



A mathematical analysis of an eco-epidemiological model with prey-feedback effect and prey-refuge

Análisis matemático de un modelo eco-epidemiológico con efecto de retroalimentación y refugio en la presa

Neisser Pino Romero[✉] and Roxana López-Cruz[✉]

Received, Mar. 16, 2025;

Accepted, Jun. 18, 2025;

Published, Jul. 27, 2025



How to cite this article:

Pino Romero, N.; López-Cruz, R. A *Mathematical Analysis of an Eco-Epidemiological Model with Feedback Mechanisms and Prey Refuge*. *Selecciones Matemáticas*. 2025;12(1):67–85. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2025.01.06>

Abstract

This study investigates an eco-epidemiological model incorporating feedback mechanisms and prey refuge, formulated as a system of nonlinear ordinary differential equations. The model describes interactions among susceptible prey, infected prey, and predators, including disease transmission and nonlinear predation effects. We establish the existence, uniqueness, and positivity of solutions, and analyze their boundedness within a biologically feasible region. Local stability of equilibria is studied via linearization, while global stability is proven using Lyapunov functions. Numerical simulations complement the analytical results, demonstrating how key parameters affect the system's long-term dynamics.

Keywords . Eco-epidemiological model; Prey refuge; Feedback mechanisms; Stability analysis; Numerical simulations.

Resumen

Este estudio analiza un modelo eco-epidemiológico que incorpora mecanismos de retroalimentación y refugio en la presa, formulado como un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias. El modelo describe las interacciones entre presas susceptibles, presas infectadas y depredadores, considerando la transmisión de la enfermedad y efectos de depredación no lineales. Se demuestra la existencia, unicidad y positividad de las soluciones, y se estudia su acotación dentro de una región biológicamente factible. La estabilidad local de los equilibrios se analiza mediante técnicas de linealización, mientras que la estabilidad global se establece a través de funciones de Lyapunov. Simulaciones numéricas complementan los resultados teóricos, mostrando cómo los parámetros clave afectan la dinámica a largo plazo del sistema.

Palabras clave. Modelo eco-epidemiológico; Refugio en la presa; Mecanismo de retroalimentación; Análisis de estabilidad; Simulaciones numéricas.

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú. **Correspondence author** (neisser.pino@unmsm.edu.pe)

†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú. (rlopezc@unmsm.edu.pe)

1. Introducción. En los ecosistemas naturales, las interacciones entre organismos y su entorno están determinadas por una variedad de factores ecológicos y epidemiológicos que, en conjunto, definen la estructura y estabilidad de las comunidades biológicas [1]. Particularmente, la presencia de enfermedades infecciosas dentro de una población de presas puede modificar de manera sustancial la dinámica de los sistemas depredador-presa [2]. En este contexto, los modelos *eco-epidemiológicos* constituyen una herramienta fundamental para comprender cómo las enfermedades interactúan con los procesos ecológicos clásicos, como la reproducción, la competencia, la depredación y el uso del espacio [3]. La incorporación de *retroalimentación* entre las dinámicas poblacionales y epidemiológicas permite capturar efectos no lineales que surgen cuando, por ejemplo, una disminución en la población de presas por efecto de una enfermedad repercute negativamente en la tasa de reproducción de los depredadores, quienes dependen de ellas como fuente de alimento [4]. A su vez, esta retroalimentación puede alterar el curso de la epidemia, al modificar la densidad de presas susceptibles e infectadas en el tiempo. Este tipo de interdependencia puede generar comportamientos complejos como ciclos poblacionales, bifurcaciones, o incluso extinciones locales, lo cual resalta la necesidad de un análisis matemático riguroso. Por otra parte, la presencia de un *refugio* para las presas —un espacio donde se encuentran protegidas de los depredadores o incluso del contagio— introduce una heterogeneidad espacial implícita que modifica la presión de depredación y las tasas de contacto entre individuos susceptibles e infectados [5, 6]. Desde un punto de vista matemático, esta estructura puede modelarse mediante funciones no lineales que reflejan la proporción de presas que se benefician del refugio, alterando la dinámica global del sistema y favoreciendo la supervivencia de subpoblaciones bajo presión intensa [7].

Además, el modelado de la *depredación* se basa en la elección de una respuesta funcional, que describe cómo varía la tasa de consumo de presas según su densidad. Las más comunes son: tipo I (consumo lineal), tipo II (saturación por tiempo de manipulación) y tipo III (efectos de aprendizaje o búsqueda eficiente). Existen formulaciones más complejas, como las respuestas de Beddington-DeAngelis o Crowley-Martin, que incorporan interferencias entre depredadores y efectos combinados en el consumo [8]. La elección adecuada de esta función es esencial para representar con realismo las dinámicas ecológicas y epidemiológicas. Asimismo, el efecto Allee —dificultad de las poblaciones para crecer cuando su tamaño es bajo— puede surgir por factores como la escasez de parejas reproductivas, cooperación social o defensa grupal. En contextos eco-epidemiológicos, este efecto incrementa la vulnerabilidad de las presas frente a enfermedades y depredación, pudiendo llevarlas a la extinción si no se supera una densidad crítica [2]. Su inclusión en el modelo permite identificar umbrales por debajo de los cuales la recuperación poblacional es inviable, incluso en ausencia de perturbaciones externas [8].

En este trabajo, se propone y analiza un modelo eco-epidemiológico en el que la población de presas está sujeta tanto a la infección por una enfermedad como a la depredación, incorporando además un refugio parcial [9] y un efecto de retroalimentación en la tasa de crecimiento de las presas. El análisis incluye el estudio de los equilibrios del sistema, su estabilidad local y global, así como las condiciones bajo las cuales se garantiza la persistencia o extinción de cada población [10]. A través de herramientas matemáticas como el análisis cualitativo de sistemas dinámicos no lineales, teoría de estabilidad y simulaciones numéricas, se busca entender cómo la interacción entre retroalimentación, refugio, depredación, enfermedades y efectos de densidad determina el comportamiento a largo plazo del ecosistema modelado [11].

2. Modelo Matemático. El modelo matemático propuesto está constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describe las interacciones entre poblaciones de presas sanas, presas infectadas y depredadores. La no linealidad del sistema se debe a la inclusión de términos de crecimiento logístico modificado (retroalimentación), funciones de depredación dependientes de la densidad de presas y mecanismos de transmisión de enfermedades [9]. Esta estructura permite la existencia de múltiples puntos de equilibrio, bifurcaciones y comportamientos oscilatorios, cuya estabilidad depende críticamente de parámetros como la tasa de transmisión, la eficiencia de depredación y la capacidad de carga [7]. Desde el punto de vista ecológico, el modelo permite analizar cómo la depredación influye en la dinámica de enfermedades y en la estabilidad de las comunidades. La mayor vulnerabilidad de las presas infectadas a la depredación puede actuar como un mecanismo natural de control epidemiológico [3]. No obstante, una presión excesiva sobre las presas susceptibles puede comprometer la resiliencia del sistema y favorecer extinciones. Además, la competencia entre presas sanas e infectadas por recursos limita la recuperación de la población sana, afectando la estabilidad global del ecosistema [12]. La inclusión de mortalidad denso-dependiente en los depredadores introduce un mecanismo regulador que previene la sobreexplotación de las presas [13].

El presente modelo presenta una reproducción de la especie presa con un efecto de retroalimentación ($q \neq 1$) que presenta un crecimiento lento ante una población escasa, ver la Figura 2.1.

$$R(x) = rx^q \left[1 - \frac{x}{K} \right]$$

El efecto de retroalimentación ($q = 2$) de esta propuesta de modelo eco-epidemiológico nos permite analizar como influye este tipo de reproducción para la presa, junto con el coeficiente de refugio diferenciado de la presa susceptible (u_1) y la presa infectada (u_2) en su relación con el depredador (u_3). Este modelo se diferencia del estudiado por Laazar et al. [12] el cual presenta una reproducción logística coincidiendo con una respuesta funcional Holling que permite abordar una dinámica más directa en cuanto al acto de la depredación, y la introducción del coeficiente de refugio que tiene la presa ante su depredador como un mecanismo de defensa [14]. Esto permite modelar con mayor realismo efectos como el hacinamiento, la propagación acelerada de enfermedades y la escasez de recursos. Incorporar $q = 2$ en estos modelos mejora la comprensión de umbrales críticos, oscilaciones poblacionales y estrategias de control ecológico [7].

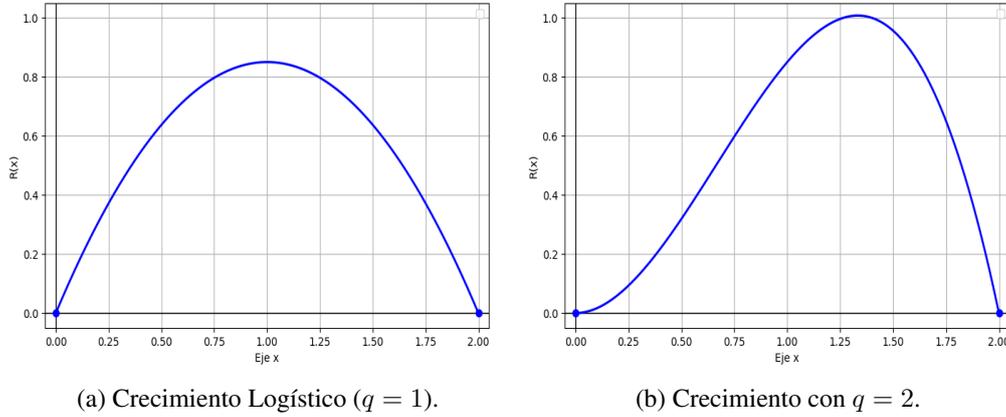


Figura 2.1: Tipos de Crecimiento con Efecto de Retroalimentación ($q \neq 1$).

El siguiente modelo matemático describe la dinámica temporal de una comunidad ecológica compuesta por tres poblaciones: presas susceptibles, presas infectadas y depredadores. Estas poblaciones se representan mediante funciones diferenciables del tiempo, lo que permite analizar su evolución a lo largo del tiempo mediante herramientas del cálculo diferencial [7]. Los parámetros del modelo corresponden a tasas eco-epidemiológicas normalizadas, tales como tasas de natalidad, mortalidad, transmisión de enfermedades y depredación, lo que permite una interpretación biológica coherente y ajustada a escenarios reales [12]. Este tipo de formulación resulta especialmente útil para estudiar los efectos simultáneos de la interacción ecológica y la propagación de enfermedades infecciosas dentro de una comunidad biológica.

El sistema está modelado mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en el cual se integran múltiples factores de interés ecológico y epidemiológico [6]. Por un lado, se considera la capacidad de carga del ambiente, la cual limita el crecimiento poblacional de las presas susceptibles a través de un término logístico [12]. Por otro lado, se incorpora la transmisión de la infección mediante un término bilineal o no lineal, que modela el contacto entre individuos susceptibles e infectados [15]. Además, las tasas de depredación se modelan con funciones funcionales que permiten captar distintos tipos de respuesta del depredador ante la abundancia de presas, incluyendo posibles preferencias por presas infectadas o susceptibles [8]. Este tipo de modelos eco-epidemiológicos permite explorar fenómenos complejos como el papel de la infección en la regulación poblacional, la coexistencia de especies, la aparición de ciclos límite, o incluso transiciones a comportamientos caóticos bajo ciertas condiciones paramétricas [7]. En este contexto, el análisis cualitativo y cuantitativo del sistema puede proporcionar información valiosa sobre la estabilidad de los equilibrios ecológicos, los umbrales epidémicos, y los efectos indirectos que una enfermedad puede tener sobre las dinámicas tróficas [10].

El modelo matemático se expresará las poblaciones ecológicas (presas y depredadores) como funciones, y a la vez, las tasas eco-epidemiológicas como parámetros de un sistema. En ese sentido, sean las funciones $u_1, u_2, u_3 \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$, es decir, $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ diferenciables en todo el dominio \mathbb{R}_0^+ . Y parámetros $r, a_1, m_1, \alpha, h_1, \theta, a_2, m_2, h_2, g, \rho, \mu, c, d \in (0, 1)$ siendo valores normalizados, y la capacidad de carga para las presas, $K > 0$. De esta forma, se expresa el modelo matemático (2.1), como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), donde su variable independiente es el tiempo (t),

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = ru_1^2 \left[1 - \frac{u_1+u_2}{K} \right] - \alpha u_1 u_2 - \frac{a_1(1-m_1)^2 u_1^2 u_3}{\theta^2 + (1-m_1)u_1^2} - \mu u_1 + g u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = \alpha u_1 u_2 - \frac{a_2(1-m_2)^2 u_2^2 u_3}{\theta^2 + (1-m_2)u_2^2} - (\mu + \rho + g)u_2, \\ \frac{du_3}{dt} = \frac{a_1 h_1 (1-m_1)^2 u_1^2 u_3}{\theta^2 + (1-m_1)u_1^2} + \frac{a_2 h_2 (1-m_2)^2 u_2^2 u_3}{\theta^2 + (1-m_2)u_2^2} - c u_3 - d u_3^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

con la condición inicial: $u_1(0) = u_1^0 \geq 0$, $u_2(0) = u_2^0 \geq 0$, $u_3(0) = u_3^0 \geq 0$. Donde $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ y $u_3 = u_3(t)$ son los tamaños poblacionales de las presas (susceptibles e infectadas), y los depredadores respectivamente, para el tiempo $t \geq 0$ [7]. Luego, el sistema (2.1) está definido en la región

$$\Omega = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+. \quad (2.2)$$

El modelo matemático expresado en (2.1) posee 15 parámetros positivos (tasas ecológicas y epidemiológicas) como se indica en [12], teniendo en cuenta los valores del coeficiente de refugio de la presa susceptible ($0 < m_1 < 1$), como también el coeficiente de refugio de la presa infectada ($0 < m_2 < 1$). Se define la dimensión correspondiente a las poblaciones ecológicas del modelo matemático:

Tabla 2.1: Tabla de Poblaciones Ecológicas (Var.)

Var.	Población	Unidad
u_1	Población de Presas Susceptibles	bm
u_2	Población de Presas Infectadas	bm
u_3	Población de Depredadores	bm

Luego, los parámetros asociados al modelo (2.1) y sus dimensiones, se expresan en el siguiente cuadro:

Tabla 2.2: Tabla de Parámetros del Modelo Matemático (Par.)

Par.	Significado	Unidad
r	Tasa de crecimiento intrínseca de la población de presas	$bm^{-1} \cdot T^{-1}$
K	Capacidad de carga del medio ambiente para las presas	bm
a_1	Tasa de depredación per cápita de la presa susceptible	bm^{-1}
m_1	Coefficiente de efectividad de refugio de la presa susceptible	<i>adim.</i>
α	Tasa de contagio de la presa susceptible	$bm^{-1} \cdot T^{-1}$
h_1	Tasa de beneficio por depredación de la presa susceptible	T^{-1}
θ	Capacidad de constante media	bm^2
a_2	Tasa de depredación per cápita de la presa de la presa infectada	bm^{-1}
m_2	Coefficiente de efectividad de refugio de la presa infectada	<i>adim.</i>
h_2	Tasa de beneficio por depredación de la presa infectada	T^{-1}
g	Tasa de recuperación de la presa infectada	T^{-1}
μ	Tasa de mortalidad natural de la presa	T^{-1}
ρ	Tasa de mortalidad por la enfermedad de la presa	T^{-1}
c	Tasa de mortalidad natural de los depredadores	T^{-1}
d	Tasa de competencia intraespecífica de los depredadores	$bm^{-1} \cdot T^{-1}$
$\xi = \frac{r}{\mu}$	Coefficiente de Supervivencia de la Presa	<i>adim.</i>

donde el modelo (2.1) posee el coeficiente de efectividad de refugio por parte de la presa susceptible (m_1) y la presa infectada (m_2), y es que también admiten la interpretación que la presa no tenga una estrategia efectiva de refugiarse ante su depredador ($m_1 = 0, m_2 = 0$) como también poseer una estrategia altamente efectiva que pueda evitar su depredación en su totalidad ($m_1 = 1, m_2 = 1$) [5]. Estas consideraciones no las tendremos en cuenta debido que se quiere analizar el impacto de estos coeficientes en la dinámica entre las presas y los depredadores [12].

2.1. Existencia, Unicidad y Positividad de Soluciones. Se demostrará la existencia y unicidad de las soluciones del sistema propuesto en (2.1), que representa la dinámica entre las especies ecológicas (presa y depredador) [11]. Además, se debe garantizar la positividad de las soluciones debido que las variables representan poblaciones ecológicas. Por otro lado, el modelo propuesto expresado en (2.1), es no homogéneo debido que hay dinámica vital (presas y depredadores) para

fomentar la sostenibilidad del ecosistema [7]. Sean las funciones asociadas al modelo (2.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= ru_1^2 \left[1 - \frac{u_1+u_2}{K} \right] - \alpha u_1 u_2 - \mu u_1 - \frac{a_1(1-m_1)^2 u_1^2 u_3}{\theta^2+(1-m_1)u_1^2} + gu_2 = G_1(u_1, u_2, u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= \alpha u_1 u_2 - \frac{a_2(1-m_2)^2 u_2^2 u_3}{\theta^2+(1-m_2)u_2^2} - (\mu + \rho + g)u_2 = G_2(u_1, u_2, u_3), \\ \frac{du_3}{dt} &= \frac{a_1 h_1 (1-m_1)^2 u_1^2 u_3}{\theta^2+(1-m_1)u_1^2} + \frac{a_2 h_2 (1-m_2)^2 u_2^2 u_3}{\theta^2+(1-m_2)u_2^2} - cu_3 - du_3^2 = G_3(u_1, u_2, u_3), \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $G = (G_1, G_2, G_3)$, $G_i : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$. De aquí, (2.1) se escribe de la forma

$$u' = G(u), \tag{2.4}$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$. Para demostrar que el sistema (2.1) posee solución, se utiliza como referencia el teorema de Picard-Lindelöf [11], como también el Lema 4.1 y el Teorema 4.2 de [15], y así obtener que $G(u)$ es localmente Lipschitz continua en su dominio definido.

Teorema 2.1. G es localmente Lipschitz continua en \mathbb{R}_+^3 .

Demostración: Se deriva parcialmente con respecto a cada variable la ecuación (2.3), se obtiene:

- $\frac{dG_1}{du_1} = 2ru_1 + \frac{a_1(1-m_1)^4 u_1^2 u_3}{(\theta^2+(1-m_1)^2 u_1^2)^2} - \mu - \alpha u_2 - \frac{3ru_1^2}{K} - \frac{2ru_1 u_2}{K} - \frac{a_1 \theta^2 (1-m_1)^2 u_3}{(\theta^2+(1-m_1)^2 u_1^2)^2}$,
- $\frac{dG_1}{du_2} = g - \alpha u_1 - \frac{ru_1^2}{K}$, $\frac{dG_1}{du_3} = -\frac{a_1(1-m_1)^2 u_1}{\theta^2+(1-m_1)^2 u_1^2}$, $\frac{dG_2}{du_1} = \alpha u_2$,
- $\frac{dG_2}{du_2} = \alpha u_1 + \frac{a_2(1-m_2)^4 u_2^2 u_3}{(\theta^2+(1-m_2)^2 u_2^2)^2} - \frac{a_2 \theta^2 (1-m_2)^2 u_3}{(\theta^2+(1-m_2)^2 u_2^2)^2} - (g + \mu + \rho)$, $\frac{dG_2}{du_3} = -\frac{a_2(1-m_2)^2 u_2}{\theta^2+(1-m_2)^2 u_2^2}$,
- $\frac{dG_3}{du_1} = \frac{a_1 h_1 u_3 (1-m_1)^2 (\theta^2 - (1-m_1)^2 u_1^2)}{(\theta^2+(1-m_1)^2 u_1^2)^2}$, $\frac{dG_3}{du_2} = \frac{a_2 h_2 u_3 (1-m_2)^2 (\theta^2 - (1-m_2)^2 u_2^2)}{(\theta^2+(1-m_2)^2 u_2^2)^2}$,
- $\frac{dG_3}{du_3} = -c - 2du_3 + \frac{a_1 h_1 (1-m_1)^2 u_3}{\theta^2+(1-m_1)^2 u_1^2} + \frac{a_2 h_2 (1-m_2)^2 u_3}{\theta^2+(1-m_2)^2 u_2^2}$,

donde es fácil ver que las funciones $\frac{dG_1}{du_1}, \frac{dG_1}{du_2}, \frac{dG_1}{du_3}, \frac{dG_2}{du_1}, \frac{dG_2}{du_2}, \frac{dG_2}{du_3}, \frac{dG_3}{du_1}, \frac{dG_3}{du_2}, \frac{dG_3}{du_3}$ son continuas en el dominio considerado. A partir del Teorema 2.1, el modelo (2.1) satisface una hipótesis del Teorema 2.2, y así garantizar la existencia y positividad de soluciones del sistema [15]. \square

Teorema 2.2. El sistema (2.1) con condición inicial $u_o \in \mathbb{R}_+^3$, tiene una única solución con valores en \mathbb{R}_+^3 .

Demostración: Por el Teorema 2.1, la función G es localmente Lipschitz en \mathbb{R}_+^3 , además como se cumple:

$$G_1(0, u_2, u_3) = gu_2 \geq 0 \quad , \quad G_2(u_1, 0, u_3) = 0 \quad , \quad G_3(u_1, u_2, 0) = 0.$$

Y por el Teorema 4.2 [15], el sistema (2.1) con condición inicial $u_o \in \mathbb{R}_+^3$ posee una única solución para $t \in [0, b)$ con $b = \infty$ ó $b < \infty$. \square

Teorema 2.3 (Solución Uniformemente Acotada). Las soluciones del sistema (2.1) están acotadas en el largo plazo.

Demostración: Sea $W(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$. De (2.1), se obtiene

$$W'(t) < ru_1^2 \left(1 - \frac{u_1 + u_2}{K} \right) - \psi W(t), \tag{2.5}$$

donde $\psi = \min\{\mu, c\}$. Con lo cual, se obtiene la ecuación: $W'(t) < \frac{4rK^2}{27} - \psi W(t)$. Y de aquí, se resuelve la ecuación diferencial

$$W(t) < \left[W(0) - \frac{4rK^2}{27\psi} \right] e^{-\psi t} + \frac{4rK^2}{27\psi}. \tag{2.6}$$

De esta forma, la población total está acotada en el largo plazo, ($t \rightarrow +\infty$), por la expresión $\frac{4rK^2}{27\psi}$ [10]. Por consiguiente, se ha obtenido la región factible asociado al sistema (2.1) donde las poblaciones están uniformemente acotadas, y son positivas las soluciones [7, 12].

$$\Omega^* = \left\{ u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid 0 \leq u_1 + u_2 + u_3 \leq \frac{4rK^2}{27\psi} \right\}. \tag{2.7}$$

En vista de los Teoremas 2.2 y 2.3, se garantiza que las soluciones son positivas y definidas para todo $t \geq 0$. \square

2.2. Análisis Cualitativo del Modelo. Después de haber obtenido la existencia y unicidad, y además de positividad de las soluciones del sistema (2.1). Continuaremos con el análisis cualitativo del sistema, donde abordaremos el análisis del comportamiento de las soluciones a largo plazo (estado estacionario) [12]. Antes de determinar los puntos de equilibrio (puntos críticos) en la subsección 2.2.1, se define algunos números especiales con interpretación eco-epidemiológica [7].

Tabla 2.3: Números Especiales

Número	Descripción
$R_0 = \frac{\alpha}{\mu + \rho}$	Número Básico de Reproducción de la Presa
$R_1 = \frac{rK}{\mu}$	Número de Supervivencia de la Presa Susceptible
$R_2 = a_1 h_1 (1 - m_1)^2$	Número de Beneficio por la depredación de la Presa Susceptible
$R_3 = a_2 h_2 (1 - m_2)^2$	Número de Beneficio por la depredación de la Presa Infectada

2.2.1. Puntos de Equilibrio. Al igualar cada ecuación del sistema (2.1) se obtiene los puntos de equilibrio para luego analizar su estabilidad, es decir, si el sistema (2.1) converge al punto de equilibrio en el estado estacionario del sistema [7].

$$e_1 = (0, 0, 0), \quad e_2 = (A_0, 0, 0), \quad e_3 = (A_1, 0, C_1), \quad e_4 = (A_2; B_2; C_2). \quad (2.8)$$

Punto libre de infección y libre de depredador. Este punto de equilibrio (e_2), es uno interesante por el estado que representa, libre de infección (no hay presas infectadas), pero está libre de su depredador con lo cual le permite crecer su población hasta su capacidad de carga (población máxima). Ahora se analizará el sistema (2.1) donde se obtiene este estado estacionario.

$$u_1 \left[ru_1 - \frac{r_1^2}{K} - \mu \right] = 0. \quad (2.9)$$

La solución de la ecuación (2.9), donde se tiene definido $\rho = \frac{rK}{\mu}$. Ahora, se enuncia de la siguiente manera:

$$u_1^1 = 0, \quad u_1^{2,3} = \frac{K}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\rho}} \right). \quad (2.10)$$

Es fácil ver que las soluciones $u_1^{2,3}$ son reales si y sólo si, $\rho \geq 4$. De esta manera se tiene una familia de soluciones que dependen del valor de ρ positivo. Esto induciría una bifurcación del punto de equilibrio de la presa susceptible u_1^* en función del parámetro $\rho = \frac{rK}{\mu}$, representando un sistema libre de infección y de depredadores. Matemáticamente, el modelo sigue una ecuación de la forma: $\tilde{F}_1(u_1) = ru_1^2 \left(1 - \frac{u_1}{K} \right)$, donde el crecimiento de la presa está regulado únicamente por la capacidad de carga K [7]. Para valores menores que cuatro ($\rho < 4$), la población de presas se estabiliza en $K/2$, lo que sugiere una coexistencia en equilibrio con los recursos disponibles. Sin embargo, cuando $\rho \geq 4$ alcanza un umbral crítico, se observa una bifurcación transcítica en la que el equilibrio en $K/2$ se divide en dos ramas: una estable cerca de K , donde la población prospera, y otra inestable que tiende a valores cercanos a cero, indicando un posible colapso poblacional [8]. Ecológicamente, este comportamiento refleja cómo la tasa de crecimiento de la presa, la capacidad de carga del ambiente y la mortalidad natural interactúan para determinar el destino de la población. Un valor alto de ρ sugiere un ecosistema con abundantes recursos y baja mortalidad, lo que permite la recuperación de la población hacia niveles cercanos a K , mientras que un ρ bajo puede deberse a condiciones ambientales adversas o a una alta mortalidad, lo que eventualmente lleva a la extinción de la especie [6].

Punto libre de infección y coexistencia con el depredador. El punto libre de infección y la coexistencia con el depredador (e_3) son conceptos clave en el análisis de equilibrio en modelos ecológicos y epidemiológicos. El punto libre de infección ($u_2 = 0$) se refiere a un estado en el que la población de hospedadores está completamente libre de patógenos, lo que puede ocurrir si la tasa de transmisión es baja o si existen mecanismos efectivos de control de la enfermedad [6]. Por otro lado, la coexistencia con el depredador describe un equilibrio en el que tanto la población presa como la depredadora pueden mantenerse de manera estable en el tiempo, sin que una de ellas se extinga. En términos de equilibrio, estos puntos representan estados estacionarios en los que las poblaciones no cambian en el tiempo, dependiendo de factores como tasas de crecimiento, transmisión de enfermedades y presión de depredación. Ahora se analizará el sistema (2.1) donde se obtiene este estado estacionario [7].

Al igualar a cero el sistema (2.1) y considerar $u_2 = 0$, se obtiene el punto $(A_1, 0, C_1)$. De aquí, se obtiene la siguiente ecuación en cuanto a la coordenada u_1 que está relacionada con u_3 :

$$C_1 = \frac{1}{d} \left[\frac{R_2 A_1^2}{\theta^2 + (1 - m_1)^2 A_1^2} - c \right]. \tag{2.11}$$

La ecuación (2.11) representa el cálculo en la tercera ecuación del sistema (2.1). Con esta ecuación, se puede introducir a la primera ecuación del modelo para obtener el siguiente polinomio asociado a $A_1 > 0$

$$p(A_1) = - \frac{r(1 - m_1)^2}{K} A_1^4 + (1 - m_1)^2 [rd - a_1 R_2] A_1^3 + d \left[\frac{r\theta^2}{K} - \mu(1 - m_1)^2 \right] A_1^2 + [rd\theta^2 - a_1 c(1 - m_1)^2] A_1 - \mu d \theta = 0. \tag{2.12}$$

Mediante el Teorema de Descartes para raíces, se puede determinar la existencia de raíces positivas ($A_1 > 0$) [16]. Los coeficientes asociados al polinomio (2.12) deben cumplir

$$\begin{aligned} rd - a_1 R_2 > 0 &\iff \frac{rd}{a_1} > R_2, \\ \frac{r\theta^2}{K} - \mu \frac{R_2}{a_1 h_1} < 0 &\iff \frac{r\theta^2}{K} < \frac{\mu R_2}{a_1 h_1}, \\ rd\theta^2 - c \frac{R_2}{h_1} > 0 &\iff rd\theta^2 > \frac{c R_2}{h_1}, \end{aligned}$$

desigualdades que se tienen cumplir simultáneamente

$$\frac{a_1 h_1 r \theta^2}{\mu K} < R_2 < \min \left\{ \frac{r h_1 d \theta^2}{c}, \frac{rd}{a_1} \right\}, \tag{2.13}$$

luego, para que la coordenada C_1 sea positiva (2.11), se debe tener:

$$(a_1 h_1 - c) \frac{R_2 A_1^2}{a_1 h_1} > c \theta^2,$$

de aquí, para imponer la positividad de C_1 , se tiene:

$$a_1 h_1 > c \quad , \quad R_2 > \frac{a_1 h_1 c \theta^2}{(a_1 h_1 - c) A_1^2}. \tag{2.14}$$

De las ecuaciones (2.13) y (2.14) se obtiene

$$\max \left\{ \frac{a_1 h_1 r \theta^2}{\mu K}, \frac{a_1 h_1 c \theta^2}{(a_1 h_1 - c) A_1^2} \right\} < R_2 < \min \left\{ \frac{r h_1 d \theta^2}{c}, \frac{rd}{a_1} \right\}, \tag{2.15}$$

por consiguiente, se puede garantizar la existencia del punto libre de infección y coexistencia con el depredador, donde $A_1 > 0$ y $C_1 > 0$ como parte de la no negatividad de las poblaciones [6].

Teorema 2.4 (Existencia de los Puntos de Equilibrio). Para el sistema propuesto en (2.1), y sus puntos de equilibrios en (2.8):

- El punto de equilibrio Extinción Total ($e_1 = (0, 0, 0)$) siempre existe.
- Si $\frac{rK}{\mu} \geq 4$, el punto de equilibrio Libre de infección y depredador ($e_2 = (A_0, 0, 0)$) existe.
- Si $\max \left\{ \frac{a_1 h_1 r \theta^2}{\mu K}, \frac{a_1 h_1 c \theta^2}{(a_1 h_1 - c) A_1^2} \right\} < R_2 < \min \left\{ \frac{r h_1 d \theta^2}{c}, \frac{rd}{a_1} \right\}$, $\frac{a_1 h_1}{c} > 1$, el punto de equilibrio Libre de infección y coexistencia ($e_3 = (A_1, 0, C_1)$) existe.

2.2.2. Estabilidad Local del Modelo. Después de haber obtenido los puntos de equilibrio (2.8) asociados al sistema (2.1). Y como el sistema es del tipo no lineal, obtendremos su matriz Jacobiana $J(u_1, u_2, u_3)$ donde la matriz jacobiana proporciona información sobre cómo cambian las soluciones del sistema cerca de un punto de equilibrio [17]. Se define los términos de la matriz jacobiana asociada

$$\begin{aligned} \bullet J_{11} &= 2ru_1 + \frac{R_2^2 u_1^2 u_3}{a_1 h_1^2 (\theta^2 + (1-m_1)^2 u_1^2)^2} - \mu - \alpha u_2 - \frac{3ru_1^2}{K} - \frac{2ru_1 u_2}{K} - \frac{\theta^2 R_2 u_3}{h_1 (\theta^2 + (1-m_1)^2 u_1^2)^2}, \\ \bullet J_{12} &= g - \alpha u_1 - \frac{ru_1^2}{K}, \quad J_{13} = -\frac{R_2 u_1}{h_1 (\theta^2 + (1-m_1)^2 u_1^2)}, \quad J_{21} = \alpha u_2, \\ \bullet J_{22} &= \alpha u_1 + \frac{R_3^2 u_2^2 u_3}{a_2 h_2^2 (\theta^2 + (1-m_2)^2 u_2^2)^2} - \frac{a_2 R_2 \theta^2 u_3}{a_1 h_1 (\theta^2 + (1-m_2)^2 u_2^2)^2} - (g + \mu + \rho), \\ \bullet J_{23} &= -\frac{R_2 u_2}{h_2 (\theta^2 + (1-m_2)^2 u_2^2)}, \quad J_{31} = \frac{R_2 u_3 (\theta^2 - (1-m_1)^2 u_1^2)}{(\theta^2 + (1-m_1)^2 u_1^2)^2}, \\ \bullet J_{32} &= \frac{R_3 u_3 (\theta^2 - (1-m_2)^2 u_2^2)}{(\theta^2 + (1-m_2)^2 u_2^2)^2}, \quad J_{33} = -c - 2du_3 + \frac{R_2 u_3}{\theta^2 + (1-m_1)^2 u_1^2} + \frac{R_3 u_3}{\theta^2 + (1-m_2)^2 u_2^2}. \end{aligned}$$

Luego, se tiene la matriz jacobiana asociada al sistema (2.1), que determina las especies ecológicas

$$J(u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} J_{11}(u) & J_{12}(u) & J_{13}(u) \\ J_{21}(u) & J_{22}(u) & J_{23}(u) \\ J_{31}(u) & J_{32}(u) & J_{33}(u) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ahora, se analizará la estabilidad local del sistema (2.1) para cada punto de equilibrio expresada en (2.8) [10]. Por lo cual, para analizar la estabilidad asociada a los puntos de equilibrio, en ese sentido se utilizará el método de los signos de los autovalores [12, 17].

Punto de Extinción Total de las Especies

El primer punto eco-epidemiológico a analizar es el $e_1 = (0; 0; 0)$, que representa la extinción total de las especies (presa susceptible e infectada como la depredadora). Primero se evalúa el punto de equilibrio en la matriz jacobiana (2.7) para determinar la estabilidad asociada,

$$J(e_1) = \begin{bmatrix} -\mu & g & 0 \\ 0 & -(\mu + g + \rho) & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Teorema 2.5. *El punto de extinción total $e_1 = (0; 0; 0)$ es localmente estable.*

Demostración: De la matriz jacobiana expresada en (2.17), es una matriz diagonal, es fácil obtener los autovalores asociados. Por lo cual, se determina lo siguiente:

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = -(\mu + g + \rho), \quad \lambda_3 = -c. \quad (2.18)$$

Luego, de la ecuación (2.18) se observa que los autovalores son negativos. De esta manera, el estado de extinción total se puede obtener bajo algunos valores de los parámetros o también de alguna condición inicial. Este escenario desfavorable para el ecosistema es el que se debe evitar para garantizar el equilibrio del ecosistema [7]. Una observación importante a considerar de este punto de extinción es que es estable localmente, es decir, depende del punto inicial considerado. Lo cual, no necesariamente para cualquier punto inicial ocurra este escenario desfavorable para el ecosistema [12]. \square

Punto de equilibrio Libre de infección y depredador

El segundo punto eco-epidemiológico a analizar es el $e_2 = (A_0; 0; 0)$, que representa la extinción de la presa infectada como también el depredador. Primero se evalúa el punto de equilibrio en la matriz jacobiana (2.7) para determinar la estabilidad asociada,

$$J(e_2) = \begin{bmatrix} 2rA_0 - \mu - \frac{3rA_0^2}{K} & -\alpha A_0 + g - \frac{rA_0^2}{K} & -\frac{R_2 A_0}{h_1 (\theta^2 + (1-m_1)^2 A_0^2)} \\ 0 & \alpha A_0 - g - \rho - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2 A_0 - c(\theta^2 + (1-m_1)^2 A_0^2)}{\theta^2 + (1-m_1)^2 A_0^2} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Teorema 2.6. *Si $\frac{2rA_0 K}{3rA_0^2 + \mu K} < 1$, $R_0 A_0 < 1$, $\frac{R_2 A_0}{c(\theta^2 + (1-m_1)^2 A_0^2)} < 1$, entonces el punto de equilibrio Libre de infección y depredador $e_2 = (A_0; 0; 0)$ es localmente estable.*

Demostración: De la matriz jacobiana expresada en (2.19), es una matriz diagonal, es fácil obtener los autovalores asociados. Por lo cual, se determina lo siguiente:

$$\lambda_1 = 2rA_0 - \mu - \frac{3r}{K}A_0^2, \quad \lambda_2 = \alpha A_0 - g - \rho - \mu, \quad \lambda_3 = \frac{R_2 A_0}{\theta^2 + (1 - m_1)^2 A_0^2} - c. \quad (2.20)$$

Luego, de la ecuación (2.20) se puede dar la forma para obtener el valor negativo a los autovalores, y así, obtener la estabilidad local del punto de equilibrio asociado.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2rA_0 - \mu - \frac{3r}{K}A_0^2 < 0 &\iff 2rA_0 < \mu + \frac{3r}{K}A_0^2, \\ \lambda_2 = \alpha A_0 - g - \rho - \mu < 0 &\iff \alpha A_0 < g + \rho + \mu, \\ \lambda_3 = \frac{R_2 A_0}{\theta^2 + (1 - m_1)^2 A_0^2} - c < 0 &\iff \frac{R_2 A_0}{\theta^2 + (1 - m_1)^2 A_0^2} < c. \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis del teorema, se consigue el signo negativo de los autovalores. De esta forma, se obtiene la estabilidad local en el punto de equilibrio (e_2). \square

El punto libre de infección y depredadores en un ecosistema es crucial porque representa un estado básico donde las presas u hospederos pueden existir sin presiones externas de depredación o enfermedades [6]. Este estado sirve como referencia para evaluar la estabilidad del sistema, los umbrales para la invasión de depredadores o patógenos, y la resiliencia del ecosistema frente a perturbaciones. Además, es esencial para el manejo de especies, ya que permite evitar extinciones, controlar invasiones y entender las dinámicas fundamentales que sostienen la coexistencia y el equilibrio ecológico [3].

Punto de equilibrio Libre de infección y coexistencia con el depredador

El tercer punto eco-epidemiológico a analizar es el $e_3 = (A_1; 0; C_1)$, que representa la extinción de la presa infectada pero la coexistencia con el depredador. Primero se evalúa el punto de equilibrio en la matriz jacobiana (2.7) para determinar la estabilidad asociada. Pero antes, se define

$$\begin{aligned} \bullet J_{11}^{e_3} &= \frac{R_2^2 A_1^2 C_1}{a_1 h_1^2 M_1^2} + 2rA_1 - \frac{R_2 \theta^2 C_1}{h_1 M_1^2} - \mu - \frac{3rA_1^2}{K}, \\ \bullet J_{12}^{e_3} &= -\alpha A_1 + g - \frac{rA_1^2}{K}, \quad J_{13}^{e_3} = -\frac{R_2 A_1}{h_1 M_1}, \quad J_{21}^{e_3} = 0, \\ \bullet J_{22}^{e_3} &= \alpha A_1 - \frac{R_2 C_1}{h_2 \theta^2} - g - \rho - \mu, \quad J_{23}^{e_3} = 0, \quad J_{31}^{e_3} = -\frac{R_2 (A_1^2 (1 - m_1)^2 - \theta^2)}{M_1^2}, \\ \bullet J_{32}^{e_3} &= \frac{R_3 C_1}{\theta^2}, \quad J_{33}^{e_3} = \frac{R_2 A_1 - (c + 2dC_1)M_1}{M_1}, \end{aligned}$$

donde $M_1 = \theta^2 + (1 - m_1)^2 A_1^2$ y $M_2 = \theta^2 + (1 - m_2)^2 C_1^2$. Luego, se tiene la matriz jacobiana

$$J(e_3) = \begin{bmatrix} J_{11}^{e_3} & J_{12}^{e_3} & J_{13}^{e_3} \\ 0 & J_{22}^{e_3} & 0 \\ J_{31}^{e_3} & J_{32}^{e_3} & J_{33}^{e_3} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Teorema 2.7. Si $\max\left\{\frac{2K}{3}, \sqrt[4]{a_1}\right\} < A_1 < \min\left\{R_0, \frac{\theta^2 C_1}{h_1 M_1}, \frac{\theta}{1 - m_1}, \frac{M_1}{R_2} (c + 2dC_1)\right\}$, entonces el punto de equilibrio Libre de infección y coexistencia con el depredador $e_3 = (A_1; 0; C_1)$ es localmente estable.

Demostración: De la matriz jacobiana expresada en (2.21), y considerando el cuadro 2.3, se puede tener el segundo autovalor de manera directa

$$\lambda_2 = J_{22}^{e_3} = \alpha A_1 - \frac{R_2 C_1}{h_2 \theta^2} - g - \rho - \mu < \alpha A_1 - g - \rho - \mu,$$

luego,

$$\lambda_2 < \alpha (A_1 - R_0) < 0. \quad (2.22)$$

Sean λ_1 y λ_3 los otros dos autovalores de la matriz menor de $J(e_3)$. Siendo T y D la traza y determinante de esta, se tiene

$$T = \lambda_1 + \lambda_3 = J_{11}^{e_3} + J_{33}^{e_3}, \quad D = \lambda_1 \lambda_3 = J_{11}^{e_3} J_{33}^{e_3} - J_{13}^{e_3} J_{31}^{e_3}.$$

De aquí, con la hipótesis del teorema, se puede garantizar

$$T = rM_1^2 A_1 \left(2 - \frac{3A_1}{K} \right) + \frac{R_2}{h_1} (h_1 M_1 A_1 - \theta^2 C_1) + (1 - m_1)^4 (a_1 - A_1^4) - (\mu M_1^2 + \theta^4 + 2\theta^2 (1 - m_1)^2 A_1^2) < 0, \quad (2.23)$$

de manera similar, con la hipótesis del teorema, se puede garantizar:

$$D = \left(\frac{R_2 C_1}{h_1 M_1^2} ((1 - m_1)^2 A_1^2 - \theta^2) + r A_1 \left(2 - \frac{3A_1}{K} \right) - \mu \right) \cdot \left(\frac{R_2 A_1 - (c + 2dC_1) M_1}{M_1} \right) - \frac{R_2^2 A_1 C_1}{a_1 h_1 M_1^3} ((1 - m_1)^2 A_1^2 - \theta^2) > 0. \quad (2.24)$$

En un modelo eco-epidemiológico, la estabilidad local de un punto libre de infección y coexistencia con el depredador (e_3) indica que, en ausencia de enfermedad, las poblaciones de presas y depredadores pueden coexistir en un equilibrio dinámico estable [3]. Para que este punto sea localmente estable, los autovalores de la matriz Jacobiana evaluada en ese equilibrio deben tener partes reales negativas, asegurando que pequeñas perturbaciones decaigan con el tiempo y el sistema retorne al equilibrio [7]. Esto implica que las tasas de nacimiento, muerte e interacciones depredador-presa están balanceadas, permitiendo la persistencia de ambas especies sin fluctuaciones extremas ni extinciones, lo que es crucial para predecir el comportamiento a largo plazo del sistema y para la conservación de ecosistemas donde estas interacciones son fundamentales [9]. \square

2.2.3. Estabilidad global del modelo. Los modelos eco-epidemiológicos integran la dinámica poblacional con la propagación de enfermedades, siendo esenciales para entender las interacciones entre especies y el impacto de infecciones en ecosistemas. Un aspecto clave en su análisis es la estabilidad global de los equilibrios, ya que indica si el sistema evoluciona hacia un estado deseado, como la erradicación de la enfermedad o la coexistencia estable, independientemente de las condiciones iniciales [7]. Para ello, se utilizan herramientas como la teoría de sistemas dinámicos, técnicas geométricas y, especialmente, funcionales de Lyapunov, que permiten demostrar convergencia global hacia equilibrios estables. Estas funcionales decrecen a lo largo de las trayectorias del sistema, descartando oscilaciones o caos, y ofreciendo criterios matemáticos sólidos para el diseño de estrategias de control epidemiológico y conservación de especies [17].

Después de haber obtenido los puntos de equilibrio (2.8), se analizó la estabilidad local asociada al modelo matemático (2.1). Se utilizará el Teorema de Krasovskii generalizado. En primer lugar, este teorema establece que un punto crítico es asintóticamente estable a nivel local. En segundo lugar, produce una función de Lyapunov adecuada para el análisis de estabilidad global [11]. Este tipo de análisis no solo fortalece los resultados de estabilidad, sino que también ofrece condiciones adicionales para el valor inicial, permitiendo simulaciones más precisas en comparación con las que se basan únicamente en las condiciones del análisis de estabilidad local. Para lo cual, se utilizará el criterio de Sylvester, para una utilizar de una manera más sencilla el Teorema de Krasovskii. Ahora, se corrobora que el comportamiento del campo vectorial (2.2) en la región factible Ω^* , expresado en (2.7), es globalmente estable asintóticamente. Para aplicar el Teorema generalizado de Krasovskii [17], antes se definirá: $M_1 = \theta^2 + (1 - m_1)^2 u_1^2 > 0$, y $M_2 = \theta^2 + (1 - m_2)^2 u_1^2 > 0$, además $u = (u_1, u_2, u_3)$. Por lo cual, se define la matriz simétrica P :

$$P(u) = \begin{bmatrix} M_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1^2 M_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Es fácil ver que la matriz P es definida positiva. Luego, la matriz $F = J^T P + P J$, siendo J la matriz jacobiana (2.16). Donde la matriz $F(u)$ es una matriz Hermitiana que permite ser analizada por el criterio de Sylvester de tal forma que sea semi-definida negativa. Analizando los menores principales de la matriz $F(u)$, se determina si es definida negativa [17]. Se considera la matriz G que es la matriz asociada al sistema (2.3) Luego, se obtiene la funcional de la siguiente manera: $V(u) = G^T P G$

$$V(u) = V_1(u) + V_2(u) + \frac{V_3(u)}{K^2}, \quad (2.26)$$

donde:

$$V_1(u) = u_2^2 \left[\frac{R_3}{h_2} u_3 + \alpha M_2 (R_0 - u_1) \right]^2,$$

$$V_2(u) = u_3^2 [R_2 M_2 u_1 + R_3 M_1 u_2 - (c + d u_3) M_1^2 M_2^2]^2,$$

$$V_3(u) = \left[\frac{R_2}{h_1} K u_1 u_3 + K M_1 (\alpha u_1 u_2 + \mu u_1 - g u_2) - r M_1 (K - u_1 - u_2) u_1^2 \right]^2.$$

La función $V(u)$ (2.26), satisface las siguientes condiciones: $V(0, 0, 0) = 0$ y $V(u) > 0$. Es evidente ver que se cumple $V(u) \rightarrow \infty$ cuando $\|u\| \rightarrow \infty$.

Teorema 2.8. *Sea el punto de equilibrio $e_2 = (A_0, 0, 0)$ y la funcional (2.26). Si $R_1 < \frac{K}{2A_0}$, entonces el punto libre de infección y libre de depredador (e_2) asociado al sistema (2.1) es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración: La funcional $V(u)$ (2.26) es definida positiva. De la hipótesis, se tiene: $\mathcal{N} = \mu(K - R_1 A_0) + r A_0^2$ positivo. Ahora,

$$\dot{V}(e_2) = -\frac{2A_0^2 \mathcal{N}^2 M_1^2}{K^3} [2(1 - m_1)^2 A_0^2 \mathcal{N} + M_1(\mu K + 3r A_0^2 - 2r K A_0)]. \quad (2.27)$$

Usando la hipótesis, se tiene

$$R_1 < \frac{K}{2A_0} \implies \mu K - 2r K A_0 > 0,$$

lo que garantiza la negatividad de $\dot{V}(e_2)$. Por consiguiente, se tiene una funcional de Lyapunov que demuestra que el punto de equilibrio (e_2) es globalmente asintóticamente estable [17]. \square

Sea, $N_1 = R_2 A_1 - (c + d C_1) M_1$ y $N_2 = \frac{R_2}{h_1} K C_1 + \mu K M_1 - r A_1 (K - A_1) M_1$.

Teorema 2.9. *Sea el punto de equilibrio $e_3 = (A_1, 0, C_1)$ y la funcional de Lyapunov (2.26). Si $h_1 \max \left\{ \frac{r A_1 M_1 (K - A_1)}{K C_1}, \frac{1}{A_1} \sqrt{\frac{a_1 M_1 N_2}{2 K C_1}} \right\} < R_2 < \frac{d M_1 C_1}{A_1}$, entonces el punto libre de infección y coexistencia con el depredador (e_3) asociado al sistema (2.1) es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración: Se debe mostrar $\dot{V}(e_3)$ es negativo para garantizar que es estable según Lyapunov.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_3) = & 2\theta^4 K C_1^2 M_1 N_1^2 (N_1 - d M_1 C_1) + \frac{R_2 A_1}{h_1} (\mu K M_1 + (1 + C_1) N_2) \\ & \cdot \frac{\theta R_2^2 A_1^3}{a_1 h_1} \left(\frac{2\theta^3}{a_1 h_1} A_1^2 N_1 - M_1 \right) N_1 N_2^2 \\ & \cdot \left(M_1 N_2 - \frac{2R_2^2}{a_1 h_1^2} K A_1^2 C_1 \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

lo que garantiza la negatividad de $\dot{V}(e_3)$. Por consiguiente, se tiene una funcional de Lyapunov que demuestra que el punto de equilibrio (e_3) es globalmente asintóticamente estable [17]. \square

3. Simulaciones Computacionales. El análisis numérico en modelos eco-epidemiológicos permite resolver sistemas de EDO y EDP, optimizar parámetros y realizar análisis de sensibilidad. Métodos como Runge-Kutta, discretización espacio-temporal y técnicas de optimización no lineal son fundamentales para simular escenarios con condiciones iniciales variables, heterogeneidades y procesos estocásticos. Estas simulaciones permiten estudiar dinámicas bajo eventos extremos, como epidemias o introducción de especies invasoras, siendo clave en la gestión de recursos, control de enfermedades zoonóticas y estrategias de conservación [12]. Este estudio aborda modelos eco-epidemiológicos desde una perspectiva matemática, con énfasis en el uso de simulaciones computacionales y análisis numérico para explorar su comportamiento dinámico. Se analizan aspectos clave como la estabilidad de equilibrios, bifurcaciones y sensibilidad a parámetros críticos, integrando además técnicas avanzadas como programación paralela y algoritmos adaptativos para optimizar el rendimiento computacional en sistemas complejos [18]. El objetivo principal de este estudio es proporcionar una caracterización precisa de la dinámica ecológica y epidemiológica del sistema, así como desarrollar herramientas matemáticas y computacionales que puedan ser aplicadas a la gestión de problemas ambientales y de salud pública a escala global [7]. Para ello, se emplearán diversos valores paramétricos en las simulaciones computacionales, algunos de los cuales se han obtenido a partir de la literatura especializada, mientras que otros serán asumidos con el propósito de analizar la sensibilidad y la respuesta del modelo ante perturbaciones [2].

Como punto de partida, se presenta un cuadro con los valores iniciales de las poblaciones involucradas. A continuación, se detallan los valores de los parámetros asociados al modelo considerado, los cuales servirán para llevar a cabo las simulaciones computacionales [12].

Tabla 3.1: Tabla de Poblaciones Iniciales (Var.)

Var.	Población	Unidad
u_1	Población inicial de presas Susceptibles	20
u_2	Población inicial de presas Infectadas	5
u_3	Población inicial de depredadores	10

Tabla 3.2: Tabla de Valores de los Parámetros

Par.	Valor	Par.	Valor	Par.	Valor	Par.	Valor	Par.	Valor
r	0.07	K	100	μ	0.008	α	0.10	a_1	0.45
m_1	0.60	θ	10	ρ	0.07	g	0.10	a_2	0.65
m_2	0.35	h_1	0.70	h_2	0.75	c	0.007	d	0.002

De acuerdo, a las tablas 3.1 y 3.2, se obtiene el siguiente sistema para analizar los puntos de equilibrios y su respectiva estabilidad local asociada. Y luego, realizar las simulaciones computacionales para corroborar los resultados.

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0,07u_1^2 \left[1 - \frac{u_1 + u_2}{100} \right] - 0,10u_1u_2 - \frac{0,072u_1^2u_3}{100 + 0,16u_1^2} - 0,008u_1 + 0,10u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = 0,10u_1u_2 - \frac{0,275u_2^2u_3}{100 + 0,4225u_2^2} - 0,178u_2, \\ \frac{du_3}{dt} = \frac{0,0504u_1^2u_3}{100 + 0,16u_1^2} + \frac{0,2063u_2^2u_3}{100 + 0,4225u_2^2} - 0,007u_3 - 0,002u_3^2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde se obtiene los respectivos puntos de equilibrio, y su estabilidad local asociado al sistema (3.1). Y, se expresa en el siguiente cuadro:

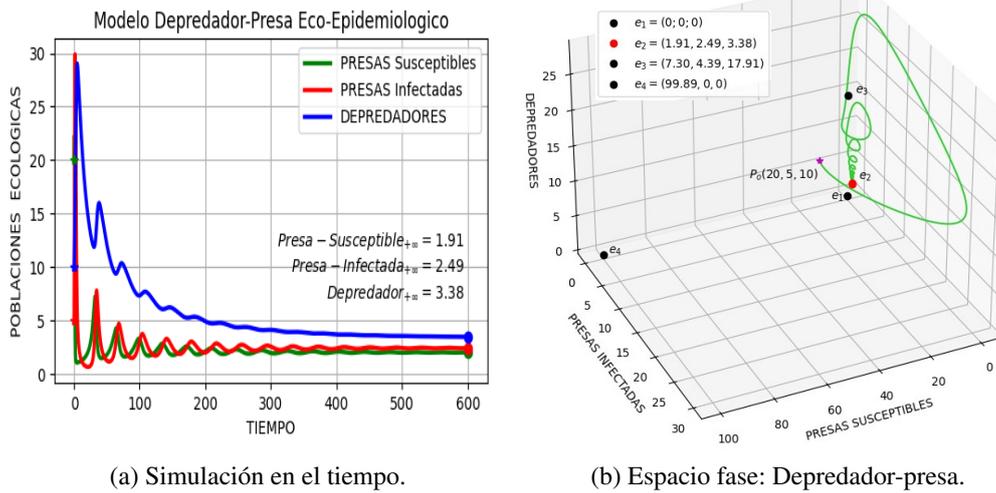
Tabla 3.3: Estabilidad local ($m_1 = 0,60$, $m_2 = 0,35$)

Punto de equilibrio	Resultado	Punto de equilibrio	Resultado
$e_1 = (0, 0, 0)$	Inestable	$e_2 = (1,91, 2,49, 3,38)$	Estable
$e_3 = (7,30, 4,39, 17,91)$	Inestable	$e_4 = (99,89, 0, 0)$	Inestable

La tabla 3.3 muestra los puntos de equilibrio de un sistema eco-epidemiológico o depredador-presa junto con su estabilidad. El punto $e_1 = (0, 0, 0)$ representa la extinción total de todas las poblaciones y es inestable, lo que indica que cualquier pequeña perturbación alejará el sistema de este estado. El único punto estable es $e_2 = (1,91, 2,49, 3,38)$, donde las presas susceptibles, infectadas y los depredadores coexisten, lo que sugiere que el sistema tiende naturalmente hacia este equilibrio en ausencia de perturbaciones externas. Por otro lado, $e_3 = (7,30, 4,39, 17,91)$ también representa la coexistencia de especies, pero es inestable, lo que significa que el sistema no permanecerá en ese estado a largo plazo. Finalmente, $e_4 = (99,89, 0, 0)$ describe un escenario donde solo la presa susceptible sobrevive sin depredadores ni individuos infectados, pero también es inestable, por lo que cualquier pequeña introducción de depredadores o infecciones lo desviará de ese equilibrio [12].

El análisis de estabilidad en modelos eco-epidemiológicos ofrece una base cuantitativa para la conservación y manejo sostenible de ecosistemas, alineándose con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), particularmente el ODS 14 (Vida Submarina) y el ODS 15 (Vida de Ecosistemas Terrestres). La estabilidad del equilibrio (e_2) refleja condiciones que favorecen la coexistencia de especies y la biodiversidad, mientras que la inestabilidad de otros equilibrios evidencia la vulnerabilidad ecológica frente a perturbaciones como el cambio climático o la sobreexplotación [7]. Este enfoque matemático permite fundamentar estrategias de conservación en análisis riguroso, destacando la necesidad de resiliencia ecosistémica para garantizar la sostenibilidad ambiental [19]. De forma complementaria, se presenta la simulación computacional de las especies ecológicas en el tiempo, como también su espacio fase asociado.

Las figuras 3.1a y 3.1b presentan la dinámica del sistema eco-epidemiológico con refugio para las presas. En el dominio temporal, se observa un comportamiento transitorio con oscilaciones amortiguadas que convergen hacia un equilibrio estable, reflejo de la acción reguladora de los coeficientes



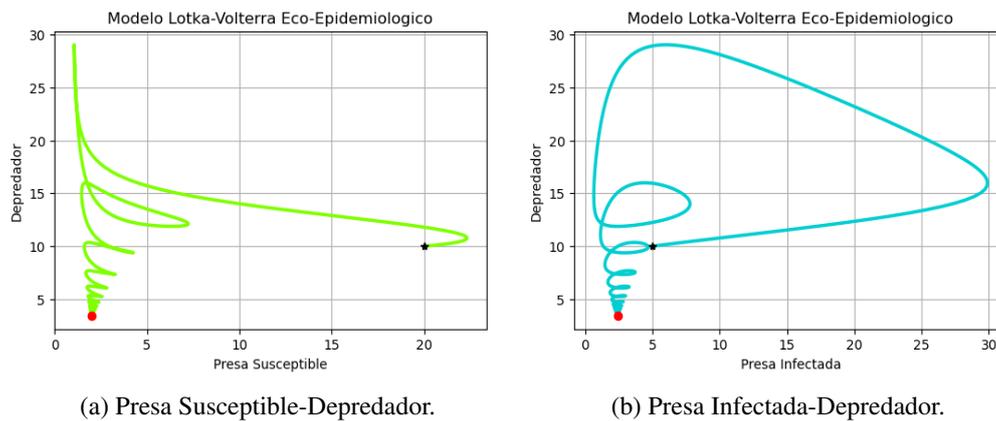
(a) Simulación en el tiempo.

(b) Espacio fase: Depredador-presa.

Figura 3.1: Simulación con coef. de refugio ($m_1 = 0,60, m_2 = 0,35$).

de refugio ($m_1 = 0,60, m_2 = 0,35$), que limitan tanto la depredación excesiva como la transmisión de la infección [12]. Las poblaciones se estabilizan en torno a valores moderados, indicando una interacción equilibrada entre las especies. En el espacio fase tridimensional, las trayectorias parten del estado inicial $P_0 = (20, 5, 10)$ y evolucionan hacia un punto de equilibrio (e_2), evitando la extinción total (e_1) o el crecimiento descontrolado de presas susceptibles (e_3). Esta configuración evidencia el efecto amortiguador de los refugios, que promueven la estabilidad poblacional y previenen oscilaciones críticas [7].

Desde una perspectiva ecológica, el modelo permite analizar cómo las enfermedades afectan la estructura poblacional y la productividad biológica, lo que tiene implicaciones directas en la gestión de recursos naturales. Los refugios cumplen un doble propósito: proteger a las presas susceptibles y limitar la propagación de la infección, favoreciendo una comunidad más resiliente y sostenible [1]. En conjunto, estos resultados respaldan la idea de que una estrategia de manejo adaptativo, que combine conservación y aprovechamiento, puede garantizar la sostenibilidad ecológica y económica del sistema a largo plazo [6]. Luego, se presenta el análisis del plano fase asociado de las presas con el depredador de manera diferenciada. En ese sentido, se puede corroborar la convergencia hacia el punto de equilibrio.



(a) Presa Susceptible-Depredador.

(b) Presa Infectada-Depredador.

Figura 3.2: Plano fase : Presa - Depredador.

La figura 3.2 muestra la dinámica del modelo Lotka-Volterra eco-epidemiológico, destacando el efecto de la salud de las presas en la población de depredadores. En 3.2a, se observa una espiral amortiguada hacia el equilibrio, evidenciando que los depredadores dependen directamente de la disponibilidad de presas susceptibles. El aumento inicial de depredadores, impulsado por la abundancia de presas, se revierte cuando estas disminuyen, generando una retroalimentación que estabiliza el sistema [12]. En 3.2b, las presas infectadas también influyen en los depredadores, al ser más vulnerables. Sin embargo, una alta prevalencia de infección reduce el total de presas viables, limitando el

recurso alimenticio. Este fenómeno induce oscilaciones transitorias que convergen a un equilibrio, condicionado por la tasa de conversión trófica y el impacto de la infección sobre la calidad del alimento [3]. En conjunto, el modelo refleja cómo la estructura sanitaria de la población presa modula la dinámica trófica y determina la estabilidad del ecosistema.

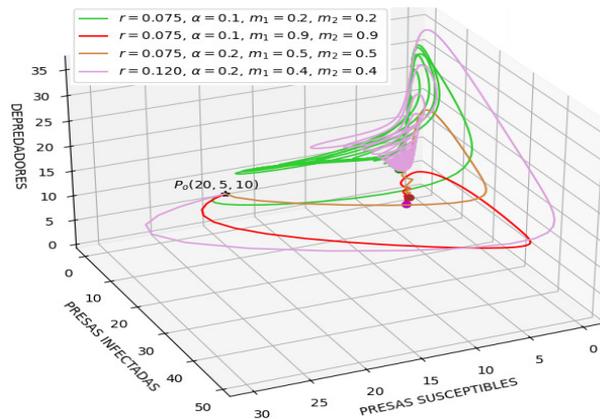


Figura 3.3: Diferentes escenarios del ecosistema eco-epidemiológico.

La figura 3.3 muestra las trayectorias de un sistema ecológico que integra interacciones entre presas, depredadores y una dinámica epidemiológica en las presas. En este modelo, el parámetro r , que representa la tasa de reproducción de las presas, tiene un papel crucial en la recuperación de la población de presas frente a las amenazas de depredación e infección. Cuando r es bajo, la población de presas puede extinguirse debido a la presión combinada de depredadores y enfermedades, mientras que un valor alto permite que las presas persistan incluso bajo condiciones adversas. Los coeficientes de refugio m_1 y m_2 representan estrategias adaptativas de las presas susceptibles e infectadas, respectivamente, como comportamiento de evasión o hábitats inaccesibles para los depredadores [12]. Valores altos de estos coeficientes reducen la vulnerabilidad de las presas, lo que permite que tanto las poblaciones susceptibles como las infectadas se mantengan a niveles significativos, aliviando la presión sobre los depredadores. Esto, a su vez, puede disminuir las fluctuaciones poblacionales de los depredadores.

Por otro lado, cuando los coeficientes de refugio son bajos, la presión combinada de depredación e infección puede generar oscilaciones amplias y ciclos poblacionales prolongados, lo que indica un ecosistema más inestable [19]. El parámetro α , que representa la tasa de contagio de la enfermedad entre las presas, tiene un impacto directo en la transición de presas susceptibles a infectadas. Un valor alto de α implica una propagación rápida de la enfermedad, lo que reduce la cantidad de presas disponibles para los depredadores, alterando la dinámica de la red trófica [7]. Esto puede generar una retroalimentación negativa: al disminuir la disponibilidad de presas, las poblaciones de depredadores también disminuyen, lo que, a su vez, facilita la recuperación de las presas susceptibles.

En el modelo depredador-presa eco-epidemiológico, se pueden considerar escenarios en los cuales la dinámica de infección no afecta significativamente la estabilidad a largo plazo de la población de presas. En estos casos, las presas infectadas presentan una tasa de recuperación elevada, lo que permite que la población de presas sanas se mantenga estable en el tiempo, evitando así la propagación descontrolada de la enfermedad [20]. Este comportamiento sugiere que los mecanismos biológicos de recuperación, inmunidad natural o resistencia adquirida dentro de la población hospedadora son lo suficientemente eficaces como para mitigar el impacto de la infección sin comprometer la viabilidad del ecosistema [12]. Además, cuando los parámetros asociados a la transmisión de la enfermedad y a la recuperación se encuentran dentro de ciertos rangos críticos, el sistema puede alcanzar un equilibrio ecológico en el que la infección se mantiene en niveles bajos o incluso desaparece por completo [7]. Este tipo de dinámica resalta la importancia de comprender las interacciones entre factores epidemiológicos y ecológicos, especialmente en contextos donde la salud de las especies no solo depende de la presión de los depredadores, sino también de la presencia de agentes patógenos. Por lo tanto, estos resultados pueden ser útiles para diseñar estrategias de conservación y manejo ecológico en sistemas naturales afectados por enfermedades infecciosas [6].

Desde una perspectiva matemática, la figura 3.4a muestra la evolución temporal de las poblaciones de presas susceptibles, presas infectadas y depredadores, con una convergencia hacia el equilibrio en $e_2 = (53, 57, 11, 18, 116, 97)$. Este resultado indica que la enfermedad no erradica la población de presas, que se mantiene en niveles bajos debido a una alta tasa de recuperación ($a = 0,05$) y una tasa de transmisión baja [5]. La estabilidad de las presas sugiere que la infección tiene un impacto limitado. En el espacio fase (figura 3.4b), la trayectoria espiral que converge hacia e_2 muestra

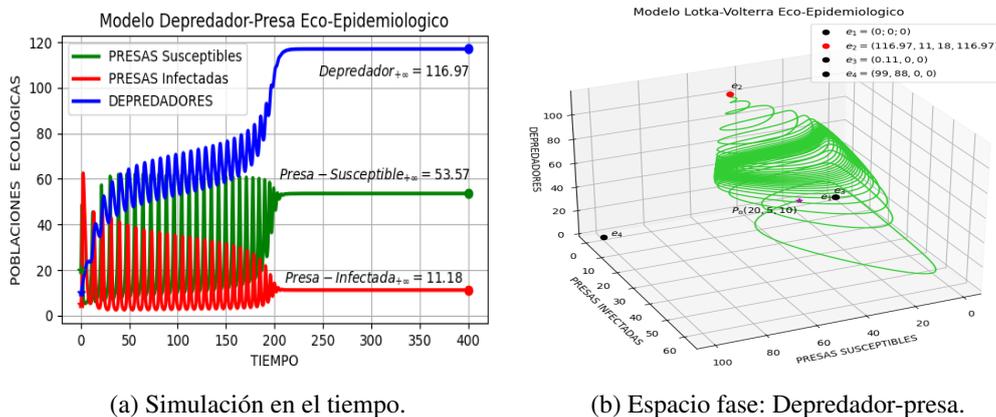


Figura 3.4: Recuperación rápida de las presas ($a = 0,05, g = 0,25$).

que el sistema alcanza un estado estacionario con coexistencia de las poblaciones [10]. Otros puntos de equilibrio, que representan estados con extinciones, no son alcanzados bajo las condiciones iniciales establecidas. Este modelo subraya la importancia de factores como los refugios, las tasas de reproducción de las presas y la tasa de contagio en la estabilidad de los ecosistemas. Tiene aplicaciones prácticas significativas en la gestión de ecosistemas naturales afectados por enfermedades, como los brotes en poblaciones de herbívoros que sirven de presa para carnívoros [1]. Entender estas dinámicas y trayectorias puede ser útil para la toma de decisiones orientadas a la protección de especies clave, la conservación de la biodiversidad y la prevención del colapso de poblaciones debido al estrés ecológico combinado [7].

3.1. Sensibilidad del coeficiente de refugio. El sistema (2.1) posee puntos de equilibrio que reflejan estados estacionarios del modelo. Los resultados numéricos de la tabla 3.2, obtenidos del sistema (3.1), muestran que la variación del coeficiente de refugio (m) (para presas susceptibles o infectadas) genera una familia de equilibrios [12]. Este parámetro ecológico influye directamente en la dinámica depredador-presa y puede favorecer la estabilidad del ecosistema al limitar la depredación o facilitar el acceso a presas alternativas [7]. Para calcular estos equilibrios se utiliza el algoritmo híbrido de Powell, adecuado para sistemas no lineales. El algoritmo híbrido de Powell combina la rapidez del método de Newton-Raphson —eficiente cerca de la solución pero sensible a la elección del punto inicial y a la condición de la jacobiana— con la estabilidad del método de Broyden, que evita el cálculo explícito de derivadas mediante aproximaciones de la jacobiana [18]. Este enfoque permite una convergencia más robusta: inicialmente se emplea Broyden cuando la solución está lejana, y luego se recurre a Newton-Raphson en la vecindad del equilibrio para mejorar la precisión [21].

$$\|e_{n+1}\| \approx \begin{cases} C_1 \|e_n\|^{1+\epsilon}, & \text{(Broyden, etapas iniciales),} \\ C_2 \|e_n\|^2, & \text{(Newton-Raphson, etapas finales).} \end{cases}$$

En modelos eco-epidemiológicos, los métodos computacionales para hallar puntos de equilibrio y analizar su estabilidad pueden presentar ligeras imprecisiones debido a errores numéricos, discretización y sensibilidad a condiciones iniciales [7]. Estas variaciones, aunque pequeñas, pueden afectar la interpretación dinámica del sistema. Un factor determinante es el coeficiente de refugio (m), cuya modificación influye en la accesibilidad de las presas, reduciendo la presión de depredación y alterando la estabilidad de los equilibrios [5]. Cambios en m pueden inducir transiciones de estabilidad o la desaparición de equilibrios, modificando la estructura ecológica. La combinación de análisis analítico y simulaciones computacionales permite evaluar estos efectos con mayor precisión, aportando información clave sobre la persistencia, coexistencia o colapso poblacional [12].

Los márgenes de error numéricos no solo afectan la ubicación de los puntos de equilibrio, sino también la interpretación de su estabilidad. En ciertos casos, estos errores pueden inducir diagnósticos incorrectos sobre la naturaleza del equilibrio, haciendo necesario validar los resultados mediante análisis teóricos y simulaciones complementarias [18]. Esta verificación es crucial en sistemas sensibles a variaciones paramétricas, donde pequeñas perturbaciones pueden alterar significativamente la dinámica, como ocurre en la propagación de enfermedades o en escenarios de coexistencia bajo restricciones ecológicas.

La figura 3.5 muestra que el coeficiente de refugio m_1 regula significativamente las densidades de equilibrio del sistema eco-epidemiológico. Un incremento en m_1 favorece el aumento de presas susceptibles, al reducir tanto la depredación como la transmisión de la infección [6]. Consecuentemente, la población de presas infectadas disminuye, interrumpiendo la propagación de la

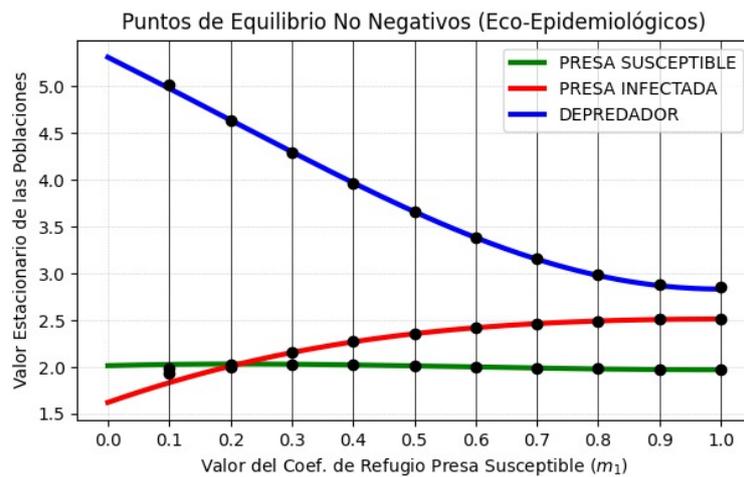


Figura 3.5: Sensibilidad del sistema (2.1) al coeficiente de refugio de la presa susceptible.

enfermedad. Esta reducción en la disponibilidad de presas afecta negativamente a los depredadores, cuya densidad también decrece. El sistema converge a equilibrios estables para cada valor de m_1 , reflejando una coexistencia con predominio de presas susceptibles y descenso en las otras dos poblaciones [12].

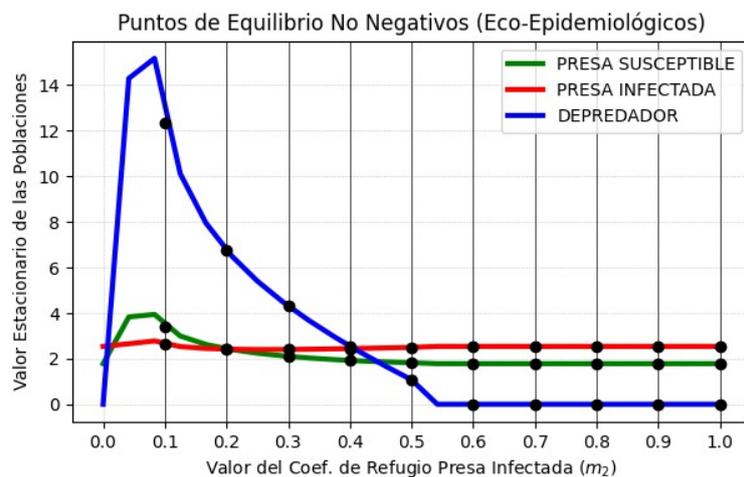


Figura 3.6: Sensibilidad del sistema (2.1) al coeficiente de refugio de la presa infectada.

La figura 3.6 muestra cómo el coeficiente de refugio para presas infectadas (m_2) influye en las poblaciones de presas susceptibles, presas infectadas y depredadores. Para valores bajos de m_2 , los depredadores alcanzan poblaciones altas debido a su mayor acceso a presa infectadas [20]. Sin embargo, al aumentar m_2 , el refugio para las presas infectadas reduce las interacciones con los depredadores, disminuyendo su población. Las presas susceptibles crecen moderadamente, mientras que las presas infectadas se estabilizan en valores intermedios. A valores altos de m_2 ($m_2 > 0,54$), la población de depredadores desaparece, dejando un equilibrio en el que solo coexisten presas susceptibles e infectadas, lo que marca una transición hacia un sistema "presa endémica y libre de depredadores" [1].

En sistemas ecológicos, los refugios son fundamentales para las interacciones entre presas y depredadores, ya que modulan las tasas de depredación y ofrecen protección. El análisis de los coeficientes de refugio m_1 y m_2 muestra su impacto en los puntos de equilibrio de un sistema que involucra presas susceptibles, presas infectadas y depredadores [9]. La figura 3.7 presenta cómo las variaciones en estos coeficientes afectan las densidades poblacionales de equilibrio en un gráfico tridimensional. Esta representación ayuda a identificar patrones clave y resalta cómo las modificaciones en la disponibilidad de refugio influyen en la estabilidad y coexistencia de las especies [7].

La figura 3.7 ilustra cómo los coeficientes de refugio (m_1 y m_2) afectan las dinámicas de un sistema depredador-presa modelado con presas susceptibles (u_1), presas infectadas (u_2) y depredadores (u_3). Se observan discontinuidades y regiones con soluciones inestables o no definidas, lo que

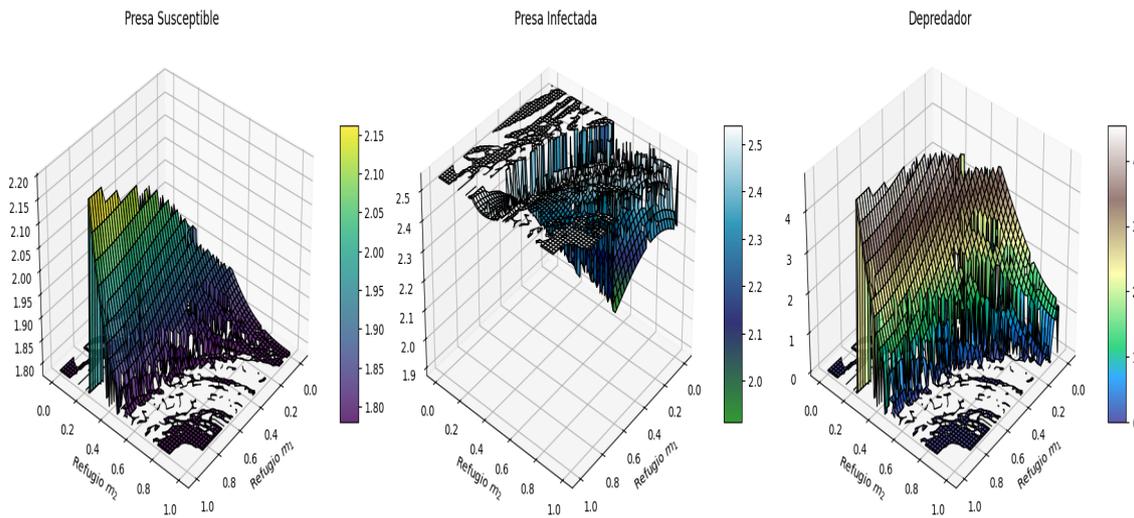


Figura 3.7: Sensibilidad del sistema (2.1) al coeficiente de refugio de la presa (susceptible e infectada).

refleja las bifurcaciones inducidas por los cambios en estos parámetros, indicando que el sistema es altamente sensible a las variaciones de m_1 y m_2 , lo que genera respuestas no lineales significativas [14]. En la superficie u_1 (presas susceptibles), se observa que al aumentar m_1 y m_2 , la población de presas susceptibles disminuye debido a la reducción de la interacción con los depredadores y las presas infectadas, lo que disminuye la presión selectiva. Sin embargo, esta disminución puede limitar el crecimiento de la población al reducir la competencia y los recursos disponibles [12]. Para u_2 (presas infectadas), la superficie muestra fluctuaciones abruptas, lo que refleja la complejidad de las interacciones entre la infección, el refugio y la depredación [7]. A niveles bajos de refugio, las presas infectadas pueden sostener poblaciones más altas debido a una mayor interacción con las presas susceptibles y menor presión de los depredadores. Sin embargo, con un aumento del refugio, la dinámica de la infección se interrumpe, lo que puede llevar a la disminución o incluso extinción de las presas infectadas. La superficie u_3 (depredadores) presenta una fragmentación considerable, con picos en las regiones donde m_1 y m_2 son bajos, ya que los depredadores tienen acceso suficiente a las presas. Sin embargo, cuando m_1 y m_2 aumentan, el acceso a las presas se ve restringido, lo que limita el crecimiento de los depredadores, llevándolos a niveles bajos o incluso a la extinción local [6].

En esta subsección, donde las simulaciones computacionales permiten explorar diferentes escenarios en un modelo eco-epidemiológico presa-depredador, se busca comprender a profundidad la compleja interacción entre la dinámica poblacional y la propagación de enfermedades en un ecosistema [7]. A través de métodos numéricos, es posible analizar la evolución temporal de las especies y evaluar cómo cambios en parámetros clave, como la tasa de transmisión de la enfermedad, la eficiencia de depredación o la mortalidad natural, pueden influir en la estabilidad del sistema [1]. En este contexto, el modelamiento eco-epidemiológico se presenta como una herramienta fundamental para integrar la ecología y la epidemiología dentro de un marco matemático coherente. Este enfoque no solo permite estudiar el comportamiento dinámico de las especies en presencia de una enfermedad, sino también anticipar posibles consecuencias ecológicas, como la extinción de una población, brotes epidémicos recurrentes, o la coexistencia sostenida entre presas, depredadores y patógenos [9]. Además, el uso de modelos matemáticos posibilita la realización de experimentos virtuales que serían difíciles o imposibles de llevar a cabo en la naturaleza, ya sea por limitaciones éticas, logísticas o económicas [2]. Por ello, el modelamiento eco-epidemiológico contribuye significativamente al diseño de estrategias de manejo y conservación de ecosistemas, especialmente en contextos donde la salud de las poblaciones animales se ve afectada por enfermedades infecciosas que pueden alterar los equilibrios ecológicos [20].

4. Conclusiones. Este estudio ha explorado un modelo eco-epidemiológico que incorpora la retroalimentación en la reproducción de las presas y la influencia de los coeficientes de refugio m_1 y m_2 , los cuales modulan la exposición de las presas tanto a la depredación como a la infección. Los resultados obtenidos muestran que:

- La retroalimentación en la reproducción contribuye a la autorregulación de la población de presas, favoreciendo la persistencia de las especies.

- Los coeficientes de refugio juegan un papel determinante en la estabilidad del sistema, pudiendo inducir bifurcaciones y cambios cualitativos en los equilibrios ecológicos.
- La coexistencia estable entre depredadores, presas susceptibles e infectadas es posible bajo ciertos rangos de estos parámetros, lo cual destaca la importancia de mecanismos de protección en entornos naturales.

Desde un punto de vista matemático, el análisis cualitativo del sistema mediante puntos de equilibrio y su estabilidad permitió identificar condiciones críticas bajo las cuales ocurren bifurcaciones. El estudio de la positividad de las soluciones y la existencia de regiones invariantes garantizó la validez ecológica del modelo, mientras que herramientas como el análisis del Jacobiano y la teoría de sistemas dinámicos no lineales ofrecieron una caracterización detallada de la dinámica global [12]. Desde un punto de vista ecológico, estos resultados subrayan la relevancia de estrategias de refugio como herramientas de mitigación frente a amenazas externas, como enfermedades o presión depredadora intensa. Desde la perspectiva matemática, el modelo evidencia cómo pequeñas variaciones en parámetros críticos pueden tener consecuencias profundas en la dinámica del sistema [6].

En conclusión, el modelado matemático proporciona una herramienta poderosa para entender las dinámicas ecológicas complejas, como la interacción depredador-presa e infección, y cómo estas pueden ser moduladas mediante estrategias de refugio. Este enfoque no solo ayuda a predecir la estabilidad de las poblaciones, sino también a guiar estrategias de conservación en ecosistemas afectados por múltiples amenazas. Futuros trabajos pueden considerar la inclusión de retardo temporal, movilidad espacial o efectos estocásticos para enriquecer la representación del sistema y analizar escenarios más realistas.

Contribución de los Autores. Para la investigación del presente trabajo, los autores han realizado la revisión bibliográfica, análisis matemático, simulación computacional, redacción, revisión y edición.

Financiamiento. La presente investigación fue financiada en parte por el Acuerdo de Cooperación Mutua para establecer el Proyecto “Centro de Competencia Sudamericano de Computación Científica en Salud y Clima” firmado entre socios alemanes y sudamericanos (UNMSM-Perú).

Agradecimientos. Ambos autores agradecen al convenio “Centro de Competencia Sudamericano de Computación Científica en Salud y Clima”. Roxana López Cruz agradece al Proyecto de Investigación B24142191, correspondiente al financiamiento VRIP-UNMSM.

Conflictos de Intereses. Los autores, declarar que no existe ningún conflicto de intereses en la publicación de este artículo, y que no existe ningún conflicto de intereses con ningún otro autor o institución por la publicación de este artículo.

ORCID and License

Neisser Pino Romero <https://orcid.org/0000-0002-9865-5974>

Roxana López-Cruz <https://orcid.org/0000-0002-7703-5784>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Allee WC, Park O, Emerson AE, Park T, Schmidt KP. Principles of animal ecology. W. B. Saunders. W. B. Saunders Co. Ltd.; 1949.
- [2] Das DK, Das K, Kar TK. Dynamical behaviour of infected predator-prey eco-epidemics with harvesting effort. Journal of Biological Systems. 2021;(7):1-27.
- [3] Lai X. Study of Virus Dynamics by Mathematical Models. The School of Graduate and Postdoctoral Studies, The University of Western Ontario; 2014.
- [4] Apreutesei N, Dimitriu G, Alla A, et al. On a prey-predator reaction-diffusion system with Holling type III functional response. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010;(235):366-79.
- [5] Almanza-Vasquez E, Ortiz R, Marin-Ramirez AM. Stability in predator-prey system Lotka-Volterra model incorporating a prey refuge like the law of mass action. Contemporary Engineering Sciences. 2018;(11):2049-57.
- [6] Bate A. Mathematical models in eco-epidemiology. Department of Mathematical Sciences, University of Bath; 2013.
- [7] Murray J. Mathematical Biology I: An Introduction. Springer, Texts in Applied Mathematics; 2013.
- [8] González-Olivares E, López-Cruz R, Rojas-Palma A. Prey refuge use: its impact on the dynamics of the Lotka-Volterra model. Selecciones Matemáticas. 2024;(9):287-301.
- [9] Naji RK, Mustafa AN. The Dynamics of an Eco-Epidemiological Model with Nonlinear Incidence Rate. Journal of Applied Mathematics. 2012;(852631).

- [10] Pino-Romero N, Salazar-Fernández CU. Modelo matemático de una cadena alimenticia depredador-presa: plancton-anchoveta. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*. 2022;(29):69-103.
- [11] Chicone C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, Texts in Applied Mathematics; 2006.
- [12] Lazaar O, Serhani M. Stability and optimal control of a prey–predator model with prey refuge and prey infection. *International Journal of Dynamics and Control*. 2023;(11):1934-51.
- [13] Jang SR, Hsiu-Chuan W. Deterministic predator–prey models with disease in the prey population. *Journal of Biological Systems*. 2020;(28):751-84.
- [14] Sun GQ, Zhang HT, Wang JS, et al. Mathematical modeling and mechanisms of pattern formation in ecological systems: a review. *Nonlinear Dynamics*. 2021;(104):1677-96.
- [15] López-Cruz R. *Structured SI Epidemic Models with Applications to HIV Epidemic*. School of Math and Statistical Sciences, Arizona State University; 2006.
- [16] Aguirre-Hernández B, Loredó-Villalobos C, Díaz-González E, Campos-Cantón E. Estabilidad de sistemas por medio de polinomios Hurwitz. *Revista De Matemática: Teoría Y Aplicaciones*. 2017;(24):61-77.
- [17] Slotine JJ, Li W. *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ; 1991.
- [18] Broyden CG. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*. 1965;(19):577-93.
- [19] Qiu S, Mu C, Yi H. Dynamics for a Three-Species Predator-Prey Model with Density-Dependent Motilities. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2023;(35):709-33.
- [20] Kang AH. Analysis of an Eco-Epidemiological Model Considering Effect of Harvesting and Prey Refuge. *Applied Mathematics*. 2022;(10):733-44.
- [21] Chen HS, Stadtherr M. A modification of Powell's dogleg method for solving systems of nonlinear equations. *Computers & Chemical Engineering*. 1981;(5):143-50.