



REVIEW

Discrete Dynamic Systems in Economics: A Study of Linear Difference Equations and Nonlinear Models with Naive and Adaptive Expectations

Sistemas Dinámicos Discretos en Economía: Un estudio de Ecuaciones en Diferencias Lineales y Modelos No Lineales con Expectativas Ingenuas y Adaptativas

Jose Luis Matos Tejada 

Received, Dec. 15, 2024;

Accepted, May. 03, 2025;

Published, Jul. 27, 2025



How to cite this article:

Matos J. *Discrete Dynamic Systems in Economics: A Study of Linear Difference Equations and Nonlinear Models with Naive and Adaptive Expectations*. *Selecciones Matemáticas*. 2025;12(1):162–185. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2025.01.14>

Abstract

This study investigates market dynamics using a discrete economic model of supply and demand. Initially, the linear case with naïve or static expectations is analyzed, and the stability conditions that lead to different system behaviors, such as convergence to equilibrium, periodic oscillations, or divergence, are determined analytically through the study of fixed points and cobweb dynamics. Subsequently, the analysis is extended to the nonlinear case with adaptive expectations, where the interaction between supply nonlinearity and the expectation formation process is found to generate complex behaviors. The results show how variations in the nonlinearity parameter induce bifurcations observable in time series. The study provides a comprehensive analytical framework that links mathematical properties with observable economic phenomena, offering tools to predict and manage stability in real markets, with direct applications in economic policy and financial risk management.

Keywords . Difference equation, fixed points, stability, Time series, bifurcation.

Resumen

En este trabajo se investigó la dinámica de los mercados mediante un modelo económico discreto de oferta y demanda. En una primera etapa, se analiza el caso lineal con expectativas ingenuas o estáticas, determinando analíticamente las condiciones de estabilidad que conducen a diferentes comportamientos del sistema: convergencia al equilibrio, oscilaciones periódicas o divergencia. Esto se realiza a través del estudio de los puntos fijos y de la dinámica tipo telaraña. Posteriormente, el análisis se amplía al caso no lineal con expectativas adaptativas, donde se identifica que la interacción entre la no linealidad de la oferta y el proceso de formación de expectativas puede generar comportamientos complejos. Los resultados muestran cómo la variación del parámetro de no linealidad induce bifurcaciones, observables en las series temporales. El estudio ofrece un marco analítico integral que vincula las propiedades matemáticas con fenómenos económicos observables, brindando herramientas útiles para predecir y gestionar la estabilidad en mercados reales, con aplicaciones directas en la formulación de políticas económicas y la gestión de riesgos financieros.

Palabras clave. Ecuación en diferencias, puntos fijos, estabilidad, series de tiempo, bifurcación.

*Universidad Nacional de Trujillo, Perú. **Correspondence author** (jmatos@unitru.edu.pe).

1. Introducción. La economía se distingue por su constante dinamismo, impulsado por la interacción entre los diversos actores del mercado. Uno de los modelos clave para analizar este comportamiento es el modelo de telaraña (Cobweb), el cual explica cómo los productores y consumidores toman decisiones basadas en la oferta y la demanda de bienes y servicios. Esta interacción es fundamental, ya que determina los precios y la dinámica del mercado, estableciendo un equilibrio entre la cantidad ofrecida por los productores y la cantidad demandada por los consumidores [1, 2].

Desde sus inicios, este modelo fue analizado por Ezequiel [3] en su artículo titulado “**The Cobweb Theorem**”, donde sentó las bases para comprender la dinámica de ajuste entre la oferta y la demanda en mercados con desfases temporales. Posteriormente, el modelo se convirtió en objeto de estudio bajo diferentes enfoques de expectativas, como son las expectativas ingenuas o estáticas, donde los agentes basan sus decisiones en información pasada sin considerar cambios futuros; y las expectativas adaptativas, en las que los agentes ajustan sus predicciones conforme a errores previos. Estas expectativas son inherentes al ser humano, ya que los agentes económicos toman decisiones basadas en anticipaciones sobre el futuro. Debido a esto, la matemática económica busca modelar este comportamiento mediante este tipo de enfoques, permitiendo capturar la complejidad del comportamiento humano y su impacto en la dinámica económica [4].

El presente trabajo investiga los efectos de las expectativas económicas en la dinámica de mercados mediante sistemas dinámicos discretos lineales y no lineales. En particular, se analizan los siguientes modelos:

1. Modelo lineal con expectativas estáticas:

Se inicia con un modelo clásico de telaraña (Cobweb) que combina una función de demanda lineal con una oferta lineal bajo expectativas ingenuas o estáticas, descrito por el sistema:

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = -\gamma + \delta P_t^e, & \text{(Oferta)} \\ D(P_t) = S(P_t^e). & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (P_1)$$

2. Modelo no lineal con expectativas adaptativas:

Posteriormente, se introduce un modelo extendido donde la oferta adopta una especificación no lineal, interactuando con una demanda lineal bajo expectativas adaptativas. Este sistema dinámico presenta comportamientos más complejos, como bifurcaciones y caos, y está definido por:

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = \mu \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|} \right), & \text{(Oferta no lineal)} \\ P_t^e = P_{t-1}^e + \lambda(P_{t-1} - P_{t-1}^e), & \text{(Expectativas adaptativas)} \\ D(P_t) = S(P_t^e). & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (P_2)$$

Para abordar este estudio, hemos organizado el trabajo en tres secciones principales que guían de manera lógica y progresiva el análisis del modelo de telaraña (Cobweb) y sus extensiones.

En la segunda sección, se establecen los fundamentos teóricos de sistemas discretos, centrándonos en conceptos clave como órbitas, puntos fijos, estabilidad y bifurcaciones. Estos elementos son esenciales para comprender la dinámica del modelo y proporcionan el marco matemático necesario para el análisis posterior. La tercera sección aplica estos conceptos al modelo clásico de telaraña con oferta y demanda lineales bajo expectativas ingenuas o estáticas. Aquí se examina en detalle el comportamiento dinámico del sistema, identificando condiciones de estabilidad, posibles ciclos y puntos de equilibrio, lo que permite contrastar los resultados teóricos con las propiedades del modelo. Finalmente, en la cuarta sección, se amplía el análisis al considerar una oferta no lineal acoplada con una demanda lineal bajo expectativas adaptativas. Esta extensión permite explorar cómo la no linealidad y las expectativas influyen en la dinámica del sistema, incluyendo la aparición de comportamientos complejos como bifurcaciones y caos.

2. Sistemas dinámicos. Un sistema es un modelo matemático que describe la evolución temporal de un conjunto de estados expresados mediante un conjunto de reglas o ecuaciones. Cada estado corresponde a una configuración específica que el sistema puede adoptar en un momento determinado. Matemáticamente, un sistema dinámico se expresa como un par (X, F) , donde:

- X es el **conjunto de estados**, que engloba todas las posibles configuraciones del sistema. Este conjunto puede variar en naturaleza, pudiendo ser discreto o continuo, así como finito o infinito, según las características del sistema que se esté modelando.
- $F : X \rightarrow X$ es la **función de evolución**, que define la manera en que el sistema pasa de un estado a otro a medida que transcurre el tiempo. Partiendo de un estado inicial $x_0 \in X$, esta función permite predecir el estado del sistema en cualquier instante futuro.

Definición 2.1. Un sistema dinámico discreto es una secuencia de estados $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ definidos por una regla de evolución que describe cómo el estado en el tiempo $t + 1$ depende del estado en el tiempo t . Matemáticamente, se expresa como:

$$x(t + 1) = F(x(t)), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

donde:

- $x(t)$ es el estado del sistema en el tiempo discreto t .
- F es una función que describe la regla de evolución del sistema.

Definición 2.2 (Órbita o Trayectoria). Dado un sistema dinámico discreto cuya evolución está determinada por la regla $x(t + 1) = F(x(t))$, y un punto inicial $x(0) = x_0 \in X$, la órbita (o trayectoria) del sistema a partir de $x(0)$ corresponde a la secuencia de estados obtenidos al aplicar repetidamente la función F . Matemáticamente, la órbita se define como:

$$O(x_0) = \{x(t) = F^t(x_0) \mid t \in \mathbb{N}, x_0 = F^0(x_0)\},$$

donde:

- F^t representa la aplicación iterada de F t veces, es decir, $F^t(x_0) = F(F(\dots F(x_0) \dots))$,
- $F^0(x_0) = x_0$ denota el estado inicial del sistema.

Definición 2.3 (Órbita Periódica (k-Ciclo)). Una órbita $O(x_0)$ se denomina **k-ciclo** (o órbita periódica de periodo k) si existe un entero mínimo $k \geq 2$ tal que:

$$F^k(x_0) = x_0 \quad \text{y} \quad F^t(x_0) \neq x_0 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq t < k,$$

donde:

- El conjunto $\{x_0, F(x_0), \dots, F^{k-1}(x_0)\}$ contiene exactamente k puntos distintos,
- La órbita se reduce a: $O(x_0) = \{x_0, F(x_0), \dots, F^{k-1}(x_0)\}$ con comportamiento periódico.

Cuando $k = 1$, se denomina **punto fijo**.

Ejemplo 2.1 (2-Ciclos en el mapa logístico). Para el sistema

$$F(x) = 3.2x(1 - x), \quad (2.2)$$

existe un 2-ciclos con:

$$O(0.513) = \{0.513, 0.799, 0.513, 0.799, \dots\}$$

Definición 2.4 (Punto de Equilibrio o Punto Fijo). Sea $F : X \rightarrow X$ una función que describe la dinámica de un sistema, donde X es el espacio de estados y $F(x)$ representa el estado del sistema en el siguiente paso de tiempo, dado su estado actual x . Un punto $x^* \in X$ se dice que es un **punto de equilibrio** (o **punto fijo**) del sistema si satisface:

$$F(x^*) = x^*. \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.2. Sea $x(t+1) = F(x(t)) = \frac{x(t)}{1 + |x(t)|}$, con $t \in \mathbb{N}_0$. Entonces, el único punto fijo de la ecuación en diferencias es $x^* = 0$, puesto que $F(0) = 0$. Para esbozar la órbita de una condición inicial x_0 , se sigue un procedimiento iterativo conocido como **gráfico de telaraña** (Cobweb)[5]. Primero, se comienza con el valor de entrada x_0 y se encuentra el valor de salida $F(x_0)$ trazando el valor de la función por encima de x_0 . Luego, para convertir el valor de salida $F(x_0)$ en el nuevo valor de entrada, se traza una línea horizontal desde el punto $(x_0, F(x_0))$ hasta la línea diagonal $y = x$. Este proceso se repite iterativamente: se evalúa F en el nuevo valor de entrada, se traza una línea vertical hasta la curva $x = F(x)$, y luego una línea horizontal hasta la diagonal $y = x$.

En la Figura 2.1, se ilustra la construcción de las órbitas para las condiciones iniciales $x_0 = 2.6$ y $x_0 = -2.6$, utilizando la función $F(x) = \frac{x}{1 + |x|}$. Las líneas continuas de color **rojo** y **azul** representan los pasos iterativos del gráfico de telaraña para cada condición inicial. La órbita correspondiente a $x_0 = 2.6$ es $\{2.6, 0.722, 0.419, 0.295, \dots\}$, mientras que la órbita correspondiente a $x_0 = -2.6$ es $\{-2.6, -0.722, -0.419, -0.295, \dots\}$. Ambas órbitas se acercan progresivamente al punto fijo $x^* = 0$.

Definición 2.5. Una ecuación en diferencias lineal no homogénea de primer orden es una relación de recurrencia de la forma:

$$x(t + 1) = q(t)x(t) + r(t), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.4)$$

donde:

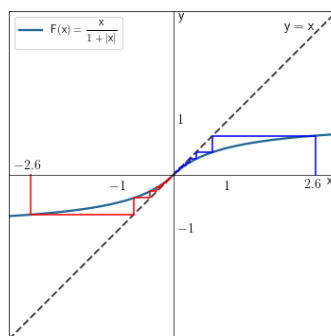


Figura 2.1: Gráfico de telaraña (Cobweb) para dos órbitas de $F(x)$.

- $x(t)$ es la secuencia desconocida,
- $q(t)$ y $r(t)$ son funciones reales dadas,
- t_0 es un entero no negativo que representa el tiempo inicial,
- $x(t_0)$ es la condición inicial.

Teorema 2.1 (Solución de la ecuación no homogénea [5]). Sean $q(t)$ y $r(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, secuencias reales. Entonces, la ecuación en diferencias lineales de primer orden

$$x(t + 1) = q(t)x(t) + r(t), \quad \text{con condición inicial } x(t_0),$$

tiene como solución la expresión

$$x(t) = \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{t-1} \left[\prod_{i=p+1}^{t-1} q(i) \right] r(p), \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (2.5)$$

Para algún $t \in \mathbb{N}_0$.

Demostración: La solución se obtiene mediante iteración directa de la relación de recurrencia (2.4). Para $t = t_0$, $t = t_0 + 1$ y $t = t_0 + 2$, se tiene

$$x(t_0 + 1) = q(t_0)x(t_0) + r(t_0),$$

$$x(t_0 + 2) = q(t_0 + 1)q(t_0)x(t_0) + q(t_0 + 1)r(t_0) + r(t_0 + 1),$$

$$x(t_0 + 3) = q(t_0 + 2)q(t_0 + 1)q(t_0)x(t_0) + q(t_0 + 2)q(t_0 + 1)r(t_0) + q(t_0 + 2)r(t_0 + 1) + r(t_0 + 2).$$

y, en general,

$$x(t) = x(t_0 + t - t_0),$$

$$x(t) = q(t-1)q(t-2) \cdots q(t_0)x(t_0) + [q(t-1)q(t-2) \cdots q(t_0 + 1)r(t_0)] + [q(t-1)q(t-2) \cdots q(t_0 + 2)r(t_0 + 1)] + \cdots + q(t-1)r(t-2) + r(t-1).$$

Usando el método de inducción se demostrara que para $t \geq t_0 \geq 0$ se cumple

$$x(t) = \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{t-1} \left[\prod_{i=p+1}^{t-1} q(i) \right] r(p),$$

para algún $t \in \mathbb{N}_0$.

Si $t = 1$; se tiene

$$x(1) = \left[\prod_{i=t_0}^0 q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^0 \left[\prod_{i=p+1}^0 q(i) \right] r(p) = q(t_0)x(t_0) + 1 \cdot r(t_0) = q(t_0)x(t_0) + r(t_0).$$

Por convención $\prod_{i=k+1}^k q(i) = 1$. Ahora supongase que para $t = k$, la afirmación es verdadera, es decir, se cumple

$$x(k) = \left[\prod_{i=t_0}^{k-1} q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{k-1} \left[\prod_{i=p+1}^{k-1} q(i) \right] r(p).$$

Luego, para $t = k + 1$ de (2.3) se tiene

$$x(k+1) = q(k)x(k) + r(k).$$

Por hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} x(k+1) &= q(k) \left(\left[\prod_{i=t_0}^{k-1} q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{k-1} \left[\prod_{i=p+1}^{k-1} q(i) \right] r(p) \right) + r(k) \\ &= q(k) \left[\prod_{i=t_0}^{k-1} q(i) \right] x(t_0) + q(k) \sum_{p=t_0}^{k-1} \left[\prod_{i=p+1}^{k-1} q(i) \right] r(p) + r(k) \\ &= \left[\prod_{i=t_0}^k q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{k-1} \left[\prod_{i=p+1}^k q(i) \right] r(p) + 1 \cdot r(k) \\ &= \left[\prod_{i=t_0}^k q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{k-1} \left[\prod_{i=p+1}^k q(i) \right] r(p) + \prod_{i=k+1}^k q(i) r(k) \\ &= \left[\prod_{i=t_0}^k q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^k \left[\prod_{i=p+1}^k q(i) \right] r(p) \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que (2.5) se cumple para todo $t \in \mathbb{N}_0$ □

Supongamos existen dos soluciones distintas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= q(t)x_1(t) + r(t), & x_1(t_0) &= x_0, \\ x_2(t+1) &= q(t)x_2(t) + r(t), & x_2(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Definimos $d(t) = x_1(t) - x_2(t)$, Como ambas soluciones cumplen la misma condición inicial, entonces $d(t_0) = 0$. Restando las ecuaciones:

$$d(t+1) = q(t)d(t).$$

Puesto que es homogénea de (2.5) la solución es:

$$d(t) = d(t_0) \prod_{k=t_0}^{t-1} q(k), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Pero $d(t_0) = 0$, por lo que:

$$d(t) = 0 \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Por tanto, $x_1(t) = x_2(t)$ para algún $t \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo 2.3 (Solución de ecuación en diferencias lineal no autónoma). Considere el sistema dinámico discreto de primer orden no autónomo definido por la relación de recurrencia:

$$x(t+1) = (t-5)x(t), \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

con condición inicial:

$$x(0) = 1.$$

Aplicando el método de iteración directa y utilizando la fórmula general para ecuaciones en diferencias lineales (2.5), se obtiene la solución explícita mediante un producto telescópico:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ \prod_{i=0}^{t-1} (i-5) & \text{si } 1 \leq t < 6, \\ 0 & \text{si } t \geq 6. \end{cases} \quad (2.6)$$

Representación Gráfica de Series de Tiempo en Sistemas Dinámicos. En el análisis de sistemas dinámicos discretos, las **series de tiempo** [6, 7] son una herramienta fundamental para visualizar la evolución de las órbitas. Su representación gráfica permite interpretar de manera intuitiva el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo.

Método de Representación

Dado un sistema dinámico definido por una sucesión $x(t)$, donde $t \in \mathbb{N}_0$ representa el tiempo discreto, construimos una serie de tiempo como se indica a continuación:

- **Graficamos los ejes de coordenadas X,Y donde:**

- El eje X (abscisas) representa el tiempo t .
- El eje Y (ordenadas) representa el valor de la solución $x(t)$ en cada instante del tiempo.

● **Puntos discretos:**

- Para cada valor de $t \in \mathbb{N}_0$, hallamos el valor de $x(t)$ y graficamos los puntos $(t, x(t))$ en el sistema XY como una conjunto de puntos discretos.

● **Interpolación lineal:**

- Conectamos los puntos $(t, x(t))$ obtenidos en el paso anterior mediante segmentos de recta para poder visualizar la gráfica de serie de tiempo del sistema dado. De esta manera podemos observar la evolución temporal de nuestro sistema de una forma “casi” continua.

Ventajas de la Representación en Series de tiempo:

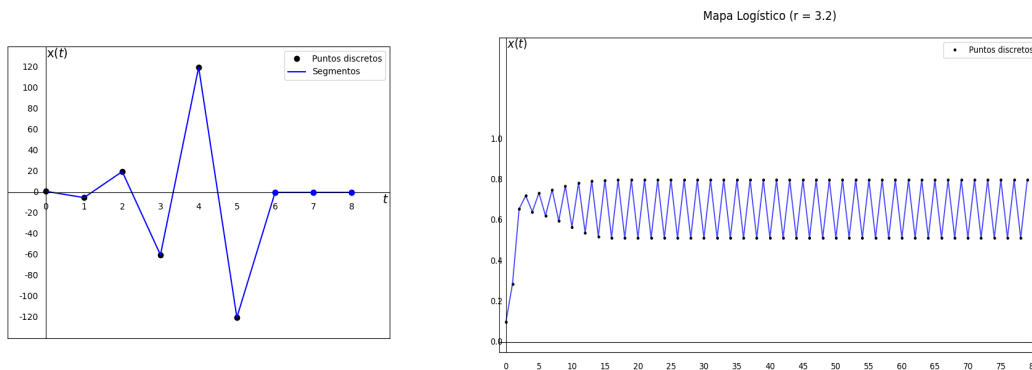
Esta técnica ofrece 3 beneficios importantes en el estudio del comportamiento cualitativo de un sistema, los cuales son:

1. **Visualización continua:** Es posible transformar los puntos discretos en una trayectoria suave, lo cual permite la identificación de patrones de comportamiento en forma continua.
2. **Relación temporal clara:** Se pueden observar de forma más clara las transiciones entre diferentes estados consecutivos.
3. **Análisis dinámico intuitivo:** Se observan tendencias, estabilidad, oscilaciones o comportamientos caóticos de las órbitas de forma gráfica, lo cual permite vislumbrar el objetivo del estudio cualitativo.

En las figuras 2.2a y 2.2b se observan dos casos:

- **En la figura 2.2a** se tiene la órbita del sistema evaluada en 8 períodos, útil para identificar comportamientos iniciales.
- **En la figura 2.2b:** se tiene la órbita del sistema extendida a 80 períodos, revelando la dinámica a largo plazo.

Esta metodología es fundamental en el análisis de sistemas dinámicos discretos, permitiendo caracterizar cualitativamente el comportamiento de las órbitas mediante herramientas visuales efectivas. En particular, para modelos económicos como el de telaraña, esta representación gráfica resulta indispensable para comprender la evolución temporal de los precios y su relación con las expectativas de los agentes.



(a) Serie de tiempo de solución (2.6).

(b) Serie de tiempo de 2-ciclos (2.2).

Figura 2.2: Series de tiempo.

La siguiente proposición presenta dos casos particulares que son importantes en muchas aplicaciones, especialmente en economía [8].

Proposición 2.1 (Casos particulares [5]). *Sea la ecuación en diferencias lineal no homogénea de primer orden:*

$$x(t + 1) = q(t)x(t) + r(t), \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

Entonces, se tienen los siguientes casos particulares:

i) Si $q(t) = q$ es constante para todo $t \in \mathbb{N}_0$, la solución se reduce a:

$$x(t) = q^{t-t_0}x_0 + \sum_{p=t_0}^{t-1} q^{t-p-1}r(p).$$

ii) Si $q(t) = q$ y $r(t) = r$ son constantes para todo $t \in \mathbb{N}_0$, la solución se reduce a:

$$x(t) = \begin{cases} q^{t-t_0}x_0 + r \cdot \frac{1 - q^{t-t_0}}{1 - q}, & \text{si } q \neq 1, \\ x_0 + r(t - t_0), & \text{si } q = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Demostración: Aplicando la fórmula (2.5) del Teorema (2.1), consideramos primero el caso en el que $q(t) = q$ es constante, obteniendo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) \right] x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{t-1} \left[\prod_{i=p+1}^{t-1} q(i) \right] r(p), \\ &= q^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{t-1} [q^{t-p-1}] r(p), \end{aligned}$$

luego

$$x(t) = q^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{p=t_0}^{t-1} q^{t-p-1}r(p). \quad (2.8)$$

Para el segundo caso, cuando $q(t) = q$ y $r(t) = r$ son constantes, el segundo término de la solución general de la fórmula (2.8) toma la forma:

$$\sum_{p=t_0}^{t-1} q^{t-p-1}r = r \sum_{k=0}^{t-t_0-1} q^k,$$

donde $k = t - p - 1$. Evaluamos la serie geométrica cuando $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{t-t_0-1} q^k = \frac{1 - q^{t-t_0}}{1 - q}$,

luego,

$$x(t) = q^{t-t_0}x(t_0) + r \cdot \frac{1 - q^{t-t_0}}{1 - q}. \quad \text{Si } q = 1, \text{ entonces } \sum_{k=0}^{t-t_0-1} 1^k = t - t_0,$$

luego,

$$x(t) = x(t_0) + r(t - t_0).$$

Por tanto, el resultado obtenido permite obtener la solución de los dos casos particulares. \square

Estabilidad en Sistemas Dinámicos Discretos. El estudio de estabilidad en sistemas dinámicos discretos es fundamental para analizar el comportamiento a largo plazo de las órbitas del sistema.

Definición 2.6 (Estabilidad Asintótica para sistemas discretos). Un punto fijo x^* del sistema dinámico discreto $x(t+1) = F(x(t))$ se dice:

1. **Estable en el sentido de Lyapunov** si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

2. **Asintóticamente estable** si:

- Es estable en el sentido de Lyapunov, y
- Existe $\delta_0 > 0$ tal que:

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

En sistemas dinámicos, una bifurcación es un cambio cualitativo en la estructura de las soluciones del sistema, a medida que uno o más parámetros varían. Esto quiere decir que, pequeñas modificaciones en los parámetros del sistema pueden provocar cambios drásticos en su comportamiento, como la aparición de nuevos estados de equilibrio, ciclos límite, o incluso caos. A continuación vamos a definir, qué condiciones se deben verificar para la existencia de una bifurcación.

Definición 2.7 (Bifurcación en sistemas dinámicos discretos). *Sea un sistema dinámico discreto parametrizado:*

$$x(t + 1) = F(x(t), \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

*Se dice que ocurre una **bifurcación** en $\mu = \mu_c$ cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Cambio en el número de puntos fijos: Aparecen/desaparecen soluciones de $x^* = F(x^*, \mu)$.*
2. *Cambio en la estabilidad: Los autovalores λ_i de $DF(x^*, \mu)$ cruzan el círculo unitario ($|\lambda_i(\mu_c)| = 1$).*
3. *Cambio topológico: El retrato fase no es equivalente topológicamente para $\mu < \mu_c$ y $\mu > \mu_c$,*

donde:

- μ_c es el **valor crítico** o punto de bifurcación.
- DF denota la matriz jacobiana del sistema.

En economía un modelo de oferta y demanda tiende a buscar un punto de equilibrio donde los precios se estabilizan. Sin embargo, ¿qué ocurre si una perturbación externa, como un cambio brusco en los costos de producción, afecta este equilibrio?. El siguiente teorema es fundamental para entender y determinar bajo qué condiciones un sistema tiende a mantener su equilibrio frente a perturbaciones externas (estabilidad), o si, por el contrario, pequeñas perturbaciones pueden amplificarse y llevar al sistema a comportamientos no deseados (inestabilidad).

Teorema 2.2 (Teorema 1.13, [5]). *Sea x^* un punto de equilibrio de la ecuación en diferencias*

$$P(t) = f(P(t - 1)), \tag{2.9}$$

donde f es una función continuamente diferenciable en x^ . Se cumplen las siguientes propiedades:*

- i) *Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es asintóticamente estable.*
- ii) *Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* es inestable.*

Demostración: Supongamos que $|f'(x^*)| < 1$. Dado que f es continuamente diferenciable en x^* , existe un entorno de x^* donde f' está definida y es continua. Por la continuidad de f' , para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x^*| < \delta$, entonces:

$$|f'(x) - f'(x^*)| < \epsilon.$$

En particular, tomando $\epsilon = \frac{1 - |f'(x^*)|}{2} > 0$, se tiene que:

$$|f'(x)| \leq |f'(x) - f'(x^*)| + |f'(x^*)| < \epsilon + |f'(x^*)| = \frac{1 + |f'(x^*)|}{2} = M.$$

Como $|f'(x^*)| < 1$, se sigue que $M < 1$. Esto implica que f es una contracción en un entorno de x^* .

Para cualquier condición inicial $P(0)$ en este entorno, aplicamos el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[P(0), x^*]$. Existe un punto c en $(P(0), x^*)$ tal que:

$$\frac{f(P(0)) - f(x^*)}{P(0) - x^*} = f'(c).$$

Como $f(x^*) = x^*$, se obtiene:

$$\frac{P(1) - x^*}{P(0) - x^*} = f'(c).$$

Tomando el valor absoluto y utilizando la cota $|f'(c)| \leq M$, se tiene:

$$|P(1) - x^*| \leq M|P(0) - x^*|.$$

Iterando este proceso, se obtiene:

$$|P(t) - x^*| \leq M^t|P(0) - x^*|.$$

Como $M < 1$, se sigue que $M^t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |P(t) - x^*| = 0,$$

lo que demuestra que x^* es asintóticamente estable.

Supongamos ahora que $|f'(x^*)| > 1$, utilizando la expansión de Taylor de primer orden de f alrededor de x^* :

$$f(P) = f(x^*) + f'(x^*)(P - x^*) + R(P),$$

donde el término de residuo $R(P)$ satisface:

$$\lim_{P \rightarrow x^*} \frac{R(P)}{P - x^*} = 0.$$

Como $f(x^*) = x^*$, la expansión se simplifica a:

$$f(P) - x^* = f'(x^*)(P - x^*) + R(P). \quad (2.10)$$

Sea $P(0)$ una condición inicial cercana a x^* , y definimos $d_0 = |P(0) - x^*|$. Aplicando (2.10) a $P(0)$, se tiene:

$$P(1) - x^* = f'(x^*)(P(0) - x^*) + R(P(0)).$$

Tomando el valor absoluto y utilizando la desigualdad triangular, obtenemos:

$$d_1 = |P(1) - x^*| \geq |f'(x^*)| \cdot d_0 - |R(P(0))|.$$

Dado que $\lim_{P \rightarrow x^*} \frac{R(P)}{P - x^*} = 0$, para $\epsilon = \frac{|f'(x^*)| - 1}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|P(0) - x^*| < \delta$, entonces:

$$|R(P(0))| < \epsilon d_0.$$

Por lo tanto:

$$d_1 > |f'(x^*)| \cdot d_0 - \epsilon d_0 = (|f'(x^*)| - \epsilon) d_0.$$

Como $|f'(x^*)| - \epsilon > 1$, se sigue que $d_1 > d_0$. Iterando este argumento, se obtiene:

$$d_t > (|f'(x^*)| - \epsilon)^t d_0.$$

Dado que $|f'(x^*)| - \epsilon > 1$, se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_t = \infty.$$

Esto implica que la distancia de $P(t)$ a x^* crece indefinidamente, por lo que x^* es inestable. \square

Ejemplo 2.4. Sea $x(t+1) = F(x(t)) = \frac{7x(t) - x^3(t)}{3}$, con $t \in \mathbb{N}_0$. Entonces, los puntos fijos de la ecuación en diferencias son $x^* = -2$, $x^* = 0$ y $x^* = 2$, puesto que $F(-2) = 2$, $F(0) = 0$ y $F(2) = 2$. Para la función $F(x) = \frac{7x - x^3}{3}$, analizaremos la estabilidad aplicando el Teorema (2.2), calculamos su derivada:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{7x - x^3}{3} \right) = \frac{7 - x^2}{3}.$$

Evaluamos la derivada en los puntos fijos:

1. En $x^* = -2$: $F'(-2) = \frac{7 - (-2)^2}{3} = -\frac{5}{3} \approx -1.66$, como $|F'(-2)| > 1$, el punto fijo $x^* = -2$ es **inestable**.
2. En $x^* = 0$: $F'(0) = \frac{7 - (0)^2}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$, como $|F'(0)| > 1$, el punto fijo $x^* = 0$ es **inestable**.
3. En $x^* = 2$: $F'(2) = \frac{7 - (2)^2}{3} = -\frac{5}{3} \approx -1.66$, como $|F'(2)| > 1$, el punto fijo $x^* = 2$ es **inestable**.

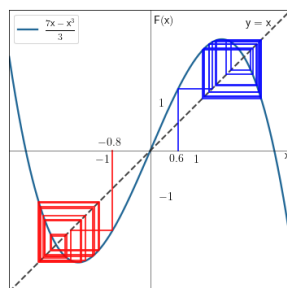


Figura 2.3: Gráfico de puntos fijos $x^* = -2$ y $x^* = 2$ inestables.

En la Figura (2.3), se observa la construcción de las órbitas para las condiciones iniciales $x_0 = -0.8$ y $x_0 = 0.6$, utilizando la función $F(x) = \frac{x}{1 + |x|}$. Las líneas continuas de color **rojo** y **azul** representan los pasos iterativos del gráfico de telaraña para cada condición inicial. Ambas órbitas se acercan progresivamente a los puntos fijos $x^* = -2$ y $x^* = 2$. Sin embargo, se observa un comportamiento de oscilaciones explosivas, lo cual indica que estos puntos fijos son **inestables**.

Con el fin de simplificar la notación en los modelos económicos, se adoptará una convención general para representar variables económicas en el tiempo.

En lugar de utilizar la notación funcional $x(t)$ para denotar una variable x en el tiempo t , se empleará la notación x_t . Es decir, $x(t) := x_t$. Este cambio de notación se aplicará de manera consistente a todas las variables económicas que dependan del tiempo, facilitando así la exposición y el manejo de las ecuaciones en el análisis subsiguiente.

3. Modelo de oferta y demanda con expectativas ingenuas (Cobweb). En el análisis económico de los mercados de bienes perecederos, como los productos agrícolas o ganaderos, la cantidad de bienes ofrecidos y los precios de equilibrio dependen de las decisiones de los productores, quienes buscan maximizar sus beneficios. Para comprender este comportamiento, es esencial conectar el proceso de **maximización de beneficios** con las **funciones de oferta**, las cuales modelan cómo los productores responden a las expectativas de precios futuros[4].

Los productores toman decisiones de producción para maximizar sus beneficios. El beneficio $\pi(q_t)$ del productor en el tiempo t se expresa como:

$$\pi(q_t) = p_t^e q_t - c(q_t),$$

donde:

- p_t^e es el precio esperado por los productores en el tiempo t ,
- q_t es la cantidad producida,
- $c(q_t)$ es la función de costos de producción.

El productor quiere maximizar su beneficio, lo que significa encontrar la cantidad q_t que maximiza la diferencia entre los ingresos y los costos. Esto se puede formalizar usando el operador $\arg \text{máx}$:

$$\arg \text{máx}_{q_t} \{p_t^e q_t - c(q_t)\}.$$

Este operador indica que estamos buscando el valor de q_t que maximiza la función de beneficios $p_t^e q_t - c(q_t)$. Este es un proceso de **optimización**.

Para resolver este problema de maximización, utilizamos la derivada de la función de beneficios con respecto a q_t , para encontrar el valor de q_t que maximiza los beneficios. La derivada de $\pi(q_t)$ es:

$$\frac{d\pi(q_t)}{dq_t} = p_t^e - c'(q_t),$$

donde $c'(q_t)$ es la derivada de la función de costos $c(q_t)$, que representa el **costo marginal** de producir una unidad adicional [4].

Para encontrar el valor óptimo de q_t , igualamos la derivada a cero:

$$p_t^e - c'(q_t) = 0,$$

lo que nos da la condición de maximización:

$$p_t^e = c'(q_t).$$

Esta ecuación muestra que, para maximizar el beneficio, el precio esperado p_t^e debe ser igual al **costo marginal**, $c'(q_t)$. En otras palabras, los productores ajustarán la cantidad comprada q_t de manera que el precio esperado iguale el costo de producir una unidad adicional.

Una vez que sabemos que $p_t^e = c'(q_t)$, podemos resolver para q_t , lo que nos da la **cantidad ofrecida** por los productores en función del precio esperado. La relación entre la cantidad ofrecida y el precio esperado es la **función de oferta**, $S(p_t^e)$ que depende del costo marginal:

$$S(p_t^e) = (c')^{-1}(p_t^e).$$

Esta es la cantidad de bienes que los productores ofrecerán al mercado cuando el precio esperado sea p_t^e .

En muchos modelos económicos, la función de costos $c(q_t)$ puede ser simplificada para hacer el análisis más manejable. Si asumimos una forma simplificada para $c(q_t)$, podemos obtener una **función de oferta lineal**. Esto se logra mediante la suposición de que la relación entre el precio esperado p_t^e y la cantidad ofrecida q_t es lineal. Este modelo fue estudiado por Ezequiel [3] en (1938). La dinámica del mercado está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = -\gamma + \delta P_t^e, & \text{(Oferta)} \\ D(P_t) = S(P_t^e), & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde D y S son funciones lineales que representan la demanda del consumidor y la oferta del productor en el período t , respectivamente, P_t es el precio en el período t y P_t^e es el precio de expectativa del agricultor. Los parámetros α , β , γ y δ son constantes positivas que capturan las sensibilidades de la demanda y la oferta al precio. Sustituyendo las ecuaciones de oferta y demanda en la condición de equilibrio, se obtiene la ecuación en diferencias:

$$\beta P_t + \delta P_t^e = \alpha + \gamma, \quad (3.2)$$

despejando tenemos

$$P_t = \frac{\alpha + \gamma - \delta P_t^e}{\beta}. \quad (3.3)$$

de la ecuación de Equilibrio de mercado tenemos $P_t = D^{-1}S(P_t^e)$, comparando con (3.3) se tiene:

$$P_t = \frac{\alpha + \gamma - \delta P_t^e}{\beta} = D^{-1}S(P_t^e). \quad (3.4)$$

La evolución del precio en (3.4) depende tanto de las curvas de demanda y oferta como de la hipótesis sobre las expectativas asumidas P_t^e en el periodo t . A continuación, analizamos algunos casos de referencia, como las expectativas ingenuas.

Expectativas Ingenuas o Estáticas En su formulación más elemental, los modelos clásicos de oferta agrícola asumen que los productores forman expectativas ingenuas o estáticas sobre los precios futuros [4, 9]. Bajo este esquema, los agentes económicos proyectan que el precio del próximo período (P_t^e) será idéntico al último precio observado (P_{t-1}^e) o bien esperan que el valor de una variable económica en el futuro sea idéntico a su valor actual:

$$P_t^e = P_{t-1}^e. \quad (3.5)$$

Reescribiendo y reemplazando (3.5) en (3.2) esta ecuación en su forma estándar y desplazando los subíndices de tiempo hacia adelante en un periodo, se tiene:

$$P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta},$$

donde

$$q(t) = q = -\frac{\delta}{\beta}, \quad r(t) = r = \frac{\alpha + \gamma}{\beta},$$

son constantes. Por lo tanto, podemos aplicar la Proposición (2.1).

De acuerdo con el caso ii) de la Proposición (2.1), si $q(t) = q$ y $r(t) = r$ son constantes, la solución general de la ecuación en diferencias:

$$x(t + 1) = qx(t) + r,$$

está dada por:

$$x(t) = \begin{cases} q^{t-t_0}x_0 + r \cdot \frac{1 - q^{t-t_0}}{1 - q}, & \text{si } q \neq 1, \\ x_0 + r(t - t_0), & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

En este caso, $q = -\frac{\delta}{\beta}$ y $r = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$. Dado que $q \neq 1$ (a menos que $\delta = -\beta$, lo cual no es posible porque δ y β son positivos), la solución se reduce a:

$$P_t = \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^{t-t_0} P_0 + \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^{t-t_0}}{1 - \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)}.$$

Simplificando, se obtiene:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right] \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}. \tag{3.6}$$

El término $-\frac{\delta}{\beta}$ determina la dinámica del precio. Dependiendo de la relación entre δ y β , la trayectoria temporal del precio puede ser explosiva, uniforme o amortiguada.

Punto de equilibrio de la oferta y demanda lineal

El punto de equilibrio x^* en (3.1) está representado por el precio de equilibrio intertemporal \bar{P} , que es el precio al cual la cantidad demandada es igual a la cantidad ofertada en cada período. Matemáticamente, este precio satisface la condición de equilibrio del mercado:

$$D(\bar{P}) = S(\bar{P}),$$

donde D y S son las funciones de demanda y oferta, respectivamente. Sustituyendo las expresiones lineales para D y S de (3.1), se obtiene:

$$\alpha - \beta\bar{P} = -\gamma + \delta\bar{P}.$$

Resolviendo para \bar{P} , se encuentra:

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}. \tag{3.7}$$

Este valor \bar{P} es el punto de equilibrio del sistema (3.1), ya que satisface la condición de punto fijo en la ecuación en diferencias que describe la dinámica del precio:

$$P_{t+1} = F(P_t),$$

donde

$$F(P_t) = -\frac{\delta}{\beta}P_t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

Sustituyendo $P_t = \bar{P}$, se verifica que:

$$F(\bar{P}) = -\frac{\delta}{\beta}\bar{P} + \frac{\alpha + \gamma}{\beta} = \bar{P}. \tag{3.8}$$

De acuerdo con la definición (2.4), \bar{P} es un **punto de equilibrio** (o **punto fijo**) del sistema dinámico, puesto que satisface $F(\bar{P}) = \bar{P}$. Por lo tanto, \bar{P} representa un punto de equilibrio en el modelo de oferta y demanda con rezago temporal, que refleja la forma en que las expectativas del agricultor sobre el precio se ajustan de manera ingenua, es decir, basándose en el precio esperado del periodo anterior.

Análisis de Estabilidad y Comportamiento Dinámico El siguiente resultado proporciona una caracterización detallada de la estabilidad del modelo en un caso particular en el que la demanda es decreciente y la oferta es creciente, lo que implica que la aplicación $f = D^{-1}S$ es decreciente. Este escenario es relevante porque refleja una interacción económica frecuente, donde un aumento en el precio reduce la demanda y estimula la oferta. El resultado establece condiciones claras bajo

las cuales el precio de equilibrio es estable o inestable, dependiendo de las propiedades locales de las funciones de oferta y demanda en el entorno del equilibrio.

Proposición 3.1 (Estabilidad caso particular [4]). Sea \bar{P} un punto de equilibrio de la ecuación en diferencias

$$D^{-1}(S(P_{t-1})) = f(P_{t-1}), \quad (3.9)$$

donde f , D y S son funciones continuamente diferenciables en \bar{P} . Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Si $-1 < \frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} < 0$, entonces \bar{P} es localmente estable, y los precios convergen al precio de equilibrio.
- ii) Si $\frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} = -1$, entonces el sistema exhibe una oscilación uniforme alrededor de \bar{P} con un período de 2.
- iii) Si $\frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} < -1$, entonces \bar{P} es inestable, los precios divergen del equilibrio.

Demostración: (Caso i) Supongamos que $-1 < \frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} < 0$. Para demostrar que \bar{P} es localmente estable, primero, vemos que \bar{P} es un punto de equilibrio de la ecuación en diferencias (3.9), lo que implica:

$$D^{-1}(S(\bar{P})) = f(\bar{P}) = \bar{P}. \quad (3.10)$$

Calculamos la derivada de f en \bar{P} utilizando la regla de la cadena:

$$f'(\bar{P}) = (D^{-1})'(S(\bar{P})) \cdot S'(\bar{P}). \quad (3.11)$$

La derivada de la función inversa D^{-1} en $S(\bar{P})$ está dada por:

$$(D^{-1})'(S(\bar{P})) = \frac{1}{D'(D^{-1}(S(\bar{P})))} = \frac{1}{D'(\bar{P})},$$

donde hemos utilizado que $D^{-1}(S(\bar{P})) = \bar{P}$ por (3.10). Sustituyendo en (3.11), obtenemos:

$$f'(\bar{P}) = \frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})}.$$

Por hipótesis, se cumple que $-1 < f'(\bar{P}) < 0$, lo que implica $|f'(\bar{P})| < 1$. Aplicando el Teorema (2.2), concluimos que \bar{P} es asintóticamente estable. Dado que asintóticamente estable implica localmente estable, también se cumple que \bar{P} es localmente estable. Por lo tanto, los precios convergen al equilibrio \bar{P} cuando $t \rightarrow \infty$.

(Caso ii). Supongamos que $\frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} = -1$. Linealizamos la función $f(P)$ alrededor de \bar{P} utilizando una expansión de Taylor:

$$f(P) = f(\bar{P}) + f'(\bar{P})(P - \bar{P}) + \mathcal{O}((P - \bar{P})^2).$$

Dado que $f(\bar{P}) = \bar{P}$, esta expresión se simplifica a:

$$f(P) = \bar{P} + f'(\bar{P})(P - \bar{P}) + \mathcal{O}((P - \bar{P})^2).$$

De *i*) tenemos que:

$$f'(\bar{P}) = \frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} = -1,$$

por lo que: $f'(\bar{P}) = -1$ sustituyendo en la expansión de Taylor, la ecuación en diferencias linealizada alrededor de \bar{P} es:

$$P_{t+1} - \bar{P} = f'(\bar{P})(P_t - \bar{P}) = -(P_t - \bar{P}).$$

Esto implica:

$$P_{t+1} = 2\bar{P} - P_t. \tag{3.12}$$

La ecuación (3.12) describe una relación lineal entre P_{t+1} y P_t . Para analizar su comportamiento, iteramos la ecuación:

$$\begin{aligned} P_{t+2} &= 2\bar{P} - P_{t+1} \\ &= 2\bar{P} - (2\bar{P} - P_t) \\ &= P_t. \end{aligned}$$

Esto muestra que $P_{t+2} = P_t$, lo que implica que los precios no converge ni diverge, sino que oscila indefinidamente entre P_0 y P_1 . Es decir, el sistema alterna entre dos valores:

$$P_0, \quad P_1 = 2\bar{P} - P_0, \quad P_2 = P_0, \quad P_3 = P_1, \quad \dots$$

Por lo tanto el sistema exhibe una oscilación uniforme alrededor de \bar{P} .

(Caso iii). Supongamos que $\frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} < -1$. En este caso, de *i*) tenemos que:

$$f'(\bar{P}) = \frac{S'(\bar{P})}{D'(\bar{P})} < -1,$$

lo que implica $|f'(\bar{P})| > 1$, por el Teorema (2.2), concluimos que \bar{P} inestable.

Por tanto, el resultado obtenido permite obtener el análisis de estabilidad del precio de equilibrio. □

La Proposición (3.1) afirma que estabilidad del punto de equilibrio \bar{P} y el comportamiento dinámico del precio P_t dependen críticamente de la razón $-\frac{\delta}{\beta}$, que relaciona las pendientes de las curvas de oferta y demanda.

En el modelo lineal de telaraña (Cobweb), la dinámica del mercado se describe a través de ajustes sucesivos entre la oferta y la demanda. Supongamos que, en un período de tiempo determinado, se ha ofrecido una cantidad inicial q_0 . Este nivel de oferta determina un precio p_0 , representado por el punto m_0 en el plano de precios y cantidades. A partir de este punto, el sistema evoluciona de la siguiente manera:

- **Primer ajuste:** La producción se incrementa en respuesta al precio p_0 , lo que lleva a una expansión de la oferta en el siguiente período hasta alcanzar q_1 , representado por el punto m_1 .
- **Segundo ajuste:** Dado el aumento en la oferta, el precio cae a p_1 , representado por el punto m_2 . Esta reducción en el precio provoca un ajuste en la oferta, que es la cantidad q_2 en el período siguiente.
- **Tercer ajuste:** El nuevo aumento en el precio lleva a un incremento en la oferta, y el ciclo se repite sucesivamente.

A continuación, se analiza la estabilidad del modelo lineal de telaraña (Cobweb). Este modelo de mercado está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, \\ S(P_t^e) = -\gamma + \delta P_t^e, \\ D(P_t) = S(P_t^e). \end{cases}$$

- **Si $\delta < \beta$:**

En este caso, se cumple la condición $-1 < -\frac{\delta}{\beta} < 0$, lo que permite aplicar la **Proposición (3.1)**. Bajo esta condición, el precio de equilibrio \bar{P} es **localmente estable**, ya que el valor absoluto de la razón $-\frac{\delta}{\beta}$ es menor que 1 ($-\frac{\delta}{\beta} < 1$). Esto significa que las fluctuaciones alrededor del equilibrio decrece con el tiempo (amortiguadas), y la trayectoria temporal del precio converge hacia el valor de equilibrio \bar{P} . Este comportamiento indica que cualquier desviación del equilibrio se reduce con el tiempo, lo que resulta en una dinámica convergente y predecible.

En la **Figura (3.1)**, se ilustra esta dinámica:

- Se observa la **telaraña** (cobweb) como una espiral cíclica que representa las fluctuaciones sucesivas de precios y cantidades. Estas fluctuaciones parecen guiadas por una fuerza centrípeta que las acerca gradualmente al punto de intersección, donde se encuentra el precio de equilibrio \bar{P} .
- Si $\delta = \beta$:

En este caso, $-\frac{\delta}{\beta} = -1$. Aplicando la **Proposición (3.1)**, el precio de equilibrio \bar{P} es **estable**, pero no asintóticamente estable, ya que $\left|-\frac{\delta}{\beta}\right| = 1$. Esto significa que las oscilaciones en el precio no se amortiguan con el tiempo, sino que persisten de manera constante alrededor del valor de equilibrio \bar{P} . Este comportamiento indica que el sistema no converge ni diverge, sino que mantiene una oscilación permanente, lo que refleja un equilibrio neutro en la dinámica del precio.

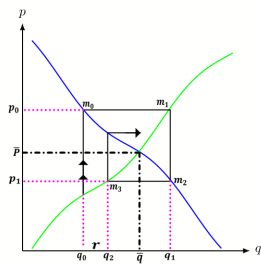


Figura 3.1: E. estable.

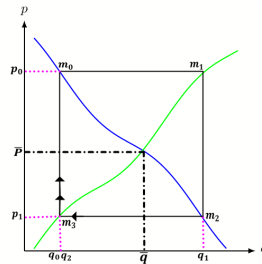


Figura 3.2: E. neutral.

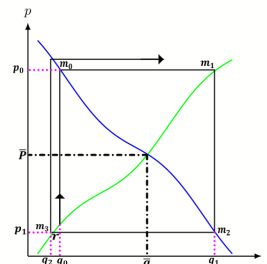


Figura 3.3: E. inestable.

En la **Figura (3.2)**, se ilustra esta dinámica:

- Se ha tomado un nuevo punto de inicio y se observa la **telaraña** (cobweb) se transforma en un bucle cerrado o ciclos perfectos que representan las fluctuaciones constantes de precios y cantidades. Estas oscilaciones no se acercan ni se alejan del punto de equilibrio, sino que se mantienen en una órbita cerrada alrededor de \bar{P} .
- Si $\delta > \beta$:

En este caso, $-\frac{\delta}{\beta} < -1$. Aplicando la **Proposición (3.1)**, el precio de equilibrio \bar{P} es **inestable**, ya que $\left|-\frac{\delta}{\beta}\right| > 1$. Las oscilaciones se aplican con el tiempo (explosivas), y la trayectoria temporal del precio diverge de \bar{P} . Este comportamiento indica que cualquier desviación del equilibrio, por pequeña que sea, se amplifica con el tiempo, lo que resulta en una dinámica divergente.

En la **Figura (3.3)**, se ilustra esta dinámica:

- El proceso descrito comienza en un punto diferente y se observa la **telaraña** (cobweb) como una espiral de oscilación con tendencia hacia afuera (centrífuga), que se aleja progresivamente del punto de equilibrio \bar{P} . Las fluctuaciones de precios y cantidades se vuelven cada vez más amplias, reflejando la naturaleza explosiva del sistema.

El proceso de ajuste descrito en las gráficas 3.1, 3.2 y 3.3, junto con la Proposición (3.1), permite observar las fluctuaciones en los precios y las cantidades en función de las condiciones del mercado. Estas fluctuaciones pueden formalizarse matemáticamente para analizar su comportamiento dinámico. Denotemos por r el cambio neto o desplazamiento cíclico entre la cantidad inicial q_0 y la cantidad después de un ciclo completo q_2 , que corresponde al punto de intersección m_3 de la oscilación completa que sigue a q_0 . Este cambio se expresa de la siguiente manera:

$$r = q_2 - q_0, \tag{3.13}$$

donde:

$$\begin{aligned} p_0 &= D^{-1}(q_0), \\ q_1 &= S(p_0), \\ p_1 &= D^{-1}(q_1), \\ q_2 &= S(p_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto el desplazamiento cíclico r toma la siguiente forma:

$$r(q_0) = S(D^{-1}(S(D^{-1}(q_0)))) - q_0.$$

El valor de r nos indica si el sistema tiende a **acercarse** al equilibrio (tendencia **centrípeta**), a **alejarse** del equilibrio (tendencia **centrífuga**), o a **mantenerse** en un ciclo constante. La interpretación depende del signo de r como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2 ([10]). *En el modelo de la telaraña, la dinámica del sistema está determinada por el desplazamiento cíclico $r(q_0) = q_2 - q_0$, donde q_0 representa la cantidad inicial, q_2 la cantidad después de un ciclo completo, \bar{q} y \bar{P} es la cantidad y precio de equilibrio. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. Si $r(q_0) > 0$:
 - Para $q_0 > \bar{q}$, el sistema exhibe una tendencia **centrífuga**, alejándose del equilibrio.
 - Para $q_0 < \bar{q}$, el sistema muestra una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio.
2. Si $r(q_0) = 0$, el sistema permanece en un **ciclo constante**, manteniendo oscilaciones de amplitud estable sin convergencia ni divergencia.
3. Si $r(q_0) < 0$:
 - Para $q_0 > \bar{q}$, el sistema presenta una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio.
 - Para $q_0 < \bar{q}$, el sistema manifiesta una tendencia **centrífuga**, alejándose del equilibrio.

Demostración:

Caso 1: $r(q_0) > 0$

Supongamos que $r(q_0) > 0$. Por definición, $r(q_0) = q_2 - q_0$, lo que implica $q_2 > q_0$. Analizamos los subcasos:

- Si $q_0 > \bar{q}$, entonces $q_2 > q_0 > \bar{q}$. Esto significa que, después de un ciclo completo, la cantidad q_2 se aleja aún más de la cantidad de equilibrio \bar{q} . Por lo tanto, el sistema exhibe una tendencia **centrífuga**, alejándose del equilibrio.
- Si $q_0 < \bar{q}$, entonces $q_2 > q_0$. Dado que $q_0 < \bar{q}$ y la función inversa de la demanda D^{-1} es decreciente, se cumple que:

$$D^{-1}(\bar{q}) < D^{-1}(q_0).$$

Esto implica que el precio de equilibrio \bar{P} satisface $\bar{P} < p_0$, donde $p_0 = D^{-1}(q_0)$ es el precio inicial. Aplicando la función oferta S , que es creciente, a esta desigualdad, obtenemos:

$$S(\bar{P}) < S(p_0).$$

Dado que $S(\bar{P}) = \bar{q}$ y $S(p_0) = q_1$, se deduce que:

$$\bar{q} < q_1.$$

Aplicando nuevamente la función inversa de la demanda D^{-1} , que es decreciente, a la desigualdad $\bar{q} < q_1$, obtenemos:

$$D^{-1}(q_1) < D^{-1}(\bar{q}).$$

Esto implica que el precio en el siguiente período $p_1 = D^{-1}(q_1)$ satisface $p_1 < \bar{P}$. Aplicando la función oferta S a esta desigualdad, se tiene:

$$S(p_1) < S(\bar{P}).$$

Dado que $S(p_1) = q_2$ y $S(\bar{P}) = \bar{q}$, concluimos que:

$$q_2 < \bar{q}.$$

Además, como $q_2 > q_0$ por hipótesis, se cumple la cadena de desigualdades:

$$q_0 < q_2 < \bar{q}.$$

Esto significa que, después de un ciclo completo, la cantidad q_2 se encuentra más cerca de la cantidad de equilibrio \bar{q} que la cantidad inicial q_0 . Por lo tanto, el sistema exhibe una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio.

Caso 2: $r(q_0) = 0$

Si $r(q_0) = 0$, entonces $q_2 = q_0$. Esto implica que, después de un ciclo completo, la cantidad q_2 es igual a la cantidad inicial q_0 . Por lo tanto, el sistema permanece en un **ciclo constante**, sin convergencia ni divergencia, manteniendo oscilaciones de amplitud estable.

Caso 3: $r(q_0) < 0$

Supongamos que $r(q_0) < 0$. Por definición, $r(q_0) = q_2 - q_0$, lo que implica $q_2 < q_0$. Analizamos los subcasos:

- Si $q_0 > \bar{q}$, entonces $q_2 < q_0$. Dado que $\bar{q} < q_0$ y la función inversa de la demanda D^{-1} es decreciente, se sigue un razonamiento análogo al **Caso 1**. Esto implica que, después de un ciclo completo, se cumple $\bar{q} < q_2 < q_0$. Por lo tanto, el valor de q_2 se acerca más a la cantidad de equilibrio \bar{q} que q_0 , lo que indica que el sistema presenta una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio.
- Si $q_0 < \bar{q}$, entonces $q_2 < q_0 < \bar{q}$. Esto significa que, después de un ciclo completo, la cantidad q_2 se aleja aún más de la cantidad de equilibrio \bar{q} . Por lo tanto, el sistema manifiesta una tendencia **centrífuga**, alejándose del equilibrio.

□

Aplicación

El fenómeno conocido como **teorema de la telaraña** (*cobweb theorem*) describe cómo los desfases temporales entre la oferta y la demanda pueden generar fluctuaciones cíclicas en los precios y las cantidades producidas. Los datos utilizados en este análisis provienen del artículo titulado **“Die Synthetische Ökonomie”** [11]. En particular, se empleó la información presentada en la **Tabla 1 (página 651)**, que incluye Precios, demanda y oferta de patatas en Estados Unidos para el período 1900-1913. Para este estudio, se consideró expectativas ingenuas, es decir, un desfase temporal en el cual la oferta en el año t depende del precio en el año $t - 1$, mientras que la demanda en el año t está determinada por el precio en el mismo año t .

A partir de los datos mencionados, se estimaron las curvas de oferta y demanda, las cuales permiten analizar la dinámica del mercado y comprender cómo las expectativas de los productores y los desfases temporales influyen en la estabilidad o inestabilidad de los precios y la producción. El modelo se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = -\gamma + \delta P_t^e, & \text{(Oferta)} \\ D(P_t) = S(P_t^e), & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (3.14)$$

donde:

- $\alpha = 1.6054$ y $\beta = 0.6057$ son los parámetros de la función de demanda.
- $\gamma = -0.4491$ y $\delta = 0.552$ son los parámetros de la función de oferta.

Reemplazando los parámetros y aplicando la expectativas ingenuas en la oferta tenemos:

Demanda:

$$D(P_t) = 1.6054 - 0.6057P_t.$$

Oferta (con expectativas ingenuas $P_t^e = P_{t-1}$):

$$S(P_{t-1}) = 0.4491 + 0.552P_{t-1}.$$

Equilibrio de mercado ($D(p_t) = S(P_{t-1})$):

$$P_t = 1.90903 - 0.91134P_{t-1}.$$

El precio de equilibrio \bar{P} se calcula utilizando (3.7) o la ecuación de equilibrio de mercado cuando $P_t = P_{t-1} = \bar{P}$, resultando $\bar{P} \approx 0.9988$. La cantidad de equilibrio se determina reemplazando el precio de equilibrio en la demanda (o oferta) resultando $\bar{q} \approx 1.001$.

Según el análisis de estabilidad aplicando la Proposición (3.1), caracterizado por la condición en particular, se tiene: $\delta < \beta \Rightarrow 0.552 < 0.6057$.

Bajo esta condición, el valor de $-\frac{\delta}{\beta}$ se encuentra en el intervalo $(-1, 0)$. Calculando este término, obtenemos:

$$-\frac{\delta}{\beta} = -\frac{0.552}{0.6057} \approx -0.9113.$$

Dado que $-1 < -0.9113 < 0$, se satisface la condición de estabilidad. Esto implica que el precio de equilibrio \bar{P} es **localmente estable**, ya que el valor absoluto de $-\frac{\delta}{\beta}$ es menor que 1 ($|-0.9113| < 1$).

Reescribiremos las ecuaciones de demanda y oferta para que adopten una forma que nos permita aplicar directamente la Proposición (3.2).

1. **Función demanda inversa:**

$$P_t = \frac{\alpha - q_t}{\beta} \Rightarrow P_t = D^{-1}(q_t) \quad \text{El precio esta en función de la cantidad.}$$

2. **Función oferta:**

$$q_{t+1} = -\gamma + \delta \cdot P_t \Rightarrow q_{t+1} = S(P_t) \quad \text{La cantidad esta en función del precio.}$$

Partimos de una cantidad inicial $q_0 = 0.52$ y realizamos iteraciones sucesivas para calcular P_t y q_{t+1} .

Tabla de ejemplo numérico. A continuación, se muestran las primeras 3 iteraciones del proceso:

Iteración (t)	Cantidad (q_t)	Precio (P_t)	Descripción del cálculo
0	$q_0 = 0.52$	$P_0 = 1.792$	$P_0 = \frac{\alpha - q_0}{\beta} = \frac{1.6054 - 0.52}{0.6057} \approx 1.792$
1	$q_1 = 1.438$	$P_1 = 0.276$	$q_1 = -\gamma + \delta \cdot P_0 = 0.4491 + 0.552 \cdot 1.792 \approx 1.438$ $P_1 = \frac{\alpha - q_1}{\beta} = \frac{1.6054 - 1.438}{0.6057} \approx 0.276$
2	$q_2 = 0.601$	$P_2 = 1.658$	$q_2 = -\gamma + \delta \cdot P_1 = 0.4491 + 0.552 \cdot 0.276 \approx 0.601$ $P_2 = \frac{\alpha - q_2}{\beta} = \frac{1.6054 - 0.601}{0.6057} \approx 1.658$
3	$q_3 = 1.364$	$P_3 = 0.399$	$q_3 = -\gamma + \delta \cdot P_2 = 0.4491 + 0.552 \cdot 1.658 \approx 1.364$ $P_3 = \frac{\alpha - q_3}{\beta} = \frac{1.6054 - 1.364}{0.6057} \approx 0.399$

Tabla 3.1: Iteraciones del diagrama de telaraña.

Ahora se presentan dos casos numéricos usando los datos de la Tabla (3.1). Estos dos casos, ejemplifican el comportamiento del sistema en función del desplazamiento cíclico $r(q_0) = q_2 - q_0$.

En la Tabla (3.2) se muestran los resultados de las iteraciones para dos valores iniciales q_0 , uno menor que \bar{q} y otro mayor que \bar{q} . En ambos casos, se calcula el desplazamiento cíclico $r(q_0)$ y se verifica el comportamiento del sistema según la Proposición (3.2).

Caso	q_0	q_2	$r(q_0) = q_2 - q_0$	Comportamiento del sistema
1	0.52	0.601	0.081	Tendencia centrípeta (converge al equilibrio)
2	1.5	1.415	-0.085	Tendencia centrípeta (converge al equilibrio)

Tabla 3.2: Ejemplo numérico del comportamiento del sistema en función de $r(q_0)$.

Caso Numérico 1: $q_0 < \bar{q}$ y $r(q_0) > 0$. Para $q_0 = 0.52$ (menor que $\bar{q} \approx 1.001$), se obtiene un desplazamiento cíclico $r = 0.081$. Según la proposición (3.2), cuando $r > 0$ y $q_0 < \bar{q}$, el sistema exhibe una tendencia **centrípeta**, es decir, se acerca al equilibrio. Esto se confirma numéricamente, ya que las iteraciones convergen hacia $\bar{q} \approx 1.001$. En la **Figura (3.4)** se puede observar esta dinámica, donde después de completar un ciclo, la cantidad q_2 satisface $q_0 < q_2 < \bar{q}$. El sistema muestra una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio.

Caso Numérico 2: $q_0 > \bar{q}$ y $r(q_0) < 0$. Para $q_0 = 1.5$ (mayor que $\bar{q} \approx 1.001$), se obtiene un desplazamiento cíclico $r = -0.085$. Según la proposición 3.2, cuando $r < 0$ y $q_0 > \bar{q}$, el sistema también exhibe una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio. Esto se verifica numéricamente, ya que las iteraciones convergen hacia $\bar{q} \approx 1.001$. En la **Figura (3.5)** se puede observar esta dinámica, donde después de completar un ciclo, la cantidad q_2 satisface $\bar{q} < q_2 < q_0$. El sistema muestra una tendencia **centrípeta**, acercándose al equilibrio.

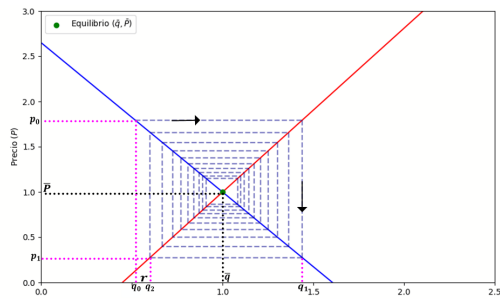


Figura 3.4: Dinámica telaraña cuando $q_0 < \bar{q}$.

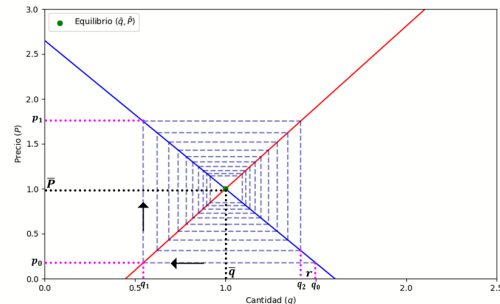


Figura 3.5: Dinámica telaraña cuando $\bar{q} < q_0$.

4. El modelo la telaraña (Cobweb) con expectativas adaptativas. En el modelo clásico de la telaraña, incorporamos expectativas adaptativas para capturar el ajuste progresivo de las predicciones de los agentes económicos. Las expectativas adaptativas representan un proceso de aprendizaje donde los agentes económicos (productores, consumidores) forman sus predicciones sobre precios futuros basándose únicamente en la información pasada y corrigen sus errores de forma progresiva [1, 4]. Los agentes no anticipan cambios bruscos, sino que actualizan sus expectativas mediante un proceso iterativo:

$$P_t^e = P_{t-1}^e + \lambda(P_{t-1} - P_{t-1}^e)$$

donde

- P_t^e : Precio esperado en el período t .
- $\lambda \in (0, 1]$, factor de ponderación de las expectativas.

Los agentes cometen errores sistemáticos ($P_{t-1} - P_{t-1}^e$) pero aprenden de ellos. El modelo de telaraña (Cobweb) no lineal con expectativas adaptativas esta dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = \mu \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|} \right), & \text{(Oferta no lineal)} \\ P_t^e = P_{t-1}^e + \lambda(P_{t-1} - P_{t-1}^e), & \text{(Expectativas adaptativas)} \\ D(P_t) = S(P_t^e), & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (4.1)$$

donde:

- P_t^e es la expectativa de precio en el periodo t ,
- λ es el parámetro de ajuste de expectativas ($0 < \lambda \leq 1$),
- $\mu > 0$ es un parámetro de la oferta no lineal,
- $\beta > 0$ es un parámetro de la demanda lineal,
- $\alpha > 0$ es un parámetro de la demanda.

A partir de la ecuación de demanda, se despeja el precio: $P_t = \frac{\alpha - D(P_t)}{\beta}$. Por otro lado, de la ecuación de expectativas adaptativas, se obtiene la expectativa de precio:

$$P_t^e = (1 - \lambda)P_{t-1}^e + \lambda P_{t-1}$$

Desplazando los subíndices de tiempo un periodo hacia adelante, se tiene: $P_{t+1}^e = (1 - \lambda)P_t^e + \lambda P_t$. Despejando P_t de esta última ecuación, se obtiene:

$$P_t = \frac{P_{t+1}^e - (1 - \lambda)P_t^e}{\lambda}$$

Igualando las dos expresiones para P_t y reemplazando la oferta no lineal $S(P_t^e)$, se llega a la siguiente ecuación en diferencias no lineal:

$$P_{t+1}^e = F(P_t^e) = -\frac{\lambda}{\beta}\mu \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|} \right) + (1 - \lambda)P_t^e + \frac{\alpha\lambda}{\beta}. \tag{4.2}$$

Para determinar los puntos fijos \bar{P} del modelo, se resuelve la ecuación en diferencias no lineal bajo la condición $P_{t+1}^e = P_t^e = \bar{P}$. Sustituyendo en la ecuación (4.2) se obtiene:

$$\bar{P} = -\frac{\lambda}{\beta}\mu \left(\frac{\bar{P}}{1 + |\bar{P}|} \right) + (1 - \lambda)\bar{P} + \frac{\alpha\lambda}{\beta},$$

Equilibrio Positivo ($\bar{P} > 0$). De la ecuación cuadrática:

$$\beta(\bar{P})^2 + (\beta + \mu - \alpha)\bar{P} - \alpha = 0,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{P}^+ &= \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\beta}, & \bar{P}^- &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\beta}, \\ \theta_1 &= -(\beta + \mu - \alpha), & \theta_2 &= \sqrt{(\beta + \mu - \alpha)^2 + 4\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Equilibrio Negativo ($\bar{P} < 0$). De la ecuación cuadrática:

$$\beta(\bar{P})^2 + (-\beta - \mu - \alpha)\bar{P} + \alpha = 0,$$

las soluciones son:

$$\begin{aligned} \bar{P}_+ &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\beta}, & \bar{P}_- &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\beta}, \\ \varphi_1 &= \beta + \mu + \alpha, & \varphi_2 &= \sqrt{(\beta + \mu + \alpha)^2 - 4\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Simulación numérica: Realizaremos iteraciones al modelo de telaraña (Cobweb) no lineal para poder analizar la descripción cualitativa del sistema mediante las **series de tiempo** [7]. Fijando $\lambda = 0.5$, $\beta = 0.25$ se tiene:

$$P_{t+1}^e = -2 \times \underbrace{\mu \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|} \right)}_{\text{Término no lineal}} + 0.5P_t^e + 2\alpha. \tag{4.3}$$

En la Figura (4.1), con los parámetros fijos $\mu = 3.2$ y $\alpha = -2$, se observa en la serie de tiempo [7] una evolución hacia una órbita de 1-ciclo (punto fijo estable), simulada para 150 períodos con valor inicial $P_0^e = 0.1$. La Figura (4.2) muestra para $\alpha = 1$ un comportamiento diferente, la evolución es una órbita de 2-ciclo, donde el sistema oscila periódicamente entre dos valores, mientras el punto fijo es inestable.

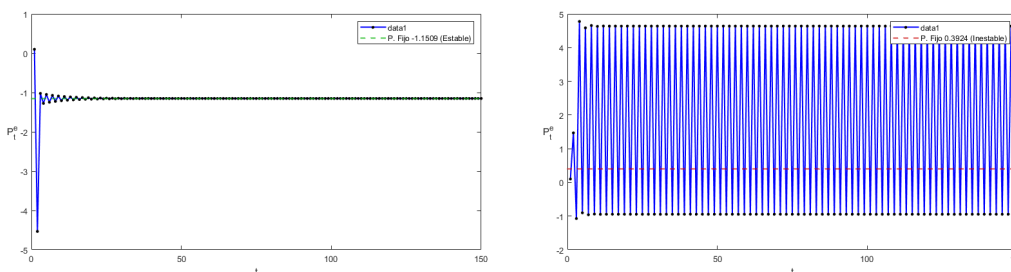


Figura 4.1: Órbita 1-ciclo, $\mu = 3.2$ y $\alpha = -2$. Figura 4.2: Órbita 2-ciclos, $\mu = 3.2$ y $\alpha = 1$.

La teoría de bifurcación analiza los valores en un sistema donde su comportamiento cualitativo experimenta un cambio abrupto [8]. Como su nombre lo indica (del latín bifurcatus, “dividido en dos”), describe la aparición de al menos dos ramas de soluciones distintas [14]. En particular, cuando el parámetro de bifurcación varía ligeramente en sistemas no lineales, pueden emerger múltiples configuraciones posibles.

En nuestro caso, este fenómeno se visualiza al representar gráficamente el plano (α, P_t^e) , donde el comportamiento del sistema queda evidenciado por los patrones que aparecen en la Figura (4.3), cuando $\mu = 3.2$ y el parámetro α varía desde $[-4.0, 4.0]$, la solución para el valor $\alpha = \alpha^*$, da lugar a un resultado estable de 2-ciclos.

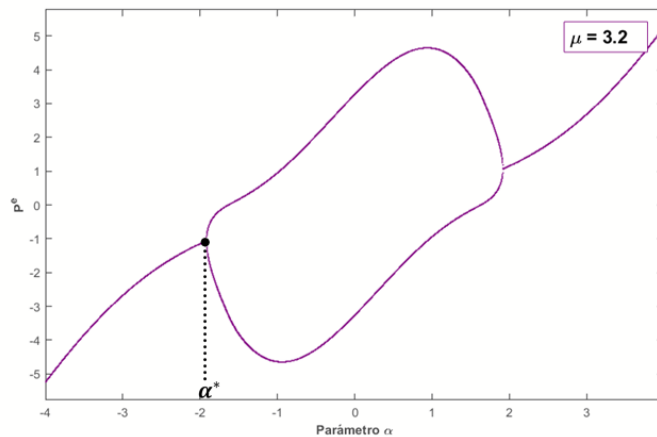


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación para $\mu = 3.2$.

En consecuencia, el valor α^* (punto de bifurcación [8]) marca la transición entre una solución única no trivial y una solución de 2-ciclos, conocida como bifurcación por duplicación de período. Este valor crítico α^* indica precisamente el parámetro donde emerge un ciclo estable de dos períodos. La variación de α genera un diagrama de bifurcación que muestra cómo la solución de período 1 primero se duplica y luego se reduce a la mitad en el intervalo $[-4.0, 4.0]$, comportamiento claramente observable en las series de tiempo de las Figuras 4.1 y 4.2.

Podemos adoptar la notación $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$ para describir la transición en el intervalo $[-4.0, 4.0]$, donde el sistema evoluciona de:

- Una solución.
- A una solución de 2-ciclos (duplicación).
- Finalmente regresa a una solución única (reducción a la mitad).

Esta secuencia caracteriza completamente el comportamiento de bifurcación observado.

En la Figura (4.4), con los parámetros fijos $\mu = 4$ y $\alpha = -2.2$, se observa en la serie de tiempo una evolución hacia una órbita de 4-ciclos (punto fijo inestable), simulada para 150 períodos con valor inicial $P_0^e = 0.1$. La Figura (4.5) muestra para $\alpha = 1$ un comportamiento diferente, la evolución es una órbita de 2-ciclos, donde el sistema oscila periódicamente entre dos valores, mientras el punto fijo es inestable.

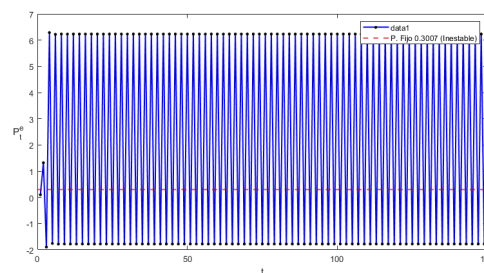
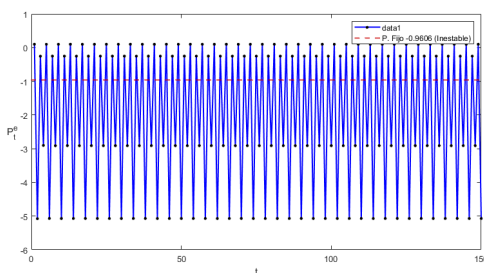


Figura 4.4: Órbita 4-ciclos, $\mu = 4$ y $\alpha = -2.2$. Figura 4.5: Órbita 2-ciclos, $\mu = 4$ y $\alpha = 1$.

En la Figura (4.6), con $\mu = 4$ y α variando en $[-4.0, 4.0]$, se observa un diagrama de bifurcación con el patrón completo:

- $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 4)$: Transición desde:
 - Una solución única.
 - Duplicación a 2-ciclos.
 - Duplicación posterior a 4-ciclos.

- $(4 \rightarrow 2)$: Colapso (reducción a la mitad) manteniéndose en 2 soluciones estables.
- $(2 \rightarrow 4)$: Nueva duplicación.
- $(4 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$: Reducción final a ciclo único.

Este comportamiento completo muestra un ejemplo claro de bifurcación por duplicación de período característica de sistemas no lineales, seguida de su colapso inverso (reducción a la mitad) cuyas dinámicas en series de tiempo pueden observarse en las Figuras 4.4 y 4.5.

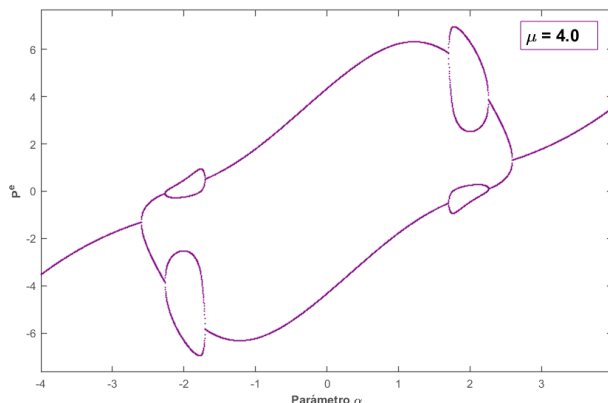


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación para $\mu = 4$.

En la Figura (4.7) ($\mu = 4.2$), el sistema exhibe una secuencia de igual característica de duplicación y reducción a la mitad, donde se observa claramente el patrón de duplicación ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$), seguida de su colapso inverso de reducción a la mitad ($8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) y se sostienen en dos hasta que vuelven de nuevo a duplicarse ($2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$) y por ultimo se reducen a la mitad ($8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$). Este patrón revela la transición de una alternancia de duplicación y reducción del sistema hacia comportamientos periódicos complejos.

Por contraste, la Figura (4.8) ($\mu = 4.5$) muestra un régimen cualitativamente distinto: la estructura inicia con una duplicación pero al continuar desaparece y emerge un comportamiento dinámico complejo, donde las trayectorias se distribuyen irregularmente formando bandas densas pero con una estructura fractal subyacente. Este patrón, característico de los sistemas caóticos, manifiesta extrema sensibilidad a condiciones iniciales: pequeñas variaciones en el parámetro α generan trayectorias radicalmente diferentes mientras se mantiene confinado dentro de límites precisos, propiedad fundamental de los sistemas caóticos.

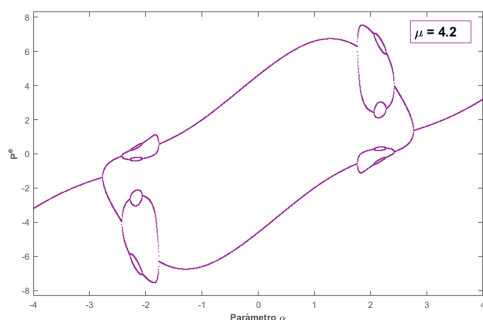


Figura 4.7: Bifurcación para $\mu = 4.2$.

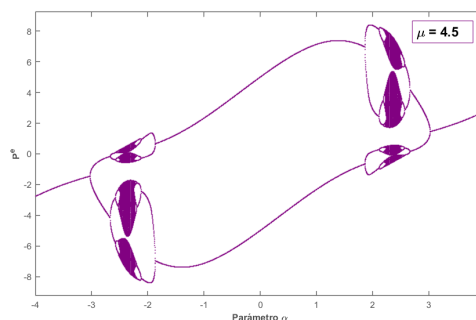


Figura 4.8: Dinámica caótica para $\mu = 4.5$.

Este caso ilustra la transición entre diferentes regímenes dinámicos, desde comportamientos simples y predecibles hasta comportamientos complejos. Cada transición entre estos regímenes se conoce como una **bifurcación**, es decir, cómo las órbitas del sistema cambian en función del parámetro μ , donde pequeños cambios en μ generan cambios abruptos en la dinámica del sistema.

5. Conclusiones. En este trabajo se analizó la dinámica de un sistema discreto que modela los precios en mercados competitivos usando ecuaciones en diferencias. El primer modelo estudiado fue el siguiente:

Modelo lineal con expectativas ingenuas o estáticas.

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = -\gamma + \delta P_t^e, & \text{(Oferta)} \\ D(P_t) = S(P_t^e). & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (P_1)$$

A través del estudio de los puntos fijos y con el uso de la dinámica tipo telaraña, se obtuvieron los siguientes resultados:

- La solución del sistema (P_1) cumple con los teoremas de existencia y unicidad [5], demostrando que:
 - La estabilidad del equilibrio está determinada por la razón δ/β entre las pendientes de oferta y demanda.
 - Cuando $\delta < \beta$, el sistema converge monótonamente al precio de equilibrio $\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$.
- El análisis cuantitativo revela:
 - La solución general presenta la forma:

$$P_t = [P_0 - \bar{P}] \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \bar{P}, \quad (5.1)$$

donde el término $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t$ explica:

- * La convergencia cuando $\left|\frac{\delta}{\beta}\right| < 1$.
- * La alternancia de signos en periodos consecutivos.

El segundo modelo estudiado es el siguiente:

Modelo No Lineal con Expectativas Adaptativas.

$$\begin{cases} D(P_t) = \alpha - \beta P_t, & \text{(Demanda)} \\ S(P_t^e) = \mu \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|}\right), & \text{(Oferta no lineal)} \\ P_t^e = P_{t-1}^e + \lambda(P_{t-1} - P_{t-1}^e), & \text{(Expectativas adaptativas)} \\ D(P_t) = S(P_t^e). & \text{(Equilibrio de mercado)} \end{cases} \quad (P_2)$$

A través de la identificación de la interacción entre la no linealidad de la oferta y el proceso de formación de expectativas se obtuvieron los siguientes resultados:

- El modelo de telaraña con oferta no lineal $S(P_t^e) = \mu \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|}\right)$ y demanda lineal $D(P_t) = \alpha - \beta P_t$ exhibe comportamientos dinámicos complejos [12, 13, 14].
- El sistema completo está dado por:

$$P_{t+1}^e = F(P_t^e) = -\frac{\lambda\mu}{\beta} \left(\frac{P_t^e}{1 + |P_t^e|}\right) + (1 - \lambda)P_t^e + \frac{\alpha\lambda}{\beta} \quad (5.2)$$

Para $\mu = 4,2$, el diagrama de bifurcación (Fig. 4.7) revela la secuencia característica:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \quad (5.3)$$

que manifiesta dos propiedades fundamentales:

1. **Amplificación no lineal:** La progresión $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8)$ muestra cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden generar divergencia exponencial en el sistema, debido a la naturaleza no lineal de la función de oferta.
2. **Estabilización cíclica:** Los patrones de reducción $(8 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$ demuestran la capacidad del sistema para autorregularse, contrarrestando las fases de expansión y manteniendo la dinámica dentro de ciertos límites.

- **Estructura fractal.** Para $\mu = 4,5$, el diagrama de bifurcación (Fig. 4.8) revela la secuencia característica y alternancia periódica entre diferentes estados, lo que sugiere la formación de una estructura compleja en el espacio de fases, con propiedades geométricas fractales. Estos hallazgos amplían el análisis tradicional de equilibrio al mostrar que mercados con componentes no lineales pueden presentar:
 1. Cambios abruptos entre diferentes regímenes dinámicos.
 2. Dependencia sensible de parámetros clave α (demanda) y μ (oferta no lineal).
 3. Comportamientos recurrentes con características específicas.

Para el diseño de políticas económicas, estos resultados implican la necesidad de considerar:

- Mecanismos de control para parámetros críticos.
- Sistemas de monitoreo para detectar transiciones entre regímenes.
- Estrategias adaptativas para diferentes fases del ciclo económico.

Contribución del autor. El autor de esta publicación fue el único responsable de la conceptualización, investigación, análisis formal, metodología, validación, revisión y redacción del trabajo.

Financiamiento. Esta investigación fue realizada con recursos propios, sin financiamiento externo.

Agradecimientos. Agradezco a Dios por permitirme realizar este trabajo, así como a mi familia por su apoyo incondicional. Expreso también mi sincero agradecimiento a la Universidad Nacional de Trujillo por las enseñanzas recibidas durante mi formación profesional. De manera muy especial, agradezco al Dr. Rafael Marcel Asmat Uceda por el apoyo constante que siempre me ha brindado. Agradezco además las valiosas sugerencias de los revisores anónimos.

Conflicto de intereses. El autor declara no tener conflicto de intereses.

ORCID and License

Jose Luis Matos Tejada <https://orcid.org/0009-0000-4300-4376>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Poitras G. Cobweb theory, market stability and price expectations, *J. of the History of Economic Thought*. 2023; 45(1):137-161. <https://doi.org/10.1017/S1053837222000116>
- [2] Pindyck RS, Rubinfeld DL. *Microeconomía*. 7a ed. México: Pearson Prentice Hall; 2009. 800 págs.
- [3] Mordecai Ezekiel, The Cobweb Theorem, *The Quarterly Journal of Economics*. 1938; 52(2): 255–280. <https://doi.org/10.2307/1881734>
- [4] Cars Hommes, Carl's nonlinear cobweb, *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2018; 91: 7-20. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2017.12.007>.
- [5] Elaydi SN. *An Introduction to Difference Equations*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag; 1996. 389 págs.
- [6] Kulenovic MRS, Merino O. *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*. 1st ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC; 2002. 360 págs.
- [7] Marotto FR. *Introduction to Mathematical Modeling Using Discrete Dynamical Systems*. Illustrated ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole; 2006. 349 págs.
- [8] Shone R. *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2003. 724 págs.
- [9] Hristova V. Evolution of expectations models in economic thought. 2023; 176: 1-10. <https://doi.org/10.1051/shsconf/202317604009>
- [10] Leontief WW. Verzögerte Angebotsanpassung und partielles Gleichgewicht, *Zeitschrift für Nationalökonomie, Journal of Economics*. 1934; 5(5): 670–676. <https://doi.org/10.1007/BF01316460>.
- [11] Ricci U, Morgenstern O. Die synthetische Ökonomie von Henry Ludwell Moore, *Zeitschrift für Nationalökonomie, Journal of Economics*. 1930; 1(5): 649–668. <https://doi.org/10.1007/BF01318499>.
- [12] Strogatz SH. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 2a ed. Boca Raton: CRC Press; 2018. 532 págs.
- [13] Zhang W-B. *Discrete dynamical systems, bifurcations and chaos in economics*. 1ª ed. Amsterdam: Elsevier Science; 2006. 460 págs.
- [14] Anagnostopoulou V, Pötzsche C, Rasmussen M. *Nonautonomous bifurcation theory: concepts and tools*. 1ª ed. Cham: Springer; 2023. 168 págs.
- [15] Blinder AS. Can the production smoothing model of inventory behavior be saved? *Q J Econ*. 1986; 101(3):431–453. <https://doi.org/10.2307/1885691>
- [16] Gandolfo G. *Economic dynamics*. 4ª ed. Berlin: Springer-Verlag; 2009. 829 págs.