Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(2):367-392.

REVIEW

Harmonic analysis and partial differential equations.
Brief walk through these domains

Análisis armónico y ecuaciones en derivadas parciales.
Breve caminata por estos dominios

Alejandro Ortiz Fernández

A la memoria del ilustre Maestro Don Antoni Zygmund por sus valiosas contribuciones a las series trigonométricas y al análisis armónico.

Received, May. 22, 2024; *Accepted, Nov. 20, 2024;* *Published, Dec. 27, 2024*

How to cite this article:
Ortíz F. *Análisis Armónico y Ecuaciones en Derivadas Parciales. Breve Caminata por estos Dominios.*. Selecciones Matemáticas. 2024;11(2):367–392. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.02.10

Abstract

In this walk we are going to walk through some domains of harmonic analysis and partial differential equations (PDE). The objective of this article is to motivate students and colleagues to study these beautiful areas of analysis and therefore we emphasize the ideas, some mathematical results and some historical data. In this " tourist" tour we will see a panorama of such areas in the 19th and 20 th centuries, a panorama of the Fourier series; we give a vision of the theory of distributions, of the theory of linear partial differential operators and we culminate by given a vision of harmonic analysis and its relationship we the PDE.
Keywords . Fourier, variations, Dirichlet, distributions, singular integrals, partial differential equations.

Resumen

En esta caminata vamos a pasear por algunos dominios del análisis armónico y de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP). El objetivo de este artículo es motivar a estudiantes y colegas por el estudio de estas bellas áreas del análisis y por ello damos énfasis a las ideas, a algunos resultados matemáticos y algunos datos históricos. En este recorrido "turístico"veremos un panorama de tales áreas en los siglos XIX y XX, un panorama de las series de Fourier; damos una visión de la teoría de distribuciones, de la teoría de operadores diferenciales parciales lineales y culminamos dando una visión del análisis armónico y su relación con las EDP.
Palabras clave. Fourier, variaciones, Dirichlet, distribuciones, integral singular, ecuaciones diferenciales parciales.

1. Introducción. Entre las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y el análisis armónico existe una íntima relación pues en el estudio de los problemas surgidos en las EDP tales cuestiones, como el problema de Dirichlet y en general los problemas de valor de contorno, en la regularidad de los coeficientes en las ecuaciones, la naturaleza del dominio en que se trabaja,

*Universidad Nacional de Trujillo, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. **Correspondence author** (jortiz@pucp.edu.pe).

el problema de Cauchy, el análisis armónico proporciona herramientas para contribuir en la solución de tales problemas. En la segunda mitad del siglo pasado tales herramientas o técnicas fueron muy usadas sobre todo con las contribuciones de A. P. Calderón, entre otros notables analistas. En este contexto, la evolución del análisis armónico tuvo su inicio en la lejana Grecia, antes de Cristo. Viajemos al siglo VI a. C.; en Crotona, Italia, se instala una sociedad liderada por Pitágoras quién poseía una gran cultura matemática y filosófica y así en la sociedad se discutieron esenciales cuestiones del saber científico y filosófica que habría de perdurar por siglos, posiblemente hasta la actualidad. El " número"fue el fundamento de su filosofía para comprender el universo. " Pitágoras radicaba la felicidad suprema en la contemplación de la armonía de los ritmos del universo dirigido por los números", dijo Heráclito del Ponto en reconocimiento al ilustre hombre de ciencias.

Además, en las reflexiones de la Escuela pitagórica surge un impacto en el análisis armónico al pensar sobre la naturaleza aritmética del cosmos y así, posiblemente, a la armonía musical producida por los instrumentos de cuerdas; así se hicieron argumentos musicales usando los números y la importancia de estos argumentos para entender al cosmos y de esta manera se integran en una idea a la aritmética, a la música, a la geometría y a la astronomía, cuarteto que regiría el fundamento para entender al mundo donde vivimos. De esta manera, vía esta Escuela, la matemática alcanzó una importancia suprema para comprender el todo, en particular para la felicidad del hombre, algo que en la actualidad deberíamos rescatar! Para mayor información sobre el impacto de la Escuela Pitagórica y otras ideas, ver M.de Guzmán [1].

El tiempo pasó de aquel entonces, las ideas van evolucionando y llegamos al siglo XVIII, época que el cálculo infinitesimal ya había sido creado el siglo anterior. Como se sabe el movimiento de una cuerda tensa produce sonidos. Esta simple observación conduciría a fundamentales progresos en la matemática y en la tecnología actual. En efecto, en 1715, Brook Taylor propone las siguientes cuestiones, [1]:

(i) determinar el movimiento de una cuerda tensa y

(ii) dada la longitud y el peso de la cuerda, así como la fuerza que la tensa, encontrar el tiempo de vibración.

Aún cuando Taylor obtiene una ecuación diferencial de la cuerda vibrante, su trabajo originó una serie de discusiones y controversias; recordemos que en esa época el análisis matemático no existía y así la idea de " función"no estaba dada con el rigor del caso. Pocos años después, en 1727, Daniel Bernoulli estudia el problema de la cuerda y en 1728 publica sus resultados, si bien interesantes no fueron del todo satisfactorios. Posteriormente, en 1747, Jean D'Alembert encontró la forma general de la solución de la ecuación de la onda. Veamos brevemente algunos argumentos matemáticos. Sea una cuerda de longitud L, fija en sus extremos en el plano (x, u) que en su estado de reposo coincide con el eje x: Se asume que la cuerda es flexible y que las partículas de la cuerda se mueven solo en la dirección del eje u; la tensión de la cuerda es en la dirección de la tangente y la pendiente en todo punto de la cuerda desplazada es pequeña. Ahora, la cuerda es perturbada y vibra en forma transversal.

Vía una serie de argumentos técnicos se llega al siguiente problema mixto:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\, 0 < x < L,\, t > 0 \text{ (t tiempo)} \\ &\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} \text{ condiciones iniciales} \\ &u(0,t) = 0;\, u(L,t) \ldots \text{ condiciones de contorno,} \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $f(x)$ es el desplazamiento inicial y $g(x)$ es la velocidad inicial de la cuerda. Vía ciertos argumentos técnicos se llega a la fórmula de D'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \tag{1.2}$$

Mirando (1.2) " sentimos"la necesidad de que f tenga segundas derivadas continuas y de que g tenga primeras derivadas continuas. Así mismo, dados f y g la fórmula (1.2) " dice"que la solución del problema (1.1) es única. (c es una adecuada constante que podríamos asumir ser 1). Se observó que las funciones f y g no estaban lo suficientemente claras para que la solución del problema esté bien determinada. Esta situación originó una polémica que fue de provecho para el progreso del análisis; en efecto, en 1748, Euler contribuye con argumentos para clarificar el panorama; también se deben contribuciones de Daniel Bernoulli. Ver [1] para mayores detalles.

En los trabajos de D'Alembert, Euler y Daniel Bernoulli aparecen ciertas series trigonométricas y esto fue inicio del surgimiento de una rama matemática que habría de contribuir al progreso del análisis en el siglo XIX, XX y aún en el presente: el análisis de Fourier y sus generalizaciones. En efecto, debemos a Jean Fourier el inicio de tal rama y de la relación entre el análisis armónico y las EDP. Veamos. A fines del siglo XVIII la física - matemática tuvo grandes avances debido a que ya se poseía las EDP pero aún habían ciertas dificultades con el rigor de las ideas que se manejaban; las ecuaciones diferenciales se aplican a problemas concretos; el problema de la cuerda vibrante condujo, de un modo natural, a ciertas series trigonométricas y así va naciendo ciertos " átomos"(los senos y cosenos) que servían para representar funciones periódicas arbitrarias pero dejando en el camino diversas cuestiones por clarificar. Jean B. Fourier (1768 - 1830) formula el proyecto de encontrar un modelo matemático que le permitiera estudiar el problema de la conducción del calor bajo ciertas condiciones. En 1807 redacta su primer trabajo: "Teoría Analítica del Calor",con el que aspira al Gran Premio en 1812; recibe duras críticas por la falta de rigor en algunos argumentos. Recordemos que en esa época aún no existía del análisis matemático. En 1822 Fourier publica el libro "La Teoría Analítica del Calor", la que fue reconocida como " un gran poema matemático" y con el cual Fourier pasó a la historia de la matemática.

Tal libro tuvo consecuencias esenciales en el análisis como son : se formalizan las ideas de función y de integral ; motivó la creación de la teoría de conjuntos por G.Cantor ; motivó, también, la introducción de los espacios abstractos a inicios del siglo XX; la teoría de Fourier condujo a la teoría de las funciones generalizadas, y en particular a la teoría de distribuciones de L. Schwartz en la década de los años 1940's; en la década de los 1980's se introdujo la teoría de ondículas ("wavelets") las que son ondas "pequeñas" en cierto sentido y así es una teoría de Fourier especial.

2. Breve Panorama del Análisis Armónico y de las EDP en el Siglo XIX. Las anteriores consecuencias de la obra de Fourier condujo a un gran desarrollo del análisis armónico con aplicaciones al desarrollo de una tecnología, cada vez más actualizada; además, surgieron diferentes escuelas que contribuyeron con nuevos resultados. Ver [1] para mayores detalles. Viajemos alrededor de inicios del siglo XIX. En 1755 Euler establece la ecuación para flujos de fluidos incomprensibles, de gran importancia en la física-matemática; la ecuación de Poisson, que tiene relaciones con problemas eléctricos y magnéticos, es iniciada con Poisson en 1813 y fue estudiada por Green en 1828 y Gauss en 1839. Así mismo las ecuaciones de Navier - Stokes establecida para flujos de fluidos fue introducida por Navier en 1822 y considerada por Poisson en 1831 y Stokes en 1845; Maxwell, en 1864, investigando en electromagnetismo establece sus célebres ecuaciones; En 1860 Helmholtz establece una ecuación relacionada con el problema de los valores propios para el operador de Laplace en cuestiones relacionadas con la acústica. El problema de Plateau conduce a un modelo matemático para las burbujas de jabón, investigación hecha alrededor de 1840; Korteweg-De Vries establecen la ecuación relacionada con las ondas de aguas solitarias en 1896.

En esta pequeña historia, ver [2] para más información sobre lo que estamos tratando, hay diversas ecuaciones en derivadas parciales relacionadas con el mundo físico las cuales merecieron investigaciones en años posteriores y que contribuyeron a enriquecer al mundo de las EDP y de la matemática como, por ejemplo, en el desarrollo de las geometría diferencial, la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja en donde Cauchy hizo notables contribuciones la que estuvo relacionada con las funciones armónicas. De esta forma las EDP se convirtieron en un universo más amplio y el nivel de rigor más exigente.Así surgieron los problemas físico-matemáticos: "el problema de Dirichlet y el problema de Cauchy", dos famosos problemas pues en el afán de resolverlos se introdujeron diversos métodos y estrategias que motivaron nuevas teorías en el análisis, y así va surgiendo el análisis funcional.

2.1. El Cálculo de Variaciones. Importante rama de la matemática que contribuyó al desarrollo del análisis funcional. Veamos algunos argumentos. En 1833, los trabajos de G. Green condujeron a relacionar las EDP con el " cálculo de variaciones" cuyas ideas se remontan al siglo XVII cuando Juan Bernoulli, en 1696, desafió a los matemáticos de entonces a encontrar la curva de más rápido descenso, curva llamada "la braquistócrona". De un modo general en este tipo de problemas se trata de encontrar una curva que satisface una propiedad minimal o maximal. En aquel entonces, este tipo de problemas influyeron en el desarrollo del cálculo infinitesimal al cual contribuyeron los trabajos de Jacobo Bernoulli, L. Euler y J. L. Lagrange. Bien, con estos antecedentes, y otros, Green observa que la solución del problema, después llamado “ problema de Dirichlet,

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & \ldots \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (\Omega \text{ es un dominio abierto }) \\ u = \varphi \quad & \ldots \text{ sobre el contorno } \partial\Omega \end{aligned}$$

minimiza a la integral $\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 dx$ entre todas las funciones v tales que $u = \varphi$ sobre $\partial\Omega$.
Además, si tal u minimizante existe y es regular, entonces u es una función armónica. Posteriormente Gauss hizo análogas investigaciones así como también B. Riemann quien llamó a esta cuestión el “Principio de Dirichlet”(1851). Por otro lado, en los años 1870’s la teoría de funciones contribuye en el desarrollo del cálculo de variaciones ya que en 1877 G. Erdmann proporciona condiciones para que funciones con derivadas discontinuas en un número finito de puntos, sean soluciones de problemas variacionales. Así mismo, Karl Weierstrass en sus lecturas dadas en los años 1870 ś introdujo un nuevo método para obtener condiciones suficientes que aseguren la existencia de un máximo o un mínimo en problemas variacionales relacionados con cierta integral. Posteriormente su trabajo fue continuado por D. Hilbert en 1900 que a su vez motivó contribuciones de E. Zermelo, E. Hedrick, O. Bolsa, E. Goursat y otros, quienes en el período 1895 - 1905 contribuyeron a enriquecer la teoría. Por otro lado, en 1910 J. Hadamard contribuyó con una notable visión sobre el cálculo de variaciones, toda una novedad entonces. El surgimiento del análisis funcional fue influido por el cálculo de variaciones durante el siglo XX sobre todo debido al aporte del analista italiano Vito Volterra.

El clásico problema de Dirichlet motivó la creación de diversos métodos para resolverlo , entre ellos se tiene el llamado ”Principio de Dirichlet ”, el que es considerado el puente entre la teoría clásica de las EDP y el análisis funcional. Este método fue formulado por Gauss en 1840 y por Kelvin en 1847 y fue motivado por cuestiones de la física; así se tiene la integral

$$E(v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \tag{2.1}$$

donde $v = f$ sobre el contorno $\partial\Omega$, integral que es llamada “ integral de energía”. Se observó que como la solución del problema de Dirichlet corresponde a un estado estacionario (es decir, no depende del tiempo) entonces la solución debe corresponder a un mínimo de energía. De esta manera los matemáticos y los físicos del siglo XIX aceptaron como evidente la existencia de un mínimo de la integral (2.1) y, de esta manera se aceptaba que el problema de Dirichlet tuviera una solución; pero ... en 1869 Weierstrass probó que el mínimo de tal integral no necesariamente existe.

3. Algunas Ideas sobre las Series de Fourier. La posteridad ha colocado “La Teoría Analítica del Calor”de Fourier como uno de los escritos científicos más perfectos de todos los tiempos! En efecto, en esta obra se introducen los desarrollos en series e integrales de funciones trigonométricas para estudiar un comportamiento de la naturaleza; es el punto de partida de una teoría que ha de contribuir al aporte de nuevas e importantes teorías fundamentales de la matemática y de la física. ¿Qué hizo Fourier? ... él fundamentó la teoría de las series trigonométricas; así, en casos especiales, una función $f(x)$ es expresada por la serie $a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + \ldots$, donde los coeficientes son $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se observa que la representación para a_n ya había sido establecida por Euler y que Clairaut conocía estas fórmulas para los coeficientes. Además, en aquellos tiempos los argumentos se manejaban sin el rigor actual, pero, aun así, sus argumentos fueron muy importantes, sobre todo en física-matemática . Su famoso libro fue publicado en 1822 y fue un hermoso legado que dejó al futuro de la matemática.

3.1. Los Albores del Análisis Matemático. Sea la serie trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

entonces surgen las siguientes cuestiones:

(i) Si $f(x)$ es una función representable por tal serie, ¿ cómo determinar los coeficientes a_n y b_n?.

Nota 3.1. *Ya hemos visto cómo se determinan a_n y b_n pero en la evolución histórica hubo la necesidad de precisar el concepto de función y de integral, entre otros aspectos; en este argumento está el valor de la cuestión hecha.*

(ii) Si la serie, es una serie de Fourier generada por $f(x)$, ¿ para que valores de x la serie es convergente?; ¿qué relación existe entre la suma de la serie en x y la función $f(x)$? ; ¿la serie puede representar distintas funciones en distintos subconjuntos del intervalo $(-\pi, \pi)$?.

(iii) ¿Existirá una serie trigonométrica que converja en casi todos los puntos del intervalo [-π, π] a una función $f(x)$, pero que la serie NO es serie de Fourier de $f(x)$?; ¿cuáles son las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de una serie trigonométrica para que ella sea una serie de Fourier?.

(iv) Si una serie trigonométrica es una serie de Fourier generada por una cierta función, ¿existirán otras funciones que tengan por serie de Fourier a la serie dada? ; si asi lo fuera ¿ qué relación existe entre tales funciones?.

(v) ¿Existirá una función continua cuya serie de Fourier diverge en todo punto de un conjunto denso del intervalo $[-\pi, \pi]$? ; ¿ existirá una función integrable cuya serie de Fourier es divergente en todo punto de intervalo?; ¿existirá una función continua con tal propiedad?

El contestar estas, y otras, cuestiones contribuyó mucho al desarrollo de la teoría de las series trigonométricas, en particular al de las series de Fourier. Para una información amplia sobre este tema, el lector interesado debe consultar la magnífica obra [3] de A.Zygmund, libro que fue calificada por J.E Littlewood como " la Biblia"sobre las series trigonométricas. Por otro lado, el contestar estas cuestiones de un modo formal está más allá del objetivo de este escrito, cuya idea principal es mostrar algunas ideas sobre el análisis armónico y motivar a posibles interesados en este tema. Pero, digamos algunas palabras al respecto. Como se sabe, le debemos a A. Cauchy el esfuerzo por clarificar la idea de integral, tan necesario para el estudio de las series trigonométricas; así, verificó que toda función continua es integrable en un intervalo $[a, b]$, según su noción de integral: Cauchy estudió, también, a las series trigonométricas a partir de 1826 usando para ello su método de los residuos, pero no tuvo la atención de sus contemporáneos. Por otro lado, P. Dirichlet si obtuvo más eco en el estudio de tales series; escribió dos importantes memorias, una en 1829 y la otra en 1837 ; en la primera dio una prueba del desarrollo en serie de Fourier de una función, lo que fue un gran avance en el análisis pues dio algunos criterios para tener tal representación ; además, para la suma parcial de una serie de Fourier obtuvo una representación integral, la que es conocida como la fórmula de Dirichlet.

En tal direción, veamos algunos argumentos técnicos. Sea $S_N(x)$ una suma parcial de una serie de Fourier: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ de una ciertta función $f(x)$, la que es seccionalmente continua y periódica, de período 2π. Entonces se tiene la representación

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt.$$

En efecto, desde que a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, sus valores los llevamos a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

para obtener

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\cos nt \cos nx + \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} nx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(t-x) \right] dt. \end{aligned}$$

Ahora, vía un argumento de identidades trigonométricas, se tiene en general que $2 \operatorname{sen} \frac{y}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny \right] =$

$\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right) y$. Luego, para $\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right) \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt \\ &= (s=t-x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right) s}{2 \operatorname{sen} \frac{s}{2}} ds \end{aligned}$$

Desde que f es periódica, de período 2π, se tiene la tesis. □

La expresión $D_N = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}$ se llama el núcleo de Dirichlet.

Este resultado permite establecer la convergencia puntual de la serie de Fourier. Veamos. Se dice que la función $f(x)$ es seccionalmente regular en $[a, b]$ si $f(x)$ es seccionalmente continua y su derivada $f'(x)$ es también seccionalmente continua, donde los saltos de $f'(x)$, en un número finito, ocurren en los mismos saltos de f(x). Se tiene la

Proposición 3.1. *Sea $f(x)$ una función seccionalmente regular, periódica, de período 2π en $[-\pi, \pi]$. Entonces para todo $x \in [-\pi, \pi]$ se tiene*

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f\left(x^-\right)\right] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ y donde
$f\left(x^+\right) = \lim_{h \to 0} f(x+h)$ y $f(x^-) = \lim_{h \to 0} f(x-h)$.

Demostración: Tenemos

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \ldots dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \ldots dt = I_1 + I_2.$$

Veamos I_1. Se tiene,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left[f(x+t) - f\left(x^-\right) + f\left(x^-\right)\right] \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \\ &= \left(\text{desde que } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt = 1\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t) - f\left(x^-\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right) t dt + \frac{f(x^-)}{2}. \end{aligned}$$

Usando que $f(x)$ es seccionalmente regular se verifica que $\frac{f(x+t) - f\left(x^-\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}$ es seccionalmente continua.

Luego se tiene,

$$\lim_{N \to \infty} I_1 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t) - f\left(x^-\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right) t dt + \frac{f\left(x^-\right)}{2} = \frac{f\left(x^-\right)}{2},$$

desde que el límite de la integral es cero por el lema de Riemann - Lebesgue.
En forma análoga se verifica que $\lim_{N \to \infty} l_2 = \frac{f\left(x^+\right)}{2}$. De esta manera se tiene

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right) = \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \left(I_1 + I_2\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right].$$

□

Corolario 3.1. *Si además $f(x)$ es continua, entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cosnx + b_n sennx\right).$$

3.2. Va Naciendo la Matemática Pura. Los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet abrieron nuevos horizontes que condujeron al análisis matemático y a la observación cuidadosa de las ideas que se utilizaban en la investigación de las series trigonométricas, en particular de las series de Fourier. Además, tales contribuciones motivarian a las nuevas generaciones de matemáticos quienes trabajaron con criterios analíticos y así surgirían los fundamentos del análisis moderno, como fueron los conceptos de función y sus diferentes clases, las ideas de continuidad, derivada e integral con mayor rigor; y sobre todo la investigación de los números reales en niveles bastantes profundos, lo que sería el fundamento de mayores conquistas. Estamos más o menos alrededor de la mitad del siglo XIX y los nombres de Riemann, Heine, Cantor, Du Bois-Raymond, Fejér, Dini, Lipschitz, Jordan y otros aportaron al desarrollo de la teoría de las series de Fourier y fue el legado que dieron al siglo XX.

Si bien es cierto que las series de Fourier tuvieron su inicio en problemas concretos, como fueron el problema die la cuerda vibrante y el de la conducción del calor y si bien en las aplicaciones a la física-matemática no se “necesitaban”de una matemática muy elaborada y rigurosa, ya se comenzó a usar, con suceso, tales series en teorías más abstractas como fue la aplicación a la teoría de números. Así, Riemann estaba convencido en la necesidad de entrar en contextos más analíticos; Como ya hemos visto, la naturaleza de los coeficientes de Fourier son dados vía integrales las que tenían ciertas deficiencias de rigor en su definición. Cauchy había considerado a las funciones continuas y Dirichlet admitía funciones continuas por secciones y Riemann percibió que tales enfoques eran aún insuficientes en cuanto a la noción de integral. Surgieron las cuestiones, ¿cómo dar una definición más amplia, y cómo caracterizar a las funciones integrables?.

En 1854 con motivo de su examen de habilitación para ser profesor en Gotingen, Riemann presentó un trabajo sobre las series de Fourier (el que fue publicado en 1867 en forma póstuma) en la que introduce notables conclusiones en tales series. Así, investigó la condición necesaria y suficiente para que una función f arbitraria sea tal que su serie de Fourier sea convergente a f en un punto, en el cual la serie converge; esto fue un problema difícil y no soluble; además de ello introdujo lo que hoy conocemos como la “integral de Riemann”; en ella consideró funciones acotadas y obtuvo condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de tales funciones y ampliando así el universo de las funciones integrables, y de este modo a las integrales que aparecen en los coeficientes de Fourier.

Además, probó que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nxdx = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = 0.$$

Es decir, en el infinito los coeficientes de Fourier son controlados; resultado que es el germen de ideas que están en la teoría de distribuciones. Vía la teoría de la medida este resultado fue extendido por H. Lebesgue a inicios del siglo XX y en la literatura del análisis es conocido como el “lema de Riemann-Lebesgue”.

3.3. Va a nacer la teoria de conjuntos. ... Riemann fue un gran matemático pues contribuyó con brillantes ideas, métodos y resultados que enriquecieron a la matemática y a la física. Veamos una de esas ideas.

Sea la serie trigonométrica $a_\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ donde ahora los coeficientes a_n y b_n no son coeficientes de Fourier. Entre otros aspectos, se cuestionó si una función podía ser representable por más de una tal serie trigonométrica en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Es decir, se estuvo ante un problema de unicidad! :

$$\text{Si } a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = 0, \text{ ¿se tiene } a_0 = a_n = b_n = 0 \text{ ?}$$

La respuesta fue dada algunos años después por George Cantor. Veamos un poco de historia. Cantor (1845-1918) se graduó en la Universidad de Berlín en 1868 con una tesis sobre la teoría de números, luego es profesor en la Universidad de Halle en donde estaba el matemático Heine, quién trabajaba en las series trigonométricas y motivó al joven Cantor para que estudie el difícil problema de la unicidad de las series trigonométricas: Cantor acepta. En 1870 Cantor obtiene los primeros resultados donde prueba que si $f(x)$ es una función continua en todo punto del intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces su representación en serie trigonométrica es única. Luego pasa al caso en que la función es continua excepto en un punto del intervalo; verifica que aún se tiene la unicidad de la serie que converge a la función en los puntos restantes. A tal punto de discontinuidad Cantor lo llama “punto excepcional”. Dió otro paso: si hubiera un número finito de puntos excepcionales, ¿se tendría aún la unicidad? ... Cantor generaliza aún su resultado a este caso.

Y si el “conjunto”de los puntos excepcionales fuera **infinito** ¿se tendría aún la unicidad? .... Se llegó a un problema muy delicado pues se trabajaba con el infinito, algo que en general se trataba de evitar estar ante él! El problema exigía entrar en las profundidades de los números reales, aún no muy bien conocido entonces.

En 1872, publica un famoso trabajo en donde da solución al problema general de la unicidad. Descubre que en el caso infinito existen distintos tipos de conjuntos infinitos!!, y en el caso de los puntos excepcionales estos necesitaban estar convenientemente distribuidos en el intervalo. ¿Cómo conseguir esta distribución? ..., buscando un método que analice los puntos excepcionales. De esta manera Cantor va ingresando a un nuevo paraiso, el de la teoría de conjuntos! Es maravilloso que un problema que tuvo su origen en la física (la conducción del calor) se proyectaba hacia una teoría abstracta, la cual sería la base para edificar la matemática moderna. Cantor entra a este paraíso dispuesto a conquistar nuevas verdades en ese mundo misterioso al que tanto temieron los pensadores desde la Antiguedad.

En relación a la cuestión (v) planteada anteriormente, P. Du Bois-Reymond, en 1875, construye una función continua en $(-\pi, \pi)$ cuya serie de Fourier diverge en un punto dado; posteriormente construye una función cuya serie de Fourier diverge en un conjunto denso en $(-\pi, \pi)$. Más tarde en 1909, Fejér dio otros ejemplos en esta dirección; aún se han construido funciones reales continuas cuyas series de Fourier divergen en conjuntos que tienen la potencia del continuo. De esta manera fue requerido buscar condiciones necesarias y/o suficientes que aseguren la convergencia de la serie de Fourier a la función dada. De esta manera surgieron algunas condiciones suficientes debidas a Dini, Lipschitz, Jordan, ... Veamos algunos argumentos. Dada una función $f(x)$ se pone

$$d(x,t) = f(x+t) + f(x-t) - \lim_{h\to 0}[f(x+h) + f(x-h)].$$

Lipschitz, en 1864, prueba que si existe $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{d(x,t)}{t^k}\right| < C$, siendo $0 < t \leqslant \delta$, C y k dos constantes positivas, **entonces** la serie de Fourier generada por $f(x)$ converge en $x \in (-\pi, \pi)$, a $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)]$, siempre que exista este límite. Se observa que si $f(x)$ es continua, entonces se tiene la convergencia puntual de la serie a $f(x)$. Después, en 1880 , Dini extiende el criterio de Lipschitz al verificar que si existe $\delta > 0$ tal que $\int_0^\delta \frac{d(x,t)}{t}dt < \infty$, entonces la serie de Fourier de una función integrable $f(x)$ converge a $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)]$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$, siempre que el límite exista.
Poco tiempo después, Jordan en 1881 y en 1882 introduce el importante concepto de función “ de variación acotada”, la que es útil en el análisis moderno; con este tipo de funciones Jordan aporta un criterio de convergencia; así, veamos. Sea $f(x)$ una función integrable, entonces la serie de Fourier generada por $f(x)$ converge a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ en todo punto con una vecindad donde $f(x)$ es una función de variación acotada.

3.4. El Problema de Dirichlet.

El problema de Dirichlet es una clásica cuestión relacionada a las EDP y jugó un rol central en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Veamos algunos argumentos de este problema en su relación con las series de Fourier. $\Delta u = 0$ es una ecuación simple de escribirse pero muy importante en su significado, aún más cuando se dan ciertas condiciones extras y se obtiene tal problema cuyo estudio condujo al desarrollo de fuertes teorías matemáticas. Precisemos un poco más las ideas. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (un conjunto abierto conexo) y $f(x)$ una función continua dada, la que es definida sobre la frontera o contorno $\partial\Omega$ de Ω. Se trata de encontrar una función $u(x)$ continua en $\Omega \cup \partial\Omega$ tal que $\Delta u = 0$ en $\Omega, y \quad u = f$ sobre $\partial\Omega$, donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.

Esto es un típico problema de valor de contorno, el que fue planteado por Green en 1828 y fue investigado por matemáticos del siglo XIX y del XX y de donde surgieron muchas ideas en pro del análisis. En relación con las series trigonométricas el problema de Dirichlet también contribuyó a su desarrollo. Veamos. Para simplificar los argumentos asumamos que el dominio Ω es el círculo unitario D, con centro en el origen y radio 1; los puntos de la frontera quedan determinados por el ángulo θ, obtenido al trazar un radio hacia tal punto frontera. Según el problema, dada una función continua $f(\theta)$ sobre la circunferencia, que es el contorno ∂D del círculo. El problema consiste en encontrar una función u continua en el círculo cerrado, $D \cup \partial D$, tal que $\Delta u = 0$ en D, y que $u = f$ sobre ∂D.

Nota 3.2. *Funciones que satisfacen a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ se llaman funciones armónicas.*

Idea de la Solución. El matemático Hermann Schwarz procedió, brevemente como sigue. Desarrolla $f(x)$ en su serie de Fourier $f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta)$ y define

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta) \tag{3.1}$$

Si $r<1$ se observa que $|r^n(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta)|\leqslant r^n(|a_n|+|b_n|)\leqslant r^nM$, donde M es una constante, y desde que por el lema de Riemann, $a_n\to 0$ y $b_n\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Ahora, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ converge uniformemente ya que $r<1$; luego la serie (3.1) converge uniformemente. Además $r^n(\cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta)$ es una función analítica, pues ella representa la potencia z^n, z un número complejo. Entonces, la parte real y la parte imaginaria son funciones armónicas y se tiene así una serie uniformemente convergente de funciones armónicas, lo que implica que u es armónica en D, La condición de contorno se tiene ya que $u(1,\theta)=f(\theta)$. Finalmente, la continuidad de u en el círculo cerrado significa que $\lim_{r\to 1}u(r,\theta)=f(\theta)$, lo que sigue por un resultado de Abel:

"Si $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ converge a c, entonces $\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}r^nc_n=c$".

¿Y si la serie tipo (3.1) no converge? ... ¿ habría algún método de "sumación"que la haga convergente? ... la respuesta es afirmativa. Por ahora digamos que se descubrieron ciertas interesantes propiedades de los coeficientes de Fourier, como por ejemplo, si f y f^2 son funciones integrables en $[-\pi,\pi]$, entonces se tiene la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right),$$

y de un modo general se tiene la desigualdad de Bessel: $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

Observamos que si $f^2(x)$ es integrable entonces $\lim a_0=0=\lim b_n$, lo que ya sabemos. Además, si f y g, así como sus cuadrados son integrables en $[-\pi,\pi]$, entonces se tiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)\text{, donde } a_n,b_n,\alpha_n,\beta_n \text{ son los}$$

coeficientes de Fourier de f y g respectivamente.

Al lector interesado en mayores detalles sobre lo tratado sugerimos consultar las referencias [4], [5], [6], [9] y [11]; en general, en un libro sobre EDP se exponen los temas tratados menos, posiblemente, las referencias históricas en el orden dados en este escrito.

4. Entremos al Siglo XX. Llegamos a alrededor de inicios del siglo XX, época de grandes transformaciones y creaciones cientificas tanto en la maternática, en la física como en otras ramas del saber, Se introducen nuevas ideas, métodos y teorías que dominarían por el resto del siglo. Uno de los personajes que contribuirían a tales avances fue David Hilbert quién en su famosa conferencia de 1900 marcó la ruta en donde estaban 23 retos para los matemáticos del siglo pasado. En el área del análisis se introducen los espacios abstractos y otras ideas que condujeron al análisis funcional. En 1901 Fejér, un alumno de Schwarz , tuvo conocimiento de un novedoso método debido al matemático italiano Césaro según el cual series que no son convergentes podrían serlas por otro método; este método fue el considerar promedios aritméticos. Veamos algunas ideas.

Sea la serie $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$; pongamos $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ y $\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$. Se dice que $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ es **Césaro sumable** o C-sumable si $\{\sigma_n\}$ es una sucesión convergente. Fejér descubre que si la serie de Fourier es C-sumable, entonces la serie converge a $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)$ en todo $x\in(-\pi,\pi)$ en el cual $f(x\pm 0)$ (límite derecho-izquierdo de f) existe siempre que si $f(x)$ es limitada entonces $f(x)$ debe ser integrable en $(-\pi,\pi)$; si $f(x)$ es no integrable se exige que $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ sea absolutamente convergente. Por otro lado se sabe que la integral de Riemann no incluye a diversas funciones, como funciones limitadas que no son R-integrables (la función de Dirichlet). Pues bien, motivado por los problemas del análisis de Fourier, el matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) construye su teoría de la medida de conjuntos con la cual elabora una teoría de la integral más potente que la de Riemann pues la función de

Dirichlet ya es integrable según Lebesgue.

Sus ideas fueron expuestas en su tesis doctoral “Integral - Longitud - Área”presentada en 1902, obra que fue complementada con su publicación “Lecciones sobre Integración y la Investigación de las Funciones Primitivas”de 1904.

La teoría de la medida de Lebesgue dio los fundamentos para construir una teoría más armoniosa de la teoría de las series trigonométricas pues la hizo más completa, simétrica y más estética; el naciente análisis funcional adquiere madurez. Como también se sabe, el resultado fundamental de esta teoría es el conocido teorema dominado de Lebesgue el cual permite intercambiar límites; veamos: “sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles (que son funciones más generales que las funciones continuas; ver cualquier libro sobre teoría de la medida) tal que $\lim_{h\to\infty} f_n(x) = f(x)$ salvo que x pertenezca a un conjunto de medida nula en el dominio Ω; se observa que $f(x)$ es medible y se asume que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ para todo n, donde $\varphi(x)$ es una función cuyo valor absoluto es L-integrable, lo que implica que los $f_n'x)$ y $f(x)$ son integrables. **Entonces**, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$ ”. Este resultado es muy valioso pues permite intercambiar limites en tal caso.

Así mismo, Lebesgue en 1903 extiende el teorema de Riemann respecto a los coeficientes de Fourier tratando con funciones que pueden ser limitadas o no serlas pero si L-integrables; más concretamente,
“ si $f(x)$ es L-integrable en (a, b), entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nxdx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nxdx = 0 \text{ ”.}$$

Este es el conocido lema de Riemann-Lebesgue.

Sea $f(x)$ L-integrable sobre $[-\pi, \pi]$; si $f(x)$ es representable por una serie trigonométrica, entonces la serie es la serie de Fourier de $f(x)$. Sin embargo, podría suceder que una función $f(x)$ sea representable por una serie trigonométrica sin que $f(x)$ sea L-integrable. Si es el caso, ¿cómo determinar entonces los coeficientes de la serie?... Una respuesta a esta cuestión ha merecido investigaciones de varios investigadores, como las debidas a A. Denjoy (1921), J. Marcinkiewicz - A. Zygmund (1936), J. Burkill (1936 y 1951), R. James (1946, 1950 y 1954). Se debe mencionar que por entonces ya se poseía a la teoría de conjuntos y también a la teoría de la integral de Lebesgue, luego en este contexto ¿ será posible construirse una función continua cuya serie de Fourier sea divergente sobre un conjunto de medida no nula? .... En 1926 Kolmogorov probó la existencia de funciones integrables cuya serie de Fourier es divergente en todos los puntos del dominio. Ya en 1915 Lusin había planteado la siguiente cuestión:

“Si $f(x)$ es una función tal que

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) < \infty \tag{4.1}$$

¿ será que la respectiva serie de fourier, de f, es convergente salvo en un conjunto de medida nula?”.
Se observó que si $f^2(x)$ es L-integrable en $[-\pi, \pi]$, entonces por la desigualdad de Bessel se tiene la hipótesis de tal cuestión. Veamos un poco más explícitamente. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica, de período 2π tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, esto es $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Entonces se tiene que la serie de Fourier converge a $f(x)$ en el sentido de $L^2(-\pi, \pi)$, esto es se tiene $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$, donde $s_N(x) = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$. Además vale la identidad de Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Se observa que en particular se tiene (4.1). Ahora bien, dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ¿ellas son los coeficientes de Fourier de alguna función f? . . .. En general no lo son; por ejemplo, si tales sucesiones fueran los coeficientes de Fourier de una función $f(x)$ en $L^2(-\pi, \pi)$, entonces los $a_n's$ y $b_n's$ deberán satisfacer (4.1), y ahora se pregunta, ¿(4.1) es suficiente para garantizar que los $a_n's$ y $b_n's$ son los coeficientes de Fourier de una cierta $f(x)$ que está en $L^2(-\pi, \pi)$? . . .. En esta cuestión entra con fuerza el poder de la integral de Lebesgue

ya que si la integral en juego fuera en el sentido de Riemann la respuesta es: negativa!, pero si fuera en el sentido de Lebesgue la respuesta es: afirmativa! Pues se tiene el celebrado teorema de Riesz - Fischer (F. Riesz (1907), Fischer (1907)):
"toda serie trigonométrica tal que sus coeficientes satisfacen (4.1), es la serie de Fourier de una función

$$f(x) \text{ en } L^2(-\pi,\pi)\text{''}.$$

Ahora regresemos a la anterior cuestión planteada por Lusin teniendo a la vista el teorema de Riesz - Fischer. Este resultado afirma la cuestión pero la convergencia es en $L^2(-\pi,\pi)$ y "no puntualmente salvo un conjunto de medida nula". De esta manera la conjetura de Lusin resistió varios años más a los esfuerzos de los especialistas hasta que en 1966 L. Carleson probó el notable resultado:
"la serie de Fournier de una función $f(x)$ en $L^2(-\pi,\pi)$ converge **puntualmente**, salvo en un conjunto de Medida nula".
En 1968 R. Hunt generalizó el teorema de Carleson para los espacios L^p,
$1 < p < \infty$.

El teorema de Carleson es un bello y profundo resultado en el análisis armónico; ver [13] para los detalles de este teorema.

4.1. Algunos Comentarios sobre el Análisis de Fourier. En 1935 Antoni Zygmund dijo: "la teoría de las series trigonométricas de una variable es muy extensa y se desarrolla rápidamente cada año pero el espacio dedicado a ella en cuanto a libros-textos es pequeño. Debería, por tanto, haber un espacio para un nuevo libro sobre esta importante materia".

En efecto, Zygmund que pertenecía a la famosa Escuela Polaca de Matemática y había desarrollado investigaciones sobre las series trigonométricas, al igual que algunos de tal Escuela, era una de las personas autorizadas a nivel internacional para escribir un libro-texto sobre tales series. Así nació el libro [3] en su primera edición de 1935 (Dover Publications), libro que habría de influir poderosamente a muchas nuevas generaciones de analistas armónicos. Creemos que este libro es, aún, útil para que alguien interesado en este tema pueda introducirse, sin mayores pre requisitos a este maravilloso mundo de las series trigonométricas y de las series de Fourier, en particular. Por ello creemos conveniente describir en forma panorámica este libro. El libro tiene 12 capítulos que son:

- I. Series trigonométricas y series de Fourier.
- II. Coeficientes de Fourier. Tests para la convergencia de series de Fourier.
- III. Sumabilidad de series de Fourier.
- IV. Clases de funciones y series de Fourier.
- V. Propiedades de algunas especiales series .
- VI. La convergencia absoluta de series trigonométricas.
- VII. Series conjugadas y métodos complejos en la teoría de las series de Fourier.
- VIII. Divergencia de series de Fourier. El fenómeno de Gibbs.
- IX. Otros teoremas sobre coeficientes de Founier. Integración de orden fraccional.
- X. Otros teoremas sobre la sumabilidad y convergencia de series de Fourier.
- XI. Teoría de Riemann de las series trigonométricas.
- XII. Integral de Fourier.

El libro termina con una amplia bibliografía de referencias de clásicos trabajos sobre las series trigonométricas.

Luego de 24 años, en 1959 salió una segunda edición de series trigonométricas en dos volúmenes, I y II, y posteriormente en 1968 salió una edición unificando los volúmenes I y II. Más tarde, en 2003 salió la tercera edición donde se adjuntó un interesante prefacio de Robert Fefferman donde expone interesantes y motivadoras etapas de la vida del Prof.Zygmund, desde su época en Polonia, su patria, en que A. Rajchman lo introdujo a las series trigonométricas hasta su vivencia en la Universidad de Chicago en donde formó numerosos discípulos, en donde destacó Alberto Calderón y juntos formaron la célebre dupla " Calderón-Zygmund "la que contribuiría con centrales aportes al análisis armónico, en particular fundaron la teoría de los operadores integrales singulares, la que más tarde Calderón construyó un puente con los operadores diferenciales parciales y así surgieron investigaciones más profundas y se llegaron a los operadores pseudo-diferenciales, área en donde trabajaron reconocidos analistas como Hörmander y Calderón. R. Fefferman remarca la influencia de Rajchman en Zygmund cuando en el citado libro se expone la teoría de Riemann de las series trigonométricas, que no son necesariamente series de Fourier, y en donde se exponen resultados relacionados con la unicidad de las series trigonométricas (que mencionamos anteriormente), del principio de localización, de la teoría de Rajchman de la multiplicación formal de series trigonométricas , entre otros temas relacionados. En el prefacio se resalta también la influencia de algunos analistas de la clásica Escuela Polaca de Análisis, como fueron Marcinkiewicz y Saks.

El libro de Zygmund es un tratado, que Littlewood lo llamó " la Biblia "de las series trigonométricas, que influyó mucho en la investigación de esta bella rama matemática, y seguramente por muchos años más . . . !

5. Entran en Excena D. Hilbert y Notables Personajes. Hilbert, gran matemático alemán, a inicios del siglo XX en el Congreso Internacional de Matemática de París propuso sus " 23 Problemas"que habrían de ser retos para el desarrollo de la matemática en el siglo pasado; en particular, los problemas 19 y 20 fueron dedicados a las EDP. Veamos algo sobre estas cuestiones. El problema 19 cuestiona la regularidad de las soluciones de las EDP, esto es, indaga si las soluciones son funciones analíticas. Así, en el caso del cálculo de variaciones, ¿ las soluciones de problemas regulares son necesariamente analíticas?. Más concretamente, las soluciones de EDP elípticas ¿ son necesariamente analíticas? . . .. Fue Sergey Bernstein quien dio algunas contribuciones en pro de resolver este problema para ecuaciones elípticas no-lineales de segundo orden en $\mathbb{R}$, trabajo que motivaría la introducción de las llamadas " estimativas a priori ", las que fueron de gran importancia en futuras investigaciones. Bernstein dio una solución positiva al problema 19 y además él observa que sus argumentos pueden ser útiles para resolver el problema 20 que dice: " ¿ cualquier problema regular del cálculo de variaciones tiene solución ? ". Bernstein publica en 1906 y 1910 su trabajo: " Sur la géneralisation du probléme de Dirichlet" en donde estudia el problema de Dirichlet para ecuaciones elipticas no-lineales y usa a los espacios de funciones $C^0(D)$ y a los Hölder $C^{0,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Sus investigaciones fueron pioneros en esta rama e inspiraron a otros analistas como J. Leray y J.P. Schauder quienes estudiaron los problemas de existencia, de unicidad y de regularidad; así Leray-Schauder en 1934 publicaron " Topologie et équations fonctionnelles "donde hacen uso de las estimativas a priori, de la topología y del análisis funcional no-lineal que se disponía. De esta manera, la teoría de Leray-Schauder dio origen a nuevos proyectos sobre teoremas de existencia , investigaciones como las debidas a , entre otras, Petrovsky, 1939, a Caccioppoli, 1934 - 1950 - 1955, a Morrey, 1958, a E.de Giorgi, 1958, y a John Nash, 1958.

Respecto al problema 20 se tienen contribuciones, nuevamente, de S.Bernstein quien contribuyó con resultados fundamentales al respecto. Hilbert llamó a este problema el " problema general de valores de contorno" el que contribuyó mucho en este siglo XX con trabajos en distintas direcciones, investigaciones debidas a: J.Hadamard, H. Lebesgue, E. Hopf , R. Courant, O. Perron, N.Wiener, J.Schauder, J.Leray ; también contribuyeron K.O. Friedrichs, G. Giraud, C.B. Morrey Jr, L.Garding, F.Browder , L.Hörmander, L. Nirenberg, ...

En el mundo físico es frecuente que surjan problemas del tipo valor de contorno, surgen ecuaciones de tipo elípticas, y por tanto saber resolver estos problemas es contribuir a la solución de problemas de la vida real ; de algún modo, esta fue la idea genial de Hilbert al plantear este problema 20. En esta ruta, en el problema 23 (el último de su notable lista), conocido como **" extender el desarrollo de los métodos del cálculo de variaciones**", Hilbert desea que se siga investigando en el cálculo de variaciones aún cuando en los problemas 19 y 20 ya se había considerado esta área para ser estudiada. El mismo Hilbert continuó estudiando esta área y en su libro , con R.Courant, " Methods of Mathematical Physics "se encuentran los resultados de sus investigaciones.

El Problema de Cauchy es otro de los clásicos problemas que contribuyeron mucho al desarrollo de las EDP durante el siglo XX. Como se sabe , los modelos matemáticos en general interpretan situaciones concretas del mundo donde vivimos y por ello se imponen condiciones extras para precisar la solución del problema. Las condiciones clásicas son las de valor de contorno y/o de valor inicial ; además, se desea que la solución exista, que sea única y estable ; es decir, que el problema sea bien puesto. Sin embargo, se construyeron problemas de Cauchy mal puestos como el dado por Hadamard que no tiene solución y ,también, otro problema que no es estable. En esta ruta, en 1947 Myckis y en 1950 Landis construyeron problemas de Cauchy donde la solución no es única ; otras contribuciones en esta dirección fueron dadas por De Giorgi en 1955, A.Plis en 1954, P.Cohen en 1960. Sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy mencionamos al aporte de L. Nirenberg (1957) quien consideró ecuaciones de la forma $Pu(x) + \sum_{j=3}^{q} a_j(x)P_j u(x) = f(x)$, donde P y P_j son polinomios diferenciales, esto es, operadores lineales con coeficientes constantes y los coeficientes $a_j(x)$ son funciones limitadas; $f(x)$ es una apropiada función. La idea de Nirenberg fue establecer condiciones para que se tenga la unicidad del problema de Cauchy, condiciones que están relacionadas con las propiedades que los polinomios P_j deben tener en relación al polinomio P; también, la unicidad depende del tipo de dominio en donde se busca la solución del problema, Para los detalles de este comentario ver [15] y [14].

Uno de los más notables analistas que contribuyeron al desarrollo y modernización de las EDP fue el matemático Lars Hörmander quien en su famosa tesis de doctorado (1955) introdujo una teoría general para los operadores diferenciales; en 1958 - 59 publicó unos trabajos sobre la unicidad del problema de Cauchy. El lector interesado en el trabajo de Hörmander es sugerido consultar su pionero libro (1963), [16], en donde, además, existe una amplia bibliografía sobre las EDP hasta esa fecha. Por otro lado, la evolución de la unicidad de la solución del problema de Cauchy tiene una interesante historia. Veamos algunos argumentos al respecto. Como se sabe el teorema de Cauchy-Kovalevsky garantiza la unicidad de la solución analítica cuando los coeficientes del operador diferencial son funciones analíticas, entre otras condiciones. En esta dirección se tuvo aportes de E. Holmgren quien estableció el siguiente teorema de unicidad; ver [16], página 125, donde Hörmander da la demostración de este

Teorema 5.1. *(**Holmgren**,1901) "Sea φ una función de valor real en $C^1(\Omega)$, donde Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, y sea $P(x, D)$ un operador diferencial con coeficientes analíticos definidos en Ω. Sea x_0 un punto en Ω donde*
$P_m(x_0, \operatorname{grad}\varphi(x_0)) \neq 0$, donde P_m denota la parte principal de P.
Entonces*, existe una vecindad $\Omega' \subset \Omega$ de x_0 tal que todo $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ satisfaciendo la ecuación $P(x, D)u = 0$ y que se anula cuando $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, $x \in \Omega$, también debe anularse en Ω'".*

Siguiendo con la ruta histórica, digamos que 1939, T. Carleman dio el primer resultado, en $\mathbb{R}^n$, en donde se retira la hipótesis de la analiticidad de los coeficientes en el argumento de Holmgren; veamos su idea. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $P(x, D)$ un operador diferencial de orden m con coeficientes $C^\infty(\Omega)$, f una función de valor real, definida y continua en Ω. Se pone $\Omega^+ = \{x \in \Omega / f(x) \geqslant 0\}$. $H^m(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones u en Ω tal que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ para todo α tal que $|\alpha| \leqslant m$. Se tiene el

Teorema 5.2. *(**Carleman**, 1939). Si se tiene:*

(i) existe una función $C(t) > 0, t \geqslant 0$, tal que para todo t suficientemente grande y toda función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int e^{tf(x)} |\phi(x)|^2 dx \leqslant C(t) \int e^{tf(x)} |P(x, D)\phi(x)|^2 dx \tag{5.1}$$

(ii) La función $C(t)$ en (i) es tal que, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\text{lím}_{t\to+\infty} \left[C(t)e^{-\varepsilon t}\right] = 0.$$

Sea F un subconjunto (relativamente) cerrado de Ω, tal que $F \cap \Omega^+$ es compacto.

Entonces, existe una vecindad abierta $\Omega' \subset \Omega$ de $F \cap \Omega^+$ tal que, si una distribución $u \in H^m(\Omega)$ satisface las condiciones

$$\begin{cases} P(x, D)u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \text{supp } u \subset F, \end{cases}$$

entonces $u = 0$ en Ω'.

Nota 5.1. *Para la demostración de este teorema y otros detalles ver [17], pag 150.*
Pasados algunos años, en 1954 Claus Muller trató el problema para el caso de n-variables.

Por otra parte, Hartman - Wintner - Heinz trabajaron con ecuaciones de segundo orden casi-lineales con el laplaciano en la parte principal. Así mismo N. Aronszajn, en 1956, extiende este resultado al caso elíptico de segundo orden de varias variables. Para mayores detalles sobre el problema de Cauchy y muchos otros temas ver, por ejemplo, [16] páginas 114 y 180; [18] páginas 96 y 102; [19] pag. 38.

6. Una Visión de la Teoría de Distribuciones. Como en el mundo de la ciencia, la matemática se desarrolla, evoluciona, a través de un conjunto de conquistas, a veces aisladas y no comprendidas en sus inicios ; pero estas conquistas motivan nuevas ideas que poco a poco se van clarificando y que luego se transforman y se consolidan en una teoría. De algún modo esto ocurrió con el surgimiento de la teoría de distribuciones. Como se sabe, desde la época de Newton y sobre todo en los siglos XVIII y XIX en el cálculo infinitesimal y en la física matemática surgían con alguna frecuencia dificultades con respecto a la derivabilidad de ciertas funciones y esto traía malestar en las investigaciones concretas. Así, el físico inglés Dirac investigando los fundamentos de la mecánica cuántica considera a un " nuevo personaje", la $\delta(x)$ que es definida siendo $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0, = +\infty$ si $x = 0$, y que cumple la propiedad $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{-\infty}(x)dx = 1$. Pero, en el tiempo que esta δ fue introducida va se tenía la integral de Lebesgue y obviamente se tenía que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 0$.

Lo curioso fue que a Dirac le funcionó bien su modelo y siguió adelante con su trabajo. Así , el conflicto era un problema para los matemáticos . . . ¿cómo encontrar un " hogar"para la $\delta(x)$ de Dirac?

No es la primera vez que los matemáticos tienen que buscar " hogares" apropiados a seres que vienen al mundo matemático; sino recordemos a la ecuación $x^2 + 1 = 0$ cuando solo se conocía a los números reales , ¿donde ubicar a la solución x de esta ecuación ? . . . . Por otro lado, recordemos que los modelos matemáticos para estudiar al mundo físico conducen a ecuaciones en derivadas parciales en donde se tiene que derivar parcialmente a la solución u, una o más veces con respecto a la variable tiempo o espacio. Pero, se sabe, algunas veces la función u puede tener zonas de discontinuidad y así la noción de solución en el sentido clásico " cojea"; esto es el caso en el problema de la cuerda vibrante . Históricamente en el siglo XVIII Euler y D'Alembert consideran la idea de " solución generalizada"siendo aquella función que es el límite de soluciones clásicas lo cual fue una idea que se ha de mejorar en el siglo XX cuando ya se disponían de nuevas y más potentes teorías matemáticas, como fueron el análisis funcional, la introducción de diversos espacios de funciones como fueron los espacios de Lebesgue $L^p, 1 < p < \infty$, en particular el espacio de Hilbert L^2; así como los espacios de Sobolev, de Lipschitz , y otros ; de esta manera se tenían los recursos para precisar mejor la idea de tal "límite ". Así durante este siglo surgieron varias propuestas al respecto como las de N. Wiener quien considera la convergencia L^2 en 1926; J. Leray usa la idea de convergencia débil en 1934, y entre otros aportes, L. Schwartz en 1934 considera la convergencia uniforme sobre espacios compactos y así crea la teoría de distribuciones la que está relacionada con las nociones de solución débil y con los espacios de Sobolev (Sobolev descubrió las distribuciones y Schwartz la teoría).

Veamos algunos argumentos. La noción de " solución débil o generalizada "surgió a mediados de la primera mitad del siglo pasado pues hasta los años 1920's las soluciones de la EDP's solo eran en el sentido clásico, es decir, si la función u satisface la ecuación diferencial ; ahora, se revive lo planteado en el siglo XVIII. La idea fue considerar el problema variacional con una integral de Dirichlet E y tomar una sucesión $\{u_n\}$ de funciones regulares, la que es una sucesión de Cauchy con la norma definida por E, en el espacio L^2 y que converge a una función u, que minimiza a E. De esta manera, u es el límite de una sucesión $\{u_n\}$ de funciones regulares tal que la sucesión $\{\text{grad } u_n\}$ converge en L^2 a un cierto límite, grad u, límite que es interpretado en un sentido generalizado! …. En esta dirección veamos el argumento: sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$; como se sabe, el problema de Dirichlet consiste en "encontrar una función u tal que $-u'' + u = f$ en $[a, b]$ y $u(a) = 0 = u(b)$"…. u es una solución clásica si u tiene derivadas continuas hasta la orden 2 y satisface a la ecuación en el sentido usual. Sea ahora φ una función continua y con primeras derivadas continuas en $[a, b]$ tal que $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. Ahora, multiplicando la ecuación por φ se tiene $-u''\varphi + u\varphi = f\varphi$; integrando: $-\int_a^b u''\varphi + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi$; integrando por partes se obtiene

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \tag{6.1}$$

Definición 6.1. *Se dice que u es una solución débil del problema de Dirichlet si u satisface (6.1).*

Se observa que para el caso de varias variables, la idea es similar. En general, toda solución clásica es solución débil; para problemas lineales y ecuaciones elípticas y parabólicas se tiene que las soluciones débiles son también soluciones clásicas. Por otro lado, se observó que las soluciones débiles son de gran uso e importancia en la teoría moderna de las EDP. En esta ruta se debe destacar las contribuciones de, entre otros, K. O. Friedrichs, C. Morrey, L. Tonelli, S. L. Sobolev, $\ldots$. Veamos un poco más. En 1938 el matemático ruso Sobolev introdujo un importante método para estudiar las soluciones de problemas con EDP y para ello creó un nuevo espacio de funciones que en el futuro se llamarían los " espacios de Sobolev" los cuales merecieron la atención de los analistas que trabajaban en temas similares y fue usado en las nuevas investigaciones .Sus ideas fueron expuestas en su trabajo " On a theorem of functional analysis" (1938) y en 1950 sale su publicación " Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics", libro de gran importancia en la literatura sobre el tema de las EDP pues presenta la teoría de funciones, los espacios de Sobolev, los que usa fuertemente en la teoría de las EDP, en la física matemática y en otras aplicaciones. Estudia también el método variacional en la solución de problemas de valor de contorno para ecuaciones elípticas; también trata el problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas de segundo orden con coeficientes variables. Según la crítica especializada fue, y es, un libro muy útil para los que trabajan en modelos relacionados con aplicaciones a problemas del mundo fisico. Por otro lado, de gran importancia en las EDP fue su teorema de inmersión de un espacio de Sobolev en otro. Se debe enfatizar que en la teoría de los espacios de Sobolev se hace uso de la idea de derivada débil así como de desigualdades que relacionan diversos espacios de Sobolev; en esta ruta la desigualdad precursora fue la " desigualdad de Poincaré" la que fue establecida en 1894 y dice " sea el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces se tiene $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$, para todo u en el espacio de Sobolev $L_0^{1,p}(\Omega)$, ∇u es el gradiente de u, $1 < p < \infty$" .

Por razones de completitud, respondamos a la interrogante: ¿qué es una distribución? $\ldots$. Las distribuciones son una generalización de la idea de función! Vearnos algunos argumentos al respecto. A fines del siglo XIX, entre 1893-94, el ingeniero D. Heaviside introdujo ciertas reglas de cálculo simbólico para estudiar la solución de problemas que surgían en la física, reglas que originaron algunas dificultades matemáticas ya que en su trabajo considera a la función $H(x) = 1$ si $x > 0; = 0$ si $x \leqslant 0$,conocida como la " función de Heaviside" . Lo sorprendente es que se verifica $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x) = \delta(x), es$ decir,la derivada de una función no es una función no es una función. Esta ,y otras dificultades motivó la necesidad de extender la noción de función. Con esta idea la Escuela Rusa, liderada por Sobolev, introdujo la idea de " función generalizada", cuya definición es: sea E un espacio vectorial, entonces la funcional $T : E \to \mathbb{C}$,$\varphi \to < T, \varphi >$, donde $\mathbb{C}$ son los números complejos, es llamada una **función generalizada** si T es lineal y continua en el sentido de la convergencia asumida en E.

De esta manera, el espacio dual E' es el espacio de las funciones generalizadas sobre E. Se comprueba que la δ, redefinida vía $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$,para todo $\varphi \in E$, es una función generalizada! donde en E se considera la convergencia puntual. Así, se ha encontrado un " hogar"para la " conflictiva"δ, y en este contexto deja de ser tal.

Las distribuciones son una clase especial de funciones generalizadas.
Y...la δ es una distribución. Veamos la idea .Sea $E = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones infinitamente derivables, con derivadas continuas y que se anulan fuera de un conjunto compacto, en donde se considera la convergencia uniforme.

Definición 6.2. *El espacio dual* $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))' \equiv \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \equiv \mathscr{D}'$ *es llamado el* **espacio de la distribuciones** *de L. Schwartz(1946).*

Es importante mencionar que el espacio $\mathscr{D}'$ es muy amplio pues contiene muchas particulares funciones; por ejemplo contiene a las funciones localmente íntegrables f, donde $\int_K f(x)dx < \infty$, siendo K un conjunto compacto; en particular, contiene a todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}^n$. Se verifica que $\delta \in \mathscr{D}'$. El enfoque de Schwartz estuvo fuertemente influenciado por la Escuela Francesa del análisis funcional y de los espacios vectoriales topológicos, en particular de la teoría de la dualidad. Se debe mencionar que antes de 1950 los analistas estudiaban de preferencia los espacios normados, con énfasis los espacios de Banach, y pocos trabajos se hacían con espacios no-normados. En esta ruta en 1949 Dieudonné y Schwartz publicaron un importante trabajo sobre la dualidad en espacios vectoriales topológicos cuyos resultados fueron muy útiles para la teoría de distribuciones, teoría que apareció en los libros: " Théorie des Distributions ", tomos I y II, publicados en 1950 y 1951 respectivamente. A partir de entonces las EDP fueron estudiadas mayormente con la metodología de las distribuciones en la segunda mitad del siglo pasado y surgieron teorías modernas de esta rama del análisis;

se escribieron libros sobre las distribuciones y sobre las EDP con este enfoque moderno y esto permitió que se abran nuevas ventanas de ínvestigación. En particular mencionamos los libros [16], [17], [18] y [19], entre otros.

Mencionemos algunas breves palabras sobre Laurent Schwartz. Nació en Paris en 1915; fue sobrino-nieto materno del matemático J. Hadamard; estudió matemáticas en la Ecole Normale Supérieur los que completa en 1937 en donde vivió un gran ambiente matemático y forma parte del grupo matemático anónimo bajo el nombre de “ Bourbaki ” en donde hubieron muchos jóvenes brillantes que hicieron una gran labor en pro de nuestra ciencia; algunos de sus miembros fueron Henri Cartan, André Weil, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Jean Leray, entre otros; Schwartz ingresó al grupo unos años después. Bourbaki tuvo como objetivo hacer una labor similar a lo hecho por Euclides en la Antiguedad, es decir, divulgar toda la matemática conforme ella vaya creciendo y su propuesta fue aceptada por varias generaciones; ellos hicieron una matemática muy exigente y abstracta la que ayudó a formar varias generaciones de jóvenes matemáticos. Es en la École que Schwartz aprendió las aplicaciones del análisis funcional en la investigación de las EDP, en la solución de problemas clásicos y así fue gestando su futura teoría; en particular de su profesor P.Leray aprendió la idea de solución generalizada o soluciones débiles en las EDP, lo que fue muy importantes en sus propias inquietudes matemáticas. De esta manera, alrededor de 1945 Schwartz publica algunos resultados sobre la transformada de Fourier generalizada y sobre la convolución de operadores. Y algo fundamental . . . considera funcionales en vez de operadores en la formulación de su teoría! Y, también, algo anecdótico: él desconocía alrededor de 1944 de los trabajos de Sobolev, quien trabajaba en problemas similares pues el matemático ruso elaboraba una teoria sobre la transformada de Fourier generalizada de Bochner y de Carleman; tampoco estaba informado del cálculo de Heaviside. No olvidemos que por esos años Europa estaba en plena II Guerra Mundial y las comunicaciones cientificas eran muy diffciles; a propósito, Schwartz elaboró su teoría entre bombas y refugios, trabajando en pleno aislamiento.

En los años 1950’s, luego de la publicación de sus libros, Schwartz continuó trabajando en su teoría, así prueba un teorema fundamental: “ el teorema del núcleo”, resultado que conecta la extensión de su teoría con la de las distribuciones de valor vectorial. Por otro lado, él tuvo un gran interés por la fisica; a propósito , fueron los fisicos quienes más lo alentaron en la elaboración de su teoria pues las distribuciones se aplican muy bien en esta área como que en 1969 se la usá en la teoria de las particulas elementales; por todo ello escribió el libro “ Métodos Mathématiques pour les Sciences Physiques”(1961). Schwartz también trabajó en la teoría de las medidas abstractas, en la medida de Radon y en la teoría de la probabilidad; escribió un libro sobre martingalas(1980) con un lenguaje a “ la francesa”, es decir, haciendo uso de teorías abstractas (variedades, espacios vectoriales topológicos, . . .). Por el lado pedagógico, Schwartz formó diversas generaciones de jóvenes matemáticos quienes se destacaron en el campo del análisis y de las EDP. Por sus méritos recibió homenajes y distinciones a nivel nacional e internacional y fue premiado con la Medalla Fields, la máxima distinción en la matemática. Pero, además, tuvo sensibilidad por la enseñanza de la matemática, en particular por la enseñanza universitaria en donde dio ideas e inquietudes. Tuvo gran pasión por las mariposas, llegando a estudiarlas y, creo, algunas llevan su nombre y con tal motivo estuvo en el Perú por algún tiempo.

Laurent Schwartz, gran matemático, pensador y defensor de los Derechos Humanos, falleció en París el 04 de Julio del 2002.

7. Breve Panorama de la Teoria Moderna de las EDP. A decir de los especialistas, la era moderna de las EDP comienzan con la tesis de L. Hörmander (1955) en donde se introduce una teoría general de los operadores diferenciales. Pero, hubieron precursores, ideas y métodos que permitieron tal aporte.Las dos fundamentales fuentes que motivaron tal era fueron:(i) el análisis funcional y (ii) la teoría de distribuciones, incluyendo las soluciones débiles y los espacios de Sobolev. Todo esto fue un proceso que se inició, más o menos, en los años 1930’s cuando se desarrolla la teoría de los operadores lineales auto-adjuntos en espacios de Banach y en espacios de Hilbert, desarrollo que fue motivado por la fundamentación de la mecánica cuántica. En esta dirección destacamos el gran aporte de Marshall H. Stone quien hizo aportes fundamentales en tal área del análisis; escribió el libro “ Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis”, 1932; obra que contiene 10 capítulos con resultados tenidos hasta esa fecha, muchos de los cuales fueron sus propias investigaciones. Por su contenido y su carácter histórico creemos que aún en nuestros días es útil como libro de consulta. Stone contribuyó mucho en convertir a la Escuela de Chicago en Matemática como una de las mejores en el mundo!

En los años 1940's salieron publicados trabajos sobre las EDP usando el lenguaje del análisis funcional, imvestigaciones hechas por K. O. Friedrichs, H. Weil, M. I. Visik, entre otros; y en los 50's se producen más trabajos con tal enfoque lo que aceleró nuevas metodologías para estudiar los problemas en las EDP; así tenemos contribuciones de L. Garding en 1953, de F. Browder en 1952 - 53 - 54 - 59, de K.O. Friedrichs en 19553, de P. Lax- A. Milgram en 1954, de J. L. Lions 1955, de L. Hörmander en 1955, de L. Nirenberg en 1957 - 59, de A. P. Calderón en 1957, entre otros. En este panorama, con notables trabajos precursores, se destaca la contribución de Hörmander quien en 1955 presentó su tesis doctoral " On the theory of general partial differential operators", la que fue una notable contribución en donde enfoca a los operadores derivables desde un punto de vista general y que estimuló otras metodologías de estudiar a estos operadores; la tesis tuvo una gran influencia en las ideas y métodos del análisis funcional.

Su libro, [16], publicado en 1963 fue un gran aporte en la literatura de las EDP pues fue útil para que las nuevas generaciones de analistas tuvieran una fuente de temas enfocadas en el nuevo lenguaje de las distribuciones y de los espacios de Sobolev;la obra presenta de un modo organizado el estudio de temas relativos a la existencia, unicidad y regularidad de soluciones de problemas de contorno para EDP lineales; también tiene un espacio dedicado al problema de Cauchy. Hörmander reconoce la influencia que tuvo de la escuela de Bourbaki y así es un libro que requiere experiencia en el análisis avanzado, del análisis funcional y de las distribuciones Posteriormente, en 1983 Hörmander publica el vol.I " Distribution Theory and Fourier Analysis" y vol. II " Differential Operators with Constant Coefficients" ; en 1985 el vol. III " Pseudo Differential Operators" y el vol.IV " Fourier Integral Operators" . Estos cuatro volúmenes constituyen un amplio legado que su autor dejó sobre las EDP y teorías relacionadas que surgieron a mitad del siglo XX. Es una obra para estudios muy especializados sobre esta área pero que puede ser una meta para alguna universidad de nuestro país el tener los requisitos para estudiar e investigar estos libros.

7.1. Problemas no-Lineales en EDP. Muchos problemas surgidos en la física, ingeniería y de un modo general en el mundo de las aplicaciones, tan aceleradas en nuestro siglo XXI, conducen a EDP no-lineales de tipo evolución como, por ejemplo, del tipo $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, donde A es un operador no-lineal y la ecuación es ubicada en un adecuado espacio de funciones, el que es compatible con la naturaleza del problema que se investiga. El artículo [2] de Brezis-Browder contiene argumentos interesantes sobre este tema;ver pag.116 y siguientes. También se sugiere ver el libro [20], de R- Glowinski, el que está dedicado a los problemas variacionales no-lineales haciendo uso de un lenguaje del análisis moderno. Contiene tres apéndices; en el primero da una breve introducción a los problemas variacionales lineales.

Veamos algunas contribuciones al desarrollo de las EDP no-lineales. La teoría de flujos de fluidos a contribuido con ideas y métodos para resolver algunas EDP no-lineales, [2], y en esta dirección se tienen contribuciones de Euler, de Navier-Stokes, entre otros. En 1933 J. Leray,en 1977 V. Scheffer,en 1982 L. Caffarelli- R. Kohn- L. Nierenberg, investigaron este tipo de ecuaciones dando contribuciones en pro del desarrollo de esta área. Un trabajo precursor fue dado en 1896 por Korteweg - De Vries al considerar su conocida " ecuación de Korteweg - De Vries"la que describe el flujo en canales pocos profundos. La naturaleza es por su estructura no - linear y por tanto es un poco difícil precisarla vía modelos matemáticos; por ello se construyen modelos lineales que converjan a tal modelo; ver [20] Glowinski donde se estudian tales aproximaciones haciendo uso frecuente del método de los elementos finitos. La matemática aplicada, en este escenario, ha contribuido con otras importantes ecuaciones no-lineales que merecieron ser estudiadas en la segunda mitad del siglo XX ,entre las cuales tenemos, por ejemplo, la ecuación de Gordon-seno y la ecuación de Burger. En la física teórica, entre otras ecuaciones no-lineales, se destaca la ecuación de Boltzman, (1872), la que es fundamental en la teoría cinética de los gases.

Con motivo de la II Guerra Mundial muchos científicos de Europa, en particular de Alemania, huyeron a Estados Unidos. Varios matemáticos notables se establecieron en Nueva York y así surgió el " Instituto Courant de Matemática Aplicada de New York" en donde investigaron, y fueron profesores de diversas generaciones de reconocidos matemáticos que contribuyeron en forma notable a la matemática aplicada, y también a la matemática pura.

Richard Courant en 1934 fue invitado por la U. de Nueva York para desarrollar la matemática, y otras áreas; posteriormente llegaron Kurt O. Friedrichs y J. J. Stoker, y luego otros notables matemáticos como Louis Nirenberg, Peter Lax, P. R. Garabedian, J. Moser, F. John, M. Kline, ... Muchos de los investigadores del Instituto han recibido distintos premios y distinciones, como es la Medalla Nacional de Ciencias.

En particular, en el escenario del Instituto Courant fueron introducidos los espacios de oscilación media acotada, los conocidos espacios “BMO”, por F. John - L. Nirenberg en 1961. Estos espacios tienen aplicaciones en las EDP, como por ejemplo en el problema de Dirichlet y otras situaciones.En este escenario destacamos el libro de R.Courant ([23],1961) el cual fue planificado con D. Hilbert por algún tiempo pero por las circunstancias del destino fue escrito solo por Courant. Es un voluminoso libro de 830 páginas y está dedicado a la teoría de las EDP y gran parte está relacionado con la física y la mecánica. Según su autor el libro es autocontenido; presenta brevemente a la teoría de distribuciones y en general es de corte clásico. En esta dirección contiene una abundante información. Otro interesante libro sobre EDP(1964) fue escrito por P. R. Garabedian, también del Instituto Courant, con título “ Partial Differential Equations”que contiene diversas aplicaciones a la fisica - matemática. Como apreciamos en el Instituto Courant se dio mucho interés a las aplicaciones, a la tecnología, pero en base a una sólida matemática pura. En esta dirección un importante problema en el campo de la física fue, y es, el fenómeno de la turbulencia cuya investigación conduce a EDP no - lineales, las que de un modo general son difíciles de resolver y explicar. Como se sabe, en el caso lineal se dispone de una teoría general pero en el caso no-lineal es dificil tenerse tal teoría; el reto es estudiar este caso pues la naturaleza conduce al caso no - lineal y esto fue un estímulo para abordar e investigar este tipo de situaciones y de paso introducir nuevas ideas y métodos. Por ejemplo, en el campo de la hidrodinámica se tienen aportes pioneros de J. Leray en la década de los años 1930’s; así, en 1933 estudia el problema de las singularidades en las ecuaciones de Navier - Stokes en $\mathbb{R}^n$, trabajo que estimuló otras investigaciones. En 1965 J. L. Lions publica un trabajo sobre problemas elípticos no-lineales vía los métodos de Minty - Browder. Así mismo, en los años 1950’s la matemática aplicada va avanzando y se investiga el gas dinámico y de los flujos compresibles, estudios que conducen a teorias no-lineales en donde se tienen contribuciones, entre otros, de E. Hot (1950) , O. Oleinik (1957), P. Lax (1957), I. M. Gelfand (1959).

La matemática aplicada se fortaleció en el siglo pasado, y en el presente, dado que en la actualidad la ciencia y la tecnología está avanzado en forma exponencial y así se tienen problemas no-lineales en dominios, como por ejemplo, la biomatemática. De esta manera el marco teórico que es el soporte del estudio de tales problemas tuvo que progresar también. y de esta manera el análisis funcional no-lineal progresó en la segunda mitad del siglo XX; sin embargo desde fines del siglo XIX ya se tenían ciertos resultados que estimularon mayores investigaciones.
Veamos algunos. Picard en los años 1880’s investiga el método de las aproximaciones sucesivas, método que fue puesto en el contexto de los espacios normados completos por S. Banach en 1922 y en esta dirección se obtuvo el teorema de la función inversa y, aun más, a la teoría de bifurcación la que ya fue considerada por Lyapunov en 1906 y por E. Schmidt en 1908 quienes fueron motivados por los trabajos de H.Poincaré en astrofísica. Mencionemos que por entonces ya se disponian de métodos del análisis funcional, de la topología y de la geometría, todo lo cual dieron un lenguaje moderno a las investigaciones. En este ambiente citamos dos trabajos de J.F. Nash, uno sobre el encaje para variedades Riemanianas (1956) y otro sobre la continuidad de las soluciones de ecuaciones elípticas y parabólicas (1958); por sus notables contribuciones Nash mereció el premio Nobel de Economia.

El cálculo de variaciones tiene una relación muy importante con el análisis funcional nolineal en donde se estudia ecuaciones no lineales en ciertos espacios así como el problema de optimizar ciertas funciones. Recordemos que las ideas del cálculo de variaciones fueron establecidos por Euler, Bernoulli, Legendre ,Jacobi, entre los siglos XVII y XVIII. Posteriormente el problema fue minimizar una función continua, no negativa, sobre un espacio métrico completo y esto condujo a introducir ciertos criterios como el dado por I. Ekeland en 1974, [23], que dice “ si una funcional diferenciable F obtiene su mínimo en algún punto u_0, entonces $F'(u_0) = 0$” y según su autor este principio es una buena herramienta para estudiar EDO. Más concretamente se tiene el resultado de Ekeland: “ sea V un espacio métrico completo y sea $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, $\neq +\infty$, acotada inferiormente. Para toda función $u \in V$ satisfaciendo

$$infF \leq F(u) \leq infF + \epsilon$$

y para todo $\lambda > 0$, existe algún punto $v \in V$ tal que $F(v) \leq F(u)$, $d(u, v) \leq \lambda$ y para todo $w \neq v$, se tiene $F(w) > F(v) - \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right) d(v, w)$”.

El lector ineresado en este tema puede consultar [23], [24] y en particular [25], para los detalles del caso. Entre los pre-requisitos se debe conocer a los espacios de Banach y a las funciones derivables según Fréchet y Gateaux. El análisis funcional no-lineal mereció muchas investigaciones en el siglo pasado sobre todo en lo relacionado con el cálculo de variaciones en donde se destacan las contribuciones, entre otros, de Ekeland; Ambrosetti, Rabinowitz, Browder, Leray, J.L. Lions, Brezis, D.Figueiredo. Así, el principio variacional de Ekeland sirvió para obtener un principio variacional más general del tipo min-max, y del cual se demuestra cómo derivar el teorema “paso - montaña” de Ambrosetti y Rabinowitz y otros interesantes resultados. Ver [24] para otros detalles. También se debe destacar la contribución de Jaques L. Lions, quien entre otros aportes investigó los operadores monótonos ,operadores que fueron investigados E.Zarantonello, G.Minty y F.Browder. En 1983 Browder publicó sobre problemas no-lineales relacionados con la teoría del punto fijo, tan importante en este tipo de análisis.

El análisis funcional no-lineal, y su relación con las EDP es muy amplio y sirve como marco teórico para resolver problemas concretos del mundo donde vivimos. La literatura es muy amplia; solo sugerimos ver las referencias siguientes: Yoshida [21] es un excelente libro que ayuda introducirnos en el mundo abstracto del análisis; Courant - Hilbert [22] es una referencia de consulta para muchos aspectos de la EDP hasta 1962; Brezis [27] es un bonito libro que sirve para aprender simultáneamente el analisis funcional, los espacios de Sobolev y las EDP; se puede dar en un curso de dos semestres. Evans [26] trata las EDP lineales en la parte II y las EDP no-lineales en la parte III; es un voluminoso libro que nos ayuda a comprender las EDP según el interés del lector. Glowinski [20] es un libro para los interesados en los métodos numéricos para resolver problemas variacionales no-lineales; su lenguaje matemático es atrayente.

“Nada ocurre en la naturaleza cuyo significado no esté relacionado con un máximo o un mínimo ”
Leonard P. Euler (1748)

8. Entremos al Análisis Armónico y su Relación con las EDP. El análisis armónico (o análisis de Fourier) es una rama central de la matemática por sus importantes aplicaciones a la tecnología y ciencia en general, sobre todo en la época actual donde apreciamos conquistas sorprendentes en el campo de la tecnología. Sin embargo, sus orígenes se remontan al siglo VI antes de Cristo cuando la Escuela Pitagórica, que tenía como base filosófica al número, trata de explicar al cosmos a través de entender la naturaleza de la música; así, a través de los números buscan explicar cuando un sonido en “ armonioso”. Observaron que una cuerda tensa, cuando se perturbaba, podía producir sonidos que gustaban al oido; así, los griegos fueron aprendiendo que conforme la cuerda era pulsada, ella producía diferentes sonidos y esto trataron de explicar mediante los números. De esta manera, de algún modo, el nacimiento del “ análisis armónico”nació relacionado con la música. Naturalmente los griegos no desarrollaron mucho esta inquietud del sonido producido por una cuerda y tuvo que pasar muchos siglos para retomar esta inquietud, cuando la matemática ya disponía del cálculo infinitesimal y del inicio de las ecuaciones diferenciales. En efecto, B.Taylor en 1715 publica un trabajo donde trata de explicar el movimiento de una cuerda tensa, fija en sus extremos; se trata de determinar el movimiento de la cuerda elástica y el tiempo de vibración de la misma. Ver la sección **1** para otros detalles al respecto, así como [1], [4], [6], por ejemplo.

Pero, según los especialistas, el análisis armónico nace con la contribución de J. Fourier al inicio del siglo XIX con su investigación sobre la propagación del calor, más concretamente él, por primera vez, plantea el problema de representar una función vía una suma infinita de senos y cosenos. Y esto fue un reto para los matemáticos de tal siglo! Este problema de representación de una función mereció mucha atención, es decir verificar la convergencia de la serie de Fourier de la función a ella misma. En esta ruta, ver sección **3**, fue Dirichlet quién en 1829 dio un resultado sobre tal convergencia. Su obra fue continuada por Riemann quien en 1855 en su trabajo de habilitación nos da un panorama histórico del problema, así como introduce una noción de integral la cual generaliza a la de Cauchy y también estudia las propiedades de las sumas de series trigonométricas. Otras contribuciones fueron hechas por C. Jordan, R. Lipschitz, U. Dini, Heine, P. du Bois-Reymond, L. Fejér, H. Lebesgue, F. y M. Riesz, A. Kolmogorov, N. Lusin, L. Carleson, A. Zygmund, ... Todos ellos, y otros, contribuyeron en la segunda mitad del siglo XIX y en el XX con notables trabajos que llevaron a la teoría de Fourier al sitio de honor que ocupa en la matemática, pero . . . debemos recalcar que en los argumentos hechos por Fourier ya estaban latentes algunas ideas fundamentales que posteriormente se clarificaron conforme el análisis era más riguroso. Todas las contribuciones hechas fueron procesos históricos que condujeron al llamado “ análisis de Fourier ”.

Muchos de los caminos seguidos estuvieron en la ruta de las EDP, problemas de Cauchy, problema de Dirichlet, . . . y en este panorama las series y la transformada de Fourier jugaron un papel muy importante. Durante los primeros cuarenta años del siglo XX las series de Fourier fueron investigadas en temas puntuales como fue el problema de establecer las condiciones para garantizar la representación de una función vía tal serie en un adecuado espacio de funciones! mientras tanto la variable compleja, el análisis real y la teoría de las EDP avanzaban en conexión entre si en diversos sectores como fue en e! problema de Dirichlet y de un modo general en los problemas de valor de contorno. Dentro de este escenario, la historia que deseamos destacar es el proceso producido en la Universidad de Chicago a fines de los años 1940's.

8.1. La Escuela de Chicago sobre Análisis Armónico. En 1946 Marshall Stone llega a la Universidad de Chicago con el objetivo de iniciar un programa del más alto nivel en el campo de las matemáticas; así, llegaron a Chicago varios distinguidos matemáticos como A. Weil, S. Mac Lane, S. Chern, P. Halmos, I. Segal, E. Spanier y Don Antoni Zygmund para desarrollar un amplio proyecto sobre el análisis armónico; se trata de investigar un conjunto de problemas clásicos relacionados con el análisis real-armónico, con las funciones analíticas y la teoría del potencial, entre otras cuestiones. Alrededor de 1950 llegan a Chicago diversos jóvenes matemáticos para estudiar bajo la orientación de Zygmund, quién pensó que el progreso del análisis estaba ponerlo en el contexto del espacio $\mathbb{R}^n$ con métodos reales; de esta manera se inició diversas investigaciones en el campo de las series de Fourier y del análisis real. Recordemos que Zygmund al inicio de los años 40's perdió su distinguido alumno Jósef Marcinkiewicz, muerto en los campos de concentración-nazi, una gran pérdida matemática por el gran talento de Jósef. Pero, al poco tiempo, el Maestro Zygmund descubriría a otro distinguido alumno suyo, Alberto Calderón. Alrededor de 1948 Calderón viaja de Buenos Aires a Chicago en donde destaca al poco tiempo como un gran matemático. Se iniciará una bella historia en el campo del análisis real.

Según los especialistas la Escuela de Zygmund estaba basada en tres de sus alumnos: A.Calderón, E. Stein y G. Weiss. Con Calderón se inició en 1952 la famosa "Escuela Calderón - Zygmund" con el inicio del estudio de las integrales singulares, la que habría de tener conexiones con las EDP, gracias al talento de Calderón. En 1952 salió publicada un célebre trabajo sobre las integrales singulares donde Calderón-Zygmund (C-Z) estudian la existencia de tales integrales y que influyó en el desarrollo del análisis armónico y de las EDP; este trabajo es un estudio de la transformada de Hilbert sobre $\mathbb{R}^n$ y se prueba que todo operador integral singular es continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Vía estos operadores se investigó la regularidad de las soluciones de problemas de EDP's; el puente entre los operadores integrales singulares y las ecuaciones en derivadas parciales fue establecido por C-Z en un trabajo publicado en 1957 y al año siguiente Calderón investiga la unicidad de la solución del problema de Cauchy para una cierta clase de operadores diferenciales parciales; así mismo, obtuvo representaciones de operadores elípticos lineales en términos de operadores integrales singulares. Estas contribuciones causaron un gran impacto en el ambiente de las EDP por la originalidad y gran profundidad que tuvieron; estas investigaciones motivaron otras como, por ejemplo, fue el teorema del índice para operadores elípticos de Atiyah - Singer 1986) en donde se usan argumentos analíticos - topológicos en un nivel avanzado. Por esta ruta se llega, también, a una clase importante de operadores diferenciales, que veremos brevemente a continuación.

8.2. Operadores Pseudo - Diferenciales. Es conocido que asociado a un operador integral singular está la idea de símbolo del operador el cual desempeña un papel estratégico en la teoría de C-Z quienes hicieron un estudio detallado del símbolo. Por otro lado, en las representaciones de los operadores diferenciales parciales vía los operadores integrales singulares, obtenidas por Calderón, estuvo el germen de una nueva teoría la que fue elaborada en los primeros años de la década de los años 1960's; esta nueva teoría de operadores era más amplia pues incluía a los operadores integrales singulares, a los operadores diferenciales parciales y a otros tipos de operadores. Esta nueva clase de operadores fue llamada "**Operadores Pseudo - Diferenciales**" (opd) y su desarrollo es debido a varios distiguidos analistas, como A. Unterberger - J. Bokobza, 1964, quienes introdujeron un espacio de operadores de C-Z de orden r, el que contiene en particular a los operadores diferenciales de orden $\leq r$. J. J. Kohn - L. Nirenberg, 1965, introdujeron un álgebra de operadores pseudo - diferenciales, los cuales son invertibles dentro del álgebra.

L. Hörmander, 1965, y R. Seeley, 1965, también contribuyeron con esta nueva clase de operadores, los cuales fueron aplicados en las investigaciones de las EDP. Se debe mencionar que nuevamente asociado a un operador pseudo-diferencial está la noción de símbolo del operador. La naturaleza particular de este símbolo determina si el opd es un operador diferencial parcial o un operador integral singular. Por otro lado, Calderón en 1968 considera a los opd como la composición de operadores integrales singulares con potencias un cierto operador Λ (que veremos después).

Veamos algunos argumentos en el escenario de la Escuela de Chicago. Remarcamos que los operadores pseudo-diferenciales surgió como un proceso de evolución de áreas como las EDP, del análisis funcional y de los operadores integrales singulares. Así, la representación de las soluciones de problemas en las EDP en términos de operadores integrales motivá la investigación e introducción de una teoría general más amplia, que incluya resultados conocidos. Al respecto, se sabe que existe una relación intrínseca entre los operadores diferenciales parciales con los operadores de C-Z. Vía esta relación, Calderón en 1958 aplica de un modo muy original los operadores integrales singulares en el problema de la unicidad de la solución del problema de Cauchy para operadores diferenciales generales, trabajo que fue ampliado en 1961 en donde establece resultados de existencia y unicidad para clases muy generales de ecuaciones. En estos trabajos, y en algunos anteriores, estuvo el germen de los opd's! Con el objetivo de tener una idea de estas argumentos veamos brevemente una visión de los operadores integrales singulares y luego una de los operadores seudo-diferenciales.

8.3. Operadores Integrales Singulares. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, $f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{t-z} d(t)$, $z = x + iy$, definida sobre $y = Im(z) \geq 0$. $f(z)$ es bien definida (Hölder y $\frac{1}{t-z} \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) y es analítica sobre $y \geq 0$. Se tiene $\frac{1}{\pi i(t-z)} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(t-x)^2+y^2} + i\frac{1}{\pi}\frac{x-t}{(t-x)^2+y^2}$. $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ es llamado el núcleo de Poisson y $\tilde{P}_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$ el núcleo conjugado de Poisson. De esta manera, $\frac{1}{\pi i(t-z)} = P_y(x-t) + i\tilde{P}_y(x-t)$ y $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x-t)u(t)dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_y(x-t)u(t)dt \equiv U(x,t) + iV(x,t)$.
$U(x,t)$ es llamado la integral de Poisson de u y $V(x,t)$ la integral conjugada de Poisson. Se remarca que u es una función de valor real. Se sabe que U y V son funciones armónicas sobre $y \geq 0$. Además, desde que $u \in L^p$, $1 < p < \infty$, se tiene que $U(x,t) = (P_y * u)(x) \to u(x)$ ctp si $y \to 0^+$. Luego $U(x,t)$ es solución del problema de Dirichlet en el semi - espacio superior, con dato de contorno $u(x)$ sobre $y = 0$. También se tiene, $V(x,t) = (\tilde{P}_y * u)(x) = (P_y * \tilde{u})(x) \to u(x)$ ctp si $y \to 0^+$, donde $\tilde{u}(x) = lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{(t)}{x-t}dt$, la que es llamada **la transformada de Hilbert** de u.

La teoría de las integrales singulares comienza con la transformada de Hilbert en $\mathbb{R}^n$!

De un modo informal, la transformada de Hilbert de f es definida vía

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt.$$

La tarea fue estudiar la existencia de $\tilde{f}$ y sus relaciones con f. Veamos. Si $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, entonces existe $\tilde{f}$, donde por definición

$$\Lambda_\alpha = \{f/|f(x) - f(y)| < C|x-y|^\alpha \text{ si } |x-y| < \delta, \delta > 0\}.$$

Los argumentos dados fueron pioneros en la teoría que nos ocupa; históricamente, desde la época de Newton se tuvo la idea de potencial (newtoniano) relacionado con sus investigaciones sobre el cosmos. Veamos algunas ideas. Sea $f(s,t)$ una función integrable en $\mathbb{R}^2$, y sea el semiespacio $\mathbb{R}^3_+ = \{(x,y,z)/z > 0\}$. Entonces el potencial newtoniano $U(x,y,z)$, con densidad $f(s,t)$, es definido siendo $U(x,y,z) = \int \frac{f(s,t)}{d}dsdt$, donde $d = \left[(x-s)^2 + (y-t)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Via argumentos de cálculo diferencial, se obtiene $U_x = U(x,y,0) = \int k(x-s, y-t)f(s,t)dsdt$, donde $k(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Es decir, U_x, es reprsentada vía una integral singular.

Veamos otra situación al respecto. Sea $f(z)$ una función analítica en $Im(z) > 0$ tal que $zf(z) \in L^\infty$. Si $f|_{\text{Re z}} = u(x) + iv(x)$, entonces se verifica que
$f(z) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{t-z}dt$. Si $Im(z) \to 0$, se obtiene $v(x) = lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt$, representación que es llamada la transfomada de Hilbert de una función de u.

Se observa que debido a la singularidad del núcleo en $x = t$, la integral es absolutamente divergente.

De un modo general, la transformada de Hilbert de una función $f(x)$ es definida, para $x \in \mathbb{R}^1$, vía

$$H : f \to Hf(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt = \lim Hf(x).$$

Definida la transformada de Hilbert de una función, la tarea fue construir una teoría que probara su existencia y su relación con la función dada. En esta ruta se tuvieron: (i) la teoría L^2, (ii) la teoría L^p, $1 < p < \infty$, y (iii) la teoría L^1. Brevemente veamos estas teorías. En L^2 el estudio se hace usando la transformada de Fourier, las convoluciones de funciones, el vital teorema de Plancherel; es la teoría " buena"pues la teoría $\mathbb{R}^1$ es extendida al caso $\mathbb{R}^n$. Respecto a L^p se usan argumentos de las funciones analíticas de una variable compleja; la teoría no es factible extenderse al caso $n > 1$; se necesitan nuevas ideas! .... El resultado principal es debido a Marcel Riesz que afirma que el operador de Hilbert H es de tipo fuerte (p, p). [En general un operador lineal $T : L^p \to L^q$, $1 \leq p, q \leq \infty$, es de tipo fuerte (p, q) si existe una constante $C_{p,q}$ tal que $||Tf||_{L^q} < C_{p,q}||f||_{L^p}$, $f \in L^p$]. La teoría L^1 es el caso crítico pues el operador H no es de tipo $(1, 1)$, pero si de tipo - débil $(1, 1)$. [Un operador $T : L^p \to L^q$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ es de tipo - débil (p, q) si existe una constante C tal que $W_T(\lambda) \leq \left(\frac{1}{\lambda}C||f||_{L^p}\right)^q$, para todo $\lambda > 0$. Si T es de tipo fuerte (p, q) entonces es de tipo-débil (p, q); el recíproco no es clerto en general].

8.4. Trasformada de Hilbert en $\mathbb{R}^n$. Teoría de C - Z. La teoría clásica de C-Z estudia al operador

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)dy.$$

Veamos esto un poco más explícito. La función $k(x)$ es homogénea de grado α (> 0) si para todo $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene $k(\lambda x) = \lambda^\alpha k(x)$; sea ahora la bola unitaria $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n/|x| = 1\}$. Si $x \neq 0$, la proyección de x sobre Σ es $x' = \frac{x}{|x|}$; de esta manera, si $k(x)$ es homogénea de grado α, se tiene $k(x) = |x|^\alpha k\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha k(x')$. La función $\Omega(x) = k(x')$ es llamada "función característica" de $k(x)$.
Sea ahora $k(x)$ un núcleo homogéneo de grado negativo, esto es, $k(\lambda x) = \lambda^{-\alpha}k(x)$ y sea la convolución

$$(k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy.$$

La Integral $\int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$ es llamada una **integral singular** si $\alpha = n$. La integral es tomada en el sentido valor principal, esto es,

$$\begin{aligned} Tf(x) &= v.p\int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon} k(x-y)f(y)dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} k_\epsilon(x-y)f(y)dy, \end{aligned}$$

donde $k_\epsilon(x) = k(x)$ si $|x| > \epsilon$, $= 0$ si $|x| \leq \epsilon$. En estas condiciones se verifica;

(i) si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, y $\Omega(x) \in L^1(\Sigma)$, entonces existe $T_\epsilon f(x)$ ctp;

(ii) si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, y $\Omega(x)$ es limitada, entonces $T_\epsilon f(x)$ existe en todas partes.

Bien, respecto al **operador integral singular** T, cómo garantizar la existencia de $Tf(x)$? ....
Con tal objetivo se asume que: (iii) $\Omega \in L^1(\Sigma)$ y (iv) $\int_\Sigma \Omega(x')d\sigma = 0$. Se tiene el

Teorema 8.1. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap \Lambda_\alpha$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$; asumamos que $\Omega(x)$ satisface las condiciones (iii) y (iv). Entonces $Tf(x) = lim_{\epsilon\to 0}T_\epsilon f(x)$ existe ctp. Si además $\Omega(x) \in L^\infty$ entonces $Tf(x)$ existe en todas partes.*

El operador T es continuo de L^p en L^p, $1 < p < \infty$.
Veamos. En la integral singular, el núcleo $k(x)$ se descompone en la forma $k(x) = \frac{1}{2}[k(x) + k(-x)] + \frac{1}{2}[k(x) - k(-x)]$, donde el primer sumando es una función par, y el segundo una

función impar; de esta manera $\Omega(x')$ es una función par si se tiene $\Omega(-x') = \Omega(x')$, y es impar si $\Omega(-x') = -\Omega(x')$ y en este caso Ω tiene valor medio sobre Σ. Se tiene los

Teorema 8.2. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$; se asume que Ω es una función impar e integrable sobre Σ. Entonces se tiene:*

(i) $||T_\epsilon f|_{L^p} \leq C_p||f||_{L^p}$;

(ii) existe $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $||T_\epsilon f - Tf||_{L^p} \to 0$, *si* $\epsilon \to 0$;

(iii) $||Tf||_{L^p} \leq C_p||f||_{L^p}$, *esto es, T es un operador continuo en L^p, $1 < p < \infty$.*

Teorema 8.3. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, supongamos que Ω sea una función par y que $\int_\Sigma (x')d\sigma = 0$ y que $\Omega \in L\log^+ L(\Sigma)$ [esto significa que $\int_\Sigma |\Omega(x')| \log^+ |\Omega(x')| d\sigma < \infty$, donde por definición $\log^+ |h(x)| = \log|h(x)|$, si $|h(x)| \geq 1$; $= 0$, si $|h(x)| < 1$].*

Entonces se tienen (i), (ii) y (iii) del Teorema 8.2
Otros dos importantes resultados en esta dirección son

Teorema 8.4. *Sea $k(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que:*

(a) $|\hat{k}(x)| \leq C'$, *para todo x, $\hat{}$ es la transformada de Fourier;*

(b) existe $C'' > 0$ *tal que para todo* $y \neq 0$, $\int_{|x|\geq 2|y|} |k(x-y) - k(x)|dx \leq C''$.

Si $f \in L^1 \cap L^p$, $1 < p < \infty$, el operador $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$ es de tipo (p,p), esto es

$$||Tf||_{L^p} \leq C_p||f||_{L^p}, \text{ con } C_p = C_p(C', C'', n).$$

Teorema 8.5. *Bajo las hipótesis del teorema 8.4, sea el operador $T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO$. Entonces T es un operador continuo.*

Respecto al espacio BMO digamos lo siguiente. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se define el operador maximal $M^\# f(x)$ de f vía $M^\# f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|dy$, donde $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados, $|Q| < \infty$ (medida de Q) y $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$ es el promedio de f. Entonces, por definición, se dice que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es una función de **oscilación media acotada** (BMO, en inglés), y se escribe $f \in BMO$, si $M^\# f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como corolario se observa que $L^\infty \subset BMO$. El recíproco no es cierto en general pues $f(x) = log|x| \in BMO$.

Otro ejemplo de integral singular, análoga a la tranformada de Hilbert, es la transformada de M.Riesz R. Veamos. Por definición, la transformada de Riesz de f es $R_j f(x) = C_n$ v.p. $\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}} * f(x)\right)$, $x \neq 0$, donde $C_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\pi^{\frac{n+1}{2}}\right) - 1$.

Se verifica que $\mathbb{R}_j$, es un operador auto adjunto y $R_jR_i = R_iR_j$. Además sirve para definir al operador Λ, muy importante en las EDP. Veamos unas ideas. Sea $k \geq 1$ entero. Por definición

$$L^p_k(\mathbb{R}) \equiv L^p_k = \{f \text{ distribuciones temperadas } / D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k\}.$$

Si $f \in L^p_k$, entonces $R_j f \in L^p_k$. Sea $f \in L^p_k$, $1 < p < \infty$, $k \geq 1$ entero, entonces por definición

$$\bigwedge f(x) = i\sum_{j=1}^n R_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \quad i = (-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Es importante remarcar que el operador $\bigwedge$ es un puente entre los operadores diferenciales parciales y los operadores integrales singulares. Veamos. Se tiene

Teorema 8.6.

(a) Si $f \in L^p_k(\mathbb{R}^n)$, $k > 1$, *entonces* $\bigwedge f \in L^p_{k-1}(\mathbb{R}^n$;

(b) $i\frac{\partial}{\partial x_j} f = R_j \bigwedge f = \bigwedge R_j f$;

(c) $\Delta f = -\bigwedge^2 f$ *si $k \geq 2$, donde Δ es el laplaciano.*

Demostración

(a) Se sabe que en general $D^\alpha : L^p_k \to L^p_{k-1}$, $1 < p < \infty$, es un operador continuo (ver [28]), es decir, si $f \in L^p_k$ entonces $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in L^p_{k-1}$; además R_j preserva la clase L^p pues R_j es un operador integral singular.

(b) Se tiene $R_j \bigwedge f = R_j i \sum_{j=1}^n R_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f = i \sum_{j=1}^n R_j R_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f = i \sum_{j=1}^n R_\alpha R_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f$ (pues $R_i R_j = R_j R_i$) $= i \sum_{j=1}^n R_\alpha R_\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} f$ (pues en general $R_j \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} R_j$ y $\frac{\partial}{\partial x_i} R_j = \frac{\partial}{\partial x_j} R_i$) $= i \frac{\partial}{\partial x_j} f$ (pues $\sum_{j=1}^n R_j^2 = I$, donde I es el operador identidad en L^p). En forma análoga se demuestra que $\bigwedge R_j = i \frac{\partial}{\partial x_j}$.

(c) Se tiene

$$\begin{aligned}
\bigwedge{}^2 f &= i \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} R_j \bigwedge f \\
&= i \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \bigwedge R_j f \\
&= i \sum_{j=1}^n \bigwedge R_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \\
&= i^2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n R_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) R_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \\
&= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \\
&= -\Delta f
\end{aligned}$$

□

De un modo más general, en esta ruta, veamos lo siguiente. Sea el polinomio $P(x) = \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha(x) x^\alpha$, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. A $P(x)$ se le asocia el operador diferencial parcial $P(D) = \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$. Sea $f \in S$, donde S es el espacio de las funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \varphi(x) = 0$. Entonces se verifica que $\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\right]^\wedge (x) = 2\pi i x_j \hat{f}(x)$; y por iteración se tiene
$[P(D)f]^\wedge(x) = P(2\pi i x)\hat{f}(x)$.
En particular se obtiene, $[\Delta f]^\wedge(x) = |2\pi i x|^2 \hat{f}(x) = -4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x)$ y
$[-\bigwedge^2 f]^\wedge(x) = -4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x)$.

Nota 8.1. *La literatura sobre análisis armónico, sobre los operadores integrales singulares y sobre los operadores diferenciales parciales es extensa actualmente; el lector interesado en ampliar su información sobre los temas tratados en este escrito, y mucho más, puede consultar [29], [30], [32], [28], [10], [33], [11], [14], por ejemplo.*

8.5. Breves Comentarios Finales. La evolución de lo tratado en este escrito ha sido muy grande y se continúa investigando en estas temas, y otros relacionados. El objetivo de este artículo es dar algunas ideas del análisis armónico y su relación con las EDP; de motivar a jóvenes y colegas por estudiar estas importantes y bellas áreas de la matemática y sobre todo por sus aplicaciones al mundo físico, a la realidad física en donde se encuentran diversos problema que requieren de modelos matemáticos, que con frecuencia son ecuaciones en derivadas parciales, en donde los operadores integrales son muy útiles.

En efecto, se introdujeron otras dases generales de transformaciones, como los llamados " operadores integrales de Fourier", los que fueron iniciados por P. Lax en 1957 y desarrollados por distintos analistas como L.Hörmader en 1971. Estas operadores fueron, y son, útiles en el estudio de las soluciones de ecuaciones hiperbólicas lineales. Así mismo, los métodos y técnicas del análisis armónico para estudiar problemas de valor de contorno fueron ampliamente investigados sobre la base de la Escuela de Calderón-Zygmund, en particular de los trabajos de Calderón, que se iniciaron en 1950. Sobre estos temas confiamos poder decir algo posteriormente, siempre con el objetivo de introducir las ideas y algunos resultados de estas capítulos del análisis moderno en nuestro país, pues creemos que el análisis armónico y las EDP no son bien conocidas no obstante que ellas contribuyen enormemente al desarrollo de la ciencia y de la tecnología!

Author contributions. El autor es responsable de la definición, selección y discusión del material.

Funding. Este trabajo no ha recibido fondos externos .

Conflicts of interest. Declaro que no hay conflicto de interés.

ORCID and License
Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] de Guzmán M. Impactos del análisis armónico. Madrid: Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 1983.

[2] Brezis H, Browder F. Partial differential equations in the 20 th century. Advances in Mathematics. 1998.

[3] Zygmund A. Trigonometric series. Cambridge: Cambridge Univ Press Cambridge. 1968; (2da Ed).

[4] Avila G. Evoluçao dos conceitos de função e de integral. Matemática Universitaria. 1985.

[5] Carslaw HS. Introduction to the theory of Fourier's series and integrals. Dover Pub. 1930.

[6] Figueiredo D. Análise de Fourier e equaçoes diferenciais parciais. Projeto Euclides. 1977.

[7] Gasquet C, Witomski P. Analyse de Fourier et applications. Masson. 1990.

[8] Kestelman H. Modem theories of integration. Dever Pub. 1960.

[9] Myint UT. Partial differential equations of mathematical physics. Amer Elsevier Pub.Comp. 1973.

[10] Torchinsky A. Real-variable methods in harmonic analysis. USA: Acad Press. 1986.

[11] Ortiz A. Aspectos básicos en ecuaciones en derivadas parciales. Notas de Matemática UNT. 1988;3

[12] Ortiz A. La matemática a través de clásicas áreas. Lima: PUCP UNT. 2017; Vol. 3.

[13] Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 1966;(116).

[14] Ortiz A. Algunos aspectos en las EDP. Los problemas de Dirichlet y de Cauchy. Selecciones Matemáticas UNT. 2024;11(1):153 188.

[15] Nirenberg L. Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1957.

[16] Hörmander L. Linear partial differential operators. Academic Press INC Pub Springer - Verlag. 1963

[17] Tréves F. Linear partial differential equations with constant coefficients. Gordon and Breach. 1966.

[18] Tréves F. Basic linear partial differential equations. Academic Press. 1975.

[19] Bers L, John F, Schechter M. Partial differential equations. Interscience Publis John Wiley. 1964.

[20] Glowinski R. Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer-Verlag. 1984.

[21] Yosida K. Functional analysis. Springer-Verlag. 1966.

[22] Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics I. Partial differential equations II. Interscience Publishers. 1962

[23] Ekeland I. On the variational principie. Jour of Math Analysis and Appl. 1974; 47.

[24] Figueiredo D. Lectures on the Ekeland variational principie with applications and detours. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research. 1989.

[25] Ekeland I. Nonconvex minimization problems. Bull of the AmerMathSoc. 1979; Vol 1 No 3.

[26] Evans L. Partial differential equations. Graduate Sudies in Math A M S. 1998; Vol 19.

[27] Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer. 2010.

[28] Neri U. Singular integral operators and distributions. Univ of Maryland Lecture Notes. 1968. Springer. 2006; No 4.

[29] Calderón AP, Zygmund A. On the existence of certain singular integrals. Acta Mathematics. 1952; 88.

[30] Calderón AP, Zygmund A. Singular integral operators and differential equations. Amr Journal. 1958;Vol. LXXX. No 1.

[31] Sadosky C. Interpolation of operators and singular integrais. New York: Marcel Dekker. 1979.

[32] Zygmund A. Intégrales singuliéres. Pub du Semin de Math D'orsay. 1965.

[33] Cuerva JG, de Francia JR. Weighted norm inequalities and related topics. New York: North-Holland. 1985.