



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

2025; Vol.12(1):123-131.



On the structure of the fundamental étale group of normal schemes

Sobre la estructura del grupo fundamental étale de esquemas normales

Ronald Jesús Mas Huamán 

Received, Mar. 15, 2025;

Accepted, Jun. 03, 2025;

Published, Jul. 27, 2025



How to cite this article:

Mas R. *On the structure of the fundamental étale group of normal schemes*. *Selecciones Matemáticas*. 2025;12(1):123–131. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2025.01.10>

Abstract

The étale fundamental group is a central tool in algebraic geometry that generalizes the topological fundamental group to the context of schemes. In this article, we explore its behavior for normal schemes, highlighting its relationship to arithmetic and geometric invariants.

Keywords . Normal schemes, étale topology, étale fundamental group.

Resumen

El grupo fundamental étale es una herramienta central en geometría algebraica que generaliza el grupo fundamental topológico al contexto de esquemas. En este artículo, exploramos su comportamiento para esquemas normales, destacando su relación con invariantes aritméticos y geométricos.

Palabras clave. Esquemas normales, topología étale, grupo fundamental étale.

1. Introducción. El grupo fundamental étale es un invariante asociado a un esquema y un punto base en geometría algebraica, es importante para comprender como los esquemas se pueden descomponer en recubrimientos étale. Del mismo modo que, el grupo fundamental usual clasifica los espacios de recubrimiento de un espacio topológico, el grupo fundamental étale clasifica los espacios de recubrimiento finito étale de una variedad (o esquema). Si bien los dos tienen la misma finalidad en su respectiva categoría, su naturaleza es distinta ya que el grupo fundamental usual es más geométrico y continuo, adecuado para espacios topológicos en un sentido clásico, mientras que, el grupo fundamental étale, es más algebraico y discreto, adecuado para el estudio de esquemas y sus recubrimientos étale.

2. Preliminares. Empecemos escribiendo algunas definiciones y proposiciones relacionadas a morfismo de esquemas. Para mayor información puede consultar [1], [2].

Definición 2.1. Un esquema aritmético es un esquema de tipo finito sobre $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Definición 2.2. Un homomorfismo local $f : A \rightarrow B$ de anillos locales es no ramificado si

i) $f(\mathfrak{m}_A)B = \mathfrak{m}_B$.

ii) El cuerpo $B/\mathfrak{m}_B$ es finita y separable sobre $A/\mathfrak{m}_A$.

Definición 2.3. Un morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ de esquemas es no ramificado si

i) φ es de tipo finito.

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú. **Autor para correspondencia** (rmash@uni.edu.pe).

ii) Los mapeos $\mathcal{O}_{X,\varphi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ son no ramificados para todo $y \in Y$.

Proposición 2.1. Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ es un morfismo local de tipo finito. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) f es no ramificado en x .

ii) El tallo $(\Omega_{X/Y}^1)_x = 0$.

iii) Existe una vecindad U de x tal que la restricción a x del morfismo diagonal $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_Y X$ es una inmersión abierta.

Demostración: Consultar [[3], Prop 1.3]. □

Ejemplo 2.1. Sea el mapeo $f : \text{Spec } \mathbb{Z}[i] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$. Por teoría algebraica de números se tiene que el ideal primo $\langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}$ ramifica en $\mathbb{Q}[i]$, ya que $\langle 2 \rangle = \langle 1 + i \rangle^2$. Por definición, $\Omega_{\mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z}}$ es un $\mathbb{Z}[i]$ -módulo dado por

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z}} &:= \langle di : i^2 = -1 \rangle \\ &= \{ (a + bi)di : 2di = 0, a, b \in \mathbb{Z} \} \\ &\cong \frac{\mathbb{Z}[i]di}{\mathbb{Z}[i]2di} \\ &\cong \frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]}. \end{aligned}$$

Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z}[i]$ se presentan dos casos

i) Si $2 \notin \mathfrak{p}$ entonces $2 \in \frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]} \setminus \mathfrak{p}$. Como $(\bar{z}, \bar{t}) \sim (0, \bar{s}), \forall (\bar{z}, \bar{t}) \in (\frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]})_{\mathfrak{p}}$ se tiene que $(\frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]})_{\mathfrak{p}} = 0$.

ii) Si $2 \in \mathfrak{p}$ entonces $2 \notin \frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]} \setminus \mathfrak{p}$. Como $(\overline{1+i}, \overline{1}) \sim (\overline{-1+i}, \overline{1})$ se tiene que $(\overline{1+i}, \overline{1}) \in (\frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]})_{\mathfrak{p}}$. Luego, $(\frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]})_{\mathfrak{p}} \neq 0$, por tanto, $(\Omega_{\text{Spec } \mathbb{Z}[i]/\text{Spec } \mathbb{Z}})_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Por la proposición anterior, f es ramificado en $\mathfrak{p} = (1 + i)$ que es el único ideal primo que contiene a 2.

Definición 2.4. Un homomorfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ es plano si el funtor $M \mapsto B \otimes_A M$ de A -módulos hacia B -módulos es exacto.

Definición 2.5. Un morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ de esquemas es plano si el homomorfismo local $\mathcal{O}_{X,\varphi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ es plano para todo $y \in Y$.

Definición 2.6. Un morfismo de esquemas $\varphi : X \rightarrow Y$ es étale si es plano y no ramificado.

Ejemplo 2.2. Toda extensión separable finita L/K induce un morfismo étale $\varphi : \text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } K$. En particular las extensiones algebraicas de característica 0 y de cuerpos finitos inducen morfismos étale.

Proposición 2.2.

1. Todo inmersión abierta es étale.
2. La composición de dos morfismos étale es étale.
3. Todo cambio de base de un morfismo étale es étale.
4. Si $\varphi \circ \psi$ y φ son étale, entonces ψ es étale.

Demostración: Consultar [[3], Prop 2.11]. □

Una de las características más importantes que tiene un morfismo étale es que conserva muchas propiedades locales, como se observa en el siguiente resultado.

Proposición 2.3. Sea $\varphi : Y \rightarrow X$ un morfismo étale. Se cumple

1. Para todo $y \in Y$ se tiene que $\mathcal{O}_{Y,y}$ y $\mathcal{O}_{X,x}$ tienen la misma dimensión de Krull.
2. El morfismo φ es cuasi-finito.
3. El morfismo φ es abierto.
4. Si X es reducido entonces Y es reducido.

5. Si X es normal entonces Y es normal.

6. Si X es regular entonces Y es regular.

Demostración: Consultar [[3], Prop 2.12]. $\square$

Observación 2.1. En caso X e Y son variedades conexas, de la proposición anterior se tiene que:

- En 2, las fibras de φ son finitas.
- En 3, los morfismo planos de tipo finito son abiertos.
- En 6, si X es no singular y $\varphi : Y \rightarrow X$ es étale entonces Y es también no singular.

3. Topología de Grothendieck. La topología de Grothendieck es una estructura sobre una categoría que hace que los objetos actúen como los conjuntos abiertos de un espacio topológico. A diferencia de la topología de Zariski la cual presenta una topología muy débil en el sentido que tiene pocos abiertos y éstos son muy grandes (ideal para estudiar estructuras globales de variedades o esquemas), la topología étale los abiertos no son conjuntos de puntos sino que se representan por morfismos étale, ésta es más fina que la topología de Zariski, es decir posee más abiertos y permite un estudio más detallado de la estructura local de variedades o esquemas.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una topología de Grothendieck J consiste de la siguiente información, para cada $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene una colección $J(U)$ de conjunto de mapeos $\{\phi_i : U_i \rightarrow U\}$ donde cada conjunto es llamado cubrimiento de U y satisface las siguientes propiedades

- Para cada morfismo $V \rightarrow U$ en $\mathcal{C}$, los productos fibrados $U_i \times_U V$ existen e inducen un cubrimiento $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i$ de V .
- Si para cada i , $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}_j$ es un cubrimiento de U_i entonces $\{V_{ij} \rightarrow U\}_{i,j}$ es también un cubrimiento de U .
- Para cada U en $\mathcal{C}$, el conjunto $\{id : U \rightarrow U\}$ que consiste de un simple mapeo es un cubrimiento de U .

Es más, el par $(\mathcal{C}, J)$ es llamado un sitio, en algunos casos se denotará simplemente por $\mathcal{C}$.

Observación 3.1.

- Dada una topología de Grothendieck, en caso los morfismos sean étale diremos que es una topología étale
- Para un objeto X de una categoría $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}/X$ denota la categoría cuyos objetos son los morfismos $U \rightarrow X$ en $\mathcal{C}$ y cuyo diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & U' \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

conmuta.

- El producto fibrado $U_1 \times_X U_2$ de morfismo $\varphi_1 : U_1 \rightarrow X, \varphi_2 : U_2 \rightarrow X$ en $\mathcal{C}$ es su producto fibrado en la categoría $\mathcal{C}/X$. Por tanto, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times_X U_2 & \xrightarrow{\psi_2} & U_2 \\ \psi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & X \end{array}$$

Ejemplo 3.1. Sea $\mathcal{C}(X)$ la categoría POSET cuyos objetos estan dados por los conjuntos abiertos del espacio topológico X y los morfismos dado por las inclusiones. Es decir, para todo abierto $V \subset X$, los productos fibrado $U_i \times_X V$ estan dados por $U_i \cap V$, como observamos en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i & \longrightarrow & X \end{array}$$

Como $U_i \cap V$ son también subconjuntos abiertos de X , ellos son objetos en $C(X)$ y forman un cubrimiento abierto de V .

Definición 3.2. Sean C, C' sitios. Un mapeo continuo $C \rightarrow C'$ es un funtor que preserva producto fibrados y cubrimientos.

Ejemplo 3.2. Del ejemplo anterior, para X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ mapeo continuo, se induce un mapeo continuo $f^* : U(Y) \rightarrow U(X)$.

Definición 3.3. Un haz sobre un sitio (C, J) es un funtor contravariante $\mathcal{F} : C^{op} \rightarrow C'$ que satisface la siguiente condición

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \Rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j).$$

4. La teoría de Galois de cubrimientos étale. En esta sección, veamos la teoría de Galois de cubrimientos topológicos para cubrimientos étale. Para mayor información puede consultar [4]. Empecemos con algunos resultados:

Lema 4.1. Sea $\psi : Y \rightarrow X$ y $\phi : X \rightarrow S$ morfismo de esquemas. Si $\phi \circ \psi$ es finito y ϕ es separado entonces ψ es finito. Es más, si $\phi \circ \psi$ y ϕ son étale, entonces ψ es étale.

Demostración: Por definición ϕ es separado, el morfismo diagonal $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ es una inmersión cerrada. Definamos el gráfico de ψ , Γ_ψ como el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \\ & \searrow \Gamma_\psi & \nearrow \text{pr}_2 \\ & Y \times_S X & \\ \text{Id}_Y \searrow & \downarrow & \downarrow \varphi \\ & Y & \xrightarrow{\varphi \circ \psi} S \end{array}$$

Definición 4.1. Un punto geométrico $\bar{x}$ de un esquema X es un mapeo $\text{Spec } K \rightarrow X$, con K un cuerpo algebraicamente cerrado. Si Y es un X -esquema, la fibra de X sobre $\bar{x}$ es el producto fibrado $Y \times_X \text{Spec } K$. □

Lema 4.2. Sea K un cuerpo. Sea K^{sep} la clausura separable de K . Sea el grupo profinito $G = \text{Gal}(K^{sep}/K)$. El funtor

$$\begin{array}{ccc} F & \text{esquemas étale sobre } K & \rightarrow G - \text{Sets} \\ X/K & & \mapsto \text{Mor}_{\text{Spec } K}(K^{sep}, X) \end{array}$$

es una equivalencia de categorías.

Demostración: Un esquema X es étale sobre K si y sólo si $X \cong \bigsqcup_{i \in I} \text{Spec}(K_i)$, donde K_i es una extensión separable de K . El funtor F , asigna un X hacia el $G - \text{set}$

$$\bigsqcup_{i \in I} \text{Hom}_K(K_i, K^{sep})$$

con su G -acción izquierda natural. Cada elemento tiene un estabilizador abierto por definición de la topología en G . □

Definición 4.2. Dado un morfismo $f : X \rightarrow S$, sea $\text{Aut}(X/S)$ el grupo de automorfismos $\lambda : X \rightarrow X$ que satisface que $f(\lambda(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 4.3. Un cubrimiento finito étale $f : X \rightarrow S$ es llamado un cubrimiento de Galois si $\text{Aut}(X/S)$ actúa transitivamente sobre $X_{\bar{x}}$ para todo punto geométrico $\bar{x} : \text{Spec } K \rightarrow S$.

Definición 4.4. Sea C una categoría y sea $F : C \rightarrow \text{Sets}$ un funtor. El par (C, F) es una categoría de Galois si

- i) C tiene límites y colímites finitos.
- ii) Todo objeto de C es un coproducto finito de objetos conexos.
- iii) $F(X)$ es finito para todo $X \in \text{Ob}(C)$.
- iv) F refleja isomorfismos y es exacta.

Observación 4.1.

- F refleja isomorfismos significa que, si f es un morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $F(f)$ es un isomorfismo entonces f es un isomorfismo.
- F conmuta con límites y colímites finitos.
- $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ es conexo si éste no es inicial y para todo monomorfismo $Y \rightarrow X$ ya sea Y es inicial o $Y \rightarrow X$ es un isomorfismo.

Definición 4.5. Sea X un esquema. En adelante, $F\acute{E}t_X$ denota la categoría de esquemas finito y étale sobre X . Es decir,

- i) un objeto de $F\acute{E}t_X$ es un morfismo finito $Y \text{ étale } Y \rightarrow X$.
- ii) un morfismo en $F\acute{E}t_X$ de $Y \rightarrow X$ hacia $Y' \rightarrow X$ es un morfismo $Y \rightarrow Y'$ tal que se verifica el diagrama visto en el segundo punto de la Observación 3.1.

Ejemplo 4.1. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $X = \text{Spec } k$. Como todo esquema étale sobre k es la unión disjunta de extensiones de k separables y finitas, se tiene que $F\acute{E}t_X$ es equivalente a la categoría de conjuntos finitos. Es decir,

$$F\acute{E}t_X = \{k - \text{álgebras finitas y separables}\}^{opp}$$

Proposición 4.1. Sea $(\mathcal{C}, F)$ una categoría de Galois. Sea $G = \text{Aut}(F)$. Las categorías $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Finite} - G - \text{Sets}$ son equivalentes

Demostración: Consultar [[3], Teo 3.13]. □

Lema 4.3. Sea X un esquema. La categoría $F\acute{E}t_X$ tiene límites y colímites finitos y para todo morfismo $X' \rightarrow X$ el funtor cambio de base $F\acute{E}t_X \rightarrow F\acute{E}t_{X'}$ es exacto.

Demostración: Consultar [[3], Pág 27]. □

Observación 4.2. Sea X un esquema. Sean los funtores $F_1 : F\acute{E}t_X \rightarrow \text{Sch}/X$ y $F_2 : F\acute{E}t_X \rightarrow \text{Sch}/X$ se cumple que:

- Los funtores F_1 y F_2 conmutan con colímites finitos.
- El funtor F_2 conmuta con límites finitos.
- El funtor F_1 conmuta con límites finitos conexos, es decir con ecualizadores y producto fibrados.

Lema 4.4. Sean X un esquema conexo y $\bar{x}$ un punto geométrico de X . El funtor

$$F_{\bar{x}} : F\acute{E}t_X \rightarrow \text{Sets}, \quad Y \mapsto |Y_{\bar{x}}|$$

define una categoría de Galois.

Demostración: Del ejemplo 4.1 la categoría $F\acute{E}t_{\bar{x}}$ se puede identificar con la categoría de conjuntos finitos, luego el funtor $F_{\bar{x}}$ no es más que el funtor de cambio de base para el morfismo $\bar{x} \rightarrow x$. Así, vemos que $F\acute{E}t_{\bar{x}}$ tiene límites finitos y colímites finitos y que $F_{\bar{x}}$ es exacto por el Lema 4.4. También utilizaremos que los límites finitos en $F\acute{E}t_X$ concuerdan con los límites finitos en la categoría de esquemas sobre X , ver la Observación 4.2.

Si $Y' \rightarrow Y$ es un monomorfismo en $F\acute{E}t_X$, entonces vemos que $Y' \rightarrow Y' \times_X Y$ es un isomorfismo, y por lo tanto $Y' \rightarrow Y$ es un monomorfismo de esquemas. Luego $Y' \rightarrow Y$ es una inmersión abierta. Dado que Y' y Y están separados sobre X , el morfismo $Y' \rightarrow Y$ es finito, por lo tanto cerrado, de modo que es la inclusión de un subconjunto abierto y cerrado de Y . De esto se deduce que Y es un objeto conectado de la categoría $F\acute{E}t_X$ (como en la Definición 4.4) si y solo si Y es conectado como esquema. Luego, se tiene que Y es un coproducto finito de sus componentes conectadas tanto como esquema y en el sentido de la Definición 4.4.

Sea $Y \rightarrow Z$ un morfismo en $F\acute{E}t_X$ que induce una biyección $F_x(Y) \rightarrow F_x(Z)$. Tenemos que demostrar que $Y \rightarrow Z$ es un isomorfismo. Según lo anterior, podemos asumir que Z es conectado. Dado que $Y \rightarrow Z$ es finito étale y Y es finito localmente libre, es suficiente mostrar que $Y \rightarrow Z$ es finito localmente libre de grado 1. Esto es cierto en un vecindario de cualquier punto de Z que yace sobre $\bar{x}$ y dado que Z es conectado y el grado es localmente constante, concluimos. □

Observación 4.3.

- $Y_{\bar{x}}$ es el producto fibrado $Y \times_X \text{Spec}(\Omega)$ con Ω cuerpo algebraicamente cerrado.
- $|Y_{\bar{x}}| = \{\bar{y} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow Y \text{ tal que cumple } *\}$, cumplir $*$ significa que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\Omega) & \xrightarrow{\bar{x}} & X \\ & \searrow \bar{y} & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

Ejemplo 4.2. Sean $X = \text{Spec } \mathbb{Q}$, $\bar{x} : \text{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$ y $Y = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, se tiene

- La fibra

$$Y_{\bar{x}} = \text{Spec}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}) \cong \text{Spec}(\bar{\mathbb{Q}} \times \bar{\mathbb{Q}}).$$

- El conjunto de puntos geométricos

$$|Y_{\bar{x}}| = \{f_1 : \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, f_2 : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}\}.$$

5. El grupo fundamental étale. En esta sección definimos el grupo fundamental algebraico de Grothendieck. Gracias al resultado del 4.4, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 5.1. Sea X un esquema conexo. Sea $\bar{x}$ un punto geométrico de X . El grupo fundamental de X con base en el punto $\bar{x}$ es el grupo

$$\pi_1(X, \bar{x}) = \text{Aut}(F_{\bar{x}})$$

de automorfismos del funtor fibra $F_{\bar{x}} : F\acute{E}t_X \rightarrow \text{Sets}$ dotado con su topología profinita canónica.

Observación 5.1.

- La elección de un punto geométrico $\bar{x}$ como base es crucial, ya que fija una fibra sobre la cual se estudian los automorfismos.
- Esta topología refleja la naturaleza pro-finito del grupo fundamental en geometría algebraica.

Teorema 5.1. Sean X un esquema conexo y $\bar{x}$ punto geométrico de X , se cumple que:

- 1) El funtor fibra $F_{\bar{x}}$ define una equivalencia de categorías

$$F\acute{E}t_X \rightarrow \text{Finite} - \pi_1(X, \bar{x}) - \text{Sets}$$

- 2) Dado un segundo punto geométrico $\bar{x}'$ de X existe un isomorfismo $g : F_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}'}$. Este produce un isomorfismo $\pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}')$ compatible con las equivalencias en la proposición anterior.
- 3) Dado un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de esquemas conexos, denotemos $\bar{y} = f \circ \bar{x}$. Existe homomorfismo continuo canónico

$$f_* : \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{y})$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F\acute{E}t_Y & \xrightarrow{\text{cambio de base}} & F\acute{E}t_X \\ F_{\bar{y}} \downarrow & & \downarrow F_{\bar{x}} \\ \text{Finite} - \pi_1(Y, \bar{y}) - \text{Sets} & \xrightarrow{f_*} & \text{Finite} - \pi_1(X, \bar{x}) - \text{Sets} \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: Consultar [5]. □

Lema 5.1. Sea K un cuerpo con $\bar{K}$ su clausura algebraica. Sea $X = \text{Spec } K$ y $\bar{x} : \text{Spec } \bar{K} \rightarrow X$ punto geométrico. Se cumple que

- 1) El funtor del lema 4.2 induce una equivalencia

$$F\acute{E}t_X \rightarrow \text{Finite} - \text{Gal}(K^{sep}/K) - \text{Sets}$$

compatible con $F_{\bar{x}}$ y el funtor $\text{Finite} - \text{Gal}(K^{sep}/K) - \text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$.

- 2) Éste induce un isomorfismo canónico

$$\text{Gal}(K^{sep}/K) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x})$$

de grupos topológicos profinitos.

Demostración: El funtor del lema 4.2 es el mismo que el funtor $F_{\bar{x}}$ ya que para todo Y étale sobre X se tiene que

$$\text{Mor}_X(\text{Spec } \bar{K}, Y) = \text{Mor}_X(\text{Spec } K^{\text{sep}}, Y)$$

Además $Y = \coprod_{i \in I} \text{Spec } L_i$ con L_i/K extensiones separable y finitas sobre K . Por tanto, todo homomorfismo de K -álgebra $L_i \rightarrow \bar{K}$ se factoriza a través de K^{sep} . También notamos que $F_{\bar{x}}(Y)$ es finito si y solo si I es finito, si y solo si $Y \rightarrow X$ es finito étale, lo cual prueba la parte 1). La parte 2) es una consecuencia de la primera parte. $\square$

Observación 5.2. Del Lema anterior, existe un modo más explícito de construir el isomorfismo

$$\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) = \text{Aut}(F_{\bar{x}}).$$

Se observa que $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) = \text{Aut}(\bar{K}/K)$, ya que $\bar{K}$ es la perfección de K^{sep} . Dado que $F_{\bar{x}}(Y) = \text{Mor}_X(\text{Spec}(\bar{K}), Y)$, podemos considerar la aplicación

$$\text{Aut}(\bar{K}/K) \times F_{\bar{x}}(Y) \rightarrow F_{\bar{x}}(Y), \quad (\sigma, \bar{y}) \mapsto \sigma \cdot \bar{y} = \bar{y} \circ \text{Spec}(\sigma)$$

Esta es una acción debido a que

$$\sigma\tau \cdot \bar{y} = \bar{y} \circ \text{Spec}(\sigma\tau) = \bar{y} \circ \text{Spec}(\tau) \circ \text{Spec}(\sigma) = \sigma \cdot (\tau \cdot \bar{y})$$

La acción es funtorial en $Y \in F\acute{E}t_X$, y así se obtiene la aplicación deseada.

Ejemplo 5.1. Sea K un cuerpo y $X = \mathbb{A}_K^1 = \text{Spec } K[t]$ la **línea afín** sobre K . El cuerpo de funciones de X es $K(t)$, y las valuaciones de $K(t)$ correspondientes a los puntos cerrados de X son las valuaciones v_f .

- 1) Caso de característica cero: Si $\text{car } K = 0$, toda valuación de $K(t)$ trivial sobre K (en particular v_∞) es **ligeramente ramificada** en cualquier extensión finita $K(t) \subset F$, concluimos que el cuerpo M satisface $M = K_s(T)$. Por lo tanto:

$$\pi_1(\mathbb{A}_K^1) \cong \pi_1(\text{Spec } K).$$

- 2) Caso de característica $p > 0$: Si $\text{car } K = p > 0$, el morfismo natural $\pi_1(\mathbb{A}_K^1) \rightarrow \pi_1(\text{Spec } K)$ sigue siendo **sobreyectivo**, pero no es inyectivo. En particular, $\pi_1(\mathbb{A}_K^1)$ es no trivial si K es un cuerpo **separablemente cerrado** de característica positiva.

6. El grupo fundamental étale sobre esquemas normales. En la sección anterior, se determinó que el grupo fundamental de X es un cociente del grupo de Galois del cuerpo de funciones $K(X)$. Dado que la función es continua, el núcleo es un subgrupo normal cerrado del grupo de Galois. Por el teorema fundamental de correspondencia de Galois, este núcleo corresponde a una extensión de Galois L/K . En esta sección, determinaremos L cuando X es un esquema integral normal.

Definición 6.1. Sea X un esquema normal integral con cuerpo de funciones K y sea L/K una extensión finita. Dada la normalización $Y \rightarrow X$ de X en el morfismo $\text{Spec}(L) \rightarrow X$. Diremos que X no está ramificado en L si $Y \rightarrow X$ es un morfismo no ramificado de esquemas.

Observación 6.1. La fibra teórica de esquemas de $Y \rightarrow X$ sobre $\text{Spec}(K)$ es $\text{Spec}(L)$. Por lo tanto, la extensión de cuerpo L/K es separable si X no está ramificado en L .

Lema 6.1. Sea X un esquema normal es geoméricamente uniramificado. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- 1) X es no ramificado en L .
- 2) $Y \rightarrow X$ es étale.
- 3) $Y \rightarrow X$ es étale finito.

Demostración: La equivalencia entre las proposiciones 2) y 3) se desprenden de las proposición 2,3. Como todo morfismo étal es no ramificado, se tiene que 2) implica 1). Recíprocamente, supongamos que $Y \rightarrow X$ es no ramificado. Sea $x \in X$, elegimos una vecindad étale $(U, u) \rightarrow (X, x)$ tal que

$$Y \times_X U = \coprod V_j \rightarrow U$$

es una unión disjunta de inmersiones cerradas. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U es cuasi compacto, entonces U tiene una cantidad finita de componentes irreducibles. Luego, como U es normal las componentes irreducibles de U son abiertos y cerrado, por tanto, podemos asumir que U es irreducible, luego U es un esquema integral cuyo punto genérico ξ mapea a el punto genérico de X . Por otro lado, se sabe que $Y \times_X U$ es la normalización de U en $\text{Spec}(L) \times_X U$ mapea a ξ .

Por tanto, todo $V_j \rightarrow U$ es un isomorfismo con $U = \overline{\{\xi\}}$, es decir, $Y \times_X U \rightarrow U$ es étale. Luego, se concluye que $Y \rightarrow X$ es étale sobre la imagen de $U \rightarrow X$. $\square$

Lema 6.2. Sea X un esquema integral y normal con cuerpo de funciones K y sea $Y \rightarrow X$ un morfismo étale finito. Si Y es conexo, entonces Y es un esquema integral normal y Y es la normalización de X en el cuerpo de funciones de Y .

Demostración: Como $Y \rightarrow X$ es plano, todo punto genérico de Y mapea a un punto genérico de X . Luego, como $Y \rightarrow X$ es finito, se tiene que Y posee un número finito de componentes irreducibles. Por tanto Y es la unión disjunta de un número finito de esquemas normales. Por tanto, si Y es conexo entonces Y es un esquema integral normal.

Sea L el cuerpo de funciones de Y y sea $Y' \rightarrow X$ la normalización de X en L , se tiene una factorización $Y' \rightarrow Y \rightarrow X$ y $Y' \rightarrow Y$ es la normalización de Y en L . Como Y es normal, se tiene que $Y' = Y$. $\square$

Teorema 6.1. Sea X un esquema integral normal con cuerpo de funciones K . El mapeo canónico

$$\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{\eta})$$

es identificado con el mapeo cociente $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow \text{Gal}(M/K)$, donde $M \subset K^{\text{sep}}$ es la unión de sub-extensiones finitas L tal que X es no ramificado en L .

Demostración: El esquema normal X es geoméricamente uniramificado. Por el Lema 5.1 se tiene que $\pi_1(\eta, \bar{\eta}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{\eta})$ es sobreyectiva y la fila superior horizontal del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F\acute{E}t_X & \longrightarrow & F\acute{E}t_{\eta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Finite-}\pi_1(X, \bar{\eta})\text{-Sets} & \longrightarrow & \text{Finite-Gal}(K^{\text{sep}}/K) \text{ - Sets} \end{array}$$

es totalmente fiel. La columna vertical izquierda por el Teorema 5.1 y la columna vertical derecha es también una consecuencia del Lema 5.1. Por otro lado, la imagen esencial de f mapea elementos de $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \text{ - Sets}$ isomórfico hacia conjuntos de la forma

$$S = \text{Hom}_K\left(\prod_{i=1, \dots, n} L_i, K^{\text{sep}}\right) = \prod_{i=1, \dots, n} \text{Hom}_K(L_i, K^{\text{sep}}),$$

donde L_i/K extensión finita y separable tal que X es no ramificado en L_i . Por tanto, si $M \subset K^{\text{sep}}$ entonces $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/M)$ es exactamente el subgrupo de $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ que actúa trivialmente sobre todo objeto en la imagen esencial de f . Además, la imagen esencial de f es exactamente la categoría de S tal que la $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ -acción que se factoriza a través la suryectividad $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow \pi_1(X, \bar{\eta})$. Se concluye que $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/M)$ es el núcleo. En consecuencia, $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/M)$ es un subgrupo normal, M/K es Galois, y se tiene una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \text{Gal}(K^{\text{sep}}/M) \rightarrow \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow \text{Gal}(M/K) \rightarrow 1,$$

por la teoría de Galois. $\square$

Ejemplo 6.1. Sea $L/\mathbb{Q}$ extensión finita con $L \neq \mathbb{Q}$. Por el teorema de Minkowski, se tiene que

$$|\Delta_{L/\mathbb{Q}}| > 1.$$

Esto implica que L ramifica para algún número primo. Es decir, no existen extensiones finitas no triviales de $\mathbb{Q}$ no ramificadas en todos los números primos. Por lo tanto, la extensión máxima no ramificada M debe ser igual a $\mathbb{Q}$, así se tiene que

$$\pi_1(\text{Spec}(\mathbb{Z}, \bar{x})) \cong \text{Gal}(M/\mathbb{Q}) = \{id\}.$$

7. Conclusions. El estudio del grupo fundamental étale en esquemas normales revela una profunda conexión entre estructuras geométricas, topológicas y aritméticas. Este enfoque unificado permite reinterpretar problemas clásicos de teoría de números (como la ramificación en cuerpos de números) mediante herramientas geométricas, extendiendo analogías conocidas en topología algebraica. La trivialidad de $\pi_1(\text{Spec}(\mathbb{Z}))$ debido al teorema de Minkowski, enfatiza el papel importante que cumple $\mathbb{Q}$ en geometría aritmética, análogo al de espacios simplemente conexos en topología.

Authorcontributions. El autor hizo la planificación, metodología del trabajo y resultados.

Funding. Esta investigación no recibió financiación externa

Conflicts of interest. Esta investigación son resultados obtenidos en mi avance de tesis doctoral, declaro que no hay conflicto de interés con otros autores

ORCID and License

Ronald Jesús Mas Huamán <https://orcid.org/0000-0002-7298-7663>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](#)

Referencias

- [1] Murre JP. Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Notes by S. Anantharaman, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No 40, 1967.
- [2] Harstshorne R. Algebraic Geometry, University of California, Editorial Board. San Francisco- USA. 1997.
- [3] Milne JS. Lectures on Étale Cohomology, Princeton University press Princeton, New Jersey. 1980.
- [4] Szamuely T. Galois Groups and Fundamental Groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 2010.
- [5] Artin M. Grothendieck topologies. Harvard University, Dpt. of Math. 1962.