Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2025; Vol.12(1):155-161.

COMMUNICATION

Tangencies for Power Functions with Integer Exponent

Tangências para Funções Potência de Expoente Inteiro

Cairo Henrique Vaz Cotrim* and Laredo Rennan Pereira Santos†

Received, Mar. 18, 2025; Accepted, Jun. 19, 2025; Published, Jul. 27, 2025

How to cite this article:
Cotrim C, Santos L. *Tangencies for Power Functions with Integer Exponent*. Selecciones Matemáticas. 2025;12(1):155–161. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2025.01.13

Abstract

Considering a power function $f(x) = x^n$ with exponent n as a positive integer, we show that, at each of its points, there exists a unique polynomial function of degree $n-1$ that is tangent to it at that point. Similarly, we verify that every power function $h(x) = x^k$ with exponent k as a negative integer is tangent, at each of its points, to a function of the form $l(x) = \sum_t a_t x^t$, where the exponents t are integers between $k+1$ and -1.
Keywords . Power Function, Tangency, Binomial Theorem.

Resumo

Considerando uma função potência $f(x) = x^n$ com expoente n inteiro positivo, mostramos que, para cada um de seus pontos, existe uma única função polinomial de grau $n-1$ que a tangencia neste ponto. Semelhantemente, verificamos que toda função potência $h(x) = x^k$, com expoente k inteiro negativo, é tangente, em cada um de seus pontos, a uma função da forma $l(x) = \sum_t a_t x^t$, com expoentes t inteiros entre $k+1$ e -1.
Palavras-chave. **Palavras-chave** Funções Potência; Tangência; Teorema Binomial.

1. Introdução. Uma função potência é aquela que pode ser escrita na forma $f(x) = kx^a$, em que k e a são constantes diferentes de zero (a título de exemplo, veja [1]). Funções potência surgem em diversos modelos físicos e químicos. A Lei de Boyle, por exemplo, afirma que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás V é inversamente proporcional à pressão P: $V = \dfrac{C}{P}$, em que C é uma constante. Trata-se de uma função potência de expoente -1. Outro exemplo clássico é a Lei de Kepler do movimento planetário, segundo a qual o quadrado do período de revolução T de um planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da distância média r ao Sol: $T^2 = cr^3$. Essa relação é uma função potência típica com expoente racional (na equação, $T = C\,r^{3/2}$). Podemos citar também a física da iluminação: a intensidade luminosa I de uma fonte puntiforme decai com o quadrado da distância r, isto é, $I = c/r^2$, revelando uma função potência de expoente -2. Tais aplicações evidenciam a presença de funções potência em modelos naturais para fenômenos em ciência e tecnologia.

*Universidade de São Paulo, Campus São Carlos, Brasil.(cairo.h.vaz@usp.br)
†Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Campus Formosa, Brasil. **Correspondence author** (laredo.santos@ifg.edu.br).

A construção da reta tangente a uma curva em um determinado ponto é o problema clássico do Cálculo Diferencial. Diversos problemas das ciências naturais resultam na determinação de uma reta tangente ao gráfico de uma função. Consideramos neste trabalho problemas envolvendo tangências para funções potência de expoente inteiro. Apesar de clássico, ainda hoje questões envolvendo tangências são estudadas. Em [2] é considerado um operador diferencial que generaliza a noção de função diferenciável, cuja interpretação geométrica é semelhante à interpretação geométrica da derivada clássica de uma função num ponto. Em [3], a conjectura de János Pach envolvendo tangências entre curvas foi provada para curvas x-monótonas.

Sabe-se que toda função polinomial $f(x)$ possui em cada um de seus pontos uma reta tangente. Dessa forma, em cada ponto, independente do grau de $f(x)$, ela é tangente a uma função polinomial de grau 1. Isto vem do fato bem conhecido de que funções polinomiais são diferenciáveis em qualquer um de seus pontos.

Uma próxima pergunta seria investigar se uma função polinomial de grau n inteiro positivo maior do que 1 poderia ser, em cada um de seus pontos, tangente a uma função polinomial de qualquer grau k menor do que n. Respondemos afirmativamente a esta pergunta para $k = n - 1$, quando a função polinomial é uma função potência de expoente inteiro positivo.

Por convenção, neste trabalho, consideramos que duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ são tangentes em $x = p$ quando $f(p) = g(p)$, possuem a mesma inclinação em p e não se encontram em nenhuma outra parte de seus gráficos. Isto é, consideramos tangências com ordem de contato 1.

Dessa maneira, qualquer função polinomial da forma $f(x) = x^n$, $n \geq 2$, é tangente em cada um de seus pontos a uma única função polinomial de grau $n - 1$. Indo além, a próxima pergunta seria se algo semelhante ocorre para funções $h(x) = 1/x^n$, com expoente n inteiro positivo, $n \geq 2$. Uma tal função poderia ser tangente em cada ponto a uma função do tipo $l(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k x^{-k}$, para qualquer "grau" l menor do que n ? Respondemos afirmativamente esta pergunta para $l = n - 1$.

A principal ferramenta utilizada para abordar esses problemas foi o Teorema do Binômio de Newton. Embora seja um resultado clássico, seu uso continua relevante, e diversas generalizações deste teorema continuam sendo desenvolvidas e aplicadas em diferentes contextos (ver, por exemplo, [4] e [5]).

Os problemas resolvidos aqui trazem noções geométricas interessantes que por vezes ficam perdidas. Por exemplo, a Regra da Potência, conhecida informalmente como Regra do Tombo, mostra que a derivada de uma função potência $f(x) = x^n$ é dada pela função nx^{n-1}, para qualquer n real. Embora seja verdade que uma função potência de expoente inteiro positivo n não seja tangente em cada ponto à sua função derivada de grau $n - 1$, ainda é verdade que é tangente em cada ponto à uma função polinomial de grau $n - 1$.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. Na seção 2 lidamos com as funções potência $f(x) = x^n$ de expoente inteiro positivo n, mostrando que em cada um de seus pontos ela é tangente a uma única função polinomial de grau $n - 1$. Na seção 3 consideramos as funções potência $h(x) = 1/x^n$ de expoente inteiro negativo, mostrando que em cada ponto ela é tangente a uma função da forma $\sum_k a_k x^{-k}$, em que o maior expoente inteiro k é $n - 1$.

2. Tangências para funções $f(x) = x^n$. Qualquer função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = kx^a,$$

onde k e a são constantes diferentes de zero, é uma função potência. Nesta seção vamos considerar apenas funções potência em que o expoente a é inteiro positivo e $k = 1$.

Considerando uma tal função $f(x) = x^n$, queremos saber se, para cada um de seus pontos $x = p$, existe uma função polinomial de grau $n - 1$ que é tangente a $f(x)$ em p.

Considerando $n = 2$, vamos investigar se, em cada um de seus pontos, existe uma função linear tangente à parábola $f(x) = x^2$. Deste modo, para cada ponto x devemos ser capazes de encontrar uma função $g(x) = ax + b$ tangente à parábola neste ponto. Isto é o mesmo que perguntar quando a equação

$$x^2 = ax + b,$$

possui uma única solução, dada a condição de que ambas as funções tenham a mesma inclinação em cada ponto x, isto é, dado que $a = 2x$. Isto ocorre quando $b = -x^2$. Assim, para cada $x = p$, a função $g_p(x) = (2p)x - p^2$ é tangente a $f(x)$ em p.

Em termos geométricos, mostramos que a função quadrática $f(x) = x^2$ pode ser tangenciada em cada ponto por uma função linear $g(x) = ax + b$.

Vamos agora mostrar que a função $f(x) = x^3$ é tangente em cada ponto a uma função polinomial do segundo grau. Vamos igualar a função $f(x) = x^3$ a uma função quadrática $ax^2 + bx + c$ e verificar quando a equação correspondente possui solução única. Assim, queremos determinar a, b e c de modo que

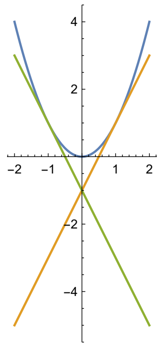

Figura 2.1: Função quadrática pode ser tangenciada por uma função linear em cada ponto.

$$x^3 - ax^2 - bx - c = 0,$$

defina um cubo perfeito. De fato, isso ocorre quando $a = 3x$, $b = -3x^2$ e $c = x^3$. Dessa forma, dado $x = p$, o ponto (p, p^3) será o único ponto pertencente à função x^3 e a uma função quadrática $g_p(x) = ax^2 + bx + c$ quando esta for tal que seus coeficientes sejam $a = 3p$, $b = -3p^2$ e $c = p^3$. Resta saber se $f(x)$ e $g_p(x)$ possuem a mesma inclinação em $x = p$. Isto é verdade, uma vez que

$$g_p'(p) = 2ap + b = 3p^2 = f'(p).$$

Com isso, vê-se que, em cada ponto $x = p$, a função $f(x) = x^3$ é tangente à função quadrática $g_p(x) = (3p)x^2 - (3p^2)x + p^3$. Tomando, por exemplo, $p = 1$, a função $f(x) = x^3$ é tangente à função $g_1(x) = 3x^2 - 3x + 1$, conforme Figura 2.2.

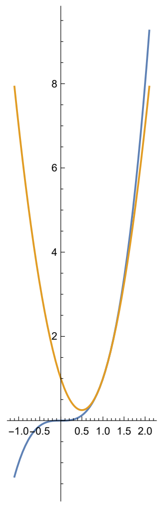

Figura 2.2: A função cúbica $f(x) = x^3$ (em azul) é tangente em $x = 1$ à função quadrática $g_1(x) = 3x^2 - 3x + 1$ (em laranja).

Agora vamos mostrar que, em cada ponto $x = p$, a função $f(x) = x^n$, para n inteiro positivo maior ou igual a 2, é tangente a uma única função polinomial $g_p(x)$ de grau $n - 1$. Isto é, queremos descobrir quando $x = p$ é a única solução para uma equação do tipo

$$x^n = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Para isto, precisamos encontrar quais devem ser os coeficientes $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$, de modo que

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1x - a_0 = (x - p)^n.$$

Pelo Teorema Binomial, os coeficientes a_{n-k} acima devem ser os opostos dos coeficientes da expansão binomial de $(x - p)^n$. Portanto,

$$a_{n-k} = -\binom{n}{k}(-p)^k, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Assim, em cada ponto $x = p$, a função $f(x) = x^n$ coincide com uma função $g_p(x)$ de grau $n - 1$ dada por

$$g_p(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k x^{n-k}. \tag{2.1}$$

Resta agora saber se possuem a mesma inclinação em $x = p$. A derivada de $g_p(x)$ em p é dada por

$$g_p'(p) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k (n-k) p^{n-k-1}.$$

Definindo $m = n - k$, podemos reescrever o somatório acima e obter

$$\begin{aligned} g_p'(p) &= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m+1} \binom{n}{n-m} p^{n-m} \cdot m \cdot p^{m-1} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m+1} \binom{n}{m} m \cdot p^{n-1} \\ &= (-1)^{n+1} p^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n}{m} m \end{aligned}$$

Sabemos que $f'(p) = np^{n-1}$. Para mostrar que $f'(p) = g_p'(p)$, vamos provar que

$$(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n}{m} \cdot m = n,$$

que é o mesmo que mostrar que

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} m = 0.$$

Note que esta é a soma alternada

$$0 - 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} - 3 \cdot \binom{n}{3} + \cdots (-1)^n n \cdot \binom{n}{n},$$

que é, de fato, igual a zero, conforme a equação (3.15) de [6]. Logo, $f'(p) = g_p'(p)$. Portanto, em cada ponto $x = p$, a função $f(x) = x^n$ é tangente a uma função polinomial $g_p(x)$ de grau $n - 1$, sendo esse ponto de tangência o único ponto em que estas funções se intersectam.

Agora que mostramos que vale essa tangência, em cada ponto, a uma função de grau $n - 1$, poderíamos tentar usar essa mesma estratégia para verificar a tangência, em cada ponto, a uma função polinomial de qualquer grau menor que n. Comecemos por considerar a existência de uma função polinomial de grau $n - 2$.

A fim de responder a essa questão, consideremos, por exemplo, o caso $n = 4$. Pelo que fizemos anteriormente, sabemos que a função $f(x) = x^4$ é, em cada ponto $x = p$, tangente à função $g_p(x) = 4px^3 - 6p^2x^2 + 4p^3x - p^4$.

Tomemos $p = 2$. Então $f(x) = x^4$ é tangente em $x = 2$ à função

$$g_2(x) = 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16.$$

Por outro lado, a função $h(x) = x^3$ é tangente, em $x = 2$, à função $h_2(x) = 6x^2 - 12x + 8$. Substituindo x^3 por $h_2(x)$ em $g_2(x)$, obtemos uma nova função

$$j_2(x) = 24x^2 - 64x + 48,$$

a qual coincide com $f(x) = x^4$ em $x = 2$ e possui a mesma inclinação. Entretanto, este não é o único ponto em que estas funções coincidem. De fato, $j_2(-6) = f(-6) = 1296$, de modo que $x = 2$ não é a única solução de $j_2(x) = f(x)$. Isso mostra que a metodologia que construímos aqui não necessariamente garante que $y = x^n$ é tangente a funções polinomiais de graus menores que $n-1$.

Frisamos ainda que a função $g_p(x)$ dada em (2.1) intersecta $y = x^n$ apenas em $x = p$. Não é difícil garantir a existência de outras funções polinomiais que coincidem com $y = x^n$ em um dado ponto $x = p$ e possuem a mesma inclinação. Entretanto, a função $g_p(x)$ dada aqui é a única de modo que a equação $g_p(x) = x^n$ tenha solução única.

3. Tangências para funções $f(x) = 1/x^n$. Poderíamos perguntar se algo semelhante ocorre para funções $h(x)$ da forma $h(x) = \dfrac{1}{x^n}$, isto é, para cada $x = p$ existe uma função $l_p(x) = \sum_k a_k x^{-k}$, com k inteiro no máximo $n-1$, tangente a $h(x)$ em $x = p$?

Iniciemos analisando um exemplo para $n = 2$. Sabemos que $f(x) = x^2$ é tangente em cada ponto a uma única função de grau 1. Assim, dada uma equação

$$x^2 = ax + b,$$

ela possui uma única solução $x = p$ quando $a = 2p$ e $b = -p^2$. Logo, $x = p$ é a única solução da equação $x^2 - 2px + p^2 = 0$. Assim, considerando $p, x \neq 0$, temos que

$$\frac{p^2}{p^2x^2} = -\frac{1}{p^2} + \frac{2px}{p^2x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{p^2},$$

o que indica que $x = p$ é a única solução da equação acima.

Agora, note que

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'(p) = -\frac{2}{p^3},$$

e

$$\left(\left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{p^2}\right)'(p) = -\frac{2}{p}\frac{1}{p^2} = -\frac{2}{p^3}.$$

Deste modo, fica provado que a função $h(x) = x^{-2}$ é, em cada ponto $x = p$, tangente à uma função de ‟grau″-1 dada por

$$l_p(x) = \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{p^2}.$$

Considerando, por exemplo, $p = 2$, temos que a função $\dfrac{1}{x^2}$ é tangente em $x = 2$ à função $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}$, conforme gráfico abaixo.

Agora vamos generalizar estas ideias e mostrar que, em cada ponto $x = p$, a função $h(x) = 1/x^n$ é tangente a uma função $l_p(x)$ da forma $\sum_k a_k x^{-k}$, em que o maior expoente inteiro k é $n-1$.

Do que fizemos anteriormente, sabemos que a função x^n é tangente, em cada ponto $x = p$, à uma função $g_p(x)$ dada por

$$g_p(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k x^{n-k}.$$

Dessa maneira, $x = p$ é a única solução da equação

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k x^{n-k}. \tag{3.1}$$

Agora note que $k = 0$ no somatório acima produziria o termo $-x^n$, de modo que podemos manipular a equação (3.1) da seguinte maneira:

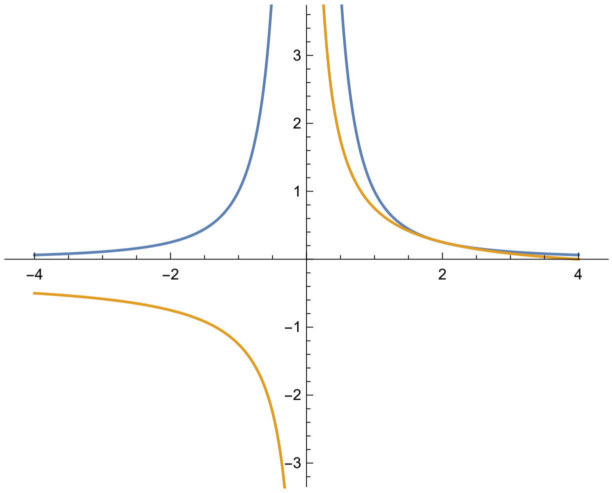

Figura 3.1: A função $\dfrac{1}{x^2}$ (em azul) é tangente em $x = 2$ à função $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}$ (em laranja).

$$\begin{aligned} x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k x^{n-k} \quad & \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k x^{n-k} - x^n = 0 \\ & \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p^k x^{n-k} = 0 \\ & \Rightarrow \quad (-1)^{n+1} p^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+2} \binom{n}{k} p^k x^{n-k}, \end{aligned}$$

de modo que $x = p$ também é a única solução desta última equação. Dividindo-a pelo termo $(-1)^{n+1} p^n x^n$, supondo $p \neq 0$ e $x \neq 0$, obtemos que $x = p$ ainda é a única solução da equação

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n+1} \binom{n}{k} p^{k-n} x^{-k}.$$

Desta maneira, concluímos que em cada ponto $x = p$ a função $h(x) = 1/x^n$ coincide com uma função $l_p(x)$ dada por

$$l_p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n+1} \binom{n}{k} p^{k-n} x^{-k}.$$

Agora só resta saber se $h(x)$ possui a mesma inclinação, em cada ponto $x = p$, à correspondente função $l_p(x)$. De fato,

$$h'(p) = -np^{-n-1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} l_p'(p) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n+1} \binom{n}{k} p^{k-n} (-kp^{-k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n+2} \binom{n}{k} kp^{-n-1}. \end{aligned}$$

Para mostrar que $l_p'(p) = h'(p) = -np^{-n-1}$, basta mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-n+2} \binom{n}{k} k = -n,$$

que é o mesmo que mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-n+2}\binom{n}{k}k = 0.$$

Podemos escrever o somatório acima como

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k,$$

que é a soma alternada

$$0 + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\cdot 1 + (-1)^{n-2}\binom{n}{2}\cdot 2 + \cdots - \binom{n}{n-1}\cdot(n-1) + \binom{n}{n}\cdot n$$

a qual sabemos ser igual a zero pela equação (3.15) de [6]. Portanto, $h'(p) = l'_p(p)$, de modo que $h(x) = 1/x^n$ é tangente, em cada ponto $x = p$, a uma função da forma $l_p(x) = \sum_k a_k x^{-k}$, em que o maior expoente inteiro k é $n-1$.

Funding. Esta pesquisa não recebeu nenhum fomento externo.

Conflitos de interesse. Os autores declaram não haver conflito de interesse.

Contribuição dos autores. Os autores desta publicação contribuíram igualmente nos seguintes aspectos: conceituação, pesquisa, análise formal, metodologia, validação, revisão e redação.

ORCID and License
Cairo Henrique Vaz Cotrim https://orcid.org/0009-0000-1471-1063
Laredo Rennan Pereira Santos https://orcid.org/0000-0001-5216-2026

This work is licensed under the Creative Commons - Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Referências

[1] Stewart J. Cálculo, sétima edição, Cengage Learning, 2013.

[2] Valdes JEN. La resolución de problemas de cálculo diferencial y la construcción de la recta tangente a una curva. Vidya. 2024; 44(2):247-–264.

[3] Ackerman E, Keszegh B. On the Number of Tangencies Among 1-Intersecting x-Monotone Curves. European Journal of Combinatorics. 2024; 118.

[4] Hino M, Namba R. Fractional Binomial Distributions Induced by the Generalized Binomial Theorem and Their Applications. Arxiv: 2408.12011v1[math.PR] (2024). Available from https://arxiv.org/html/2408.12011v1.

[5] Beauduin K. Old and New Powerful Tools for the Normal Ordering Problem and Noncommutative Binomials. Arxiv: 2405.03001v3[math.CO] (2024). Available from https://arxiv.org/abs/2405.03001.

[6] Spiegel MR, Lipschutz S, Liu J. Mathematical Handbook of Formulas and Tables. third edition, Schaum's Outline Series, New York, 2013.