienen aplicaciones en el estudio de las EDP. Así, por ejemplo, se usan a los dominios L_1^p que se caracterizan porque sus contornos son “parchados” localmente con curvas φ tal que $\nabla \varphi \in L^p$. Para estos dominios, con $p > n - 1$, Jerison - Kenig prueban que la medida

armónica y la medida de superficie son absolutamente continuas mutuamente sobre ∂D . Por otro lado, si la condición fuera que $\nabla\varphi \in BMO$, se definen los dominios BMO_1 y verifican que $BMO_1 \subset NTA$, y que la medida armónica pertenecen a la clase A_∞ . Otro aspecto que tiene su propio interés es la teoría de los espacios de Hardy H^p y su relación con los temas que estamos tratando. Jerison - Kenig en [1] estudian el caso de dominios D que son NTA en relación con los espacios H^p , así como la descomposición atómica y el problema de la dualidad de $H^1(D, dw)$ con $BMO(\partial D)$. Todo esto motiva un estudio aparte por parte del lector.

Veamos brevemente algunos comentarios de [19]. En este artículo se presentan tres teoremas, de los cuales el segundo es el principal y se le prueba con detalles.

Comencemos. Sea D un dominio de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, $n > 2$; σ es una medida de superficie sobre ∂D ; $\frac{\partial}{\partial N}$ es la derivada normal sobre ∂D . En esta nota ellos acotan la función maximal no - tangencial del gradiente u de una solución generalizada del problema de Neuman $\Delta u = 0$ en D ; $\frac{\partial}{\partial N}u = g$ sobre ∂D con dado de contorno $g \in L^2(d\sigma)$. Por definición, la función maximal no - tangencial $M(u)$ de una función u definida sobre $Q \in \partial D$, es

$$M(u)(Q) = \sup\{|u(P)|/P \in D, |P - Q| < 2\text{dist}(P, \partial D)\}.$$

Teorema 7.1. “Sea $f \in L^2(d\sigma)$, entonces existe una única función armónica u en D tal que

$$\|M(u)\|_{L^2(d\sigma)} < C\|f\|_{L^2(d\sigma)},$$

y además, $u(P) \rightarrow f(Q)$ cuando $P \rightarrow Q$ no - tangencialmente para ctp Q , $d\sigma$; $C = C$ (la constante de Lipschitz)”.

Este resultado fue ya estudiado por Dahlberg [11] y por Jerison - Kenig.

Nota 7.1. Los autores consideran dominios de Lipschitz estrellados en la nota. Bien, sea $\varphi(\theta)$ una función de Lipschitz positiva sobre la bola unitaria $B^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. D es el dominio $\{(r, \theta)/0 \leq r < \varphi(\theta)\}$. Se tiene el

Teorema 7.2. “Sea $g \in L^2(d\sigma)$ tal que $\int_{\partial D} g d\sigma = 0$. Entonces existe una única función u tal que

(i) $\Delta u = 0$ en D , $\frac{\partial u}{\partial N} = g$ sobre ∂D en el sentido generalizado;

$$\int_{\partial D} u d\sigma = 0.$$

(ii) $\|M(\nabla u)\|_{L^2(d\sigma)} \leq C\|g\|_{L^2(d\sigma)}$ ”.

Como **Corolario** se tiene: “ $\frac{\partial u(P)}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial u(Q)}{\partial x_j}$ cuando $P \rightarrow Q$ tangencialmente ctp Q , y $N_Q \cdot \nabla u(Q) = g(Q)$, donde N_Q es la normal a ∂D en Q ”.

La demostración de este teorema es un tanto técnica pero el lector la puede estudiar en [19]. En seguida se establece un teorema sobre el problema de Dirichlet.

Teorema 7.3. “Sea u la solución del problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ en D , $u = f$ sobre ∂D para $f \in L^2(d\sigma)$. Si $\nabla_t f \in L^2(d\sigma)$, entonces

$$\|M(\nabla_t u)\|_{L^2(d\sigma)} \leq C\|\nabla_t f\|_{L^2(d\sigma)}.$$

Entremos ahora al trabajo [1] para ver algunos detalles complementarios a lo expuesto ya. Jerison - Kenig, en este extenso “paper”(80- 147), extienden resultados ya conocidos sobre el comportamiento, en el contorno, de funciones armónicas en $\mathbb{R}_+^{n+1}$ a dominios D de tipos más generales, como los ya mencionados anteriormente; y además, estos resultados están relacionados con las ecuaciones uniformemente elípticas. Este trabajo tiene 11 secciones:

1. Introducción.
2. Motivación.
3. Dominios no-tangencialmente accesibles.
4. Estimativas para medidas armónicas.
5. Comportamiento de contorno global de funciones armónicas.
6. Comportamiento de contorno local de funciones armónicas.
7. Continuidad Hölder de la función núcleo.
8. Descomposición atómica de H^p , $p_0 < p \leq 1$.
9. Estimativas de la función área y BMO.
10. Dominios BMO_1 .
11. Otros resultados y cuestiones abiertas.

Apéndice: Una localización.

Digamos algunas palabras sobre estas secciones.

7.1. . La Introducción contiene una descripción bastante detallada de [1]; comienza mencionando el trabajo de Fatou [2] como una contribución pionera en el análisis armónico ; luego se refiere a las contribuciones de Priwaloff (1923), al trabajo de Calderón [4], al de Carleson [7] en donde enfatiza que su método jugó un rol importante en las investigaciones posteriores. También se menciona a Stein [14] quien estudió el comportamiento de funciones armónicas en el contorno para dominios generales. Recuerdan que Hunt y Wheeden en 1968 - 70 trataron este tema para dominios de Lipschitz acotados y que sus resultados implican los teoremas de Calderón y Carleson. Luego pasan a describir el trabajo [1]. Mencionan que ahora se introducen los dominios NTA para tratar algunos comportamientos en el contorno y que ejemplos de tales dominios son los de Lipschitz y los dominios de Zygmund. Se enuncia un primer resultado en esta dirección.

Teorema 7.4. “Sea D un dominio acotado no - tangencialmente accesible (NTA) y sea u una función armónica en D . El conjunto de puntos de D donde u es no - tangencialmente acotada inferiormente es igual ctp con respecto a la medida armónica, con el conjunto donde u tiene un límite no - tangencial”.

Jerison - Kenig discuten varias formas de describir el comportamiento de contorno de funciones armónicas. Al respecto se menciona al trabajo de Calderón [4] quien en 1950 demostró que “ si u es no tangencialmente limitada sobre $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces $A_\alpha(u)(x)^2 = \int_{\Gamma_\alpha(x)} \text{dist}(x, \mathbb{R}^n)^{1-n} |\nabla(x)|^2 dx$ es finita ctp dx en E ”. Stein, en 1961, demostró el inverso de este resultado. Jerison - Kenig extienden tales resultados para dominios NTA:

Teorema 7.5. “Sea D un dominio acotado, no - tangencialmente accesible y u una función armónica en D . Entonces el conjunto de puntos de ∂D donde la integral área de u es finita es igual ctp respecto a la medida armónica, al conjunto de puntos donde u tiene un límite no - tangencial”.

En este contexto se menciona a la clase A_∞ de Muckenhoupt y se observa que la propiedad A_∞ de la medida armónica fue fundamental en el trabajo de Calderón sobre la integral de Cauchy sobre curvas de Lipschitz, 1977, [20].

La Clase $A_\infty(d\sigma)$. Una medida μ pertenece a $A_\infty(dv)$, donde dv es una medida sobre ∂D , si existen $\alpha, \beta \in (0, 1)$, tal que para todo conjunto de Borel $E \subset \Delta$, Δ la superficie de la bola unitaria de ∂D [esto es, es la intersección de una bola euclidiana con centro en un punto contorno, con ∂D] se tiene que

$$\frac{\partial(E)}{\partial(\Delta)} < \alpha \text{ implica } \frac{\mu(E)}{\mu(\Delta)} < \beta.$$

7.2. . En esta sección Jerison - Kenig narran como ellos fueron conducidos a la idea de dominio NTA y demuestran en el caso de 2 variables que “un dominio simplemente conexo es un dominio NTA si y sólo si la medida armónica para el dominio y su complemento satisface una condición doble”. [una medida μ satisface la “condición doble” si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se tiene $\mu[B(x, 2r)] \leq C\mu[B(x, r)]$. También se da la definición: “un dominio D es llamado un dominio de Zygmund (respectivamente un dominio BMO_1) si para todo $Q \in \partial D$ existe una bola B conteniendo Q y un difeomorfismo regular $\eta : B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\eta(D \cap B) = \{(x, y)/y > \phi(x), x \in \mathbb{R}^n\} \cap \eta(B),$$

donde ϕ pertenece a la clase de Zygmund Δ_1 (respectivamente, BMO_1)”. [un dominio BMO_1 en $\mathbb{R}^n$ es un dominio cuyo contorno es dado localmente en algún sistema de coordenadas C^∞ como el gráfico de una función ϕ con $\nabla\phi \in BMO$. Los dominios BMO_1 es una subclase de los dominios NTA. El siguiente resultado [1] es útil en el estudio del problema de Dirichlet sobre dominios BMO: “Sea D un dominio BMO_1 , entonces la medida armónica para D pertenece a la clase $A_\infty(d\sigma)$ ”.

7.3. Dominios no - tangencialmente accesibles. Los dominios de Lipschitz tienen las siguientes propiedades:

- (i) Existen números M y $r_0 > 0$ tal que si $r < r_0$ y $Q \in \partial D$, entonces existe un punto $A = A_r(Q) \in D$ tal que $M^{-1}r < |A - Q| < Mr$ y $M^{-1}r < \text{dist}(A, \partial D)$. (condición de “sacacorchos”).
- (ii) D_c satisface la condición de “sacacorchos” (D_c complemento de D).
- (iii) Si x_1 y $x_2 \in D$, $\text{dist}(x_j, \partial D) > c$ y $|x_1 - x_2| < 2^k c$, entonces existe una cadena de Mk bolas $B_1, \dots, B_{Mk}$ conectando x_1 y x_2 en el sentido que x_1 es el centro de B_1 , x_2 es el centro de B_{Mk} , $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$, $B_j \subset D$,
 $M^{-1} \text{diam} B_j \leq \text{dist}(B_j, \partial D) \leq M \text{diam} B_j$, y,
 $M^{-1} \min\{\text{dist}(x_1, B_j), \text{dist}(x_2, B_j)\} \leq \text{diam} B_j$.

Ver [9] y [1] para mayores detalles en donde se afirma que las condiciones (i) y (ii) siguen de la existencia de conos interior y exterior para dominios de Lipschitz.

Definición 7.1. Un dominio D que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es llamado un dominio no - tangencialmente accesible (NTA).

Jerison - Kenig estudian las medidas armónicas en dominios de Lipschitz y los resultados son también válidos para dominios NTA desde que (i), (ii) y (iii) siguen en dominios de Lipschitz y son tales propiedades a ser usadas.

Los dominios de Zygmund son dominios NTA (un dominio es de Zygmund si es un dominio dado localmente por gráficas de funciones $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición de Zygmund

$$|\varphi(x+t) + \varphi(x-t) - 2\varphi(x)| \leq C(|t|)$$

Nota 7.2. Se observa en [1] que el nombre de “sacacorcho” es porque la unión de bolas no - tangencial de radios $\frac{1}{2}M^{-1}r$ cuando r converge a cero, forman una región no - tangencial que tiende a Q .

En esta sección se demuestra que “todo dominio de Zygmund es un dominio NTA”, cuya demostración necesita de algunos resultados previos, como la versión local del dominio NTA: “si D es un dominio NTA, entonces para cualquier $Q \in \partial D$ y $r < r_0$, existe un dominio $\text{NTA}\Omega \subset D$ tal que

$$B(Q, M^{-1}r) \cap D \subset \Omega \subset B(Q, M, r) \cap D,$$

donde la constante M en la definición de NTA Ω es independiente de Q y de r ”. Luego de un comentario, esta sección culmina.

7.4. Estimativas para la medida armónica. Esta sección contiene algunos lemas dedicados a la medida armónica y según los autores es una sección técnica en sus argumentos. Se estudia argumentos relacionados a la función de Green, a la “condición doble” para una medida armónica, así como de otros resultados conocidos en el análisis armónico. Se asume, en esta sección, que D es un dominio NTA acotado, M es la constante que surge en las definiciones dadas. Veamos escuetamente algunos de tales lemas.

Lema 7.6. “Existe $\beta > 0$ tal que para todo $Q \in \partial D$, $r < r_0$ y toda función armónica positiva $u \in D$, si u se anula continuamente sobre $\partial D \cap B(Q, r)$, entonces para $x \in D \cap B(Q, r)$, se tiene

$$u(x) \leq M \left(\frac{|x - Q|}{r} \right)^\beta C(u),$$

donde $C(u) = \sup\{u(y)/y \in \partial B(Q, r) \cap D\}$ ”.

Lema 7.7. “Sea $r < r_0$; si $Q \in \partial D$, entonces se tiene

$$w^x(\Delta(Q, 2r)) \geq M^{-1}, \text{ para todo } x \in B(A_r(Q), \frac{1}{2}M^{-1}r)."$$

Lema 7.8. Si $u \geq 0$ es una función armónica en D , y u se anula continuamente sobre $A(Q, 2r)$, entonces $u(x) \leq M'u(A_r(Q))$ para todo $x \in B(Q, r) \cap D$, para algún M' que solo depende de M .

En [1] Jerison - Kenig demuestran otros lemas relativos a estimativas para las medidas armónicas; el lector interesado en este tema es sugerido a visitar el citado trabajo.

7.5. Comportamiento de contorno global de funciones armónicas. En esta sección se estudia a la “función núcleo” $K(x, Q)$, la que es una función armónica positiva con ciertas propiedades, y su relación con los dominios NTA; así mismo se consideran a las regiones no - tangenciales, así como a la familiar función maximal de Hardy - Littlewood y también se menciona a la derivada de Radon - Nikodym. Se comienza con el “principio de contorno de Harnack” para dominios NTA, que dice “sea D un dominio NTA y sea V un conjunto abierto.

Para cualquier conjunto compacto $K \subset V$ existe una constante C tal que para todas funciones armónicas positivas u y v en D , que se anulan continuamente sobre $\partial D \cap V$, $u(x_0) = v(x_0)$ para algún $x_0 \in D \cap K$ implica que $C^{-1}u(x) < v(x) < Cu(x)$ para todo $x \in K \cap \bar{D}$ ”.

Nota 7.3. Para el caso de dominios de Lipschitz este principio es considerado en [11].

Notación. Si x_0 es un punto fijo de D y se denota $w = w^{x_0}$ se pone

$K(A, Q) = \left(\frac{dw^A}{dw} \right) (Q)$... la derivada de Radon - Nikodym (derivada que existe por principio de Harnack).

Usando la condición doble $[w^x(\Delta(Q, 2r)) < Cw^x(\Delta(Q, r))]$ se tiene que

$$K(A, Q) = \lim_{\Delta' \rightarrow Q} \frac{w^A(\Delta')}{w(\Delta')} \text{ ctp } (w) \text{ cuando } \Delta' \text{ se “encoge” a } Q.$$

Veamos algunos resultados, [1], para este tipo de dominios.

Lema 7.9. Sea D un dominio NTA y u una función armónica, positiva, en D y continua en $\bar{D} - (Q_0)$, donde $Q_0 \in \partial D$. Si $u = 0$ sobre $\partial D - \Delta(Q_0, r)$ entonces para todo $x \in D - B(Q_0, Mr)$ se tiene

$$u(x) \cong u(A_r(Q_0))w^x(\Delta(Q_0, r)).$$

Lema 7.10. “Sea D un dominio NTA; entonces existe una función núcleo u en todo punto del contorno”.

Lema 7.11. “Sean u_1 y u_2 dos funciones núcleos para D en Q , entonces

$$M^{-1} \leq \frac{u_1(x)}{u_2(x)} \leq M \text{ para todo } x \in D”.$$

Teorema 7.12. “Sea D un dominio NTA; entonces existe exactamente una función núcleo en $Q \in \partial D$. Ella es dada vía $K(x, Q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{w^x(\Delta(Q, r))}{w(\Delta(Q, r))}$; este límite existe para todo Q ; además, $K(x, Q)$ es una función armónica positiva de x , $x \in D$, y es una función continua de $Q \in \partial D$ ”.

Para los resultados a seguir se remarca las notaciones siguientes.

Una región no - tangencial en $Q \in \partial D$ es denotada con

$$\Gamma_\alpha(Q) = \{P \in D / |P - Q| < (1 + \alpha)d(P, \partial D)\};$$

la función maximal no - tangencial se denota con

$N_\alpha(u)(Q) = \sup\{|u(P)| / P \in \Gamma(Q)\}$ donde u es definida en D . A veces solo se escribe $N(u)(Q)$ es vez de $N_\alpha(u)(Q)$. Ahora se va a relacionar esta función maximal con la conocida función maximal de Hardy - Littlewood con respecto a $w = w^{x_0}$ para $f \in L^1(dw)$; así, por definición

$$M_w(f)(Q) = \sup \frac{1}{w(\Delta(D, r))} \int_{\Delta(Q, r)} |f(Q')| dw(Q').$$

También se dice: u converge a f no - tangencialmente en Q si para todo α , $u(x)$ restringido a $\Gamma(Q)$ converge a $f(Q)$ cuando $x \rightarrow Q$. Se tienen las siguientes conocidas estimativas:

$$w\{Q / M_w f(Q) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(dw)}; \lambda > 0 \text{ y}$$

$$\text{si } 1 < p \leq \infty, \|M_w f\|_{L^p(dw)} \leq C_p \|f\|_{L^p(dw)}.$$

Entonces se tiene el siguiente teorema cuya demostración es indicada usando lemas ya establecidos.

Teorema 7.13. “Sea D un dominio NTA, $f \in L^1(dw)$ y se define $u(x) = \int_{\partial D} f(Q) K(x, Q) dw(Q)$ entonces $N_\alpha(u)(Q) \leq C M_w(f)(Q)$ y u convergen no - tangencialmente a f ctp w . Además, si μ es una medida de Borel finita sobre ∂D , si $d\mu = f dw + dv$, donde v es singular con respecto a w y si $u(x) = \int_{\partial D} K(x, Q) d\mu$, entonces u converge no - tangencialmente a f ctp w ”.

Otro interesante resultado establece que “si D es un dominio NTA y u es una función armónica positiva en D , entonces existe una única medida de Borel positiva μ sobre D tal que $u(x) = \int_{\partial D} K(x, Q) d\mu(Q)$ ”, de donde se tiene que “si u es una función armónica positiva en D , entonces u tiene límites no - tangenciales ctp w ”. Ahora, Jerison - Kenig pasan a demostrar el último resultado de esta sección:

Teorema 7.14. “Sea D un dominio NTA; si $f \in L^2(dw)$, $\int f dw = 0$ y $u(x) = \int_{\partial D} f(Q) dw^x(Q)$, entonces $\int_D |\nabla u|^2 |G(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} f(Q)^2 dw(Q) < \infty$.”

Recíprocamente, si u es una función armónica, $u(x_0) = 0$ y $\int_D |\nabla u|^2 |G(x)| dx < \infty$, entonces existe $f \in L^2(dw)$ tal que $u(x) = \int f(Q) dw^x(Q)$ y u converge no - tangencialmente a f ctp w ”.

La prueba de este teorema es un poco técnica, requiere de algunos argumentos auxiliares; el lector interesado en estudiar la demostración, ver [1].

7.6. Comportamiento de contorno local de funciones armónicas. En esta sección D es un dominio NTA; $\Gamma_\alpha^h(Q) = \Gamma_\alpha(Q) \cap B(Q, h)$ denota una región no - tangencial truncada “aproximada”(sacacorcho) en $Q \in \partial D$.

Los autores luego de establecer tres lemas relacionados demuestran el

Teorema 7.15. “Sea u una función armónica en D y no - tangencialmente limitada inferiormente sobre $F \subset \partial D$; entonces u tiene límite no - tangencial ctp w sobre F ”.

Ahora pasan a considerar la “integral área” de u en D . Más precisamente, “sea $u \in C^1(D)$, $\alpha > 0$; la integral área de u en D es definida vía:

$$A_\alpha(u)(Q)^2 = \int_{\Gamma_\alpha(Q)} |\nabla u(x)|^2 \mathbf{d}(x)^{2-n} dx \text{ para } Q \in \partial D”.$$

Nota 7.4.

Se usó la notación $\mathbf{d}(x) \equiv d(x, D)$. Por otro lado, la integral área de u es finita sobre F si para cualquier $Q \in F$, existe $\alpha > 0$ (que depende de Q) tal que $A_\alpha(u)(Q) < \infty$. Al respecto se tiene el

Teorema 7.16. “Sea u una función armónica en un dominio NTA, entonces el conjunto de puntos de D donde la integral área es finita es igual ctp w al conjunto de puntos donde u tiene límite no-tangencial”.

Esta sección termina con la demostración del teorema 7.16 y para ello usa un lema y se culmina con un corolario.

La Función de Green. En estos argumentos se mencionó a la función de Green $G(x, y)$. Brevemente veamos a ver esta función. Dada una conveniente región D ; si para cada $x_0 \in D$ el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{en } D \\ u(Q) = -k|Q - x_0|^{2-n} & \text{sobre } \partial D \end{cases}$$

tiene por solución $u(x) = h(x, x_0)$, entonces la función de Green $G(x, x_0)$ es definida siendo

$$G(x, x_0) = k|x - x_0|^{2-n} + h(x, x_0)$$

donde $k = [(2-n)w_n]^{-1}$ y $h(x, x_0)$ es una función armónica de x , siendo x_0 fijo. [Estos argumentos vienen al observar a la tercera identidad de Green:

“Sea $u(x) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, entonces :

- si $n > 2$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= [(2-n)w_n]^{-1} \int_D \frac{\Delta u}{|x - x_0|} dx + \\ &+ [(2-n)w_n]^{-1} \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial}{\partial N} |Q - x_0|^{2-n} - |Q - x_0|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial N} \right) d\sigma \end{aligned}$$

- si $n = 2$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_D \log |x - x_0| \Delta u dx \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial}{\partial N} \log |Q - x_0| - \log |Q - x_0| \frac{\partial u}{\partial N} \right) d\sigma \end{aligned}$$

Corolario 7.1.

- (i) $G(x, x_0)$ es una función armónica en D .
- (ii) $G(Q, x_0) = 0$ para $Q \in \partial D$.
- (iii) Si D posee una función de Green $G(x, x_0)$, entonces se tiene

$$u(x_0) = \int_{\partial D} u(Q) \frac{\partial}{\partial N_Q} G(Q, x_0) d\sigma(Q). \quad (6.1)$$

Veamos algunas ideas más. Sea el problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ en D ; $u = f$ sobre ∂D , donde asumimos que D tiene una función de Green; la solución u de este problema pertenece a $C^2(\bar{D})$, pero al deducir (6.1) se ha asumido que $u \in C^1(\bar{D})$. De esta manera, y de un modo general

$$u(y) = \int_{\partial D} f(Q) \frac{\partial}{\partial N_Q} G(Q, y) d\sigma(Q)$$

no es solución del problema de Dirichlet dado. De esta manera el método de la función de Green para resolver el problema de Dirichlet presenta ciertas dificultades pues para encontrar tal solución se debe encontrar la función de Green de D , si existiera, lo que significa que a su vez se tenga de resolver otro problema de Dirichlet particular. Históricamente, este método fue dado a conocer por George Green en 1828 en un trabajo sobre electricidad y magnetismo. Ahora, de un modo general se define la función de Green $G(x, y)$ como la función definida sobre $\bar{D} \times \bar{D}$ que es continua para $x \neq y$ y que satisface al problema $\Delta_x G(x, Q) = \delta(x - a)$, $x \in D$; $G(x, Q) = 0$ para $x \in D$, $Q \in \partial D$.

Nota 7.5. δ es la “función” de Dirac”.

7.7. La Hölder continuidad de la función núcleo. Uno de los objetivos de este trabajo de Jerison - Kenig es estudiar los espacios de Hardy H^p , $p \leq 1$, sobre dominios NTA y para ello necesitan de algunos resultados de la función núcleo, como es una estimativa de estos núcleos, así como la continuidad-Hölder; para lograr estos objetivos se prueban algunos lemas y en base ello se exhiben dos teoremas, que son

Teorema 7.17. “Existe una constante M , que solo depende de la constante-NTA de D , tal que si $Q_0, Q_1 \in \partial D, x \in D$ y $|x - Q_0| \geq M^j |Q_1 - Q_0|$, entonces

$$\left| \frac{K(x, Q_1)}{K(x, Q_0)} - 1 \right| \leq M (1 - M^{-1})^j.$$

Como corolario se tiene la continuidad - Hölder de la función núcleo: “ $K(x, Q)$ es Hölder continua como función de Q , esto es: $|K(x, Q) - K(x, Q')| < C_x |Q - Q'|^\alpha$, para algún $\alpha > 0$ que solo depende la constante NTA de D ”.

Teorema 7.18. “Sea D un dominio NTA y V un conjunto abierto; K es un subconjunto compacto de V .

Entonces existe un número $a, a > 0$, tal que para todas las funciones armónicas positivas u y v en D que se anulan continuamente sobre $\partial D \cap V$, la función $\frac{u(x)}{v(x)}$ es Hölder continua de orden a en $K \cap \bar{D}$. En particular se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$ existe para todo $Q \in \partial D \cap K$ ”.

Con la demostración de este teorema termina esta sección. [1].

7.8. Descomposición atómica de $H^p, p_0 < p \leq 1$. Los espacios H^p , $1 \leq p \leq \infty$, juegan un rol muy importante en el análisis armónico; ellos fueron introducidos por Hardy en 1915. Veamos algunas ideas históricas sobre estos espacios. En el plano sea la bola unitaria $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ y $\partial D = \{e^{i\theta} / -\pi \leq \theta < \pi\}$ su contorno; Hardy considera la expresión

$$H^p(F, r) = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (F(re^{i\theta}))^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ donde } F \text{ es una función definida sobre } D,$$

$0 < p < \infty, 0 \leq r < 1$. F. Riesz, en 1923, dice: “una función analítica F está en $H^p, 0 < p \leq \infty$, si $\sup_{0 \leq r < 1} H^p(F, r) < \infty$; si $p = \infty$, se toma la norma del supremo”. Se sabe que si u es una función armónica en D , entonces se tiene que $u \rightarrow \tilde{u}$ unívocamente donde $\tilde{u}$ es la función conjugada de u y $F = u + i\tilde{u}$ es una función analítica en D .

Brevemente veamos los espacios H^p en el semi-espacio superior $\mathbb{R}_+^{n+1}$ donde el contorno es $\mathbb{R}^n$. Se observa que en esta situación ya no se dispone de los métodos del análisis complejo y se usarán los métodos del análisis real. Veamos. Sea $0 < p < \infty$; recordemos que $F \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ si

$$\sup_{y>0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{y} \quad \sup_{y>0} |F(x + iy)| < \infty \text{ si } p = \infty$$

Se verifica que para $p > 1$, la teoría H^p es similar a la teoría de L^p . Se resalta que los elementos de $H^p, p > 0$, tienen valor de contorno, esto es, existe $\lim_{y \rightarrow 0} F(x + iy)$ ctp $x \in \mathbb{R}^1$.

E. M. Stein - G. Weiss, en 1960, consideran una teoría para extender H^p al semi-espacio superior $\mathbb{R}_+^{n+1}$; la idea es tomar sistemas de $n + 1$ funciones armónicas $F(x, y) = \{u_i(x, y)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, definidas sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$ y satisfacen las ecuaciones generalizadas de Cauchy - Riemann $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \sum_{i=0}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, con $x_0 = y, y$ tal que

$$\sup_{y>0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ donde } |F(x, y)| = \left[\sum_{i=0}^n |u_i(x, y)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\{u_i(x, y)\}, i = 0, 1, \dots, n$, es llamado sistema conjugado.

Por definición si la función F satisface las anteriores condiciones, entonces $F \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Este aporte de Stein - Weiss permite conectar la teoría H^p con otras teorías del análisis armónico, como por ejemplo con las integrales singulares, con la transformada de Riesz R_j . Veamos algo al respecto. Sea $f_i(x) = u_i(x, 0)$, entonces: “ $\{u_i(x, t)\}, i = 0, 1, \dots, n$ es un sistema conjugado si y sólo si

$$f_i = f_0 * c_n \frac{x_i}{|x|^{n+1}}.”$$

Luego, una función $f(x)$, definida sobre $\mathbb{R}^n$, puede ser identificada con una función armónica $u(x, y)$, definida sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$, tal que $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x)$. Esta propiedad permite definir $H^1(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) / R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$, donde $R_j f(x) = c \text{ v.p. } \frac{x_j}{|x|^{n+1}} * f(x), x \neq 0$ donde c_n es una apropiada constante.

Ch. Fefferman - E. Stein, en 1972, publicaron [16] un excelente trabajo en donde los elementos de H^p ya no son funciones analíticas o funciones armónicas sino que son elementos construidos usando variables reales. Veamos cual es la idea. Sea $f(x)$ una función definida sobre el contorno $\mathbb{R}^n$ y $u(x, t) = (P_t * f)(x)$ su integral de Poisson; se sabe que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$; de esta

manera, la función armónica $u(x, t)$ tiene valor de contorno (problema de Dirichlet!). Esta idea motiva tomar, en vez del núcleo de Poisson P , un núcleo tipo aproximación de la identidad $\{\phi_t\}$ y formar integrales al estilo de “integrales de Poisson” y que pueden ser más generales; es decir se consideran convoluciones del tipo: $u(x, t) = (\phi_t * f)(x)$!

Más precisamente, sea $\phi \in S$ (una función rápidamente decreciente de Schwartz) tal que $\int \phi = 1$ y sea su dilatación $\phi_y(x) = y^{-n} \phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Bien, para $f \in S'$ (una distribución temperada) se toma la convolución $u(x, y) = (\Phi_y * f)(x)$. Sea ahora la función maximal $u^*(x) = \sup_{y>0} |u(x, y)|$; entonces se tiene la definición: $H^p = \{u(x, y)/u^*(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Si $u(x, y) \in H^p$ y $\psi \in S$, entonces se verifica que $\lim_{y \rightarrow 0} \int u(x, y) \psi(x) dx$ existe y es finito. Esto es, para cada $u \in H^p$ existe una distribución temperada f tal que $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x)$ en el sentido de la convergencia de las distribuciones temperadas; además, u es unívocamente determinada por f . Entonces, se podría escribir

$$H^p = \{ \text{distribuciones frontera de funciones en } H^p(\mathbb{R}^n) \}$$

Si $p \geq 1 - \frac{1}{n}$, los espacios H^p de Fefferman-Stein coinciden con los H^p de Stein-Weiss. Una propiedad importante es que la clase H^p es preservada por acción de las integrales singulares y esto es un buen argumento para decir que los H^p son un buen reemplazo de los espacios de Lebesgue L^p cuando $p \leq 1$; en particular se tiene $H^1 \subset L^1$ y $L^\infty \subset BMO$. Por otro lado, en 1971, Ch. Fefferman estableció su teorema de dualidad: $(H^1)' = BMO$; una ampliación de este teorema para $0 < p < 1$ es logrado vía la idea de átomo. Veamos.

Descomposición atómica de H^p , $0 < p \leq 1$. En 1974, R. Coifman [21] dio una caracterización de H^p , $0 < p < 1$, vía argumentos de variable real y usando la idea de descomponer H^1 usando el concepto de átomo. Coifman construye una representación explícita para elementos $f \in H^p$ en la recta, con $0 < p \leq 1$.

Definición 7.2. Sea $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $0 < p \leq 1$. La función $a(x)$ es llamada un p -átomo si

- (i) $\text{sop } a(x) \subset Q$, para algún cubo Q , con lados paralelos a los ejes ($\text{sop} = \text{soporte}$);
- (ii) $|a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty} \leq |Q|^{-\frac{1}{p}}$;
- (iii) $\int a(x) x^\alpha dx = 0$, para todo α tal que $|\alpha| \leq \left[n \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right]$, donde $[\dots]$ es la función mayor entero.

Coifman demuestra la siguiente caracterización de H^p en la recta, [21]:

Teorema 7.19. “Sea $f \in S'$; entonces se tiene $f \in H^p(\mathbb{R}^1)$, $0 < p \leq 1$ si y sólo si existe una sucesión $\{\lambda_i\}$ de números reales tal que $\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p < \infty$ y una sucesión de p -átomos $\{a_i\}$ tal que $f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i$ en el sentido de las distribuciones temperadas”.

En H^p se considera la norma $\|f\|_{H^p} = \inf \{ \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p / f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i \}$.

El caso $\mathbb{R}^1$ es extendido al caso $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, observándose que la parte “sólo si” es extendible al caso $\mathbb{R}^n$, no así la parte “si” ya que no es posible la descomposición de un abierto en $\mathbb{R}^n$ en una sucesión disjunta de cubos, como sí ocurre en la recta; de esta manera hubo que buscar otro tipo de descomposición; ello fue logrado por R. H. Latter en 1974 (“A decomposition of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms”). Latter amplía el teorema de dualidad de Fefferman demostrando que se tiene:

$$[H^p(\mathbb{R}^n)]' = \begin{cases} \Lambda_\alpha \dots & \text{si } 0 < p < 1, \alpha = n \left(\frac{1}{p} - 1 \right), \\ BMO \dots & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Ahora regresamos al trabajo de Jerison-Kenig [1]. Ellos tratan los espacios H^p en dominios NTA. Así, comienzan con la

Definición 7.3. Si $0 < p < \infty$,

$$H^p(D, dw) = \{u \text{ armónica en } D / N_\alpha(u) \in L^p(dw)\}.$$

Los autores verifican que esta definición es independiente de α . El siguiente resultado es demostrado,

Lema 7.20. “Sea $u \in H^1(D, dw)$. Entonces existe $f \in L^1(dw)$ tal que $u(x) = \int_{\partial D} f dw^x$ para todo $x \in D$. También se tiene

$$u \in H^p(D, dw), p > 1, \text{ si y sólo si } u(x) = \int_{\partial D} f dw^x, f \in L^p(dw).”$$

En seguida se dan una serie de definiciones; veamos algunas cuestiones previas. En 1961 John - Nirenberg, [22], introdujeron los espacios de oscilación media limitada, denotados con “BMO”, los cuales tienen propiedades que son útiles en ciertos casos críticos en el análisis armónico. Veamos. Sea Q_0 un cubo fijo en $\mathbb{R}^n$, de medida finita ($|Q_0| < \infty$, medida de Lebesgue). Se dice que $f \in BMO$ si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y si existe una constante M tal que

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q| dx \leq M < \infty$$

donde el supremo es tomado sobre todos los subcubos Q de Q_0 (y por tanto $|Q| < \infty$), y c_Q es una constante que depende Q .

Nota 7.6. Se asume que Q_0 y los Q 's tienen sus lados paralelos a los ejes coordenados. Se observa que toda función limitada está en BMO , esto es $L^\infty \subseteq BMO$.

Existen resultados relacionados con los espacios L^p que valen para $1 < p < \infty$ pero no para $p = 1$ ó $p = \infty$; en el caso límite $p = \infty$, L^p es reemplazado por BMO y se obtienen buenos resultados. Por otro lado, existen funciones en BMO que no están en L^∞ . Así mismo, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, su valor medio f_Q sobre Q es definido vía: $f_a = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$. Vía un argumento se observa que en la definición de BMO se puede reemplazar c_Q por f_Q . Si $x \in Q$, la función $x \rightarrow |f(x) - f_Q|$ es llamada la oscilación de f sobre Q . En BMO se considera la norma

$$\|f\|_{BMO} = \|f\|_{L^1_{loc}} + \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

de esta manera en BMO se identifican a las funciones que difieran en una constante. Con tal norma BMO es un espacio de Banach. Se tiene el fundamental resultado de John-Nirenberg:

Teorema 7.21 (John - Nirenberg) "Si $f \in BMO$, entonces se tiene

$$w(\alpha) = |\{x \in Q_0 / |f(x) - f_{Q_0}| > \alpha\}| \leq A e^{-b\alpha M^{-1}} |Q_0|$$

donde $\alpha > 0$; A y $b > 0$ son constantes que dependen de n ".

Corolario 7.22. $\log |x| \in BMO$. Es decir, un elemento de BMO no es necesariamente limitado. Volvamos nuevamente a [1]. En el contexto de la sección 8 se tienen las definiciones siguientes

Definición 7.4. $BMO(\partial D) = \{f \in L^1(dw) / \sup \left(\frac{1}{w(\Delta)} \right) \int_\Delta |f - m_\Delta f| dw < \infty, \text{ donde } \Delta$ es la superficie de una bola, $m_\Delta(f) = \frac{1}{w(\Delta)} \int_\Delta f dw$ ".

Se observa que por el teorema de John-Nirenberg esta definición es la misma que

$$\left\{ f \in L^2(dw) / \sup_\Delta \left[\left(\frac{1}{w(\Delta)} \right) \int_\Delta |f - m_\Delta(f)|^2 dw \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

con normas comparables. Ahora se menciona a los espacios de tipo homogéneo. Veamos algunos argumentos previos. El concepto de átomo sugirió la extensión del concepto del espacio $\dot{H}^p$ en espacios de tipo homogéneo; además, se observó que la idea de átomo está dentro de la naturaleza de las integrales singulares de Calderón-Zygmund. Se tiene la

Definición 7.5. "Un espacio de tipo homogéneo es un espacio topológico X provisto de una medida de Borel μ y de una cuasi - métrica (o pseudo-métrica) $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las condiciones

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (ii) $d(x, y) > 0$ si y sólo si $x \neq y$;
- (iii) existe un número real positivo K tal que $d(x, y) \leq K[d(x, z) + d(z, y)]$, para todo $x, y, z \in X$ ".

Además, se postula que las esferas (o bolas) $B_r(x) = \{y \in X / d(x, y) < r\}$ de centro x y radio $r > 0$ forman una base de vecindades de x . Así mismo se postula que $\mu(B_r(x)) > 0$ si $r > 0$ y que existe una constante A tal que $\mu(B_r(x)) \leq A\mu(B_{\frac{r}{2}}(x))$.

Los autores dan algunos ejemplos de espacios de tipo homogéneo, como son

- a. Sean $X = \mathbb{R}^n$ y $d(x, y) = |x - y| = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ y μ es la medida de Lebesgue. $\mathbb{R}^n$ es un espacio de tipo homogéneo.
- b. $\mathbb{R}^n$ también es un espacio de tipo homogéneo si se consideran $d(x, y) = \sum_{j=1}^n \{x_j - y_j\}^{\alpha_j}$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son números positivos, diferentes entre sí y μ es la medida de Lebesgue.
- c. X es un espacio de tipo homogéneo si X es el contorno de un dominio de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, μ es una medida armónica y d es la distancia euclidiana.

En [23] Coifman - Weiss dan diversos otros ejemplos de espacios de tipo homogéneo que podrían interesar a algún lector, así como una amplia exposición sobre los espacios H^p .

En tal dirección y para definir a los espacios de Hardy $H^p(X)$ con $p \leq 1$, se requiere de algunas ideas más. Veamos.

Definición 7.6. “Sea $0 < p < q$, $p \leq 1 \leq q \leq \infty$. La función $a(x)$ se llama un (p, q) - átomo si

- (i) $\text{sup } a(x) \subset B_r(x_0)$, para alguna bola $B_i(x_0)$;
- (ii) $\left\{ \frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int |a(x)|^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \leq [\mu(B_r(x_0))]^{-\frac{1}{p}};$
- (iii) $\int a(x) d\mu_0(x) = 0$ ”.

Se observa que si $a(x)$ es un (p, q) - átomo, entonces $a(x) \in L^1(X, \mu)$. Además, se sabe que los espacios H^p asociados con ∂D ó con la recta R , para el caso $p < 1$, tales espacios no son espacios de funciones definidos sobre ∂D ó R ; por esta razón tales H^p son considerados como espacios de distribuciones. Pues bien; en el presente caso, de los espacios de tipo homogéneos, se tuvo que introducir un apropiado espacio de funciones lineales para definir al espacio de Hardy $H^p(X)$. En esta dirección se introdujeron a los espacios de Lipschitz $\Lambda_\alpha(X)$, $\alpha > 0$,

$$\Lambda_\alpha(X) \equiv \Lambda_\alpha = \{ \text{funcionales } L \text{ sobre } X / |L(x) - L(y)| \leq c[\mu(B)]^\alpha \}$$

donde B es una bola conteniendo x e y ; c sólo depende de L .

Nota 7.7. En el caso $\mu(X) < \infty$, la constante $[\mu(X)]^{-\frac{1}{p}}$ es considerado un átomo y por simplicidad se asume que $\mu(X) = 1$.

En Λ_α se considera la norma

$$\|L\|_{\Lambda_\alpha} = \begin{cases} \inf \{c / |L(x) - L(y)| \leq c[\mu(B)]^\alpha\} \dots \text{ si } \mu(X) = \infty; \\ \inf \{c / |L(x) - L(y)| \leq c[\mu(B)]^\alpha\} + \left| \int_X L(x) d\mu(x) \right| \dots \text{ si } \mu(X) = 1 \end{cases}$$

Λ_α es un espacio de Banach con tal norma.

Sea ahora $a(x)$ un (p, q) - átomo, $0 < p < 1$ y $\alpha = \frac{1}{p} - 1$.

Entonces por (i), (ii), (iii) se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_X a(x) L(x) d\mu \right| &= \left| \int_{B_r(x_0)} a(x) L(x) d\mu \right| \\ &= \left| \int_{B_r(x_0)} a(x) [L(x) - L(x_0)] d\mu \right| \\ &\leq \|L\|_{\Lambda_\alpha} [\mu B_r(x_0)]^{\frac{1}{p}-1} \int_{B_r(x_0)} |a(x)| d\mu \\ &\leq \|L\|_{\Lambda_\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene: “la aplicación $T : \Lambda_\alpha \rightarrow \mathbb{C}(\text{o } \mathbb{R})$, $L \rightarrow \int_X a(x) L(x) d\mu$ es lineal y limitada sobre Λ_α , con norma ≤ 1 ”.

Ahora se definen a los espacios de Hardy $H^{p,q}$

Definición 7.7. “Sea $0 < p < 1 \leq q$; se define

$$H^{p,q} = \left\{ h \in \Lambda'_\alpha, \alpha = \frac{1}{p} - 1 / h = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \text{ donde } a_j \text{ es un } (p, q)\text{-átomo y } \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty \right\}$$

”.

Se observa que la condición $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$ implica que la serie $h = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$ converge en la norma del espacio dual Λ'_α ; de esta manera h es el límite, en esta norma, de las sumas parciales de tal serie.

Definición 7.8.

$$\|h\|_{H^{p,q}} = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p / h = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \right\}.$$

La aplicación $h \rightarrow \|h\|_{H^{p,q}}$ no es una norma, pero $d_{p,q}(h, g) = \|h - g\|_{H^{p,q}}$ es una métrica. Ahora, cuando $p = 1 < q \leq \infty$, las sumas $h = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$ son convergentes en la norma L^1

siempre que $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$ y los a_j 's sean $(1, q)$ -átomos. De esta manera, tales sumas definen un subespacio $H^{1,q}(X)$ de $L^1(X)$; así, en este caso $H^{1,q}$ es un subespacio normado con $\|h\|_{H^{1,q}}$. Se tiene que $H^{1,q}$ es un espacio completo y $H^{1,q}$ es un espacio de Banach.

Por otro lado, si $1 < q_1 < q_2 < \infty$ y $0 < p \leq 1$, entonces se tiene $H^{p,\infty} \subset H^{p,q_2} \subset H^{p,q_1}$; los inversos de estas inclusiones se verifican también; así, se tiene el

Teorema 7.23. “Si $p < q < \infty$, entonces $H^{p,q} = H^{p,\infty}$. Además, las métricas $d_{p,q}$ y $d_{p,\infty}$ son equivalentes, esto es, existe $c = c(p, q)$ tal que $d_{p,q} < d_{p,\infty} < cd_{p,q}$ ”.

Entonces el teorema 7.23. permite que se de la

Definición 7.9. “ $H^p \equiv H^p(X)$, para $p \leq 1$, es cualquiera de los espacios $H^{p,q}$ con $p < q \leq \infty, 1 \leq q$ ”.

Nota 7.8. Cualquiera de las métricas $d_{p,q}$ podrían ser usadas para hacer a H^p un espacio topológico. Por ello es conveniente $H^{p,2}$ y $d_{p,2}$ pues se tiene una transformada de Fourier asociada a X y donde los $(p, 2)$ -átomos son funciones L^2 .

El Problema de la Dualidad. Para $1 \leq q < \infty$ se considera la

Definición 7.10.

$$BMO_q = \{L, \text{definida sobre } X, L \in L^q_{loc}(X) / \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B |L(x) - L_B|^q d\mu(x) \right]^{\frac{1}{q}} \leq c, \text{ toda bola } B\}.$$

donde $L_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B L(y) d\mu(y)$, c es independiente de B . Si $L \in BMO_q$, se considera la norma

$$\|L\|_{BMO_q} = \begin{cases} \inf\{c/ c \text{ satisface la anterior desigualdad}\} & \text{si } \mu(X) = \infty; \\ \inf\{c/ c \text{ satisface la anterior desigualdad}\} + \left| \int_X L(x) d\mu(x) \right| & \text{si } \mu(X) = 1. \end{cases}$$

Si la medida de X es finita, BMO_q es un espacio de Banach con tal norma. Si $\mu(X) = \infty$ se consideran las clases de equivalencia: “ $L_1 \simeq L_2$ en BMO_q si y sólo si $L_1 - L_2$ es constante”. En este caso, $\|L_1\|_{BMO_q} = \|L_2\|_{BMO_q}$. Se tiene el

Teorema 7.24. “Si $p < 1$ y $\alpha = \frac{1}{p} - 1$, entonces $\Lambda_\alpha = [H^p(X)]'$. Esto es, cada funcional lineal continua sobre H^p es una aplicación de la forma $h \rightarrow \sum \lambda_j a_j L d\mu$, donde $L \in \Lambda_\alpha$ y $h = \sum \lambda_j a_j \in H^p$ ”.

En particular, si $p = 1$, se tiene $BMO = [H^1(X)]'$, esto es, si $h = \sum \lambda_j a_j \in H^1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j \int L a_j d\mu$ es una, bien definida, funcional lineal continua $h \rightarrow \langle h, L \rangle$ para cada $L \in BMO$, cuya norma es equivalente a $\|L\|_{BMO}$. Además, cada funcional lineal continua sobre H^1 tiene esta forma.

Ahora regresamos a [1] con la notación dada ahí. Recordemos que se trabaja sobre dominios NTA y en este contexto se dan las anteriores definiciones.

Definición 7.11. “El triple (X, D, μ) se llama un espacio de tipo homogéneo si X es un espacio topológico cuya topología es dada por la cuasi-distancia d , donde $d(x, y) \leq K[d(x, z) + d(z, y)]$ tal que $d(x, y) = d(y, x) : d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$; con una medida de Borel μ tal que $\mu(\Delta_{2r}(x)) \leq C\mu(\Delta_r(x))$, donde $\Delta_r(x) = \{y/d(x, y) < r\}$ ”.

En un espacio de tipo homogéneo se define la “distancia medida”: $m(x, y) = \inf\{\mu(\Delta)/\Delta \text{ es una bola con } x, y \in \Delta\}$. $m(x, y)$ es una cuasi - distancia. Los autores remarcan que si D es un dominio NTA limitado, el triple $X = \partial D$, d es la distancia euclidiana y $\mu = w$, entonces tal triple es un espacio de tipo homogéneo. Sea ahora (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que X es un espacio compacto, que $(X) = 1$ y que las bolas son conjunto abiertos. Ahora se da la definición de p -átomo en dominios NTA.

Definición 7.12. “Se dice que $a \in L^1(X)$ es un p -átomo si $\int_X a d\mu = 0$ y si existe una bola Δ conteniendo el soporte de a , con $\|a\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\mu(\Delta)^{1/p}}$ ”.

Se asume que la función constante $a \equiv 1$ es p -átomo. Se verifica que los p -átomos sobre (X, d, μ) son los mismos p -átomos sobre (X, m, μ) a menos de una cota múltiple. Ahora se define los espacios de Lipschitz en el escenarios de los dominios NTA :

Definición 7.13. “Sea $\alpha > 0$ dado. Una función $\Phi(x)$ pertenece al espacio $Lip_m(\alpha)$ si se tiene

$$L(\Phi, \alpha, m) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \left[\frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|}{m(x, y)^\alpha} \right] < \infty.$$

En este espacio se considera la norma $\|\Phi\|_{\alpha, m} = L(\Phi, \alpha, m) + \int_X |\Phi| d\mu$. Si $\Phi \in L^1(X)$, se dice que Φ está en BMO si existe una constante C tal que

$\frac{1}{\mu(\Delta)} \int_{\Delta} |\Phi(x) - m_{\Delta}(\Phi)| d\mu < C$ para todas las bolas en la cuasi-distancia m (ó d), donde $m_{\Delta}(\Phi) = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_{\Delta} \Phi d\mu$. Jerison-Kenig consideran al espacio $\text{Lip}_d(\alpha, q)$, donde $1 \leq q < \infty$, siendo el espacio $\{\Phi(x)/\}$ existe una constante C tal que para toda d -bola Δ se tiene

$$\left[\frac{1}{\mu(\Delta)} \int_{\Delta} |\Phi(x) - m_{\Delta}(\Phi)|^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \leq C\mu(\Delta)^{\alpha}.$$

En $\text{Lip}_d(\alpha, q)$ se considera la norma “la menor de las C ’s que satisfacen la anterior desigualdad + $\int_X |\Phi| d\mu$.”

Definición 7.14. H^p -atómicos. “Sean $0 < p \leq 1$, $f \in \text{Lip}_d\left(\frac{1}{p} - 1, 1\right)'$, ó $f \in BMO$ si $p = 1$. Sea $\|f\|_{H_{at}^p(X)} = \inf [(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p)]^{\frac{1}{p}}$, además, existe una sucesión de p -átomos $\{a_i(X)\}$ tal que $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$ en $\text{Lip}_d\left(\frac{1}{p} - 1, 1\right)'$ ó en BMO si $p = 1$. Si tal sucesión no existiera, se pone $\|f\|_{H_{at}^p} = \infty$. Entonces, por definición $H_{at}^p(X) = \{f/\|f\|_{H_{at}^p} < \infty\}$ ”.

Jerison-Kenig, [1], dan otras definiciones y establecen un teorema usando esas ideas, que son casos generales, para luego aplicar esos casos generales al caso $X = \partial D$, $d =$ distancia euclidiana y $\mu = w$; además, en este caso un p -átomo es una función en $L^1(dw)$ sobre ∂D con $\int_{\partial D} adw = 0, \|a\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{w(\Delta)}$. BMO coincide con $BMO(\partial D)$. Previo a la demostración de un corolario, esta sección termina con el resultado principal

Teorema 7.25. “ $u \in H^1(D, dw)$ si y sólo si $u(x) = \int_{\partial D} f dw^x$, con $f \in H_{at}^1(\partial D)$. Además, $\|u\|_{H^1(D, dw)} \simeq \|f\|_{H_{at}^1(\partial D)}$ y $H^1(D, dw)' = BMO(\partial D)$ ”.

7.9. Estimativas de la integral área y BMO. La integral área S está relacionada con la función de Littlewood-Paley g , un tema relacionado con las funciones armónicas y con la integral de Poisson, nociones que surgen en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales; en este contexto es usual trabajar con funciones maximales, con operadores de tipo fuerte y débil. La función g es un operador no-lineal que es útil para caracterizar a la norma- L^p de una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ en términos de su respectiva integral de Poisson. Veamos un poco sobre estas ideas. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y el núcleo de Poisson $P_y(x) = c_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ donde c_n es una adecuada constante, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Sea la integral de Poisson asociada a f , $u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t) f(x - t) dt$. Sea el laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ definido sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$; se considera $|\nabla u(x, y)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + |\nabla_x u(x, y)|^2$, donde

$$|\nabla_x u(x, y)|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2.$$

Definición 7.15. “La función g es definida vía:

$$g(f)(x) = \left[\int_0^\infty |\nabla u(x, y)|^2 y dy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 7.26. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, entonces $g(f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $c_p' \|f\|_{L^p} \leq \|g(f)\|_{L^p} \leq c_p \|f\|_{L^p}$.

La teoría de Littlewood-Paley en $\mathbb{R}^n$ está asociada a las series de Fourier y contribuyó al progreso del análisis armónico y fue estudiada, además de Littlewood y Paley (L-P), por Zygmund y Marcinkiewicz entre los años 1930 y 1939 actividad que fue frenada por los horrores de la II G.M. Las investigaciones de L-P fueron hechas en el contexto de la teoría de variable compleja y ello limitó que la teoría de L-P fuera en una-dimensión. Quedaba por llevar la teoría L-P al caso n -dimensional lo que fue logrado por las técnicas fuertes existentes en la teoría de variable-real y las integrales singulares. Así, Zygmund introdujo la función g^* para el caso $n = 1$, la que fue ampliada al caso $n > 1$ por Stein. Sigamos a [6] para los siguientes argumentos. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|g(f)\|_{L^2}^2 = \int_{y=0}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} y |\nabla u(x, y)|^2 dx dy$. Se verifica que $\|g(f)\|_{L^2} = \frac{1}{2^{1/2}} \|f\|_{L^2}$. Ahora se introduce las g

funciones parciales: $g_1(f)(x) = \left[\int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 y dy \right]^{\frac{1}{2}}$ y $g_2(f)(x) = \left[\int_0^\infty |\nabla_x u(x, y)|^2 y dy \right]^{\frac{1}{2}}$.

Se tiene que $g^2 = g_1^2 + g_2^2$ y que $\|g_1(f)\|_{L^2} = \|g_2(f)\|_{L^2} = \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}$. Luego de varios argumentos de variable - real se llega a establecer que $\|g(f)\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$, $1 < p < \infty$. ¿Vale el recíproco de esta desigualdad?... , en [6] se estudia esta cuestión. Se establece que se tiene “si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $g_1(f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $A_p' \|f\|_{L^p} \leq \|g_1(f)\|_{L^p}$.”

La función g_λ^* . La función auxiliar g_λ^* fue investigada por Zygmund en 1944 en el caso unidimensional usando métodos de la variable compleja y por Stein en 1961 en el caso $n > 1$ y en unas lecturas dadas en el período 1966 - 67. Veamos la

Definición 7.16. “Sea $\lambda > 1$, entonces se pone

$$(g_\lambda^*(f, x))^2 = \int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{y}{|t| + y} \right)^{\lambda n} |\nabla u(x - t, y)|^2 y^{1-n} dt dy.$$

Se observa que Lusin, en el caso $n = 1$, introdujo la función positiva $S(f)$,

$$(S(f, x_0))^2 = \iint_{\Gamma(x_0)} |\nabla u(x_0 - t, y)|^2 y^{1-n} dt dy,$$

donde $\Gamma(x_0)$ es el cono con vértice en x_0 que consiste en el conjunto de puntos $(t, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tal que $|t - x_0| < y$. $S(f)$ es la “integral área” de Lusin. En el caso $n > 1$, $\Gamma(x)$ es un cono en $\mathbb{R}^n$ con vértice en x , se tiene la

Definición 7.17. “

$$\begin{aligned} [S(f)(x)]^2 &= \int_{\Gamma(x)} |\nabla u(t, y)|^2 y^{1-n} dy dt \\ &= \int_{\Gamma(x)} |\nabla u(x - t, y)|^2 y^{2-n} dy dt. \end{aligned}$$

Se verifica el interesante resultado,

Teorema 7.27. “Se tiene $g(f)(x) \leq CS(f)(x) \leq C_\lambda g_\lambda^*(f)(x)$, donde C y C_λ son independientes de f y de x ”.

En [6] también se demuestra que “sea $\lambda > 1$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$; si $1 < p < \infty$ y $p > \frac{2}{\lambda}$ entonces

$$\|g_\lambda^*(f)\|_{L^p} < A_{p,\lambda} \|f\|_{L^p}.$$

Veamos algunos argumentos cronológicos alrededor de los temas que se están exponiendo. Calderón en 1965, [24], demostró un resultado relacionado con la función integral de Lusin que dice: “sea $f(x + iy)$ una función analítica en $y > 0$ y que pertenece a H^p , $0 < p < \infty$.”

Sea $[S(f)(x)]^2 = \left[\int \mathcal{X}(x - u, y) |f'(u + iy)|^2 du dy \right]$, donde $\mathcal{X}(x, y)$ es la función característica del conjunto $y > 0, |x| < y$; entonces existen dos constantes positivas c_1 y c_2 , que dependen solo de p , tal que $c_1 \|f(x)\|_{L^p} \leq \|S(f)\|_{L^p} \leq c_2 \|f(x)\|_{L^p}$, donde $f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy)$ ”.

Nota 7.9. Calderón observa que la novedad es la primera desigualdad para el caso $p \leq 1$. La prueba de este teorema es técnico, laborioso y se puede ver en [24]. En esta dirección, C. Segovia, en [25], extendió este resultado de Calderón al caso de sistemas de funciones armónicas conjugadas. Tal trabajo contiene la tesis de PhD de Segovia bajo la dirección de A. Calderón y contiene cinco capítulos; su teorema principal está contenido el 4to. capítulo.

Previamente se establece el

Lema 7.28. “Sea $f(x, y)$ una función armónica definida sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$ con valores en un espacio de Hilbert real H que satisface

(i) existe una constante $K > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x, y)\|^p dx \leq K^p$; para todo $x > 0$; $p \geq 0$.

(ii) para todo $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ se tiene

$$(\delta_0 - 2) \sum_{i=0}^n \left\langle \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i}, f(x, y) \right\rangle^2 + \|f(x, y)\|^2 \sum_{i=0}^n \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} \right\|^2 \geq 0$$

donde δ_0 es un número positivo menor que p . Con $g(s; y)$ se denota a la función $f(x + s, y)$, $x > 0$.

Entonces, si $\delta > 0$, $q > 0$ satisfacen $\delta q \geq p$, se tiene

$\int_{\mathbb{R}^n} m_\alpha(\|g\|^\delta)^q(y) dy \leq c \int_{\mathbb{R}^n} [\|g(0, y)\|^\delta]^q dy$, donde la constante C solo depende de n y $\frac{\delta q}{\delta_0}$, y en general, si $h(x, y)$ es definida sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$, $m_\alpha(h)(x_0)$ denota la menor cota superior de la función h sobre el cono

$\Gamma(x_0) = \{x / |x - x_0| < \alpha x\}$ ”.

Ahora Segovia pasa a demostrar su teorema principal.

Teorema 7.29. “Sea $f(x, y)$ una función armónica definida sobre R_t^{h+1} con valores en un espacio

de Hilbert real H ; se asume que $f(x, y)$ satisface (i) y (ii) del lema 7.28. y también satisface: (iii) el conjunto de los ceros de $f(x, y)$ es un conjunto polar en $\mathbb{R}_+^{n+1}$ [Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$; se dice que un conjunto P , contenido en U , es un “conjunto polar” en U si existe una función super armónica definida sobre U tal que ella toma el valor $+\infty$ en todo punto de P].

Entonces, existen dos constantes positivas c_1 y c_2 las cuales dependen de α , n y p solamente tal que se tiene

$$\begin{aligned} c_1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x, y)\|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{X}_\alpha(x, y-u)}{x^{n-1}} \left[\sum_{i=0}^n \left\| \frac{\partial(x, u)}{\partial y_i} \right\|^2 \right] du dx \right]^{\frac{p}{2}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x, y)\|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

para todo $x > 0$ ”.

Finalmente, en el capítulo V se demuestra la anunciada extensión del teorema de Calderón. Veamos. Sea $U(x, y)$ una función armónica definida sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$ con valores en un espacio de Hilbert real H . Se dice que el gradiente $\nabla U(x, y)$ pertenece a $H^p(H)$, $p > 0$, si se satisfacen:

(i) existe una constante $K > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla U(x, y)\|^p dy \leq K^p$, para todo $x > 0$;

(ii) el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \nabla U(x, y)$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$; el límite es denotado con $\nabla U(0, y)$.

Se tiene el teorema final del trabajo de Segovia,

Teorema 7.30. “Sea $\nabla U(x, y) \in H^p(H)$, $p > \frac{n-1}{n}$; entonces la función área

$$S_\alpha(\nabla U)(y) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{\mathcal{X}_\alpha(s, y-u)}{s^{n-1}} \left[\sum_{i=0}^n \left\| \frac{\partial \nabla U(s, u)}{\partial y_i} \right\|^2 \right] du ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

satisface:

$$c_1 \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla U(0, y)\|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} S_\alpha(\nabla U)^p(y) dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla U(0, y)\|^p dy \right]^{\frac{1}{p}},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes positivas que dependen solo de α , p y n ”.

Volvamos al trabajo de Jerison - Kenig, [1], en donde demuestran estimativas - $L^p(dw)$, $1 < p < \infty$, para la integral (función) área. También ellos establecen una caracterización -medida de Carleson del espacio $BMO(\partial D)$. Esto en el contexto de los dominios NTA.

Veamos. De entrada demuestran el

Teorema 7.31. “Sean D un dominio NTA acotado; $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(dw)$: Sea $u(x) = \int_{\partial D} f dw^x$ y $S_\alpha(u)^2(Q) = \int_{\Gamma_\alpha(Q)} d(x)^{2-n} |\nabla u(x)|^2 dx$. Entonces,

$$\|S_\alpha u\|_{L^p(dw)} \leq C_p \|f\|_{L^p(dw)}.$$

Además, si $u(x_0) = 0$, entonces,

$$\|f\|_{L^p(dw)} \leq C_p \|S_\alpha(u)\|_{L^p(dw)}.$$

Nota 7.10. La demostración de este resultado es larga y técnica; el lector interesado en los detalles, ver [1].

Ahora veamos la citada caracterización de $BMO(\partial D)$. Recordemos que

$$“BMO(\partial D) = \left\{ f \in L^1(dw) / \sup_{\Delta} \frac{1}{w(\Delta)} \int_{\Delta} |f - m_{\Delta} f| dw < \infty, \right.$$

$$\left. \text{donde } \Delta \text{ es la superficie de una bola y } m_{\Delta}(f) = \frac{1}{w(\Delta)} \int_{\Delta} f dw \right\}.”.$$

Esta sección termina con la demostración del siguiente teorema, el cual fue estudiado por E. Fabes - C. Kenig y U. Neri para dominios de Lipschitz en 1981.

Teorema 7.32. “Sea D un dominio NTA limitado y u una función armónica en D . Entonces $u(x) = \int_{\partial D} f dw^x$, con $f \in BMO(\partial D)$ si y sólo si existe una constante C tal que para toda bola B centrada en puntos $Q \in \partial D$, se tiene

$$\frac{1}{w(\Delta)} \int_{\Delta} |G(x)| |\nabla u(x)|^2 dx \leq C,$$

donde $\Delta = B \cap D$ ”.

Nota 7.11. $G(x)$ es la función de Green, ver la sección 5.

7.10. Dominios BMO_1 . D denotará un dominio BMO_1 . Veamos que son estos dominios. “ $BMO_1(\mathbb{R}^{n-1})$ es la clase de las funciones ϕ sobre $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\nabla\phi \in BMO(\mathbb{R}^{n-1})$ ”. “ D es un dominio BMO_1 , si para todo $Q \in \partial D$ existe una bola B conteniendo Q y un difeomorfismo regular $\eta : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\eta(D \cap B) = \{(x, y)/y > \phi(x), x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cap \eta(B)$, donde ϕ pertenece a la clase BMO_1 ”.

Ahora se fija un $x_0 \in D$; recordemos que $w = w^{x_0}$ representa una medida armónica para D en x_0 ; σ indica una medida de superficie de ∂D . También se dice que $w \in A_\infty(d\sigma)$ si existen α y β , $0 < \alpha, \beta < 1$, tal que para toda bola - superficie Δ y todo conjunto de Borel $E \subset \Delta$ se tiene que $\frac{\omega(E)}{\omega(\Delta)} < \alpha$ implica que $\frac{\sigma(E)}{\sigma(\Delta)} < \beta$. Esta sección consta de dos teoremas; el primero es demostrado vía dos lemas y el segundo solo se anuncia pues es comparado con un trabajo de Jerison - Kenig sobre el problema de Dirichlet en dominios no-regulares (1981).

Teorema 7.33. “Sea D un dominio BMO_1 ; entonces se tiene

- (i) $w \in A_\infty(d\sigma)$; además; w y σ son mutuamente absolutamente continuas.
- (ii) Existe $p_0 < \infty$ tal que para todo $p > p_0$ y para toda $f \in L^p(d\sigma)$ existe una única función armónica u definida en D tal que u se aproxima a f no-tangencialmente y $\|N(u)\|_{L^p(d\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p(d\sigma)}$ ”.

Recordemos que $N(u)(Q) = \sup \{|u(P)|/P \in \Gamma_\alpha(Q)\}$ para u definida en D ; $N(u)$ es llamada la función maximal no-tangencial.

Antes de enunciar al segundo teorema, los autores nos dicen que un dominio D es un dominio $-L^p_1$ si el contorno de $D(\partial D)$ es dado localmente como el gráfico de una función continua ϕ tal que $\nabla\phi \in L^p$.

Teorema 7.34. “Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio- L^p_1 para algún $p > n - 1$; entonces w y σ son mutuamente absolutamente continuas. Además, si $p > 2$ y $f \in L^q(d\sigma)$ para algún $q \geq \frac{2p-1}{p-2}$, entonces, $f \in L^1(dw)$ y la función extensión armónica u de f converge a f no-tangencialmente ctp (w) o ctp (σ)”.

El artículo [1] de Jerison - Kenig termina con la sección 11 dedicada a otros resultados y a algunos problemas abiertos; el lector interesado en este tema puede consultar esta sección.

8. Otros Comentarios.. El teorema de Fatou fue un aporte pionero que, en parte contribuyó al surgimiento del progreso en el análisis armónico y este avance contribuyó a mejorar las estrategias para resolver problemas de valor de contorno en las EDP, en particular del problema de Dirichlet y de Neumann. En este artículo hemos dado apenas una visión de la evolución de las ideas y métodos surgidos a partir del teorema de Fatou, contribuciones debidas a Calderón quien a su vez abrió nuevos métodos vía el método del análisis real, estrategia que fue continuada por muchos investigadores posteriores, sobre todo venidos de la Escuela de Análisis de Chicago. Ver [4] y [5]. En esta dirección se tuvo el aporte de Carleson, [7], quien aporta menos condiciones para obtener la conclusión de Calderón; además introduce nuevas ideas, como ampliar la teoría para dominios más generales (dominios de Lipschitz, dominios “dentados”). Esta historia es interesante porque gracias a ella surgieron una pléyade de jóvenes analistas armónicos - PDE quienes contribuyeron a enriquecer las proyecciones del teorema de Fatou, tal fue el caso de R. Wheeden, R. Hunt, B. Dahlberg, D. Jerison, C. Kenig; C. Segovia, R. Macías, A. Torchinsky, entre muchos otros. Siguiendo la ruta de este escrito vimos en la sección 5 la contribución de Hunt-Wheeden. R. Wheeden falleció en un trágico accidente en 2020 cuando tenía 79 años y aún estaba en sus facultades de seguir aportando al desarrollo del análisis armónico, ver [26]. Obtuvo su PhD en 1965 bajo la asesoría de A. Zygmund siendo el tema de su tesis las integrales hiper-singulares; en base a una notas de un curso de Zygmund sobre análisis real, escribieron un libro, “Measure and integral : An introduction to real analysis”, que Wheeden completó en una segunda edición (2015). En [26], se da una relación de su producción matemática, así como los comentarios de C. Kenig sobre el trabajo de Wheeden en la teoría del potencial en dominios de Lipschitz. De R. Hunt hemos tenido la oportunidad de dar algunas ideas de su trabajo con Wheeden, [8], en donde se comienza resaltando el clásico resultado de Fatou y su aporte en el uso de los dominios de Lipschitz “estrellados”.

Todas estas contribuciones, y muchas otras, sobre el análisis armónico fueron conectadas con las EDP, en particular con resultados relacionados con los operadores elípticos y parabólicos, así como el tratamiento de los operadores pseudo-diferenciales sobre dominios no-regulares. Con respecto a los problemas de valor de contorno sobre dominios de Lipschitz, hasta 1985, ver [27] en donde C. Kenig nos da un panorama detallado sobre el progreso de este tema; en particular en la introducción nos brinda algunos detalles históricos que nos permitimos tomar algunos de ellos. Veamos. En los trabajos [11], [12] y [13] (ver la sección 6) B. Dahlberg resuelve el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un dominio de Lipschitz D con datos de contorno en $L^2(\partial D, d\sigma)$ usando

ciertas estimativas óptimas; también se observa que si $p < 2$ entonces existe un dominio de Lipschitz D donde la solución falla en $L^p(\partial D, d\sigma)$; además se resalta que el método de Dahlberg hace un adecuado uso de la medida armónica, así como de la desigualdad de Harnack y del principio del máximo, y de esta manera el método no es aplicable para resolver el problema de Neumann. Los trabajos de Dahlberg son de 1977 y 1979. En 1978, E. Fabes - M. Jodei - N. Riviere, ver [18], utilizando un resultado de A. Calderón sobre la acotación de la integral de Cauchy sobre curvas C^1 , ver [20], extendieron el método clásico de las capas potenciales para dominios C^1 y ellos fueron capaces de resolver los problemas de Dirichlet y de Neumann para la ecuación de Laplace con datos de contorno en $L^p(\partial D, d\sigma)$ usando óptimas estimativas para dominios C^1 . Posteriormente, en 1979, ver [28] y [29], Jerison - Kenig dieron una simplificada demostración de los resultados de Dahlberg utilizando una identidad de la integral. Veamos algunas ideas al respecto, ([28]). En esta nota ellos dan una corta prueba del resultado de Dahlberg sobre la mutua continuidad absoluta de las medidas armónicas con las medidas de superficie sobre un dominio de Lipschitz limitado. Además Jerison-Kenig tratan con dominios cuyos contornos son peores que los contornos-Lipschitz. Así, ellos demuestran que si una función ϕ tal que $\nabla \phi \in L^p$, $p > n - 1$, y D es regular para el problema de Dirichlet, entonces la medida armónica y la medida de superficie sobre D son mutuamente absolutamente continuas. Este trabajo tiene dos teoremas

Teorema 8.1. “Sea D un dominio de Lipschitz limitado en $\mathbb{R}^n$; sea w una medida armónica de ∂D con respecto a $x_0 \in D$. Entonces,

(i) w y σ son mutuamente absolutamente continuas;

(ii) sea $k(Q) = \frac{d\omega}{d\sigma}$, entonces $k \in L^2(d\sigma)$;

además, para toda bola-superficie $\Delta \subset \partial D$ se tiene

$$\left[\frac{1}{\sigma(\Delta)} \int_{\Delta} k^2(Q) d\sigma(Q) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{\sigma(\Delta)} \int_{\Delta} k(Q) d\sigma(Q).$$

Teorema 8.2. “Sea $f \in L^p(d\sigma)$, $p \geq 2$, entonces f tiene una extensión armónica u en D , con función maximal no-tangencial $N(u) \in L^p(d\sigma)$; también se tiene que u converge no-tangencialmente a f ctp $d\sigma$ ”.

Posteriormente en 1981, ver [29], Jerison - Kenig tratan el problema de Dirichlet en dominios no - regulares; ellos estudian el comportamiento de las soluciones del problema de Dirichlet para un operador elíptico. En ese mismo año ellos tratan el problema de Neumann sobre dominios de Lipschitz con datos de contorno $L^2(\partial D, d\sigma)$. Es oportuno citar las contribuciones hechas por Y. Meyer y R. Coifman y muchas otras contribuciones realizadas por los alumnos de Meyer, en particular. Así, en 1981, R. Coifman, A. McIntosh y Y. Meyer publicaron un trabajo sobre la acotación de la integral de Cauchy sobre cualquier curva de Lipschitz, trabajo que motivó la aplicación del método de las capas potenciales para dominios de Lipschitz. El trabajo de Kenig, [27], tiene dos secciones; la primera consta de dos partes:

- (i) teoría L^2 sobre un dominio de Lipschitz para la ecuación de Laplace por el método de las capas potenciales
- (ii) teoría L^p para la ecuación de Laplace sobre un dominio de Lipschitz.

La segunda sección, “problemas de valor de contorno de alto - orden”, consta de tres partes:

- (i) sistemas de elastostático;
- (ii) el sistema de Stokes de hidrostática lineal;
- (iii) el problema de Dirichlet para la ecuación biarmónica sobre dominios de Lipschitz.

Sugerencia: el lector interesado en problemas de valor de contorno sobre espacios de Lipschitz en este trabajo de Kenig encontrará las motivaciones e informaciones para iniciarse en el estudio de este tema. Tiene 36 referencias bibliográficas seleccionadas que ayudan a completar la información.

9. Palabras Finales y Algunos Comentarios sobre las Referencias.. El objetivo principal de este artículo es dar un panorama cronológico que tuvo el teorema de Fatou desde su inicio a comienzos del siglo XX y durante todo este siglo. En el Perú, creemos, que el análisis armónico no es conocido en el nivel que fue desarrollado durante el siglo pasado, salvo algunas contribuciones hechas en la Universidad Nacional de Trujillo durante el período 1960-80's y en la Pontificia Universidad Católica del Perú en la década de los 2010's. Este esfuerzo hecho fue casi aislado y no tuvo mayores proyecciones. Dado que ahora, con la tranquilidad que nos da ser profesor jubilado, surgió el proyecto de difundir al análisis armónico y su relación con las ecuaciones en derivadas parciales, en particular, en nuestro país y posiblemente en otros. El proyecto fue escribir diferentes artículos en tal dirección; el presente es uno de ellos. Estos artículos buscan motivar estudiantes y colegas matemáticos a estudiar el análisis armónico y las áreas relacionadas a tal análisis dado que es una área

central en la matemática y sobre todo porque permite interpretar mejor a las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones a diferentes problemas que surgen en el campo de las aplicaciones. Por tal razón estos artículos son escritos con un carácter didáctico procurando dar cierta unidad a variados aportes hechos por distinguidos analistas y dar énfasis a las ideas y métodos introducidos en la segunda mitad del siglo XX. Ojalá que en el presente ó en el futuro cercano esta aspiración se haga una realidad pues será un signo que avanzamos en nuestro país y que este esfuerzo no fue en vano!

Con respecto a las referencias se han usado en este escrito algunos libros y diversos “papers” que dispusimos; algunos de los cuales ya teníamos cierta experiencia, otros que tuvimos que aprender al menos sus contenidos y poder comentarlos. Seguro que actualmente se deben haber escrito libros más actualizados sobre análisis armónico, así como trabajos más actualizados sobre todo de este siglo, que desconocemos. Veamos algunos libros. En A. Zygmund [30], se refiere a un clásico libro sobre series trigonométricas y temas afines, cuya primera edición fue en 1935 y una 2da edición en 1968, y que es considerado como la “biblia” de tales series pues ha orientado, estimulado y contribuido a muchas investigaciones por parte de generaciones de analistas armónicos. Aun en nuestro siglo creemos que es un libro que no debe faltar en toda biblioteca especializada. En 1970 salió publicado el libro de E. Stein, [6], el cual trata sobre las integrales singulares sobre la base de algunas ideas de la teoría de variable real; estudia también a la transformada de Riesz, a la teoría de Littlewood - Paley, a los espacios de Sobolev, de Lipschitz; discute la convergencia no-tangencial y al teorema de Fatou, a los espacios H^p y a la diferenciación de funciones, entre muchos otros temas relacionados. Este libro podría ser útil para organizar seminarios sobre análisis armónico usando algunos de sus capítulos. El libro tiene ocho capítulos. Un año después, en 1971, se publicó el libro de E. Stein - G. Weiss [10] el cual es una introducción al análisis armónico en los espacios euclidianos y consta de siete capítulos que cubren un buen contenido del análisis real. El capítulo I está dedicado a la transformada de Fourier, el II a los valores de contorno de funciones armónicas, el V a la interpolación de operadores en donde se presentan los teoremas de M. Riesz y Marcinkiewicz; el capítulo VI está dedicado a la transformada de Hilbert y a los operadores integrales singulares. [10] y [6] es una dupla de publicaciones que ayudan mucho a un estudiante a introducirse en este universo, del análisis armónico. Posteriormente, Stein publicó [31] en 1993 el cual es un voluminoso libro sobre análisis armónico y trata los métodos de variable real, la ortogonalidad y las integrales oscilatorias. Contiene 13 capítulos que tratan lo siguiente:

- I. La teoría variable real, con ocho secciones;
- II. Funciones maximales, con cinco secciones y una de ellas trata sobre el comportamiento no-tangencial;
- III. Los espacios de Hardy, con cinco secciones que tratan la caracterización maximal de H^p , la descomposición atómica de H^p , así como de las integrales singulares;
- IV. H^1 y BMO, con seis secciones
- V. Desigualdades pesadas, con seis secciones que tratan con la clase A_p ;
- VI. Operadores pseudo-diferenciales y operadores integrales singulares: la transformada de Fourier, con siete secciones
- VII. Operadores pseudo-diferenciales y operadores integrales singulares: casi ortogonalidad, con cinco secciones;
- VIII. Integrales oscilatorias de primera clase, cinco secciones (transformadas de Fourier de medidas);
- IX. Integrales oscilatorias de segunda clase, seis secciones (operadores integrales de Fourier, L^2 y L^p - estimativas);
- X. Operadores maximales, algunos ejemplos, tres secciones;
- XI. Promedios maximales, cuatro secciones;
- XII. Introducción al grupo de Heisenberg, siete secciones;
- XIII. Más sobre el grupo de Heisenberg, siete secciones.

El libro contiene una amplia bibliografía.

Otro libro interesante sobre el análisis armónico vía el método variable-real es la obra de A. Torchinsky, [32], en donde aborda los operadores integrales singulares, los pesos A_p , la teoría de los espacios $\dot{H}^p$, entre otros capítulos estudiados a mitad del siglo pasado. El libro tiene 17 capítulos; los tres primeros están dedicados a la serie de Fourier:

- I. series de Fourier,

II. sumabilidad de Cesáro y

III. convergencia en la norma - serie de Fourier),

los que podrían servir para un curso introductorio del análisis de Fourier.

- IV. Los principios básicos, con cinco secciones, contiene temas como la descomposición de Calderón - Zygmund, la función maximal de Hardy-Littlewood, la interpolación de Marcinkiewicz.
- V. La transformada de Hilbert y multiplicadores, cinco secciones, donde se estudia a la transformada de Hilbert en L^p , $1 \leq p < \infty$; se termina presentando a los operadores-multiplicador.
- VI. El teorema de Paley e integración fraccional, con cuatro secciones, trata con resultados de los ingleses Hardy, Littlewood y Paley, así como de Hausdorff-Young.
- VII. Funciones armónicas y subarmónicas, seis secciones, capítulo relacionado con temas tratados en nuestro escrito.
- VIII. Oscilación de funciones, seis secciones; se estudia al espacio BMO y temas relacionados.
- IX. Pesos A_p , ocho secciones que tratan sobre la función maximal de Hardy-Littlewood, los pesos A_p y su relación con BMO.
- X. Algo más sobre $\mathbb{R}^n$, cuatro secciones donde se estudian las distribuciones y las transformadas de Fourier, así como las de Hilbert y Riesz, también las desigualdades de Sobolev y de Poincaré.
- XI. Operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund, ocho secciones que tratan el trabajo de Coifman-Zygmund sobre las integrales singulares, su relación con los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$; es un capítulo que puede servir para entrar a una teoría central en el análisis armónico.
- XII. La teoría de Littlewood-Paley, contiene seis secciones en donde se estudia a la función área de Lusin, que hemos mencionado en el trabajo de Jerison-Kenig; se estudia también a la función g_λ^* ; se presenta al teorema multiplicador de Hörmander.
- XIII. El principio del buen $-\lambda$, con cuatro secciones.
- XIV. Espacios de Hardy en $\mathbb{R}^n$, seis secciones que tratan sobre la descomposición atómica, la caracterización de los espacios H^p , multiplicadores e interpolación.
- XV. Medidas de Carleson, cuatro secciones que estudia las medidas de Carleson, el dual del espacio de Hardy.
- XVI. La integral de Cauchy sobre curvas de Lipschitz, cuatro secciones donde se expone sobre este tipo de integrales sobre curvas de Lipschitz y operadores relacionados con la integral; se presenta al teorema T1.

Finalmente,

- XVII. Problemas de valor de contorno sobre dominios C^1 , tres secciones que trata sobre el interesante tema que de alguna forma está relacionado con lo tratado en el presente artículo; en (i) se expone sobre los potenciales de capa simple y doble sobre dominios C^1 , ideas que sirven para resolver problemas de contorno en EDP, como ya hemos visto; (ii) discute los clásicos problemas de Dirichlet y de Neumann sobre dominios C^1 : En las Notas se brinda algunos datos históricos sobre estos temas.

Otro interesante libro que apareció en 1985 es [33] de J. García - Cuerva, - J. Rubio de Francia, el cual contiene seis capítulos que son: teoría clásica de los espacios de Hardy, teoría de Calderón - Zygmund, teoría de la variable real de los espacios de Hardy, desigualdades con norma pesada, desigualdades con valor vectorial y teoremas de factorización y desigualdades con norma pesada. Esta obra también es recomendada para aprender los fundamentos del análisis armónico. Finalmente, para un lector interesado en la conexión del análisis armónico con las aplicaciones se recomienda leer el capítulo 2 de [34], una obra de Jaffard - Meyer - Ryan sobre ondículas ("wavelets"), en donde se expone un panorama histórico de las ondículas en relación con algunas ideas del análisis armónico.

En relación con los artículos consultados para elaborar nuestro escrito hemos procurado seguir un orden cronológico con el objetivo de motivar a nuestros posibles lectores y ser una guía para posteriores estudios de esta fundamental área de la matemática. En particular hemos dado cierta atención al trabajo de Jerison-Kenig, [1], pues ello nos ha permitido revisar ciertas ideas y métodos usados en el análisis armónico y que en el citado trabajo no son dados por ser conocidos; y así completar la lectura para un lector no familiarizado con estos temas. [35], [36], [37], [38], [39], [40]

Author contributions. El autor es responsable de la definición, selección y discusión del material.

Funding. Este trabajo no ha recibido fondos externos .

Conflicts of interest. Declaro que no hay conflicto de interés.

ORCID and License

Alejandro Ortiz Fernández <https://orcid.org/0000-0002-9380-4301>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](#)

Referencias

- [1] Jerison D, Kenig C. Boundary behavior of harmonic functions in non - tangentially accessible domains. *Advances in Math.* 1982.
- [2] Fatou P. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Mathematica.* 1906.
- [3] Helms LL. Introduction to potential theory. Wiley - Interscience. 1969.
- [4] Calderón AP. On the behavior of harmonic functions near the boundary. *Trans Amer Math Soc.* 1950.
- [5] Calderón AP. On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund. *Trans Amer Math Soc.* 1950.
- [6] Stein EM. Singular integral and differentiability properties of functions. Princeton, New Jersey. Princ. Univ. Press. 1970.
- [7] Carleson L. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables. *Ark Math.* 1962.
- [8] Hunt R, Wheeden R. On the boundary values of harmonic functions. *Trans Amer Math Soc.* 1968.
- [9] Jerison D, Kenig C. Boundary value problems on Lipschitz domains. *MAA Studies in Mat.* 1982.
- [10] Stein EM, Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princ Univ Press. 1971.
- [11] Dahlberg B. Estimates of harmonic measure. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.* 65. 1977.
- [12] Dahlberg B. On the Poisson integral for Lipschitz and C^1 domains. *Studia Math.* 66. 1977.
- [13] Dahlberg B. Weighted norm inequalities for the Lusin area integral and the non - tangential maximal functions for functions harmonic in a Lipschitz domain. *Studia . Math.* 1979.
- [14] Stein EM. On the theory of harmonic functions of several variables. II. Behavior near the boundary. *Acta Math.* 106. 1961.
- [15] Gundy RF, Wheeden RL. Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh - Paley series. *Studia Math.* T. XLIX. 1974.
- [16] Fefferman Ch, Stein EM. H^p - spaces of several variables. *Acta Math.* 129. 1972.
- [17] Burkholder D, Gundy R. Distribution function inequalities for the area integral. *Studia Math.* 44. 1972.
- [18] Fabes E, Jodeit M, Riviere N. Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains. *Acta Math.* 141. 1978.
- [19] Jerison D, Kenig C. The Neumann problem on Lipschitz domains. *Bul. Amer. Soc .Vol. 4 .* 1981.
- [20] Calderón AP. Cauchy integral on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nati. Acad. Sci. USA.* Vol. 74. No 4. 1977.
- [21] Coifman R. A real variable characterization of H^p . *Studia Math.* 51. 1974.
- [22] John F, Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation . *Comm. Pure and Appl. Math.* Vol 14. 1961.
- [23] Coifman R, Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. A.M.S.* Vol. 83. No 4. 1977.
- [24] Calderón AP. Commutators of singular integral operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 1965.
- [25] Segovia C. On the area function of Lusin. *Studia Mathematica.* T. XXIII. 1969.
- [26] Chanillo S, et al. Richard L. Wheeden - In Memoriam 1940 - 2020. *Notices Amer. Math. Soc.* Vol. 69. No 2. 2020.
- [27] Kenig CE. Recent progress on boundary - value problems on Lipschitz domains. *Proc. of Sym. in Pure Math.* Vol. 43. 1985.
- [28] Jerison D, Kenig C. An identity with applications to harmonic measure. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* 2. 1980.
- [29] Jerison D, Kenig C. The Dirichlet problem in non - smooth domains. *Annals of Math*, 113. 1981.
- [30] Zygmund A. Trigonometrical series. Dover Public. (1935 - 1955). *Trigonometric series.* 2nd Ed. Cambridge Univ. Press. London. 1968.
- [31] Stein EM. Harmonic analysis: Real - variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, New Jersey. Princ. Univ. Press. 1993.
- [32] Torchinsky A. Real - variable methods in harmonic analysis. Academic Press. Inc. New York. 1986.
- [33] Cuerva JG, de Francia RJ. Weighted norm inequalities and related topics. North - Holland. New York. 1985.
- [34] Jaffard S, Meyer Y, Ryan R. Wavelets. Tools for Science and Technology. Siam. Philadelphia. 2001.

- [35] Capogna L, Kenig C, Lanzani L. Harmonic measure. Geometric and analytic points of view. Amer. Math. Soc. Univ. Lect. Series. Vol 35. 2005.
- [36] Ortiz A. Tópicos sobre análisis armónico. Notas de Matemática 4. Dpto. de Matemática. Univ. Nac. de Trujillo. Perú. 1988.
- [37] Ortiz A. Alberto P. Calderón. Teoría del potencial e integrales singulares. Una perspectiva histórica. Selecciones Matemáticas. Vol. 04(02). UNT: 2017.
- [38] Kenig CE. Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems. CBMS. No 83. AMS. 1994.
- [39] Macías R, Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. Advances in Mathematics 33. 1979.
- [40] Ortiz A. Espacios de Hardy H^p y BMO: un breve clásico panorama. UNT. Selecciones Matemática. Vol- 9(2). 2022.