Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(2):326-356.

REVIEW

Brief introduction to distributions and to Hörmander spaces $\mathscr{B}_{p,k}$

Breve introducción a las distribuciones y a los espacios de Hörmander $\mathscr{B}_{p,k}$

Alejandro Ortiz Fernández

A la memoria de mi profesor y amigo Dr. Geraldo Avila; por los felices días que recibí sus enseñanzas en la U. N. Brasilia.

Received, Feb. 24, 2024; *Accepted, Oct. 20, 2024;* *Published, Dec. 27, 2024*

How to cite this article:
Ortíz F. *Breve introducción a las Distribuciones y a los espacios de Hörmander $\mathscr{B}_{p,k}$* . Selecciones Matemáticas. 2024;11(2):326–356. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.02.09

Abstract

Partial differential equations (PDE's) are, we believe, little known in our country, especially at a medium - advanced level, in particular, their historical roots and methods developed in their evolution. The objective of this article is to contribute to a knowledge in this direction especially to colleagues and students who are interested in studying and researching in this central branch of mathematics. As a model we have chosen Hörmander's book, [1], whose study and teaching will be a sign of great progress in this direction in our country. In this article we only give an introduction to part I dedicated to functional analysis and which includes chapters I and II that deal with the theory of distributions and some special spaces of distributions, respectively.
Keywords . Weak solution, Sobolev space, distribution, Dirichlet, Hörmander space.

Resumen

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son, creemos, pocas conocidas en nuestro país, sobre todo a nivel medio - avanzado; en particular, de sus raíces históricas y métodos desarrollados en su evolución. El objetivo de este articulo es contribuir a un conocimiento en esta dirección sobre todo a los colegas y estudiantes que tengan interés en estudiar e investigar en esta central rama de la matemática. Como modelo hemos escogido el libro de Hörmander, [1], cuyo estudio y enseñanza será un signo de gran progreso en esta dirección en nuestro país. En este artículo solo damos una introducción a la parte I dedicada al análisis funcional y que comprende los capítulos I y II que tratan la teoría de distribuciones y algunos espacios especiales de distribuciones, respectivamente.
Palabras clave. Solución débil, espacio de Sobolev, distribución, Dirichlet, espacio de Hörmander.

*Universidad Nacional de Trujillo, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. **Correspondence author** (jortiz@pucp.edu.pe).

1. Introducción y Algunas Ideas Sobre la Evolución de las EDP. Desde la Antigüedad el hombre siempre ha deseado explicar la naturaleza que lo rodeaba. Tuvo que pasar muchos siglos para llegar a tener un recurso matemático para satisfacer tal anhelo. Así, llegamos al siglo XVII en que se crea el cálculo infinitesimal, un lenguaje que ya permitió explicar hasta problemas del cosmos. Es en el siglo siguiente, el XVIII, en que se desarrollan las ecuaciones diferenciales, en particular las ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Es en el estudio de los fenómenos de la naturaleza en que surgen las EDP; estas son las ecuaciones de la física matemática. Se deben contribuciones a D'Alembert, Euler, D. Bernoulli, Lagrange, ...; por esta época surgió el problema de la cuerda vibrante lo que condujo a la ecuación de la onda. Ella fue motivada por la investigación de los sonidos causados por una cuerda, un tambor u otros instrumentos que produzcan sonidos en el aire. En general se estudiaron las leyes del movimiento de las ondas que se propagan en un fluido, y esto abrió el área de la hidrodinámica en donde se introdujeron diversas ecuaciones en derivadas parciales. Debemos destacar que el estudio de las ondas en el aire motivó la investigación de los sonidos producidos por instrumentos musicales , investigación que fue iniciada por Daniel Bernoulli en 1739, y luego continuada por Euler y Lagrange. Por otra parte, sabemos que Newton aplicó el cálculo en la atracción gravitatoria de los cuerpos celestes; este problema fue continuado en el siglo XVIII, en donde se destaca el trabajo de Laplace.

Según Brezis - Browder, [2], la investigación de las EDP comenzaron en el siglo XVIII con los trabajos de Euler, D'Alembert, Lagrange y Laplace quienes estudiaron analíticamente los modelos que surgieron en la física -matemática, actividad que aún se conservan actualmente, en el siglo XXI. En esta dirección está la teoría del potencial; veamos algunas ideas. (Ver [3] para mayores detalles). Desde la época de Newton, el cálculo fue usado para estudiar la atracción gravitacional de una masa sobre otra. Las EDP se desarrollaron también con este tipo de investigaciones; así en el siglo XVIII un problema era determinar la magnitud de tal atracción gravitacional, como la atracción del Sol sobre la Tierra; esto implicaba que debemos conocer la forma de la Tierra para calcular la atracción gravitatoria. En este campo se tienen los trabajos de Maclaurin, de Clairaut, alrededor de 1742. Desde la época de Newton se hicieron esfuerzos en esta dirección; luego de diversos cálculos se llegó a establecer que el potencial gravitacional, debido a una distribución continua de masas satisface a la ecuación de Laplace (1782) $\Delta V = 0$ (ecuación del potencial) donde $V = \int_{\infty}^{r} (\frac{m}{r^2}) dr = \frac{m}{r}$, que se interpreta como el trabajo para atraer una partícula de masa unitaria bajo la atracción de una partícula de masa m que está en un punto, desde el infinito hasta otro punto. Para algunos detalles ver, por ejemplo, [4]. El trabajo de Laplace sobre la solución de la ecuación del potencial motivó diversos e importantes trabajos sobre este tema, actividad que continúa aún.

Los problemas relacionados con la realidad física habían conducido a EDP de segundo orden, y poco a las de primer orden. Estas, porque se resolvían vía integración o mediante algún artificio. Una ecuación de primer grado es de la forma, [3] pag. 705,

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \tag{1.1}$$

donde P, Q y R son funciones de x, y, z. Estudiando la forma de la Tierra, Clairaut (en 1739) encontró una ecuación de esta forma. Él nos dice que si existe una función $u(x, y, z)$ tal que

$$du = P dx + Q dy + R dz,$$

entonces se tiene $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

Esta contribución de Clairaut está latente para resolver (1.1). Por otro lado, si P, Q y R son las componentes de la velocidad del movimiento de un fluido, entonces (1.1) es una diferencial exacta. Además nos dice que en el caso de no ser exacta es factible encontrar una función tal que al multiplicarla con la ecuación dada, entonces el primer miembro de (1.1) es una diferencial exacta. En esta dirección debemos también aportes de Lagrange, quién clasificó a las ecuaciones de primer orden no lineales. Ver [3], Cap. 22 para mayores detalles. Ahora veamos otro importante concepto en las EDP: las curvas características. G. Monge, un notable geómetra, observó que algunos problemas sobre superficies conducen a ecuaciones diferenciales parciales; estudiando estas ecuaciones Monge introdujo un nuevo concepto: el de curvas características, idea que no fue bien aceptada por sus contemporáneos. Veamos brevemente algunas ideas al respecto.

Una EDP de primer orden es una ecuación de la forma

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1.2}$$

donde $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial u}{\partial y}$; se asume que F es de clase C^2 en un dominio D del espacio de las cinco variables x, y, u, p, q. La función u depende de x e y. Al respecto se dice que: una función

$z = u(x, y)$, que es solución de (1.2), es geométricamente una superficie en el espacio (x, y, z) y es llamada una “superficie integral”de (1.2). En particular sea la EDP casi-lineal:

$$f(x, y, u)p + g(x, y, u)q = h(x, y)u + d(x, y), \tag{1.3}$$

ecuación que se escribirá en la forma:

$$Pp + Qq = R, \tag{1.3'}$$

donde $P = f(x, y, u)$, $Q = g(x, y, u)$ y $R = h(x, y)u + d(x, y)$. Bien, Lagrange redujo el problema de encontrar la solución general de (1.3’) al de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{1.4}$$

Él verifica que $\phi(\phi_1, \phi_2) = 0$, donde ϕ es una función arbitraria, es solución general de (1.3’) siempre que $\phi_1(x, y, z) = a$ y $\phi_2(x, y, z) = b$ sean dos soluciones de (1.4), donde a y b son dos constantes arbitrarias y donde al menos una de las ϕ_1 ó ϕ_2 dependen de $z = u$.

Ahora veamos la idea de curva característica .Sea la ecuación

$$f(x, y, u)p + g(x, y, u)q = h(x, y, u). \tag{1.5}$$

Vía algunos argumentos geométricos se observa que (f, g, h) es un campo de direcciones, que se llama un campo de direcciones características. Las curvas características son curvas dadas por la ecuaciones

$$\frac{dx}{f(x, y, u)} = \frac{dy}{g(x, y, u)} = \frac{dz}{h(x, y, u)}$$

las que se pueden escribir en la forma: $\frac{dx}{dt} = f(x, y, u)$, $\frac{dy}{dt} = g(x, y, u)$, $\frac{dz}{dt} = h(x, y, u)$. Se observa que a través de cada punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie (mencionada arriba) pasa una curva característica, $x = x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y = y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z = z(x_0, y_0, z_0, t)$.

Nota 1.1. *Se prueba que el problema de Cauchy para este tipo de ecuaciones tiene solución única con la ayuda de las curvas características. Para mayores detalles ver, por ejemplo [5], [6], [7] ó algún libro sobre EDP.*

En síntesis podemos decir que en el siglo XVIII se dieron los fundamentos de la teoría de las EDP de primer orden y que ellas fueron reducidas a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. También en este siglo, y al comienzo del siglo XIX, surgieron las clásicas EDP’s de segundo orden, las que fueron arduamente estudiadas posteriormente. Ver [2]. Así, la ecuación de la onda 1-dimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ fue introducida e investigada por D’Alembert en 1752 al estudiar el problema de la cuerda vibrante, tema que fue también estudiada por Euler en 1759 y por D.Bernoulli en 1762 en el caso 2 y 3-dimensional estableciéndose la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u$. Así mismo, vimos que Laplace estudió el potencial gravitacional en 1782 dándonos su famosa ecuación $\Delta u = 0$. Estudiando los flujos de fluidos incompresibles, Euler llegó a establecer la respectiva EDP en 1755; ver [2] y [3] para mayores detalles.

1.1. Las EDP en el Siglo XIX. El siglo XIX fue una época de grandes y revolucionarios decubrimientos. En el campo de las EDP también hubieron grandes conquistas, sobre todo al inicio del siglo en que la contribución de Fourier y su obra sobre las series trigonométricas fue el inicio de fundamentales teorías matemáticas que habrían de influir mucho en nuevas conquistas en el siglo XX. Este progreso fue debido a la conexión entre las EDP’s y la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja. Así, Cauchy, en 1827, nos dijo: dos funciones reales regulares u y v, en las variables x e y, son las partes real e imaginaria de un función compleja analítica, de variable compleja $z = x + iy$, **si ellas satisfacen el sistema de Cauchy-Riemann**, ecuaciones de primer orden: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Es oportuno remarcar que para Riemann estas condiciones fueron la base para definir a las funciones analíticas y estudió las propiedades de estas funciones estudiando las de las funciones armónicas en el plano.

En este siglo, las EDP continuaron las investigaciones hechas en el anterior; nuevos fenómenos físicos fueron investigados y surgían nuevos tipos de ecuaciones diferenciales. Esto fue muy importante porque otras áreas, como la física y la ingeniería, también progresaron. De esta manera, los problemas del mundo físico indicaban que tipo de ecuaciones deberían ser utilizadas; aún no había los criterios generales que actualmente existen. En este ambiente surge el gran aporte que hizo **Joseph Fourier** (1768-1830), un físico-matemático francés cuyo nombre es aún reconocido en nuestros días por la gran influencia de su obra sobre el flujo del calor. Entre otros aspectos, había el interés de determinar la temperatura en el interior de la Tierra, cómo varía esa temperatura respecto al tiempo. Era un problema de interés para la tecnología de entonces, con aplicaciones en la industria. En 1807 Fourier presentó un ensayo sobre la conducción del calor a la Academia de Ciencias de París, el que fue revisado por Lagrange, Laplace y Legendre (las “tres eles”) y fue rechazado!. La Academia, en mérito a su propuesta, le invitó a seguir desarrollando sus ideas y que presente el trabajo para el Premio de 1812. Fourier siguió trabajando en su proyecto y en 1811 ganó el premio pero ... fue criticado por su falta de rigor y por tal motivo su trabajo no fue publicado en las Actas de la Academia. Naturalmente esto resintió mucho a Fourier y continuó investigando en el importante tema sobre el calor. Así, en 1822 Fourier publicó un trabajo que habría de marcar una etapa en la matemática pura y en la aplicada; publica su clásico “Teoría Analítica del Calor”. Una obra que mereció los más grandes elogios de los matemáticos del siglo XIX y aun del XX.

Veamos algunos comentarios relacionados con este trabajo. Como ya hemos mencionado, el problema de la vibración de una cuerda fija en sus extremos conduce a la ecuación $u_{tt} = C^2 u_{xx}$ y fueron D'Alembert, Euler y Daniel Bernoulli los primeros en intentar resolverla. D'Alembert y Euler establecieron que la solución era de la forma general $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, con apropiadas condiciones sobre F y G. Por otro lado, Bernoulli llegó a la representación de la solución en serie trigonométrica de la forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)cos(nct)$. Se observa que las soluciones dadas por D'Alembert y por Euler son las mismas; en esa época la noción de función no estaba bien formalizada y la diferencia entre ambas soluciones está en el tipo de función que ellos consideraron.

El gran mérito de Fourier está en el buen uso de las series trigonométricas para resolver un problema del mundo físico y ahí introdujo ideas y métodos que habrían de ser refinadas en años posteriores y dieron lugar a notables teorías matemáticas. Pero, y esto es importante resaltar, hubieron en el siglo XVIII precursores sobre la representación de una función vía una serie trigonométrica. Así, Lagrange en 1759 considera una cuerda de longitud 1 que en su posición inicial es $f(x)$ y su velocidad inicial es $g(x)$; en estas condiciones la solución de la ecuación de las ondas (un problema de valor inicial!) es dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi y)sen(n\pi x)cos(n\pi ct)f(y)dy \\ &\quad +2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi y)sen(n\pi x)cos(n\pi ct)g(y)dy. \end{aligned}$$

En [7] Figueiredo observa que si Lagrange hace $t = 0$, permuta la integral con la sumatoria, entonces se obtiene la representación de una función en una serie de senos ,cuyos coeficientes son los llamados “coeficientes de Fourier”. Fue Fourier, precisamente, quien explicitó tales coeficientes en sus famosas series de “Fourier” al escribir la solución como una serie es senos y cosenos, cuyos coeficientes dependen de f y de senos y cosenos. Veamos con poco más de detalles: en su memoria de 1822 Fourier considera que una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-\pi,\pi)$ puede ser expresada como la suma:

$$f(x) = a_0 + (a_1 cosx + b_1 senx) + (a_2 cos2x + b_2 sen2x), \tag{1.6}$$

donde $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$, $n \geq 1$. Fourier afirmó que cualquier función $f(x)$ puede ser representada por la expresión (1.6), aún cuando Fourier no llegó a dar una prueba completa con respecto a que una función “arbitraria”se podía representar con una serie, como en (1.6); sin embargo su trabajo estimuló mayores progresos en el análisis matemático, en particular en las EDP y en dar rigor a la noción de función, aún cuando Lagrange negó tales representaciones en series de ”Fourier”.

El método usado por Fourier motivó a otros matemáticos, como S.D.Poisson quién fue un notable físico-matemático y trabajó en la teoría del calor y fue uno de los fundadores de la teoría de la elasticidad; él llegó a pensar que todas las EDP se podían resolver mediante series. En este escenario surge la contribución de Dirichlet, quien fue uno de los primeros en afirmar que “ no toda función se puede reprensentar por su serie de Fourier”. En 1892 y en 1837 dio los primeros criterios para que se tenga tal representación. Por esta época se debe mencionar también los aportes de Cauchy quién trabajó para hacer un cálculo infinitesimal con más rigor; fue un pionero del análisis matemático; también surgió las contribuciones de Riemann, quién investigó condiciones necesarias y suficientes para que una función sea representable por sus series de Fourier. Dirichlet ya había obtenido ciertas condiciones para tener la suficiencia. Se remarca que la familiar integral de Riemann surgió en el estudio de la series de Fourier.

1.2. En el siglo XX se introdujeron algunos métodos para resolver EDP. Satisfaciendo ciertas condiciones extras, como son las condiciones de contorno. Mencionemos algunas. Ver. [2] y [3].

(i) **El Método de Separación de Variables**. Este clásico método fue introducido en 1747 por D'Alembert y por Euler en 1748 cuando estudiaron la ecuación de la onda. Así mismo, en el estudio de la "ecuación de Laplace"se usaron métodos análogos por Laplace en 1782 y por Legendre en 1782, donde investigaron los llamados armónicos esféricos. Fourier también usó este método en su trabajo sobre la ecuación del calor.

(ii) **El Método de las Funciones de Green; Teoría del Potencial**. George Green (1793-1841) hizo aportes que permitieron avanzar en las EDP , como fueron sus "identidades de Green"(ver [4], sec.2). Su método de las "funciones de Green" consiste en el estudio de las soluciones singulares de la ecuación de Laplace, soluciones que fueron usadas para representar soluciones que cumplen condiciones generales de contorno, (ver [2]) . Green observó que la solución del problema (de Dirichlet)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en un dominio } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

minimiza la integral $\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2$ entre todas las soluciones $v = \varphi$ sobre $\partial\Omega$. Además, si u minimiza tal integral, la cual es regular, entonces u es una función armónica. En esta dirección está el trabajo de Riemann y su valioso "principio de Dirichlet".

En los tiempos de Newton se investigó sobre la gravitación, estudios que se continuaron en el siglo XIX, bajo el nombre de teoría del potencial. Al respecto Laplace supuso que la ecuación del potencial

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{1.7}$$

donde V es una función de x, y, z, se cumple en cualquier punto (x, y, z), dentro o fuera del cuerpo que ejerce la atracción gravitacional. Sin embargo, Poisson probó que si (x, y, z) cae dentro del cuerpo que atrae, entonces V satisface $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$, donde ρ (función de x, y, z) es la densidad del cuerpo atrayente; esta ecuación se llamó posteriormente "ecuación de Poisson". Se debe decir que alrededor del año 1820 poco se conocía de las propiedades generales de las soluciones de la ecuación del potencial. En este escenario entra G. Green, a quien le debemos el estudio matemático de la electricidad estática y del magnetismo; él condujo la idea de función potencial al campo de la electricidad y del magnetismo. Respecto a la ecuación (1.7), Green nos legó los siguientes teoremas:

Teorema 1.1. *"Sean U y V dos funciones continuas, que dependen de x, y, z, y cuyas derivadas no son infinitas en ningún punto de un dominio arbitrario,* **entonces**

$$\int_\Omega U\Delta V dv + \int_{\partial\Omega} V\frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = \int_\Omega V\Delta U dv + \int_{\partial\Omega} U\frac{\partial V}{\partial N} d\sigma \tag{1.8}$$

donde N es la normal a la superficie del dominio dirigida hacia adentro (normal interior), $d\sigma$ es un elemento de superficie. (Esta ecuación es llamada "la segunda identidad de Green". Ver [4].

Veamos ahora la idea de "función de Green", una idea fundamental en las EDP. Respecto a (1.8), Green probó que la condición de que V y cada una de sus primeras derivadas fueran continuas en el interior del dominio puede ser dado en lugar de una condición de frontera sobre las derivadas de V. Green representó V en el interior del dominio en función de su valor V sobre la frontera, que se asume una función dada; y en términos de otra función U la que es cero sobre la superficie del dominio; y además, en un punto fijo P en el interior, la función U se hace infinita como $\frac{1}{r}$, donde r es la distancia de otro punto cualquiera a partir de P; aún, U debe satisfacer la ecuación del potencial (1.7) en el interior del dominio. Entonces, bajo estas condiciones, V puede ser representada en todo punto interior por $V = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} V\frac{\partial U}{\partial N} d\sigma$, donde la integral es sobre la superficie del dominio y $\frac{\partial U}{\partial N}$ es la derivada normal interior de U. Riemann llamó a esta función U, introducida por Green, "función de Green". Por este camino Green llegó al uso del principio de Dirichlet. Para una versión más analítica de la función de Green ver- [4], sección 2.

1.3. Las EDP en las Últimas Décadas del Siglo XIX. Alrededor del año 1870 el análisis matemático entra a una etapa de rigor por obra de Weierstrass, lo que influyó para que las EDP sean estudiadas con el también rigor necesario, como fueron los problemas de existencia de soluciones. Tal fue el caso del problema de Dirichlet estudiado por Riemann en 1851. Veamos. Se trata de encontrar la solución de la ecuación $\Delta u = 0$ en $\Omega \subset R^n$ tal que $u = \varphi$ sobre $\partial\Omega$. La idea de Riemann fue reducir la solución de este problema a la existencia de una función regular que minimice a la integral de Dirichlet $\phi(v) = \int_\Omega \sum_{i=1} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$ (donde ∇ es el gradiente) sobre la clase de las funciones satisfaciendo la condición $v = \varphi$ sobre $\partial\Omega$. El principio de Dirichlet dice: "u es solución del problema variacional $\phi(u) = min\phi(v)$ **si y solo si** u es solución del problema de Dirichlet citado". (El mínimo es asumido en la clase de funciones mencionada arriba). Riemann no probó el principio y asumió que tal mínimo existe por consideraciones físicas. Años más tarde Weierstrass construyó un ejemplo en que tal función minimizante no existe. Se buscaron otros caminos para resolver el problema de Dirichlet, uno de ellos fue, precisamente, el de la función de Green. Otros métodos que se introdujeron fueron el de Perron, el de Poincaré (método del "barrido"), el método alterno de Schwarz (1870), C. Neumann introdujo el método de las ecuaciones integrales (1877) método que fue desarrollado por Poincaré, Fredholm y D. Hilbert. Para mayores detalles sobre estos métodos ver [8], [9] y [10]. Para mayores datos sobre el trabajo de Poincaré en las EDP, ver [2], sec.5.

2. Las EDP en el Siglo XX. En el siglo pasado la matemática se desarrolló notablemente en base a muchos progresos logrados en el anterior siglo; se consolidaron muchas teorías, en especial en el análisis matemático, el surgimiento de los espacios abstractos, el análisis funcional, los espacios de Hilbert, posteriormente los de Banach, y otras ramas, todo ello permitió nuevas conquistas, en particular en las EDP. El inicio de siglo fue inaugurado con el Congreso Internacional de Matemática celebrado en París en 1900, en donde D.Hilbert planteó 23 problemas a ser resueltos en el sigio XX. Respecto a las EDP los problemas 19 y 20 fueron dedicados a ellas; así en el 19 la tarea es relativo a la regularidad de las soluciones de las EDP, más concretamente ver la analiticidad de las soluciones; era un problema de regularidad para una clase de ecuaciones diferenciales parciales elípticas con coeficientes analíticos. Este problema fue resuelto, independientemente , por Ennio de Giorgi y por John Nash. Para ecuaciones generales elípticas no-lineales de segundo orden, esta cuestión fue resuelto por S.Bernstein.

El problema 20 trata la cuestión de la existencia de soluciones de problemas de valor contorno, en particular sobre la existencia de soluciones las cuales minimizan principios variacionales. En esta ruta, Hilbert estuvo interesado en revivir el "principio de Dirichlet" y a principios de los 1900's hizo algunas contribuciones las que fueron difíciles de seguir pero tuvo el mérito de estimular la investigación de esta cuestión por parte de otros analistas, como fueron H. Lebesgue, B. Levi, G. Fubini, S. Zaremba, R. Courant, ... Por esta época se comienza a aplicar ideas y métodos del análisis funcional en el estudio de las EDP. Se debe remarcar que Hilbert usó los resultados de H. Poincaré y de Fredholm para estudiar las ecuaciones integrales lineales. También surgen tareas para las EDP no-lineales y semi-lineales; en este terreno se destaca los aportes de S. Bernstein quién en 1906 estudia la solución del problema de Dirichlet para ecuaciones elípticas no - lineales. Veamos algunos ejemplos de problemas de Dirichlet en estos contextos, ver [2], pags.86 y 87,

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f(x) & \text{... en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u - u^2 = f(x) & \text{... en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u + tu^3 = f(x) & \text{... en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u - tu^2 = f(x) & \text{... en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para mayores detalles sobre este tema ver [2].

2.1. Hacia las Soluciones Débiles. Las conquistas que se producían en las EDP en las primeras décadas del siglo XX fueron, en gran parte, al uso de nuevas técnicas que venían del análisis funcional, los espácios de funciones, la topología,la integral de Lebesgue, ... Así surgían nuevos aportes que ampliaban y aclaraban dudas tenidas en el siglo pasado. Una de las áreas de las EDP que tuvieron mucha atención fueron las ecuaciones elípticas lineales de segundo orden; por ejemplo ecuaciones del tipo:

$$Au = \sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)u = f(x). \tag{2.1}$$

La tarea fue estudiar las soluciones de ecuaciones del tipo (2.1) y análogas. Una importante técnica que se usó fue la introducción de las condiciones de Hölder (O.Hölder, 1882) en sus estudios sobre la teoría del potencial y se consideraron los "espacios de Hölder" en las investigaciones de las EDP.

Para mayores detalles sobre este tema, y otros como la teoría de Leray - Schauder, ver [2].

Entremos a la antesala de los espacios de Sobolev y de la teoría de distribuciones, dos áreas fundamentales en el desarrollo de la teoría de los operadores diferenciales parciales en la segunda mitad del siglo XX, (Hörmander). Veamos la idea de las soluciones débiles. Ver [2]. Estamos en la década de los años 1920's y las soluciones de las EDP fueron entendidas en el sentido clásico, esto es, la función solución satisface a la ecuación dada. El modelo general para el estudio de la solución de problemas de EDP, haciendo uso de los métodos del análisis funcional es

- Generalizar el problema clásico dado a un apropiado problema del análisis funcional y se buscan soluciones en un sentido generalizado, o solución débil, de la teoría de distribuciones en adecuados espacios de Sobolev.
- Se resuelve el problema generalizado usando los fuertes resultados del análisis funcional, como por ejemplo el teorema de de Lax - Milgran.
- Se estudia la regularidad de la solución del problema generalizado, por ejemplo que la solución sea de clase $C^2(\Omega)$.
- Se estudia que la solución generalizada regular sea también la solución clásica del problema dado.

Creemos conveniente ya adelantar la idea de solución débil y posponer para después los detalles del caso: "la función u es solución débil de la EDP $Lu = f$, si $< Lu, \varphi >=< f, \varphi >$ para toda función f que pertenece a un apropiado espacio de funciones definidas como $\mathscr{D}$. Pues bien, hasta los años 1920's se conocían (en general) las soluciones clásicas para un operador diferencial parcial. Según [2], pag. 93, el surgimiento de la idea de solución débil o solución generalizada surgió dado que:

- Si se tiene un problema variacional, por ejemplo la integral de Dirichlet E y una sucesión minimizante $\{u_n\}$, funciones regulares, para E, B. Levi y S. Zaremba observaron que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en la norma asociada a E, y de ahí se vio que es Cauchy en la norma L^2. Ahora, se introdujo la completación H bajo la norma -Dirichlet del espacio de las funciones regulares que satisfacen una dada condición de contorno. En [2] se afirma que esto fue una variante de un proceso que comenzó en el caso de los espacios L^2; el espacio H es un subespacio lineal de L^2 con cierta norma. Entonces, **por definición**: "para cualquier u de H, existe una sucesión de funciones regulares $\{u_n\}$ tal que ∇u_n converge, en L^2, a un límite; límite que puede ser visto como el ∇u, que se interpreta en un **sentido generalizado**. Esta observación aparece en el trabajo de B. Levi y L. Tonelli y fue aceptado por matemáticos como K. O. Friedrichs; C. Morrey, ...
- Otro punto de vista ocurrió en problemas donde la solución del problema es construida como un límite en un procedimiento de aproximación. Se observó que las estimativas sobre las soluciones aproximadas pueden no ser lo suficientemente fuertes para garantizar que el límite sea una solución en el sentido clásico. Pero, aún puede ser posible que este límite comparta algunas propiedades de las soluciones clásicas y pueda tener relaciones derivadas por multiplicación de la ecuación con funciones "text" regulares, y luego integrar por partes. Esto fue hecho en el caso de ecuaciones lineales, como fue el caso de la solución clásica de la ecuación de Laplace

$$\nabla u = 0, \tag{2.2}$$

que satisface

$$\int \nabla u . \nabla \varphi = 0, \tag{2.3}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, que es la clase de las funciones regulares con soporte compacto en Ω; y además

$$\int u\nabla\varphi = 0, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.4}$$

Veamos algunas observaciones importantes al respecto pues ahí está la génesis de lo que vendrá después. Se observó, [2], que (2.3) tiene sentido para cualquier función u en C^1 y aún si u estuviera en el espacio H visto anteriormente. También se vió que (2.4) tiene sentido si u estuviera en L^2, o aún si u estuviera en L^1_{loc}. En general, para ecuaciones elípticas y parabólicas, y para problemas lineales, se demostró que soluciones en el sentido débil (2.4) son soluciones clásicas!. Es oportuno saber que el primer ejemplo explícito de esta aseveración es el notable lema de Weyl ("The method of orthogonal projection in potential theory". 1940) para la ecuación de Laplace. Se remarca que la introducción de las soluciones débiles fue consecuencia del método de completación, como se vio antes, y se convirtió en una metodología central en el estudio de las EDP y en los problemas de valor de contorno!; así el método tuvo dos etapas (ver el modelo general dado antes): **la existencia de soluciones débiles y la regularidad de las soluciones débiles**. Se observa que establecer la regularidad es una tarea difícil y a veces imposible, como en el caso de ecuaciones no-lineales.

3. Los Espacios de Sobolev. Sergej L. Sobolev nació en Rusia en 1908; consagró su vida al estudio de las EDP en sus niveles más avanzados y profundos. En 1933 inició una serie de trabajos sobre el problema de Cauchy y es llevado a la teoría de las funciones generalizadas. Su obra es nueva, con ideas simples y desempeñaron un rol importante en la matemática y en la física. Le debemos la introducción de los ahora llamados "espacios de Sobolev" los que fueron estudiados y generalizados posteriormente; en este contexto, su teoría sobre la inmersión de los espacios de funciones fue fundamental en las EDP. Históricamente la idea de los "espacios de Sobolev" ya aparecieron en el tratamiento variacional del problema de Dirichlet. Sobolev inventó las distribuciones. Al respecto Sobolev trabajó el problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas de segundo orden y la idea de distribución la usó en la cuestión de la unicidad de la solución.

Recordemos que en 1940 H. Weyl también consideró funciones débiles y probó que una función débilmente armónica es armónica. Así mismo, K.Friedrichs probó, en 1944, que las soluciones débiles de sistemas lineales de primer orden, son también soluciones clásicas o fuertes.

3.1. Motivación Matemática de Solución Débil. Sea el intervalo $[a, b]$, a y b reales y f una función continua sobre $[a, b]$, ($f \in C[a, b]$). Problema de contorno: "hallar una función u tal que

$$-u'' + u = f, \text{ en } [a, b]; u(a) = 0 \text{ y } u(b) = 0. \tag{3.1}$$

Por definición, u es una solución clásica o fuerte de (3.1) si $u \in C^2([a, b])$ y satisface (3.1) en el sentido usual. Ahora, sea $\varphi \in C^1([a, b])$ tal que $\varphi(0) = 0$ y
$\varphi(1) = 0$; multipliquemos la ecuación diferencial por φ; se obtiene
$-u''\varphi + u\varphi = f\varphi$; integrando sobre el intervalo, $-\int_a^b u''\varphi + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi$; integrando por partes se obtiene:

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi. \tag{3.2}$$

Observemos que (3.2) tiene sentido si $u \in C^1([a, b])$.

Definición 3.1. *$u \in C^1([a, b])$ es llamada una solución débil (d-solución) de (3.1) si u satisface (3.2).*

Se observa que toda solución fuerte es una solución débil. ¿Cuándo vale el recíproco? ... Se tiene el resultado: "Si u es una solución débil de (3.1), de clase $C^2([a, b])$, entonces u es una solución clásica o fuerte ".

Demostración: Sea $u \in C^2([a, b])$ tal que $u(a) = 0$, $u(b) = 0$, que satisface (3.2) con $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. Integrando por partes (3.2) se obtiene $\int_a^b(-u'' + u - f)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in C^1([a, b])$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; pero $C_0^1([a, b])$ es denso en $L^2([a, b])$. Luego, $-u'' + u = f$ casi en todas partes , ó aún $-u" + u = f$ en todas partes desde que $u \in C^2([a, b])$. □

3.2. Breve Recorrido Matemático por los Espacios de Sobolev. Sea $I = (a, b)$. Por definición $L^p(I) = \{u \text{ medible } / \int_I |u(x)|^p dx < \infty\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^\infty(I)$ si el supremo (esencial) de $|u(x)|$ es finito. Sea p un número real, $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $L_1^p(I)[\equiv W^{1,p}(I)$; en

general usaremos la notación $L_k^p(I)$, usada por Calderón, en vez de $W^{k,p}(I)$ usada por Brezis-Browder] es definido vía:
$L_k^p(I) = \{u \in L^p(I) \,/\, \exists\, g \in L^p(I) \,/$ (sentido generalizado) $\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \,\forall\, \varphi \in C_0^1(I)\}$.

En verdad $g = u'$ en el sentido de las distribuciones (que veremos luego) ya que si $u \in L_1^p$ entonces $< u, \varphi' >= - < g, \varphi >$; pero, $< u, \varphi' >= - < u', \varphi >$, luego se tiene lo observado. Además, se tiene que g es único.

En $L_1^p(I)$ se considera la norma $||u||_{1,p} = ||u||_p + ||u'||_p$, con la cual $L_1^p(I)$ es un espacio de Banach, $1 \leq p \leq \infty$; $L_1^2(I)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $< u, v >_{1,2}=< u, v >_2 + < u', v' >_2$.

Los Espacios $L_k^p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}^+$. (Ver [10] o algún libro sobre distribuciones). En lo que sigue las derivadas $D^\alpha u$ son en el sentido generalizado, es decir, "existen funciones $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$< D^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \varphi >=< g_\alpha, \varphi >, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)".$$

Se tiene $g_\alpha = D^\alpha u$ y está en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nota 3.1. *$\mathscr{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la topología $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_j \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi$ uniformemente sobre un compacto fijo K, donde $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$. Si $\varphi \in C_0^\infty$, entonces φ es infinitamente diferenciable. Por simplicidad escribiremos L_k^p en vez de $L_1^p(\mathbb{R}^n)$.*

Definición 3.2. *$L_k^p = \{u \in L^p / D^\alpha u \in L^p, \forall \alpha$, con $|\alpha| \leq k\}$, $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{Z}^+$.*

En L_k^p se considera la norma $||u||_{p,k} = \left(\sum_{|\alpha \leq k|} ||D^\alpha u||_p^2\right)$. L_k^p equipado con esta norma es llamado un **espacio de Sobolev**. Una propiedad de estos espacios es: si $0 \leq j \leq k$ entonces $L_k^p \subset L_j^p \subset L^p$ y las inclusiones son continuas ya que para toda $u \in L_k^p$ se tiene $||u||_p \leq ||u||_{p,j} \leq ||u||_{p,k}$. También, L_k^p es un espacio de Banach para $p \geq 1$, $k \in Z^+$. Si $p < \infty$, el espacio de las funciones "prueba"$\mathscr{D}$ es denso en L_k^p. Otra interesante propiedad es que "todos los espacios L_k^p son isomorfos entre si, $k \geq 0$, $1 < p < \infty$.

Nota 3.2. *Posponemos ver los espacios L^s, donde s es un número real, hasta después de dar un panorama de la teoría de distribuciones.*

4. Un Panorama de la Teoría de Distribuciones.. La teoría de distribuciones fue presentada en 1950 por el matemático francés Laurent Schwartz ,([11]), dando una nueva visión de las soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales; él inventó un nuevo cálculo en base a funciones generalizadas, que son las "distribuciones", cálculo en donde se preservan las operaciones básicas del análisis matemático . El espacio de las distribuciones es un espacio dual, el dual del espacio $\mathscr{D}$, ya mencionado antes. Así, el espacio de las distribuciones es denotado con $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \equiv \mathscr{D}'$. $\mathscr{D}'$ contiene a todas las funciones en L_{loc}^1. Como sabemos, existen funciones que no poseen derivadas en el sentido clásico; pero en el universo de las distribuciones, toda distribución T es derivable para cualquier orden, es decir, para toda distribución la existencia de la derivada está garantizada. Aún se tiene, si $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ es un operador diferencial lineal con coeficientes regulares, entonces $P(T)$ es bien definido para cualquier distribución T; además $P(T)$ es aún una distribución.

Veamos algunos **antecedentes históricos** de las distribuciones. En el período 1893-94 el ingeniero inglés O.Heaviside introdujo ciertas reglas de un cálculo simbólico para ser usadas en la solución de problemas de la física; pero en su uso se encontraron diversas dificultades matemáticas que crearon cierta preocupación, aún cuando tal cálculo funcionaba bien en algunos casos ,y ello motivó que se exigieran "nuevas ideas" ... como las funciones generalizadas! Veamos. [12], [4]. Sea una red eléctrica, una fuente de voltaje y un interruptor. Asumamos que el voltaje E de la fuente es constante en el tiempo y que el interruptor está cerrado cuando $t = 0$. Entonces el voltaje $E(t)$ en los terminales de la red es $E(t) = EH(t)$, donde $H(t) = 1$ ... $t > 0$; $= 0$ ... $t \leq 0$.

$H(t)$ es llamada la función de **Heaviside**. Ahora, vía las leyes de Kirchhoff se obtiene la ecuación $L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) + \frac{1}{c}\int_0^t I(s)ds = E(t)$, donde $I(t)$ es la corriente eléctrica y L, R, C son adecuadas constantes. Si se deriva a ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$L\frac{d^2}{dt^2}I(t) + R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{c}I(t) = \frac{d}{dt}E(t) = E_0\frac{d}{dt}H(t).$$

Ahora se observa que $\frac{d}{dt}H(t)$ no está definida en $t = 0$, pues $\frac{H(t)-H(0)}{h} \begin{cases} \frac{1}{h} & ... h > 0 \\ 0 & ... h < 0 \end{cases}$ luego el límite del cociente no existe cuando $h \to 0$.

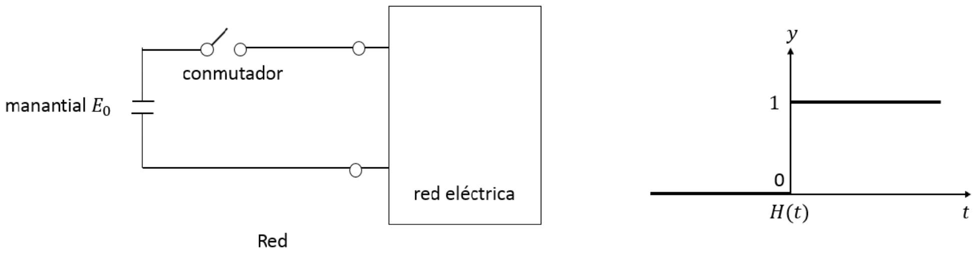

Figura 4.1: La función de Heaviside y una motivación a las distribuciones.

En conclusión: la investigación de un problema de la física queda truncado por una dificultad matemática!

Por otro lado, por los años 1920's el físico britanico P.Dirac introdujo la "función "delta $\delta(x)$ tal que, por definición es definida en toda la recta, continua sobre $\mathbb{R}$, tal que $\delta(x) = 0$, si $x \neq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$. **Pero**, en la época de Dirac se conocía la integral de Lebesgue y por ella, esta "función" es inconsistente pues se debería tener $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 0$; además si f es una función continua sobre $\mathbb{R}$ se tiene que $f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(a-x)dx$, para toda $a \in \mathbb{R}$.

Además, se verifica que $\delta(x) = H'(x)$, es decir la derivada de una función es igual a un ente que no es función. Se debe remarcar que Heaviside usó la $\delta(x)$ y le funcionaba bien en su teoría; ¿cómo explicar esta situación? ... Tuvo que pasar alrededor de 30 años para que surja una teoría que explique matemáticamente todo esto, y más cosas. Una salida fue considerar a la $\delta(x)$ como una función conjunto y no como una función puntual. (Ver J. Horváth, [13], [10], para más detalles al respecto).

Una Observación: Calculemos la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$, donde φ es una adecuada función derivable; integrando por partes
$I = [H(x)\varphi(x)]|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx$, donde $H(x)$ es por definición
$\int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt = H(x) = \begin{cases} 0 & ...x < 0 \\ 1 & ...x > 0 \end{cases}$, es decir ,en cierto sentido se tendrá
$H'(x) = \delta(x)$. Entonces,
$I = \varphi(+\infty) - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(+\infty) - \varphi(+\infty) + \varphi(0) = \varphi(0)$. Así se ha obtenido $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$. ¿ Esta relación nos podría servir para definir a la $\delta(x)$, de un modo diferente? ...

En efecto, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)$ motivó la noción de "función generalizada", y una clase especial de funciones generalizadas son las "distribuciones". Para formalizar la nueva teoría (de las distribuciones) se usaron los progresos tenidos en el análisis funcional en los años 30's y 40's; así la teoría de operadores y de funcionales sobre espacios de Hilbert y de Banach fueron muy útiles en tal formulación. Ya hemos mencionado el rol importante que tuvo S. L. Sobolev en la ruta hacia las distribuciones quien usó la idea de derivada generalizada, idea que precedió a la teoría de funcionales; una distribución es una funcional. Por otro lado, el lenguaje del análisis funcional fue la base del nuevo formalismo de las distribuciones.

L.Schwartz publicó cuatro articulas sobre su teoría de distribuciones antes de publicar su famoso libro "Théorie des Distributions", [11], libro que marcó una etapa en la evolución de las EDP pues fue una referencia obligada de los investigadores de las EDP. Años después surgieron algunos libros sobre este tema, hoy ya clásicos, como fueron Hormander [1], Traves [14], Horvath [15], Nachbin [16], entre otros. Luego de la publicación de su libro, Schwartz tuvo un gran suceso cuando prueba su "teorema del núcleo"(1952) resultado que le permitió extender su teoría a las distribuciones de valor vectorial. Por su valiosa contribución matemática, Schwartz fue distinguido con la Medalla Fields en 1950. Nació en París el 05 de Marzo de 1915 y falleció en París el 04 de Julio del 2002.

4.1. Algunos Comentarios Matemáticos sobre las Distribuciones.. La teoría de distribuciones causó un fuerte impacto en el desarrollo de las EDP, esto por sus propiedades, generalidades y haber resuelto algunas cuestiones que no se podían explicar con el análisis matemático; como ya se anunció había que explicar la naturaleza de la $\delta(x)$ de Dirac; además, sabemos que no todas las funciones son derivables, entre otras cuestiones. Así, se afirma que las distribuciones transformó muchas áreas del análisis matemático.

La historia de la teoría de distribuciones está relacionada con la teoría de las EDP, como ya hemos mencionado, así la investigación del problema de Cauchy condujo a ciertas distribuciones, como sucedió en el trabajo de J. Hadamard en 1932 y en el de M. Riesz en 1949; pero Sobolev, en 1936, llegó más lejos creando las distribuciones. En este contexto, la idea que fue usada por K. Friedrichs en su estudio de los operadores diferenciales en espacios de Hilbert (1939).

Pocos años después, en plena II Guerra Mundial, Schwartz ofrece su primera publicación, [17], en donde resume el objetivo de su teoría y da la idea de que funciones $f(x)$ definidas en $\mathbb{R}^n$ dan lugar a funciones lineales de la forma, ver [18], capítulo 12, $\varphi(x) \to T(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx$, donde $\varphi(x)$ pertenece al espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, y nos dice que tales funcionales lineales son llamadas “distribuciones”, y que ellas son más generales que las funciones usadas en el análisis.

Si $g \in C_0^\infty$, entonces el producto gT, T una distribución, es definida por la fórmula $gT(\varphi) = T(g\varphi)$. Toda función en C_0^∞ fue llamada, más tardes, función “test”. Por otra parte, si $gT = 0$, donde g tiene soporte en algún conjunto abierto U, se dice que la distribución T es nula en U; la importancia de esta noción es que ella motiva la noción de soporte de una distribución y también a las distribuciones con soporte compacto.

También se observa que el espacio C_0^∞ nos ayuda a entender que toda distribución es derivable para cualquier orden; así, si $\varphi \in C_0^\infty$ entonces se tiene

$\partial^\alpha T(\varphi) = T[(-\partial)^\alpha \varphi]$, donde, como es usual, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. (Ver el artículo de Garding, [18], para mayores comentarios).

Se le debe a Schwartz la notación $\mathscr{D} = C_0^\infty$; asi $\mathscr{D}'$ denota al espacio de las distribuciones y con $\mathscr{D}$ se denota al subespacio de las distribuciones con soporte compacto. Pero Schwartz tuvo precursores quienes ya habían introducido algunas ideas fundamentales en la teoría que él consolidó. En efecto, Sobolev, en 1936, trabajando el problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas de segundo grado llegó a la idea de solución en el sentido de las distribuciones. Así mismo, H. Weyl en 1940 consideró la noción de “solución débil”; en esta ruta también se tienen contribuciones de K. Friedrichs, como ya hemos mencionado.

Schwartz dio la formalización de la nueva teoría al usar las funciones infinitamente diferenciables, así como la definición de la idea de solución fundamental E de un operador diferencial parcial $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$, donde los coeficientes son infinitamente diferenciables, $D = (D_1, ..., D_n)$, donde $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$; por definición, la distribución E es una solución fundamental de $P(D)$ si $P(D)E = \delta$. Con la yuda de la solución fundamental E se puede establecer cuando $P(D)$ es hipoelíptico. Un operador diferencial parcial lineal $P(D)$ en Ω (un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$) es llamado **hipoelíptico** si dado un subconjunto abierto U de Ω y dada cualquier distribución T en U, y si $P(T)$ es C^∞, **entonces** T es también C^∞. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *si existe una solución fundamental E de $P(D)$, la cual es una función C^∞ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, entonces $P(D)$ es hipoelíptico en $\mathbb{R}^n$”.*

En esta ruta se afirma que se tiene: “existe una solución $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ para el operador $P(D)$ tal que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ **si y solo si** toda solución $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ de la ecuación $P(D)T = 0$ es infinitamente diferenciable”. En este caso, se dice que el operador $P(D)$ es llamado hipoelíptico. El operador Laplaciano Δ en $\mathbb{R}^n$ es hipoelíptico.

Es oportuno remarcar que la noción de distribución, según Schwartz es basado en la dualidad, en la teoría de los espacios vectoriales topológicos, ver [15] y [19]; así el espacio $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ consiste de todas las funcionales continuas sobre $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, esto es,es el espacio dual del espacio de las funciones test $\mathscr{D}$, y está provisto de la topología que contiene la convergencia de derivadas de todas las órdenes. Así, entonces, toda distribución T puede ser representada localmente como una suma finita de derivadas, en el sentido de las distribuciones, de funciones continuas. De esta manera se puede escribir, si T es una distribución entonces se tiene $T(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int f_\alpha D^\alpha \varphi$, para toda $\varphi \in C_0^\infty$, algunas funciones continuas f_α y algún m.

En su relación con las EDP, la teoría de distribuciones dio un lenguaje unificado para el tratamiento general de las soluciones en EDP; además, fue un aporte a la física y a la ingeniería en donde muchos conceptos fueron puestos en un contexto más preciso y general. Por esta razón se escribieron muchos artículos y libros en tales y otras áreas. En particular nos interesa la relación de las distribuciones con el análisis funcional y la topología. En este aspecto regresemos al inicio del siglo XX cuando el cálculo operacional de Heaviside se usaba para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones en EDP de tipo hiperbólico y por esa época se van introdudendo los espacios abstractos, como son los famosos espacios L^p, $1 \leq p \leq \infty$, y más generalmente los espacios de Hilbert y así surgirían los “métodos de espacios de Hilbert”para investigar a las EDP en contextos más generales.

Es la época de grandes revoluciones en el campo de la ciencia, como son en la física y en la matemática. Así el desarrollo de la evolución de la mecánica cuántica se vio favorecida con el uso del análisis funcional. J. Von Neumann, guiado por Hilbert, axiomatizó tal mecánica usando los fundamentos de los primeros progresos de la teoría de operadores sobre espacios de Hilbert. Históricamente, las primeras ideas que condujeron a las distribuciones se remontan a la creación del cálculo infinitesimal pues ahí se encuentran los gérmenes más profundos de la idea de derivada y de las primeras ecuaciones diferenciables.

En años posteriores el cálculo progresó, vino el análisis matemático y las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales fueron llevadas a contextos más generales. En 1908 el matemático sueco Henrik Petrini dio argumentos que motivaron la introducción de soluciones generalizadas y para ello generalizó al operador Laplaciano y a la ecuación de Poisson. En esta dirección, en 1913 H.Weyl introduce la idea de derivada generalizada en la teoría del potencial y logra resolver el problema de Dirichlet en este contexto. Estas y otras contribuciones, como las de Sobolev, condujeron a L.Schwartz a su interés por las soluciones generalizadas de ecuaciones elípticas y esto lo condujo a su teoría de dístribuciones.

Veamos ahora el escenario de los espacios de Hilbert o lo que se llama "métodos de los espacios de Hilbert" en EDP. En este aspecto la monografía [20] de Pedro H.Rivera es un camino para introducirnos en esta área. Según [2], uno de los grandes avances logrados en la década de los años 1930's fue el desarrollo de las EDP's vía los argumentos del análisis funcional lineal, logrado gracias a los aportes de S. Banach y de su Escuela. Veamos. A inicios del siglo XX el análisis tuvo un gran impulso con la teoría de conjuntos y con la teoría de la medida de Lebesgue; tales teorías serían fundamentales en el surgimiento del análisis funcional pues se introdujeron los espacios de dimensión infinita, entre los que se destacan los espacios de Hilbert; así surgieron los espacios l^2 y L^2 que habrían de ser muy útiles en las EDP. Un poco más tarde se introdujeron los espacios de Banach (1922), espacios que junto con la teoría de distribuciones serían vitales en el progreso de las EDP. Así mismo la teoría abstracta de operadores sobre espacios de Hilbert fue estudiada y aplicada a los operadores diferenciales para obtener unos operadores más generales. Veamos algunas ideas del análisis funcional las que sirven para estudiar problemas en EDP.

(i) Teorema de F. Riesz. "Sea H un espacio de Hilbert. Si $f : H \to \mathbb{R}$ es lineal y continua, entonces existe un único $u_0 \in H$ tal que $f(u) =< u, u_0 >$, para todo $u \in H$.

(ii) Desigualdad de H.Poincaré. (Caso $n = 1$ pero la desigualdad vale para dominios abiertos, acotados de $\mathbb{R}^n$). "Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado; entonces existe una constante positiva $C = C(|I|)$ tal que $||u||_{L_1^p} \leq C||u'||_{L^p}$ para toda $u \in L_{1,0}^p(I)$ donde $L_{1,0}^p(I)$ es la cerradura $C_0^\infty(I)$ en $L_{1,0}^p(I)$,
$1 \leq p \leq \infty$".

(iii) Teorema de Lax-Milgram. Este teorema es útil en la conexión de las EDP con el cálculo de variaciones. Veamos los pre-requisitos. Sea H un espacio de Hilbert (real). Sea la forma bilineal $a : H \times H \to \mathbb{R}$ continua
$(|a(u, v)| \leq C||u||||v||)$ y es coerciva (ó H - elíptica; existe una constante
$\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha||v||^2$, para todo $v \in H$. La forma a no es necesariamente simétrica. Sea $L : H \to \mathbb{R}$ una funcional lineal.

Teorema 4.2. *(L-M) El problema variacional lineal [P]: "encontrar $u \in H$ tal que $a(u, v) = L(v)$, para todo $v \in H$, tiene solución única".*

Nota 4.1. *Si $a(,)$ fuera una forma bilineal simétrica sobre $H \times H$, entonces se tiene la caracterización: "problema [P]* **si y solo si** *encontrar $u \in H$ tal que $J(u) \leq J(v)$ para todo $v \in H$ donde $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$".*

Veamos una aplicación a las EDP.

4.2. Problema de Sturm-Liouville.

"Hallar u tal que

$$-(pu')' + qu = f \text{ ... en} I = [0, 1];\ u(0) = 0,\ u(1) = 0, \tag{4.1}$$

donde $p \in C^1(T)$, $q \in C(T)$ y $f \in L^2(I)$ son funciones dadas con $p(x) \geq \alpha > 0$, para todo $x \in T$".

Solución. Veamos una motivación. Si u es una solución clásica de (4.1), la multiplicamos por v que pertenece a $L_{1,0}^2(I)$, que es la cerradura de $C_0^\infty(I)$ en la topología de $L_1^2(I)$, e integrando por partes se obtiene $\int_I pu'v'dx + \int_I quvdx = \int_I fv$, para todo $v \in L_{1,0}^2(I)$. Ahora se toma como espacio H a $L_{1,0}^2(I)$, como forma bilineal $a(u, v)$ a $\int_I pu'v'dx + \int_I quvdx$ y como forma lineal $a : v \to \int_I fvdx$; se observa que $a(\ ,\ )$ es una forma bilineal, lineal, simétrica; es también continua por las hipótesis sobre p y q. Además, si $q \geq 0$, $a(,)$ es coerciva [en efecto, por la desigualdad de Poincaré se tiene: por ser I acotado, existe una constante $C > 0$ tal que $||u||_{L^2_1} < C||u'||_{L^2}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_I p(v')^2dx + \int qv^2dx \\ &\geq \min_{\overline{I}} p \int_I (v')^2dx + \min_I q \int_I v^2dx \\ &\geq C_1||v||^2_{L^2_1} + C_2||v||^2_{L^2} \\ &\geq C||v||^2_{L^2_1}. \end{aligned}$$

Entonces se está en condiciones de aplicar el teorema de Lax - Milgram y se puede afirmar que existe un único $u \in L^2_{1,0}(I)$ tal que $a(u,v) = \int_I fvdx$, para todo $v \in L^2_{1,0}(I)$. Además, u es obtenido vía $\min_{v \in L^2_{1,0}(I)}[\frac{1}{2}\int_I p(v')^2 + qv^2)dx - \int_I fvdx]$. Por otro lado, desde que $\int_I pu'v'dx = \int_I (f-qu)vdx$, con $(f-qu) \in L^2$ tendremos que $pu' \in L^2_1(I)$; luego $u' = \frac{1}{p}pu' \in L^2_1(I)$, y aun se tiene $u \in L^2_2(I)$; entonces $u \in L^2_2(I) \cap L^2_{1,0}(I)$, lo que significa que $\Delta u \in L^2(I)$. Finalmente, se verifica que si $f \in C(\overline{I})$ entonces $u \in C^2(I)$. Ahora, ver la Sección 3, "hacia las soluciones débiles" en donde dimos el modelo general para la solución de problemas en EDP, y ahora se concluye, vía esta ruta, que u es una solución clásica del problema (4.1), de S-L.

4.3. El Problema de Dirichlet para el Laplaciano. El problema es:
"hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u = f \text{ en. } \Omega;\ u = g \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{4.2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto acotado, f y g son funciones continuas dadas".
El problema (4.2) se descompone en los problemas:

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega;\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega; \tag{4.2.1}$$

$$-\Delta u = 0 \text{ en } \Omega;\ u = g \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{4.2.2}$$

Se observa que si u_1 es solución de (4.2.1) y u_2 de (4.2.2), entonces $u = u_1 + u_2$ es solución de (4.2). Veamos el problema (4.2.1). Se observa que la condición de contorno "$u = 0$ sobre $\partial\Omega$"puede ser substituida por "$u \in L^2_{1,0}(\Omega)$ y en este contexto se tiene el

Teorema 4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, acotado. Si $f \in L^2_{-1}(\Omega)$ [$L^2_{-1}(\Omega)$ es el espacio dual de $L^2_{1,0}(\Omega)$], entonces el problema de Dirichlet $-\Delta u = f$ en Ω; $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$* **tiene una única solución** *$u = Gf$, donde $G : L^2_{-1}(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$, $f \to Gf$, es un isomorfismo de espacios normados.*

Demostración: Sea la forma bilineal $a(u,v) = \sum_{i=1}^n < D_iu, D_iv >$, donde $u, v \in L^2_1(\Omega)$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $< \ \ > \equiv < \ \ >_{L^2}$, $||.|| \equiv ||\ ||_{L^2}$. Sea c_0 la constante de la desigualdad de Poincaré $\sum_{i=1}^n ||D_iu||^2 \geq c_0||u||^2$, $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$; pongamos $\gamma = \min\{c_0, \frac{1}{2}\}$. Entonces se tiene $a(u,u) \geq \gamma||u||^2$ y $|a(u,v)| \leq n||u||_{L^2_1}||v||_{L^2_1}$, $u, v \in L^2_{1,0}(\Omega)$. De esta forma se tiene las hipótesis del teorema de Lax - Milgram y se afirma que existe un isomorfismo de espacios normados $A : L^2_{1,0}(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$, $u \to Au$, tal que a $(u,v) =< Au, v >_{L^2_1}$, $u, v \in L^2_{1,0}(\Omega)$, donde se observa que A es lineal y continua sobre $L^2_{1,0}(\Omega)$; luego, por el teorema de F. Riesz existe un isomorfismo $S : L^2_{-1}(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$, $f \to Sf$ tal que $||Sf||_{L^2_1} = ||f||_{L^2_{-1}}$, $f \in L^2_{-1}(\Omega)$ y $< f, v > = < Sf, v >_{L^2_1}$, $f \in L^2_{-1}(\Omega)$, $v \in L^2_{1,0}(\Omega)$. Sea ahora la composición $G = A^{-1}S$; se observa que $G : L^2_{-1}(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$ es un isomorfismo sobre y continuo, con inverso $G^{-1} = S^{-1}A : L^2_{1,0}(\Omega) \to L^2_{-1}(\Omega)$. Mirando al teorema 6.2, si $f \in L^2_{-1}(\Omega)$, sea $u = Gf = A^{-1}(Sf)$. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, se tiene

$$< -\Delta u, \varphi > \overset{ixp}{=} a(u,\varphi) =< Au, \varphi >_{L^2_1} =< Sf, \varphi >_{L^2_1} =< f, \varphi >.$$

De esta manera se tiene $-\Delta u = f$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$ y $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$.
Unicidad de la solución. Sea $v \in L^2_{1,0}(\Omega)$ tal que $-\Delta v = f$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$. Entonces, $w = u - v \in$

$L^2_{1,0}(\Omega)$ y $-\Delta w = 0$.
Entonces, $c_0||w||^2 \leq a(w,w) =< -\Delta w, w >= 0$; esto es, $w = 0$, ó $v = u$. Luego queda solucionado el problema (4.2.1). □

Solución del Problema (4.2.2). Recordemos que el problema es: " hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ tal que $-\Delta u = 0$ en Ω, $u = g$ sobre $\partial\Omega$". Bien, si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, regular, y $u \in L^2_1(\Omega)$, entonces la condición "$u = g$ sobre $\partial\Omega$", puede ser substituida por $\tau_0 u_1 = g$[donde si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $(\tau_0 u)(x) = u(x)$, $x \in \partial\Omega$, se observa que si $\partial\Omega$ es una superficie "bien regular", entonces $\tau_0 u \in L^2(\partial\Omega)$]. Bajo esta hipótesis y si $u_1 \in L^2_1(\Omega)$ tal que $\tau_0 u_1 = g$, entonces para todo $v \in L^2_{1,0}(\Omega)$ se tiene $\tau_0(v + u_1) = \tau_0 v + \tau_0 u_1 = \tau_0 u_1 = g$. Este argumento motiva considerar la clase: $K = \{u + u_1/u \in L^2_{1,0}(\Omega)\}$. Entonces la condición " $u = g$ sobre $\partial\Omega$, o más generalmente el problema (4.2.2) toma la forma: "encontrar $v \in K$ tal que $-\Delta v = 0$", ya que si $v \in K$, $v = u + u_1$, y $\tau_0(v) = \tau_0(u) + \tau_0(u_1) = \tau_0(u_1) = g$. Pero, aún " $v \in K$ **si y solo si** $v = u + u_1$ **si y solo si** $v - u_1 = u \in L^2_{1,0}(\Omega)$". Esto permite escribir el problema (4.2.2) en la forma: " dado $u_1 \in L^2_1(\Omega)$, hallar $u \in L^2_1(\Omega)$ tal que $-\Delta u = 0$, $u - u_1 \in L^2_{1,0}(\Omega)$". En esta dirección se tiene el

Teorema 4.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado. Entonces, para todo $v \in L^2_1(\Omega)$ existe un único $u = s_0(v) \in L^2_1(\Omega)$ tal que $-\Delta u = 0$; $u - v \in L^2_{1,0}(\Omega)$, donde la aplicación lineal $s_0 : L^2_1(\Omega) \to L^2_1(\Omega)$ es continua. Demostración:* (Los productos internos y las normas son tomados en L^2).

Si $v \in L^2_1(\Omega)$, entonces para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene

$$| < \Delta v, \varphi| \overset{i \times p}{=} |\sum_{i=1}^{n} - < D_i v, D_i\varphi > | \leq n||v||_{L^2_1}||\varphi||_{L^2_1},$$

lo que significa que $\Delta v \in (L^2_{1,0}(\Omega)' = L^2_{-1}(\Omega)$ y que $||\Delta v||_{L^2_1} < n||v||_{L^2_1}$, $v \in L^2_1$.

Ahora, nuevamente, se elige $G = A^{-1}S$, donde $S : L^2_{-1}(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$ y $A : L^2_{1,0}(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$ son isomorfismos. Ahora se define la aplicación lineal

$s_0 : L^2_1(\Omega) \to L^2_1(\Omega)$ vía $s_0 v = v + G(\Delta v)$, $\forall v \in L^2_1(\Omega)$. Entonces se tiene

$$||s_0 v||_{L^2_1} < ||v||_{L^2_1} + ||G(\Delta u)||_{L^2_1} \leq ||v||_{L^2_1} + n||G||||v||_{L^2_1} = (1 + n||G||)||v||_{L^2_1}, v \in L^2_1(\Omega).$$

Luego s_0 es una aplicación lineal, continua. Ahora, se pone $w = G(\Delta v)$, esto es, $w \in L^2_{1,0}(\Omega)$ y $w = s_0 v - v$; entonces $\Delta w = \Delta(s_0 v) - \Delta v = -\Delta v$, ó $-\Delta w = \Delta v$, $w \in L^2_{1,0}(\Omega)$.

Conclusión: si $u = s_0 v$, y por tanto $u \in L^2_1(\Omega)$, tendremos $u = v + w$ y $-\Delta u = -\Delta v - \Delta w = 0$, $u - v = w \in L^2_{1,0}(\Omega)$. Luego, u es solución del problema (4.2.2).

Unicidad de la solución: sea u_1 tal que $-\Delta u_1 = 0$, $u_1 - v \in L^2_{1,0}(\Omega)$. Entonces tendremos $-\Delta(u - u_1) = 0$, y $u - u_1 = (u - v) - (u_1 - v) \in L^2_{1,0}(\Omega)$. Ahora aplicamos el teorema 6.2., con $f = 0$; entonces $u - u_1 = G0 = 0$; luego $u = u_1$. □

De esta manera, por los teoremas 4.3 y 4.4. se tiene, finalmente, el

Corolario 4.1. *(El problema de Dirichlet). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, limitado. Si $f \in L^2_{-1}(\Omega)$ y $v \in L^2_1(\Omega)$, entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u - v \in L^2_{1,0}(\Omega) \end{cases}$$

tiene una única solución $u = S(f, v)$, donde la aplicación $S : L^2_{-1}(\Omega) \times L^2_1(\Omega) \to L^2_1(\Omega)$, $(f, v) \to u$ es lineal y continua.

5. La Desigualdad de Garding y el Problema de Dirichlet. El método de los espacios de Hilbert en el estudio de la EDP hace uso de argumentos del análisis funcional, más concretamente de los espacios vectoriales topológicos, y de la teoría de distribuciones. Así por ejemplo se usan ideas básicas de los espacios localmente convexos, dualidad en espacios de funciones, espacios tonelados, espacios de Frechet, espacios LF, aplicaciones bilineales. Toda esta maquinaria matemática, y otras, se remontan a los años 1930's en donde el trabajo pionero de S.Banach, y de su Escuela, fue fundamental, como también lo fueron los aportes de Fredholm, Hilbert y F.Riesz sobre las ecuaciones integrales; surge el desarrollo de la teoría de operadores en espacios de Hilbert; en esta ruta se tienen los trabajos de K.O Friedrichs y de H.Weyl. En los años 1940's la influencia de I.M. Gelfand y de M.I.Visik permitió formular el problema de Dirichlet para operadores lineales elípticos uniformes no-auto adjuntos. Tales contribuciones fueron mejoradas por L. Garding ("Problema de Dirichlet para ecuaciones diferenciales parciales lineales elípticas", 1953), F. Browder (" El problema de Dirichlet para ecuaciones elípticas lineales de orden par arbitrarios con coeficientes variables", 1952); K. O. Friedrichs (" Sobre la diferenciabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas lineales", 1953); P. Lax - A. Milgram ("Ecuaciones Parabólicas", 1954); L. Garding (" Problemas a los límites en teoría de distribuciones", 1955). En esta ruta, ver [2], Garding hizo un uso explícito del análisis de Fourier en el estudio de las EDP en donde se estableció que la transformada de Fourier es una aplicación unitaria de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Así mismo, se estableció que la transformada de Fourier conduce al operador diferencial D^α, al operador multiplicación por $(i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$. Y de esta forma los espacios de Sobolev $L^2_m(\equiv H^m)$ tomaron la forma, [2],

$$L^2_m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)/\xi^\alpha \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n); \forall\alpha, |\alpha| \leq m\},$$

y se tiene la equivalencia de las normas: $||f||^2_{L^2_m}$ **si y solo si** $\sum_{|\alpha|\leq m} ||\xi^\alpha \hat{f}||^2_{L^2}$.
$L^2_m(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$< f, g >= \sum_{|\alpha|\leq m} \int D^\alpha f \overline{D^\alpha g} dx.$$

Debe mencionarse que el problema de Dirichlet es uno de los fundamentales problemas de valor de contorno y que surgió en la física teórica en el campo de la electrostática, en la conducción del calor y en la teoría de la elasticidad. Ya hemos mencionado que surgieron varias rutas para resolver tal problema. Su evolución es una fascinante historia que motiva el estudio de las EDP's en general. Ver [2], [8] y [21]. Al respecto estamos viendo el método de los espacios de Hilbert y con los argumentos dados anteriormente surgió otro argumento para resolver el problema de Dirichlet: **la desigualdad de Garding** , introducida por Lars Garding en su trabajo ya mencionado de 1953. Veamos algunas ideas al respecto, [10]. Sea P un operador diferencial parcial, lineal, de segundo orden definido en un abierto, limitado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uniformemente elíptico

$$P = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + a(x), \tag{5.1}$$

donde $a_{ij} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $a_j \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $a \in C(\overline{\Omega})$.
P es uniformemente elíptico si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ se tenga

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C||\xi||^2, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 5.1. *El operador Laplaciano Δ es uniformemente elíptico.*
Si P es un operador elíptico $[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \neq 0$, para todo $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n]$, con $a_{ij} \in C^2(\Omega)$ y $a_j \in C^1(\Omega)$, entonces existe un operador P^*, llamado el adjunto de P, que también es elíptico. De un modo general, si $\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$, con $a \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, es un operador diferencial, su adjunto es definido siendo el operador $P^*u = \sum_{|\alpha\leq k|}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}u)$, con $u \in C^k(\Omega)$.

Además, se tiene $< Pf, g >=< f, P^*g >$. Si P es uniformemente elíptico, entonces P^* también lo es.

Dados u y f en $L^1_{loc}(\Omega)$, se dice que u es una **solución débil** de $Pu = f$, si para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ se tiene $< u, P^*\varphi >=< f, \varphi >$; esto es, si $< u, P^*\varphi >=< Pu, \varphi >$. Se observa que esta noción amplía la idea de derivada generalizada.

Desigualdad de Garding. Para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, **existen** unas constantes positivas c_1 y c_2 tal que se tiene

$$< \varphi, P\varphi >\geq c_1||\varphi||_{L^2_1} - c_2||\varphi||_{L^2}.$$

5.1. Problema de Dirichlet. "Sea (5.1) $P = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$ un operador diferencial parcial de segundo orden, definido en un abierto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uniformemente elíptico, donde $a_{ij}(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $a_j(x) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $a(x) \in C^0(\overline{\Omega})$.

Sea $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, **existe** $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ **existe un único** $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$ tal que $Pu + \lambda u = f$".

Se observa que u es solución en el sentido de las distribuciones, es decir, $< u, P^*\varphi + \lambda\varphi > = < f, \varphi >$, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, y que la condición de contorno para u está dada implícitamente en $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$ ya que $u = 0$ en $\partial\Omega$. *Demostración:* Para todo φ y ψ en $\mathscr{D}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
< P\varphi, \psi > &= -\sum_{i,j=1}^{n} < a_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}, \psi > + \sum_{j=1}^{n} < a_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \psi > + < a\varphi, \psi > = \\
&\quad \sum_{i,j=1}^{n} < \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\psi > + \sum_{i,j=1}^{n} < \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} > . \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} < a_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \psi > + < a\varphi, \psi > .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ahora se define la funcional $E(\varphi, \psi)$ siendo igual a (5.2). Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene $|E(\varphi, \psi)| \leq b||\varphi||_{L^2_1}||\psi||_{L^2_1}$.

Poniendo $E_\lambda(\varphi, \psi) = E(\varphi, \psi) + \lambda < \varphi, \psi >$ se obtiene $|E_\lambda(\varphi, \psi)| \leq b'||\varphi||_{L^2_1}||\psi||_{L^2_1}$. Ahora, para todo $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ se tiene $E(u, u) = < Pu, u > = < u, P^*u >$ (desigualdad de Garding) $\geq c_1||u||^2_{L^2_1} - c_2||u||^2_{L^2}$. Entonces, si $\lambda_0 = c_2$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene $E_\lambda(u, u) \geq c||u||^2_{L^2_1} + (\lambda - \lambda_0)||u||^2_{L^2} \geq c_1||u||^2_{L^2_1}$. Luego, por extensión continua, si $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$ se tiene que $E_\lambda(u, u) \geq c_1||u||^2_{L^2_1}$. Ahora, por el teorema de Lax - Milgram, diremos que E_λ es una forma bilineal sobre el espacio de Hilbert $H = L^2_{1,0}(\Omega)$, que satisface a la citada desigualdad coercitiva. Ahora se considera al dual de $L^2_{1,0}(\Omega)$; para ello se considera a la funcional F_f : $L^2_{1,0}(\Omega) \to C$, $v \to F_f(v) = < f, v >$, donde $f \in L^2(\Omega)$, y por tanto $F_f \in [L^2_{1,0}(\Omega)]'$ (dual).

Luego, por el teorema de Lax -Milgram, existe un y solo un $u \in L^2_{1,0}(\Omega)$ tal que para todo $v \in L^2_{1,0}(\Omega)$ se tiene $F_f(v) = E_\lambda(u, v)$ ó $< f, v > = E_\lambda(u, v)$.

En particular, si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ entonces se tiene

$$< f, \varphi > = E_\lambda(u, \varphi) = E(u, \varphi) + \lambda < u, \varphi > = < Pu, \varphi > + \lambda < u, \varphi > = < u, (P^* + \lambda)\varphi >$$

lo que implica $u = (P + \lambda)^{-1}f$, esto es, u es solución de $Pu + \lambda u = f$. □

6. El Problema de Neumann. Otro fundamental problema de valor de contorno es el problema de Neumann del que damos una breve presentación. Veamos algunas consideraciones generales.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio regular con contorno $\partial\Omega$ también regular y sea $H = (h_1, ..., h_n)$ una función vectorial en $C^1(\overline{\Omega})$. Si $x \in \Omega$, $q \in \partial\Omega$ y $divH(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x)$, entonces se tiene

$$\int_\Omega divH dx = \int_{\partial\Omega} < N_q, H(q) > d\sigma(q), \tag{6.1}$$

donde N_q es el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$ en q, $d\sigma$ es la medida de superficie en $\partial\Omega$ y $<, >$ es el usual producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Este resultado es el **teorema de la divergencia**, el cual es muy útil en las EDP. Con su ayuda se obtienen las **identidades de Green**(ver [8]. En efecto, sean $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$; entonces se tiene
$u\Delta v + < \nabla u, \nabla v > = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} < \nabla u, \nabla v > dx &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx \\
&= \text{(teorema de la divergencia)} \\
&= \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma,
\end{aligned}$$

donde $N = (n_1, ..., n_n)$ es un vector unitario normal a $\partial\Omega$.
Conclusión:

$\int_{\Omega}(u\Delta v + < \nabla u, \nabla v >)dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial N} d\sigma$. ... Primera Identidad de Green.

Problema de Neumann. "Dado $f \in C^0(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^0(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial N} = f \quad \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Observación: si la condición de contorno fuera $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces u es constante en Ω; pero $u \in C^0(\overline{\Omega})$, luego u es constante en $\overline{\Omega}$. Entonces las soluciones del problema de Neumann difieren en una constante, esto es, la solución es única a menos de una función constante arbitraria. Sea ahora el problema de Neumann (homogéneo)

$$-\Delta u + u = f \text{ en } \Omega; \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ donde } f \in L^2(\Omega). \tag{6.2}$$

Por la identidad de Green se sabe que se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx, v \in L_1^2(\Omega). \tag{6.3}$$

Una solución débil de (6.2) es una función $u \in L_1^2(\Omega)$ que satisface (6.3) para todo $v \in L_1^2(\Omega)$.

La idea ahora es poner $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx$ y se tiene $a(u, u) = ||u||^2_{L_1^2}$. Se tiene que $a(\, , \,)$ es una forma simetrica y continua; luego, por el teorema de Lax - Milgram el problema (6.2) tiene solución única y minimiza a la funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} \nabla v.\nabla v dx + \int_{\Omega} v^2 dx\right) - \int_{\Omega} fv dx, \quad v \in L_1^2(\Omega).$$

Bien, si u es una solución débil de (6.2) y $u \in L_1^2(\Omega)$, usando Green se obtiene para todo $v \in L_1^2(\Omega)$: $\int_{\Omega} -\Delta u.v dx + \int_{\Omega} uv dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N}.v d\sigma = \int_{\Omega} fv dx$.

Si $v \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\int_{\partial\Omega} v d\sigma = 0$, luego, en el sentido de las distribuciones, $-\Delta u + u = f$; pero $\mathscr{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, luego esta ecuación es satisfecha en $L^2(\Omega)$. Por otro lado, $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N}.v d\sigma = 0$, de donde por la naturaleza de v, se tiene $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ en $L^2(\partial\Omega)$.

Conclusión: si $u \in L_2^2(\Omega)$, entonces u es una solución clásica de (6.2). □

7. Teorema Espectral para el Laplaciano. El objetivo de esta Sección es presentar el problema de los valores propios para el operador Laplaciano Δ sobre conjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$. Para ello demos algunos argumentos del análisis funcional. Veamos. Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ un operador lineal. A es llamado finito-dimensional si su rango $R(A)$ está contenido en un espacio de dimensión finita, esto es, si $dim R(A) = k < \infty$; k es llamado la dimensión del operador A. Un operador lineal A es llamado **compacto** si él puede ser aproximado uniformemente por una sucesión de operadores finito - dimensional, esto es, si existe una sucesión $\{A_n\}$, con $dim R(A_n) < \infty$, tal que $\lim_{n\to\infty} ||A - A_n|| = 0$. Algunas consecuencias de esta definición son: todo operador finito-dimensional es compacto; si A y B son operadores compactos, entonces $\alpha A + \beta B$ es compacto; si $\{A_n\}$ es una sucesión de operadores compactos tal que $A_n \to A$ uniformemente ,entonces A es compacto, α y β son escalares; si A es compacto y B es un operador limitado, entonces AB y BA son operadores compactos; A es compacto **si y solo si** A^* es compacto, A^* adjunto de A. (F.Riesz) si k es una función continua definida sobre un conjunto compacto $E \times E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, entonces para toda función $f \in L^2(E)$ el operador integral $(Af)(x) = \int_E k(x,y)f(y)dy$ es un operador compacto.

El operador $A : H \to H$ es llamado **simétrico** si A es lineal y si $< Au, v >=< u, Av >$ para todo x, y en el dominio de A. A es llamado **hermitiano** si A es un operador continuo y simétrico. Ahora nos dirigimos al teorema de Rellich; para ello veamos algunas ideas. Sea $A : H \to H$ un operador, con $\sigma(A)$ se denota al conjunto de todos los valores propios de A, conjunto que es llamado el **espectro puntual** de A. Algunos resultados son:

(i) Sea $A : H \to H$ un operador compacto . Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de A, entonces el núcleo de $A - \lambda I$, $N(A - \lambda I)$, donde I es el operador identidad, es un subespacio de dimensión infinita.

(ii) Sea $A : H \to H$ un operador compacto, entonces $\sigma(A)$ es a lo más un conjunto enumerable.

(iii) Si $A : H \to H$ es un operador simétrico y si u y v son vectores propios de A correspondientes a valores propios diferentes, entonces $< u, v >= 0$.

(iv) Sea A un operador lineal, autoadjunto ($A^* = A$) y continuo sobre un espacio de Hilbert H; entonces se tiene $||A|| = \sup_{||x||=1} | < Ax, x > |$.

(v) Si $A : H \to H$ es un operador autoadjunto, compacto, $A \neq 0$, entonces existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $||A|| = |\lambda|$.

(vi) (Teorema Espectral). Sea $A : H \to H$ un operador autoadjunto, compacto, con espectro puntual $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ infinito. Para todo número real n, sea P_n la proyección de H sobre $H_n = N(A - \lambda_n I)$; entonces se tiene:

   (a) $H = H_1 \oplus H_2 \oplus ....$
   (b) $x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x$, para todo $x \in H$.
   (c) $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x$, para todo $x \in H$.
   (d) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

(vii) (Teorema Espectral). Sea H un espacio de Hilbert separable, de dimensión finita y $A : H \to H$ un operador autoadjunto, compacto y biunívoco. Entonces existe una sucesión de números reales $\{\lambda_n\}$ y una sucesión de vectores (e_n) en H tales que:

   (a) $||A|| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ..., \lambda_n \to 0$.
   (b) $Ae_n = \lambda_n e_n$.
   (c) (e_n), $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto ortonormal completo en H.

Teorema 7.1 (Teorema de Rellich). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y limitado. Entonces la inyección natural $i : L^2_{1,0}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es un operador compacto.*

Bien, ahora nos dirigimos a nuestro objetivo: el teorema espectral para el Laplaciano Δ. Remarcamos que el objetivo es estudiar el problema de los valores propios para el operador Laplaciano Δ sobre conjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$. Para ello se utiliza los teoremas espectrales, (vi) y (vii), para operadores compactos y autoadjuntos definidos sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita. La idea es: asociar a $I - \Delta$ un dominio en donde se pueda considerar a $(I - \Delta)^{-1}$ como un operador autoadjunto y compacto sobre $L^2(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Veamos, se pone

$$D(A) = \{u \in L^2_{1,0}(\Omega)/\Delta u \in L^2(\Omega)\}. \tag{7.1}$$

Se tiene que $D(A)$ es denso $L^2(\Omega)$, pues $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A) \subset L^2_{1,0}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Sea ahora el operador $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, donde

$$Au = u - \Delta u. \tag{7.2}$$

Objetivo: Probar que A es un operador autoadjunto sobre

$$H \equiv L^2(\Omega). \tag{7.3}$$

Para ello, por el teorema: "sea $A : H \to H$ un operador lineal, con dominio $D(A)$ denso en el espacio de Hilbert H. Si A es simétrico de $D(A)$ sobre H, entonces A es un operador autoadjunto", será suficiente probar que A es simétrico y que $A[D(A)] = L^2(\Omega)$. Para ello nos es útil el siguiente resultado: "Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\epsilon > 0$: si $f \in (L^2)^{-1}(\Omega)$, el problema de Dirichlet, modificado para el operador Laplaciano,

$$\begin{cases} \epsilon u - \Delta u = f & \text{en } \mathscr{D}'(\Omega) \\ u \in L^2_{1,0}(\Omega), \end{cases} \tag{7.4}$$

tiene una única solución $u_\epsilon = G_\epsilon f$, donde la aplicación $G_\epsilon : (L^2)^{-1}(\Omega) \to (L^2)^{-1}(\Omega)$, $f \to u_\epsilon$, es un isomorfismo".

Demostración: **de (7.3)**. Veamos que A aplica $D(A)$ sobre $L^2(\Omega)$. En (7.4) tomemos $\epsilon = 1$ y $f \in L^2(\Omega)$; entonces se tiene que exste $u \in D(A)$ tal que $Au = f$. En efecto, dado $f \in L^2(\Omega)$, por (7.4) existe $u_1 \equiv u \in L^2_{1,0}(\Omega)$ tal que $G_1 f = u$ y $-\Delta u + u = f$. Además, $u \in L^2_{1,0}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$ implican que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Luego $u \in D(A)$. También se tiene que $Au = -\Delta u + u = f$.

Veamos ahora que A es simétrico! en efecto, si $u \in D(A)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene

$$< Au, \varphi >= ((7,2)) =< u, \varphi > + < \sum_{i=1}^{n} D_i u, D_i \varphi >=< u, \varphi >_{L_1^2},$$

donde $<,>\equiv<,>_{L^2}$. Por otro lado, siendo $C_0^\infty(\Omega)$ denso en $L^2_{1,0}(\Omega)$ se tiene que

$$< Au, v >=< u, v >_{L_1^2} \text{ , para todo } u \in D(A), v \in L^2_{1,0}(\Omega) \tag{7.5}$$

Luego, $< Au, v >=< u, v >_{L_1^2} =< Av, u >=< u, Av >$, $\forall u$ y v en $D(A)$. (Se recuerda que $D(A) \subset L^2_{1,0}(\Omega)$). Luego A es un operador simétrico y así A es un operador autoadjunto, como se desea. $\square$

Además se observa que $||u||^2_{L_1^2} =(7.5)=< Au, u >\leq ||Au||||u||_{L_1^2}$, $\forall u \in D(A)$.

De esta manera $||u||_{L_1^2} \leq ||Au||$. Luego, $||u||_{L_1^2} \leq ||A^{-1}Au||_{L_1^2} \leq ||Au||_{L_1^2}$, $\forall u \in D(A)$, lo que prueba que A es un operador invertible, con inversa

$B = A^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$, donde B es un operador continuo, ya que $||A^{-1}Au||_{L_1^2} = ||u||_{L_1^2} \leq ||Au||$.

Definición 7.1. *El operador $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, precisado por (7.1) y (7.2), se llama la* **realización autoadjunta** *de $I - \Delta$ a $L^2(\Omega)$.*

Ahora veremos los valores propios para el operador Laplaciano; para ello usaremos el teorema espectral (vii) y el teorema de Rellich.

Teorema 7.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado. Entonces existe una sucesión de números reales $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, y una sucesión de funciones $\{W_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ en $L^2_{1,0}(\Omega)$ tal que*

(i) $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_m \leq ... \to \infty$;

(ii) $-\Delta W_m = \alpha_m W_m$;

(iii) $\{W_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, *es una sucesión ortonormal y completa en* $L^2(\Omega)$.

Demostración: Sea $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ un operador lineal definido vía

$$D(A) = \{u \in L^2_{1,0}(\Omega)/\Delta u \in L^2(\Omega) \text{ y } Au = u - \Delta u\};$$

esto es, A es la realización autoadjunta de $I - \Delta$ a $L^2(\Omega)$. Entonces $A^{-1} \equiv B : L^2(\Omega) \to L^2_{1,0}(\Omega)$ es un operador continuo, luego $||A^{-1}Au||_{L_1^2} = ||u||_{L_1^2} \leq ||Au||$.

Ahora se aplica el teorema de Rellich para obtener que $B_1 = iB : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es un operador compacto tal que $B_1^{-1} = B^{-1}i^{-1} = A$ es un operador autoadjunto, ya que como antes:

$$(B_1^{-1})^* = [(iB)^{-1}]^* = (B^{-1})^* i = A^* i = Ai = B^{-1}i = (iB)^{-1} = B_1^{-1}.$$

Luego, B_1 es, también, un operador autoadjunto en $L^2(\Omega)$.

Ahora se aplica el teorema espectral (vii) para afirmar que existen una sucesión de números reales $\{\lambda_m\}$ y una sucesión $\{W_m\}$ en $L^2(\Omega)$ tal que

(i) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq .. > 0$ con $\lim_{m \to 0} \lambda_m = 0$ $(||B_1|| = |\lambda_1|)$;

(ii) $B_1 W_m = \lambda_m W_m$;

(iii) (W_m) es una sucesión ortonormal, completa, en $L^2(\Omega)$.

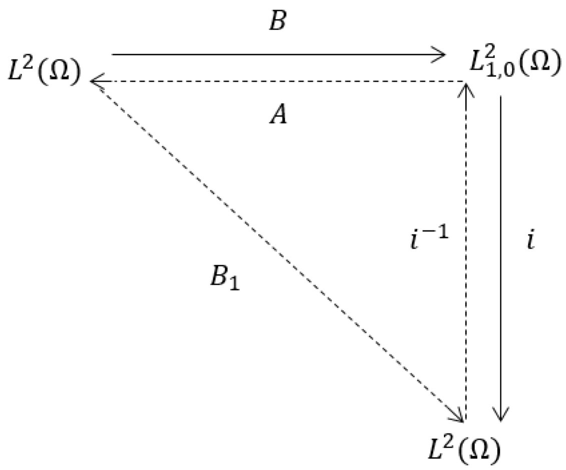

Figura 7.1: Teorema espectral para el Laplaciano.

Ahora se prueba que “ $0 < \lambda_m < 1$, $m = 1, 2, 3, ...$”. En efecto, $W_m \in L^2(\Omega)$ y desde que A es inyectivo y $B_1 = A^{-1}$, B_1 es inyectivo; luego $W_m \in I_m(B_1) = D(A)$ (observemos que $B_1 : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ y que $B_1 W_m = \lambda_m W_m$). Aún más, se tiene que $W_m \in L^2_{1,0}(\Omega)$. En efecto, $B_1 W_m = \lambda_m W_m$ implica $(iB)W_m = \lambda_m W_m$, esto es, $i(BW_m) = \lambda_m W_m$, luego $BW_m = \lambda_m W_m$, donde $BW_m \in L^2_{1,0}(\Omega)$.

Por lo tanto también $\lambda_m^{-1} \lambda_m W_m \in L^2_{1,0}(\Omega)$, esto es, $W_m \in L^2_{1,0}(\Omega)$; ahora usamos (7.5) para obtener $< AW_m, W_m >=< W_m, W_m >_{L^2_1} = ||W_m||_{L^2_1}$.

Ahora se usa la desigualdad de Poincaré ($n = 1$; sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado; entonces existe una constante positiva C tal que $||u||_{L^p_1} < C||u'||_{L^p}$ para todo $u \in L^p_{1,0}(I)$, $1 \leq p < \infty$) se obtiene

$$||W_m||_{L^2_1} = ||W_m||^2_{L^2_1} + \sum_{i=1}^{n} ||D_i W_m||^2_{L^2_0} \geq 1 + C_0.$$

También se tiene que $\lambda_m \neq 0$. En efecto, $B_1 W_m = \lambda_m W_m$ implica $i(BW_m) = \lambda_m W_m$ ó $BW_m = \lambda_m W_m$; luego, si $\lambda_m = 0$, $BW_m = 0$ y siendo B inyectivo, se tendría $W_m = 0$ una contradicción. Entonces

$$AW_m = \lambda_m^{-1} W_m. \tag{9.6}$$

Se tiene (9.6) pues, $AW_m = \lambda_m^{-1} A \lambda_m W_m = \lambda_m^{-1} AB_1 W_m = \lambda^{-1} W_m$. De esta manera se tiene $< AW_m, W_m >=< \lambda_m^{-1} W_m >= \lambda_m^{-1}$.

En conclusión se tiene: $\lambda_m^{-1} =< AW_m, W_m >= ||W||_{L^2_1} \geq 1 + C_0 > 1$ y de esta manera se ha probado que $0 < \lambda_m < 1$.

Ahora pasamos a ver la tesis del teorema 9.2. Veamos (i): la sucesión $\{\alpha_m\}$ es obtenida poniendo $\alpha_m = \lambda_m^{-1} - 1$; así $\alpha_m \geq C_0$; entonces $\alpha_m + 1 = \frac{1}{\lambda_m}$, lo que implica $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_m \leq ... \to \infty$. Veamos (ii): en efecto, por (9.6) se tiene $-\Delta W_m = AW_m - W_m = \lambda_m^{-1} W_m - W_m = \left(\frac{1}{\lambda_m} - 1\right) W_m = \alpha_m W_m$. Finalmente se observa que ya se tiene (iii). $\square$

8. Una Visión de la Teoría General de los Operadores Diferenciales Parciales.

(i) La idea es: “caracterizar los conjuntos de operadores diferenciales parciales los cuales gozan de ciertas propiedades”. Estas propiedades son, clásicamente, existencia de soluciones de ecuaciones homogéneas y no-homogéneas, regularidad de las soluciones, existencia y unicidad de problemas como de Cauchy y Dirichlet.

En la teoría clásica se trata con clases de operadores, como por ejemplo los operadores elípticos y se trata de encontrar tales propiedades; y así con otras clases de operadores (parabólicos e hiperbólicos ...). Pero desde el punto de vista de la teoría general se debe abandonar cualquier limitación sobre el orden del operador o del número de variables.

Por ejemplo, el hecho de que todas las soluciones globales de una ecuación homogénea sean funciones analíticas es equivalente a la propiedad que el operador tenga características no reales, lo que significa que la parte principal del polinomio asociado se anule solamente en el origen del espacio real. Otro ejemplo de la teoría general, debido a Garding, nos dice que un operador diferencial parcial lineal, con coeficientes constantes, tiene la propiedad de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy si y solo si es hiperbólica.

Por otro lado, debe reconocerse el impacto que tuvo la teoría de distribuciones de L.Schwartz, introducida en los años 1940's, para que se elabora tal teoría general. En efecto, el impacto de esta teoría sobre la teoría de ecuaciones diferenciales parciale lineales fue muy significativa y fundamental, junto con el avance del análisis funcional. Según F. Treves, [22], la teoría de distribuciones fue una revolución en el campo del análisis y sobre todo en las EDP pues en los años 50's surgieron trabajos fundamentales como fueron las contribuciones de B. Malgrange, L. Ehrenpreis, L. Hörmander, L. Garding, ... Treves describe diferentes ventajas de las distribuciones, de los espacios vectoriales topológicos, en particular de los espacios localmente convexos.

En 1949 J. Dieudonné - L.Schwartz publicaron el artículo "La dualité dans les espaces (F) et (LF)", que es considerado un trabajo pionero en los resultados que se publicarían años después.

Bien, el problema que se deseaba resolver era: dada la ecuación

$$Pu = f, \tag{8.1}$$

una EDP lineal con coeficientes constantes, donde f es una función dada arbitraria de valor - complejo, que está en $C^\infty(\Omega)$ siendo Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Se desea saber si existe una solución u de (8.1) y si ella es infinitamente diferenciable en $C^\infty(\Omega)$.

Malgrange dio un teorema que da una condición necesaria y suficiente con algunas condiciones sobre el abierto Ω y sobre el operador diferencial P, asegurando que dado cualquier $f \in C^\infty(\Omega)$ existe $u \in C^\infty(\Omega)$ que satisface (8.1). Ver [22]. Veamos brevemente este teorema. Sea $P = \sum c_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ un operador diferencial, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (α_j entero no-negativo) las sumas son finitas, c_α son números complejos y $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Un conjunto abierto Ω en $\mathbb{R}$ es llamado **P - convexo** si Ω es convexo cualquiera que sea $P(D)$, donde $P(D)$ es un polinomio diferencial. Ver [23], pag. 185, sobre P-convexidad.

Recordemos que en un espacio vectorial un conjunto C es llamado convexo si dados dos puntos cualquiera en C, entonces el segmento que los une está también en C. Por otro lado, todo operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes se llama un "polinomio diferencial". Se observa que el operador P define una aplicación lineal de C^∞ en sí mismo. De esta manera el problema (8.1) se traduce a la afirmación: la aplicación lineal $P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ **es sobre**, esto es, que se tiene $PC^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega)$. En este contexto Malgrange en 1954 probó la caracterización:

Teorema 8.1. $PC^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ **si y solo si** Ω *es P - convexo.*

Para la prueba de este teorema ver [22]. Un lector interesado en mayores detalles puede consultar [24] y [23]. Un trabajo pionero en esta dirección es el artículo de Malgrange [25] en donde se hace fuerte uso de la teoría de distribuciones.

(ii) **La Tesis de L.Hörmander**. [26]. La teoría general de los operadores diferenciales parciales fue iniciada por Lars Hörmander en 1955 en su fundamental tesis de Doctorado iniciando una nueva y original ruta en el tratamiento de las EDP; a partir de entonces surgieron investigaciones donde se continuaron las investigaciones de Hörmander, incluyéndose él mismo. Su trabajo fue una frontera entre la teoría clásica y la moderna, la teoría general, en donde se aplicó muchas ideas del análisis funcional, de los espacios de Hilbert, de los espacios de funciones, como los de Sobolev y naturalmente se usó la teoría de distribuciones. Ver el libro de Maurin, [27], capítulo XX, donde se expone en forma breve algunos aspectos de la teoría de Hörmander; además, presenta los métodos de los espacios de Hilbert en diferentes partes del análisis moderno y en particular en las EDP así como los métodos de estos espacios en el análisis complejo.

La tesis de Hörmander, "Sobre la Teoría General de los Operadores Diferenciales Parciales", consta de 4 capítulos:

I. Operadores diferenciales desde un punto de vista abstracto.
II. Operadores diferenciables minimales con coeficientes constantes.
III. Operadores diferenciables maximales con coeficientes constantes.
IV. Operadores diferenciables con coeficientes variables.

Al inicio hay un Prefacio y al final las referencias. En el Prefacio se comunica que en la teoría de las EDP siempre se ha concentrado en el estudio de las ecuaciones elípticas y las hiperbólicas, así como en los problemas de Dirichlet y de Cauchy en forma satisfactoria; pero remarca que Petrowsky en 1946 escribió en forma general ecuaciones diferenciales; asi mismo destaca que Malgrange en 1953 prueba que cualquier ecuación diferencial con coeficientes constantes tiene un solución fundamental; aparte de estas contribuciones no hubieron investigaciones sobre las propiedades generales de los operadores diferenciales y Hörmander dice que el objetivo de su trabajo es estudiar las EDP bajo este contexto general, afirmando que este punto de vista general capaz ilumine la teoría de las ecuaciones elípticas e hiperbólicas.

Menciona que la teoría moderna de las EDP hace uso dela teoría abstracta de la teoría de operadores en espacios de Hilbert. En el capítulo I, Hörmander introduce los operadores diferenciales desde un punto de vista abstracto usando fuertemente el análisis funcional, los espacios de Banach, la teoría de operadores. Después de una introducción, da definiciones y resultados de la teoría abstracta de operadores; luego define los operadores diferenciales; define al operador diferencial P y en base a este operador define al operador P_0, llamado el operador **minimal** y también en base a P define al operador **maximal**. Este capítulo termina estudiando el dado de Cauchy y el problema de contorno.

El capítulo II está dedicado a estudiar los operadores minimales con coeficientes constantes (11 secciones) y el III dedicado a los operadores maximales (9 secciones). II y III son las partes más elaboradas del "paper" y contienen los resultados novedosos en el espíritu general de la teoría. El capítulo IV es muy breve; trata sobre los operadores diferenciales con coeficientes variables. Recalca que el teorema: " una condición necesaria y suficiente para que $Q(D)$ sea más débil que $P(D)$ en un dominio acotado, es que

$$\frac{\tilde{Q}(\xi)}{\tilde{P(\xi)}} < C,$$

para todo real ξ donde C es una constante y donde $\tilde{P}(\xi) = (\sum |P^{(\alpha)}(\xi)|^2)^{\frac{1}{2}}$", el cual, nos dice, es el resultado central del capítulo II, puede ser establecido cuando los coeficientes del operador son variables si deseables restricciones son dadas. El capítulo consta de una introducción y de 2 secciones; en la primera se dan algunos preliminares, Ω es ahora una variedad diferenciable. En la segunda sección se prueba el análogo del teorema mencionado arriba cuando los coeficiente del operador P son ahora variables; se prueba también otro teorema en este contexto. Finalmente, las Referencias contienen 35 artículos sobre el tema.

(iii) **El Libro de 1963.** En este año salió publicado el libro "Linear Partial Differential Operators" en donde Hörmander expone un estudio detallado de las EDP, según la teoría general, de cuestiones relacionados a la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de EDP lineales, así como de problemas de valor de contorno.

El contenido del libro es desarrollado bajo el escenario del análisis funcional y de la teoría de distribuciones y consta de tres partes, Parte I: Análisis funcional , que tiene dos capítulos: I, teoría de distribuciones y II, algunos espacios especiales de distribuciones. La Parte II: Operadores diferenciales con coeficientes constantes, que tiene tres capítulos: capítulo III: Existencia y aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales; capítulo IV: Regularidad interior de soluciones de ecuaciones diferenciales y capítulo V: El problema de Cauchy. Parte III: Operadores diferenciales con coeficientes variables, que tiene cinco capítulos: capítulo VI: Ecuaciones diferenciales los cuales no tiene solución; capítulo VII: Operadores diferenciales de "strength" constante; capítulo VIII: Operadores diferenciales con características simples; capítulo IX: El problema de Cauchy con coeficientes variables; y capítulo X: Problemas de contorno elípticos. El libro contiene un apéndice donde se tratan algunos lemas algebraicos y termina con una amplia bibliografía. El libro es bastante técnico y requiere que el lector esté familiarizado con el análisis moderno hasta esa época, en particular con buena formación en análisis funcional y en la teoría de distribuciones.

9. Breve Introducción a la Teoría de Distribuciones: Algunos Requisitos Matemáticos. A fin de cumplir con el objetivo de brindar una ruta para que un lector pueda estudiar las EDP desde un punto de vista general, en particular los trabajos de Hörmander, vamos a dar una breve introducción a la teoría de distribuciones y de algunos espacios de distribuciones, todo relacionado con los operadores diferenciales parciales. El escenario es $\mathbb{R}^n$, donde n es un entero positivo; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es un vector de enteros no - negativos; $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$,$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Un polinomio P es definido vía $P(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$, donde a_α son funciones de n variables, m es un entero ≥ 0. El grado de P es m si existe α con $|\alpha| = m$ y $a_\alpha \neq 0$. Si $1 \leq j \leq n$ y u es una función de n variables, se pone $D^j u = -i\frac{\partial u}{\partial x_j}$ y $D = (D_1, .., D_n)$. Sea ahora P un polinomio; entonces un operador diferencial parcial $P(D)$ es definido vía

$$P(D)u(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n} u(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Si los coeficientes a_α son constantes, $P(D)$ es un operador con coeficientes constantes; si fueran variables, $P(D)$ es de coeficientes variables. Ahora, se dice que una ecuación diferencial parcial es una igualdad de la forma $P(D)u = f$, donde f es una función dada y u es una función a determinar.

9.1. Breve Introducción a la Teoría de Distribuciones. Veamos una motivación. Sea u y φ dos funciones diferenciables sobre el abierto $\Omega \in \mathbb{R}^n$, φ tiene soporte compacto (se anula fuera de un conjunto compacto), entonces se tiene integrando por partes:

$$\int_\Omega D_j u(x)\varphi(x)dx = -i\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi(x)dx = i\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega u(x)D_j\varphi(x)dx.$$

De esta manera, de un modo general, para un polinomio diferencial $P(D)$ se tiene

$$\int_\Omega P(D)u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega u(x)P(-D)\varphi(x)dx.$$

Esta relación motiva que la ecuación $P(D)u = f$ se escriba en la forma

$$\int_\Omega u(x)P(-D)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \text{, para toda tal } \varphi.$$

Cuando u satisface esta relación, se dice que u es una **solución débil** de la ecuación.

Observemos que se podría pensar que u actúa como una funcional lineal sobre las funciones φ y como se asumió que φ tiene soporte compacto, se podría definir $P(D)$ u sobre un espacio localmente compacto.

En este contexto, sea k un número natural ($\neq 0$) y consideremos los espacios: $C^k(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ (complejos) $/|\alpha| \leq k$ implica que $D^\alpha u$ existe y es continua $\}$;

$$\mathscr{D}^k(\Omega) = C_0^k(\Omega) = \left\{\varphi \in C^k(\Omega)/\operatorname{sopp}\varphi \text{ es compacto}\right\}; \text{ (sopp } = \text{ soporte);}$$
$$\mathscr{D}(\Omega) = \bigcap_k \mathscr{D}^k(\Omega); C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega).$$

Definición 9.1. *(terminología según Hörmander; [1], pag. 4). Una distribución u en Ω es una forma lineal sobre $\mathscr{D}(\Omega) \equiv C_0^\infty$ tal que sobre todo compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $C > 0$ y enteros no-negativos m tal que*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup|D^\alpha\varphi|, \varphi \in C_0^\infty(K) = \mathscr{D}(\Omega). \tag{9.1}$$

EL conjunto de todas las distribuciones en Ω es denotado con $\mathscr{D}'(\Omega)$. Además, el orden de u es definido siendo el ínfimo m_0 tal que para todo K se tiene (9.1) para algún $m \leq m_0$.

También se tiene el espacio $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C}/\ u|_K \in L^p(K)$, para todo compacto $K \subset \Omega\}$. Siguiendo con [1], si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α es arbitrario, una distribución de orden $\leq |\alpha|$ es definida por la forma lineal $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \to \int uD^\alpha\varphi dx$. Por otro lado, si μ es una medida sobre Ω, entonces se define $d\mu \in \mathscr{D}'(\Omega)$ siendo $d\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu$, donde el orden de $d\mu$ es cero.

Nota 9.1. *Hörmander observa que la notación $\mathscr{D}'(\Omega)$ es porque L.Schwartz denota con $\mathscr{D}(\Omega)$ al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ provisto con una topología la cual hace a $\mathscr{D}'(\Omega)$ su espacio dual.*

Se tiene la siguiente caracterización.

Teorema 9.1. *Una forma lineal u sobre $C_0^\infty(\Omega)$ es una distribución* **si y solo si** $u(\varphi_j) \to 0$, *$j \to \infty$, para toda sucesión $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que:*

(i) $D^\alpha\varphi_j \to 0$ uniformemente cuando $j \to \infty$, para todo α;

(ii) existe un subconjunto compacto de Ω conteniendo los soportes de todas las φ_j.

Una sucesión que satisface (i) y (ii) se dice que converge a cero en $C_0^\infty(\Omega)$.

Teorema 9.2. *Sean u_1 y u_2 dos distribuciones en Ω tal que todo punto en Ω tiene una vecindad donde $u_1 = u_2$; entonces $u_1 = u_2$ en Ω.*

Para la demostración de estos teoremas ver Hörmander [1].

Definición 9.2 (Soporte de una Distribución). *Si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, el* **soporte** *de u es definido siendo el conjunto de los puntos en Ω en el cual no hay vecindad alguna donde $u = 0$. El soporte de u es denotado con sopp u. Se observa que $u = 0$ en el complemento de sopp u en Ω. En otras palabras se tiene: $u(\varphi) = 0$ si se tiene $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y sopp $u \cap$ sopp$\varphi = \varnothing$ (conjunto vacío). De esta manera el complemento del sopp u es el mayor subconjunto abierto de Ω donde $u = 0$. También es importante en esta ruta lo siguiente: "si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, por definición el* **soporte singular** *de u es el conjunto de puntos en Ω que no tienen vecindad alguna donde $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Notación. soppsing u denota al soporte singular de u.

9.2. Diferenciación de Distribuciones. Veamos, a manera de motivación, que si $u \in C^1(\Omega)$ entonces integrando por partes se tiene $\int (D^k u)\varphi dx = -\int uD^k\varphi dx$, donde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Observemos que esta es la derivada débil de u. Entonces, si $u(\ )$, por definición

$$\int \left(D^k u\right)(\varphi)dx = (-1)\int u\left(D^k\varphi\right)dx.\ \text{Se observa que } D^k u \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

En general se tiene: si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ entonces $(D^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u\left(D^\alpha\varphi\right), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

En la notación de Schwartz diríamos: si u es una distribución, su derivada $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ es la funcional lineal continua sobre $C_0^\infty(\Omega)$ definida por la relación

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Se observa que toda distribución es infinitamente diferenciable, propiedad que es destacable en la teoría de operadores diferenciables parciales. Asi mismo, toda función en el sentido de las distribuciones, es diferenciable. La función de Heaviside $H(x) = 1$, si $x > 0$; $= 0$ si $x \leq 0$, no es diferenciable (en el origen), sin embargo como distribución si lo es ($H' = \delta$, delta de Dirac). En su concepción física δ es una medida donde δ' es una distribución que no es una medida. Esto motiva poner: { funciones } $\subset$ { medidas } $\subset$ { distribuciones }.

9.3. Multiplicación de una Distribución con una Función. [notación de Hörmander] Por definición, si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y $a \in C^\infty(\Omega)$, el producto de u con a es dado por: $(au)(\varphi) = u(a\varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. au es una distribución y si u fuera una función, esta definición coincide con la multiplicación puntual. Además, se tiene sopp $(au) \subset$ sopp $a\cap$ sopp u. Schwartz observó que la asociatividad para distribuciones no puede definirse. Si vale la fórmula de Leibniz para la diferenciación de un producto (au). Se tiene:

Lema 9.1. *Sea $P(\xi)$ un polinomio en las variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$, con coeficientes complejos y sea $P(D)$ el operador diferencial obtenido reemplazando ξ_j por D^j. Sea $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y $a \in C^\infty(\Omega)$. Entonces se tiene*

$$P(D)(au) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left(D^\alpha a\right)\left(P^{(\alpha)}(D)u\right), \alpha! = \alpha_1! \ldots, \alpha_n!.$$

Demostración: [1]. Por tal reemplazo se tiene una correspondencia 1-1 entre los polinomios y los operadores con coeficientes constantes: $P(D)e^{i\langle x,\xi\rangle}$, donde
$\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ con exponentes complejos ξ_j.

Se sabe que $D^k(au) = \left(D^k a\right) u + a\left(D^k u\right)$, de donde se obtiene (repitiendo el uso de esta igualdad) $P(D)(au) = \sum_\alpha \left(D^\alpha a\right) Q_\alpha(D)u$, donde Q son operadores diferenciales, lo que es determinado tomando $a(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}$ y u siendo la función $u(x) = e^{i\langle x,\eta\rangle}$ y así se obtiene $P(\xi+\eta)$. ¿Cómo es $Q_\alpha(\eta)$?

Si se escribe $P^{(\alpha)}(\eta) = \frac{\partial^{|\alpha|}P(\eta)}{\partial\eta_1^{\alpha_1}\ldots\partial\eta_n^{\alpha_n}} = i^{|\alpha|}D^\alpha P(\eta)$, y vía la fórmula de Taylor, se obtiene que $Q_\alpha = \frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\eta)$, y se tiene la tesis. □

Teorema 9.3. *Si u y f están en $C^0(\Omega)$ y $D^j u = f$ en el sentido de las distribuciones, entonces $D^j u = f$ se tiene en el sentido clásico. Demostración:* Ver [1], pag. 10.

9.4. Distribuciones con Soporte Compacto.. Sea $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ con soporte compacto contenido en Ω. En este contexto se verifican los siguientes teoremas (para sus demostraciones, ver [1], pags. 10 a 13).

Teorema 9.4. *Sea K un subconjunto compacto de Ω tal que sopp $u \in K$. Entonces la forma lineal u puede ser extendida en un, y solo un, camino a una forma lineal $\tilde{u}$ sobre $C^\infty(\Omega)$ tal que $\tilde{u}(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, el cual se anula en una vecindad de K.*

Hörmander estudia ahora las propiedades de u. Así, sea K' el soporte de la función ψ ($\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ en una vecindad de K), entonces se verifica que para algunas constantes C y k se tiene $|\tilde{u}(\varphi)| \leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{K'}|D^\alpha\varphi|$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Recíprocamente, supongamos que se tiene una forma lineal v sobre $C^\infty(\Omega)$ tal que para algunas constantes C y k, y algún conjunto compacto $L \subset \Omega$ se tiene

$$|v(\varphi)| \leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_L|D^\alpha\varphi|\,,\ \text{con } \varphi \in C^\infty(\Omega). \tag{9.2}$$

Entonces, la restricción de v a $C_0^\infty(\Omega)$ es una distribución u con sopp compacto en L. Pero, de (9.2) se sigue que $v(\varphi) = 0$ si φ se anula en una vecindad de L, y luego se obtiene que $v = \tilde{u}$.

De esta manera, quitando la distinción entre u y $\tilde{u}$, se la probado el

Teorema 9.5. *El conjunto de las distribuciones en Ω, con soporte compacto, es idéntico con el espacio dual de $C^\infty(\Omega)$ con la topología definida por las semi-normas $\varphi \to \sum_{|\alpha|\leq k}\sup_K|D^\alpha\varphi|$ donde K contiene a todos los subconjuntos compactos de Ω y k recorre todos los enteros ≥ 0.*

9.5. Intersección con la Escuela Schwartz. Veamos, ligeramente, algunas definiciones. Sea E un espacio vectorial (ev) sobre el cuerpo de los números complejos asociado de la topología que hace continuas a las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar ,entonces E es llamado un espacio vectorial topológico (evt).

Un subconjunto U de un ev E es llamado absorbente si para todo $x \in E$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda x \in U$ para $|\lambda| \leq \varepsilon$. Un subconjunto U de un ev E es llamado equilibrado si $\lambda U \subset U$ para $|\lambda| \leq 1$. Sea E un ev asociado de una topología definida por una base de vecindades del origen la que es una familia de conjuntos que son convexos, absorventes y equilibrados, entonces E, se llama un **espacio localmente convexo** (elc).

Un espacio topológico E es llamado metrizable si es posible definir en E una métrica, la cual define una topología en E.

Definición 9.3. *Un evt que es elc, metrizable y completo es llamado un espacio de Fréchet (eF).*

$C^\infty(\Omega)$ es un e.F. Ahora, sea $\mathcal{E}(\Omega)$ el espacio $F = C^\infty(\Omega)$ asociado de la topología determinada por las seminormas $p_{K,m}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|$,$K$ compacto $\subset \Omega$.

Se observa que una sucesión $\{\varphi_n\}$, en $\mathcal{E}(\Omega)$, converge a cero **si y solo si** para cada α, la sucesión $\{D^\alpha\varphi\}$ converge a cero uniformemente sobre cada compacto en Ω.

El espacio dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ se denota con $\mathcal{E}'(\Omega)$. Se tiene que $\mathscr{D}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{E}(\Omega)$.

Teorema 9.6. *Sea $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, entonces se tiene que $u|_{\mathscr{D}(\Omega)}$ es una distribución con soporte compacto, y cada cada distribución con soporte compacto se obtiene unívocamente por esta ruta.*

De esta manera se puede decir que $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ y se dice que $\mathcal{E}'(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones con soporte compacto.

9.6. Convolución de Distribuciones. [1]. Recordemos que si u y φ son dos funciones continuas y una de ellas tiene soporte compacto, entonces su convolución es definida vía

$$(u*\varphi)(x) = \int u(x-y)\varphi(y)dy = \int u(y)\varphi(x-y)dy = (\varphi*u)(x).$$

Esta igualdad sugiere la definición (convolución de una distribución con una función con soporte compacto): "si $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces la convolución $u * \varphi$ es definida vía $(u * \varphi)(x) = u[\varphi(x-y)]$, ($x$ es fijo e y es variable).

Algunas propiedades de la convolución son, [1]:

(i) Si $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$); sopp $(u * \varphi) \subset$ sopp $u+$ sopp φ. Además $D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$.

(ii) Si φ y ψ están en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi).$$

(iii) (Regularización de una distribución). Sea $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con sopp $\varphi \subset \{x/|x| \leq 1\}$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ y $\int \varphi = 1$. Se define $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ vía $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$. Si $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u * \varphi_\varepsilon)(x)\psi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} u * \varphi_\xi(\psi) = u(\psi).$$

9.7. Convolución de Dos Distribuciones. Una de las cuales tiene soporte compacto. Sean u_1 y u_2 dos distribuciones y supongamos que u_2 tiene soporte compacto; sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; (sabemos que el soporte de la convolución de una distribución con una función en $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ está contenido en la suma de los soportes respectivos), entonces se tiene $u_2 * \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; luego la aplicación lineal $h : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ definida vía $h(\varphi) = u_1 * (u_2 * \varphi)$, la cual es lineal, invariante por traslaciones y continua; luego por el

Teorema 9.7. *sea la aplicación lineal $U : C_0^\infty(R^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ la cual conmuta con traslaciones y es continua en el sentido $U\varphi_j \to 0$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $\varphi_j \to 0$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una y solo una distribución u tal que $U\varphi = u * \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$.*

se tiene que existe una única distribución u tal que

$$u_1 * (u_2 * \varphi) = u * \varphi,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{9.3}$$

Ahora, con el objetivo de tener la asociatividad del producto convolución se da la ([1]):

Definición 9.4. *La convolución de las distribuciones u_1 y u_2 en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, una de las cuales tiene soporte compacto, es definida siendo la distribución u que satisface (9.3), y es denotado con*

$$u_1 * u_2.$$

Se tiene que $u * \delta = u$, donde $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ y δ es la delta de Dirac. También se verifica que $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$, si una de las distribuciones tiene soporte compacto; además, sopp$(u_1 * u_2) \subseteq$ sopp u_1+ sopp u_2. Otras propiedades de la convolución son : $D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$; de donde se obtiene $D^\alpha(u_1 * u_2) = (D^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (D^\alpha u_2)$.

9.8. La Transformada de Fourier de Distribuciones.. [1]. La transformada ee Fourier es una idea matemática de gran valor en el estudio del análisis, tanto clásico como en la teoría de los operadores diferenciales parciales. Veamos.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier, $\hat{f}$, es definida vía $\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx$, donde $\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$; si $\hat{f}$ es integrable, la transformada inversa es $f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi$.

En el estudio de la transformada de Fourier en la teoría de distribuciones es importante el espacio $\mathcal{S}$, un subconjunto de C^∞ y que contiene a C_0^∞, y su espacio dual $\mathcal{S}'$ es un subespacio de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ pero que contiene a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. El espacio $\mathcal{S}$ es el apropiado para la transformada de Fourier.

Definición 9.5. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n))/p_{\beta,\alpha}(\varphi) = \sup_x |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \infty\}$ *para todos multi-índices α, β.*

La topología en $\mathcal{S}$ es determinada por las seminormas $p_{\alpha,\beta}$. $\mathcal{S}(R^n)$ es un espacio de Frechet. Se observa que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se tiene el

Lema 9.2. *la transformación $\wedge : \varphi \to \hat{\varphi}$ aplica $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.*

La transformada de fourier tiene las siguientes propiedades:

(i) la aplicación $\wedge$ es continua;

(ii) $(D^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$, para todo α;

(iii) $(x_j\varphi)^\wedge = -D^j\hat{\varphi}$.

Se verifica, [1], que en $\mathcal{S}$ se tiene la fórmula de la inversa de la transformada de Fourier y en consecuencia la transformada $\wedge$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{S}$. Se tiene $\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^n\check{\varphi}$.

Teorema 9.8. *φ y ψ están en $\mathcal{S}$ entonces se tiene $\int \hat{\varphi}\psi dx = \int \varphi\hat{\psi}dx$;*

$$\int \varphi\bar{\psi}dx = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}dx \ldots \textit{ fórmula de Parseval}$$

$$(\varphi * \psi)\hat{} = \hat{\varphi}\hat{\psi} \text{ y } \quad (\varphi\psi)\hat{} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}.$$

Para la demostración ver [1], pag. 19.

Definición 9.6. *Una forma lineal continua u sobre $\mathcal{S}$ es llamada una* **distribución temperada** *y el conjunto de las distribuciones temperadas se denota con $\mathcal{S}'$.*

Lema 9.3. *Se tiene $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathscr{D}'$, con inclusiones densas; luego $\mathcal{S}$ es llamado el espacio de las funciones rápidamente decrecientes y $\mathcal{S}'$ el espacio de las distribuciones temperadas.*

Definición 9.7. *Si $u \in \mathcal{S}'$, su transformada de Fourier $\hat{u}$ es definida vía*

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}), \varphi \in \mathcal{S}.$$

Se observa que $\hat{u} \in \mathcal{S}'$; además, $\Lambda : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ es un isomorfismo y se tiene $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n\check{u}$ donde, por definición $\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$. La transformada de Fourier es continua en $\mathcal{S}'$.

Teorema 9.9. *Sea $u \in \mathcal{S}'$; entonces $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$* **si y solo si** *$\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, y se tiene la fórmula de Parseval $\int |\hat{u}|^2dx = (2\pi)^n\int |u|^2dx$.*

Teorema 9.10. *Si $u \in \mathcal{E}'$, su transformada de Fourier es la función*

$$\hat{u}(\xi) = u(\psi_\xi) \textit{ donde } \psi_\xi(x) = e^{-i<x,\xi>}.$$

10. Breve Presentación de los Espacios de Hörmander $\mathscr{B}_{p,k}$. Recordemos algunos resultados clásicos. Sea el espacio de Sobolev $L^2_m(\mathbb{R}^n) \equiv L^2_m (= H^m)$, m entero ≥ 0, de todas las distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}'$ tales que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$. Se tiene $L^2_m \subset L^2 \subset \mathcal{S}'$; y si $u = u(x) \in L^2_m$ entonces

$$x^\alpha\hat{u}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m. \tag{10.1}$$

Y recíprocamente.

Teorema 10.1. $u(x) \in L^2_m$ **si y solo si** $\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2$.

Demostración:

Si: sea $u \in L^2_m$. Observando que $|x|^m$ y $\sum_{i=1}^n |x_i|^m$ son homogéneas de grado m, se tiene que existen las constantes a y b tal que

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq a\left(1+|x|^m\right) \leq a\left(1+b\sum_{i=1}^n |x_i|^m\right).$$

Luego,

$$\| \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u}\|_{L^2} \leq a\|\hat{u}\|_{L^2} + ab\|\sum_{i=1}^n |x_i|^m\hat{u}\|_{L^2} < a\| u \Bigg\|_{L^2} + ab\sum_{i=1}^n \Bigg\| \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m u\|_{L^2},$$

de donde, $\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2$.

y solo si: Sea $\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2$. Si $|x| < 1$ se tiene $|x^\alpha| \leq 1 \leq \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}$ para todo $|\alpha| \leq m$. Si $|x| \geq 1$ se tiene $|x^\alpha| \leq |x|^m \leq \left(1+|x|^2\right)^2$ para todo $|\alpha| \leq m$. Entonces se tiene $|x^\alpha\hat{u}(x)| \leq \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u}(x) \in L^2$, y por 10.1 se tiene $u \in L^2_m$. □

Se verifica que $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, en donde se considera la norma $\|u\|_{L^2_m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ y el producto interno $\langle u_1, u_2\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha u_1, D^\alpha u_2\rangle$. Por el teorema 10.1, una norma equivalente de u en L^2_m es $\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u}\right\|_{L^2}$.

10.1. Los Espacios de Sobolev $L_s^p(\mathbb{R}^n)$. , donde s es un número real y $1 \leq p \leq \infty$. Sea el operador I definido vía $(I^s u)^\wedge(x) = \varphi^{-1}(x)\hat{u}(x)$, donde $u \in \mathcal{S}', \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función estrictamente positiva, radial $[\varphi(x) = \varphi(|x|)]$ y $\varphi(x) = |x|$ si $|x| \geqslant 1$.

Definición 10.1. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y s un número real arbitrario, entonces $L_s^p(R^n) = I^s(L^p)$.*

Si $u \in L_s^p(\mathbb{R}^n)$) entonces existe $v \in L^p$ tal que $u = I^s(v)$, lo cual motiva la norma de u : $\|u\|_{L_s^p} = \|v\|_{L^p}$, con la cual L_s^p es un espacio de Banach. Se verifica que $\frac{\partial}{\partial x_i} : L_s^p \to L_{s-1}^p$, $1 < p < \infty$, es un operador lineal continuo. Aún que, $D^\alpha : L_s^p \to L_{s-|\alpha|}^p$ es un operador continuo si $1 < p < \infty$.

En el análisis armónico la teoría de pesos fue introducida para establecer los espacios de funciones pesados ; en este contexto el peso es una función medible $w(x)$, definida en un espacio medible y con valores en $[0, \infty]$, la cual es localmente integrable . Si $1 \leq p \leq \infty$, la clase de las funciones pesos es denotada con A_p. Hörmander, en el capítulo II de [1], trabaja también con funciones pesos, que los denota con k. Hörmander se cuestiona : ¿cuales son las funciones peso k para tener $k\hat{u} \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, donde u es una distribución temperada?

El conjunto de tales distribuciones temperadas lo denota como $\mathscr{B}_{p,k}$ Como un ejemplo de función peso se tiene a la función $k_s(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, que ya vimos anteriormente. Hörmander, [1], pag. 33, da unas motivaciones de porque introdujo los espacios $\mathscr{B}_{p,k}$. Veamos. Una de las cuestiones importantes en la teoría de existencia de soluciones en las PDE es la regularidad de las soluciones. Nos dice que una condición sobre la regularidad de una función o distribución u con soporte compacto puede estar relacionado con la condición del compartimiento en el infinito de la transformada de Fourier de u y que este compartimiento se puede clarificar vía el cuestionamiento de Hörmander, dado antes. Nos dice, también, que en la definición del espacio $\mathscr{B}_{p,k}$ los casos $p = 2$, $p = 1$ y $p = \infty$ son los casos más importantes. Veamos nuevamente $k\hat{u} \in L^p$ y el teorema 10.1, donde el lado derecho nos dice que es equivalente a que u está en un espacio de funciones ; esto es una motivación para encontrar apropiadas funciones peso k para tener $k\hat{u}$ en L^p. Y los espacios de Lebesgue L^p son el escenario apropiado para estudiar las EDP.

Veamos aun algunos argumentos en esta dirección. Sea el operador diferencial lineal $P = \sum_{|\alpha| \leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$ se sabe que si $u \in L_m^2(D)$, Pu es una distribución ; además, si $u \in L_m^2(D), |\alpha| \leq m, g_\alpha = D^\alpha u$. se tiene que $g_\alpha \in L^2(D)$ y $Pu = \sum_{|\alpha| \leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha g_\alpha \in L_{-m}^2(D)$, por el resultado: "si $1 < p < \infty$, $m > 0$, entonces $g \in L_{-m}^2$ **si y solo si** $g = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$, para algún $g_\alpha \in L^p$, donde D^α es en el sentido de las distribuciones".

Nota 10.1. *$L_{-m}^2(D)$ es el espacio dual de $L_m^2(D)$.*

Se tienen los siguientes resultados:

- El complemento ortogonal de $L_{m,0}^2(D)$ en L_m^2 (D) es el núcleo del operador diferencial P. Esto es, se tiene $L_m^2(D) = L_{m,0}^2(D) \oplus \left\{u \in L_m^2(D)/Pu = 0\right\}$;
- $\left[L_{1,0}^2(D)\right]^\perp = \left\{u \in L_1^2(D)/u - \Delta u = 0\right\}$;
- El problema $u - \Delta u = 0$, $u \in L_{1,0}^2(D)$, tiene una única solución, la distribución $u = 0$;
- El operador P transforma $L_{m,0}^2(D)$ sobre $L_{-m}^2(D)$ isomórficamente.

Hörmander, [1], observa que en la teoría de las EDP surgieron algunos espacios de la forma $\mathscr{B}_{p,k}$, así remarca que cuando $k_s(\xi) = \left(1 + (\xi)^2\right)^{\frac{s}{2}}$ entonces $\mathscr{B}_{2,k}$ es el espacio de todas las u tal que $D^\alpha u \in L^2$, donde $|\alpha| \leq s$ (es el espacio L_s^2 visto antes) espacio que es importante en el estudio de las ecuaciones elípticas vía el método variacional, tal como L. Garding lo investigó en 1953. Si k es un entero negativo, en 1955 P. Lax obtuvo resultados relacionados con las ecuaciones elípticas; por otro lado, cuando en $\mathscr{B}_{2,k}$ se tiene que $2s$ es un entero, tal espacio es útil en los problemas de valor de contorno para ecuaciones diferenciales de tipo elíptico.

Asi mismo, Hörmander (tesis de 1955) estudia estimativas $-L^2$ para operadores diferenciales parciales con coeficientes constantes, estudio que lo llevó ,implícitamente a los espacios $\mathscr{B}_{2,k}$ donde se considera una clase general de funciones peso ; en particular los casos $p = 1$ y $p = \infty$ aparecen en el estudio sobre la regularidad de las soluciones fundamentales.

Veamos algunas ideas matemáticas sobre espacios pesados.

Definición 10.2. *k, una función positiva definida en $\mathbb{R}^n$, es llamada una* **función temperada peso** *(ftp) si existen constantes positivas C y N tal que*

$k(\xi+\eta) < (1+C|\xi|)^N k(\eta)$, *donde* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{H} = \{k/k \text{ es función peso }\}.$$

Si $k_s(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, entonces $k_s \in \mathcal{H}$. También, si $\tilde{P}$ es definido vía $\tilde{P}(\xi)^2 = \sum_{|\alpha|\geq 0} \left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2$ donde P es un polinomio tal que la suma es finita y $P^{(\alpha)}$ es definida via $P^{(\alpha)}(\eta) = i^{|\alpha|}D^\alpha P(\eta)$, entonces $\tilde{P} \in \mathcal{H}$.

Teorema 10.2. *Si k_1 y k_2 están en $\mathcal{H}$, entonces k_1+k_2, k_1k_2, $\sup(k_1,k_2)$ y el $\inf(k_1,k_2)$ están también en $\mathcal{H}$. Además, si $k \in \mathcal{H}$ entonces $k^s \in \mathcal{H}$ para todo número real s.*

Definición 10.3. *Sea $k \in \mathcal{H}$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces por definición*

$$\mathcal{B}_{p,k} = \{ \text{ distribuciones } u \in \mathcal{S}'/\hat{u} \text{ es una función y}$$

$$||u||_{p,k} = (2\pi)^{-n} \int |k(\xi)\hat{u}(\xi)|^p d\xi)^{\frac{1}{p}} < \infty\}. \tag{10.2}$$

Si $p=\infty$, se pone $||u||_{p,k} = \sup ess|k(\xi)\hat{u}(\xi)|$.

Nota 10.2. *El espacio $\mathscr{B}_{2,p}$ es de particular interés en las EDP, donde se tiene la norma*

$$||u||_{2,p} = \left(\sum_\alpha \left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 10.3. *Con la norma (10.2), $\mathcal{B}_{p,k}$ es un espacio de Banach. Además se tiene*

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_{p,k} \in \mathcal{S}'.$$

Teorema 10.4. *Si k_1, k_2 están en $\mathcal{H}$ y si se tiene*

$$k_2(\xi) \leq Ck_1(\xi), \text{ donde } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{10.3}$$

entonces se tiene $\mathcal{B}_{p,k_1} \subset \mathcal{B}_{p,k_2}$. Recíprocamente, si existe un abierto Ω no vacío tal que $\mathcal{B}_{p,k_1} \cap \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{B}_{p,k_2}$, entonces se tiene (10.3).

Hörmander estudia, [1], operaciones sobre las distribuciones; nos recuerda que si $P(\xi)$ es un polinomio en las variables $\xi_1, \ldots, \dot{\xi}_n$, un operador diferencial $P(D)$ es definido reemplazando ξ_j por $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ y $\tilde{P} \in \mathcal{H}$ fue definida anteriormente.

Teorema 10.5. *Si $u \in \mathcal{B}_{p,k}$, entonces se tiene que $P(D)u \in \mathcal{B}_{p,\frac{k}{\tilde{P}}}$.*

Teorema 10.6. *Si $u \in \mathcal{B}_{p,k}$ y $\varphi \in \mathcal{S}$, se tiene que $\varphi u \in \mathcal{B}_{p,k}$ y que* $||\varphi u||_{p,k} \leq ||\varphi||_{1,M_k}||u||_{p,k}$ **donde si** $k \in \mathcal{H}$, $M_k(\xi) = \sup_\eta \frac{k(\xi+\eta)}{k(\eta)}$.

Teorema 10.7. *Si $u_1 \in \mathcal{B}_{p,k_1} \cap \mathcal{E}'$ y $u_2 \in \mathcal{B}_{\infty,k_2}$ se tiene que $u_1 * u_2 \in B_{p,k_1k_2}$ y*

$$||u_1 * u_2||_{p,k_1k_2} \leq ||u_1||_{p,k_1} ||u_2||_{\infty,k_2}.$$

10.2. El Espacio Dual de $\mathcal{B}_{p,k}$, $p<\infty$. Sea L una forma lineal continua sobre $\mathcal{B}_{p,k}$, $p<\infty$, entonces se tiene para algún $v \in \mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}$ donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, que $L(u) = \check{v}(u)$, $u \in \mathcal{S}$. Se pone $||L|| = ||v||_{p',\frac{1}{k}}$. $\mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}$ es llamado el espacio dual de $\mathcal{B}_{p,k}$.

10.3. Los Espacios $\mathcal{B}_{p,k}^{loc}$.. Hörmander observa que el teorema 10.6 hace posible definir para todo conjunto abierto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$ cuyos elementos se comportan localmente como distribuciones en $\mathcal{B}_{p,k}$ algunas restricciones.

Definición 10.4. *Un subespacio lineal $\mathscr{F}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ es llamado* **semi-local** *si $\varphi u \in \mathscr{F}$ cuando $u \in \mathscr{F}$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$) es llamado* **local** *si, además, $\mathscr{F}$ contiene toda distribución u tal que $\varphi u \in \mathscr{F}$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Los espacios $\mathscr{D}'(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $L_{loc}^p(\Omega)$ son espacios locales; $\mathscr{E}'(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ son espacios semi-locales que no son locales.

Teorema 10.8. *Si $u \in \mathcal{B}_{p,k}(\Omega)$, entonces $P(D)u \in \mathcal{B}_{p,\frac{k}{\tilde{P}}}^{loc}(\Omega)$.*

Teorema 10.9. *Si $u \in \mathcal{B}_{p,k}^{loc}(\Omega)$ y φ una función en $C^\infty(\Omega)$, entonces*

$$\varphi u \in \mathcal{B}_{p,k}^{loc}(\Omega).$$

10.4. Los Espacios $\mathscr{H}_{(s)}$. Por definición $\mathscr{H}_{(s)}$ es el espacio $\mathcal{B}_{2,k_s}$ donde $k_s(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, donde se considera la norma $||u||^2_{(s)} = (2\pi)^{-n}\int|\hat{u}(\xi)|^2\left(1+|\xi|^2\right|^s d\xi$.

Nota 10.3. *Si s es un entero no-negativo, entonces $\mathscr{H}_{(s)}$ es el espacio conocido de todas las $u \in L^2$ tales que $D^\alpha u \in L^2$, $|\alpha| \leq s$; además,*

$$||u||^2_{(s+1)} = ||u||^2_{(s)} + \sum_{j=1}^n ||D_j u||^2_{(s)}.$$

10.5. Los Espacios $\mathscr{H}_{(m,s)}$. Hörmander, [1], pag. 51, nos dice que en el capítulo X (último del libro) se estudian los problemas de valor de contorno y que los espacios $\mathcal{B}^{loc}_{p,k}(\Omega)$ no son adecuados en tal estudio y por ello introduce unos espacios cuyos elementos se comportan mejor en el contorno y toma en particular $p = 2$ y unos k especiales.

Veamos. Sea $k_{m,s}(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+|\xi'|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, donde $\xi \in \mathbb{R}^n$, m y s son números reales; $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$; $\mathbb{R}^n_+ = \{x/x_n > 0\}$; $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ es su cerradura.

Definición 10.5. $\mathscr{H}_{(m,s)} = \mathcal{B}_{2,k_{m,s}}$*; si $u \in \mathscr{H}_{(m,s)}$, su norma es*

$$||u||^2_{(m,s)} = (2\pi)^{-n}\int\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(1+|\xi'|^2\right)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

También, $\mathscr{H}_{(m,s)}\left(\bar{\mathbb{R}}^n_+\right) = \left\{u \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n_+\right) / \text{ existe una distribución } U \in \mathscr{H}_{(m,s)}\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ con } U = u \text{ en } \mathbb{R}^n_+\right\}$.

En particular, $\mathscr{H}_{(0,0)}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right) = L^2\left(\mathbb{R}^n_+\right)$.

Las demostraciones de los anteriores teoremas, y otros detalles, ver [1], capitulo II.

Author contributions. El autor es responsable de la definición, selección y discusión del material.

Funding. Este trabajo no ha recibido fondos externos .

Conflicts of interest. Declaro que no hay conflicto de interés.

ORCID and License
Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] Hörmander L. Linear partial differential operators. Springer-Verlag; 1963.
[2] Brezis H, Browder F. Partial differential equations in the 20th Century. Advances in Mathematics. 1998.
[3] Kline M. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial. 2012.
[4] Ortiz A. Algunos aspectos en las EDP. Los problemas de Dirichlet y de Cauchy. Selecciones Matemáticas. 2024;11(1).
[5] Epstein B. Partial differential equations, an introduction. Mc Graw-Hill. 1962.
[6] Hellwig G. Partial differential equations, an introduction. Blaisdell Pub Com. 1964.
[7] Figueiredo D. Análise de Fourier e equaçoes diferenciais parciais. Proyecto Euclides IMPA. 1977.
[8] Figueiredo D. Teoría clássica do potencial. UnivNac de Brasilia. 1963.
[9] Ortiz A. Aspectos básicos en Ecuaciones derivadas parciales. Notas de Matemática UNT. 1988;3.
[10] Ortiz A. Tópicos sobre ecuaciones en derivadas parciales. Dpto Matemática Universidad Nacional de Trujillo PUCP. 2004.
[11] Schwartz L. Théorie des distribution. vol. 1-2. Paris: Herman.; 1950-51.
[12] Bremermann H. Distributions, complex variables and Fourier transforms. Addison-Wesley. 1965.
[13] Horváth J. An introduction to distributions. The American Mathematical Monthly. 1970;77(3).
[14] Treves F. Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic Press. 1967.
[15] Horváth J. Topological vector spaces and distribution. vol. 1. Addison Wesley Pub.Com.; 1966.
[16] Nachbin L. Lectures on the theory of distributions. Universidad de Recife: Textos de Matemática; 1964.

[17] Schwartz L. Généralisation de la notion de fonction, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. vol. 21. Ann.Univ. Grenoble; 1945.

[18] Garding L. Some points of analysis and their history. University Lecture Series AMS. 1997;11.

[19] Treves F, Figueiredo D. Espaços vetoriais topológicos e distribuiçoes. Río de Janeiro: Notas de Matemática. IMPA; 1968.

[20] Rivera PH. Métodos de espacios de Hilbert en ecuaciones diferenciales parciales. IV Escuela Latinoamericana de Matemática. 1978.

[21] Figueiredo D. O principio de Dirichlet. Matemática Universitaria SBM. 1985;1.

[22] Treves F. Applications of distributions to PDE theory. AmerMath Monthly. 1970:241-8.

[23] Treves F. Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients. Río de Janeiro: Notas de Matemática; 1961.

[24] Treves F. Linear partial differential equations with constant coefficients. Gordon and Breach; 1966.

[25] Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. AnnInst Fourier Grenoble. 1955-56.

[26] Hörmander L. On the theory of general partial differential operators. 94. Acta Math.; 1955.

[27] Maurin K. Methods of Hilbert spaces. Warszawa. 1967;45.