Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(2):303-325.

REVIEW

A comprehensive review of the characterization of real numbers

Uma revisão abrangente sobre a caracterização dos números reais

Víctor Arturo Martínez León[*], Rodrigo Bloot[†] and Ana Letícia de Oliveira[‡]

Received, Set. 16, 2024; Accepted, Oct. 13, 2024; Published, Dec. 27, 2024

How to cite this article:
Martínez León V. et al. *A comprehensive review of the characterization of real numbers.*. Selecciones Matemáticas. 2024;11(2):303–325. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.02.08

Abstract

The real number system is a fundamental tool for rigorous demonstrations of the differential and integral calculus results. Even after a century of formalization on solid foundations, discussions about the construction of this field are generally omitted in advanced courses such as Real Analysis. In the present work, we present a comprehensive review on the construction and characterization of the real numbers field. The presentation focuses on the construction through Cauchy sequences of rational numbers. The notion of completeness is delimited differently from completeness when Dedekind's cut construction is used. The results indicate $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$ Archimedean as a necessary condition for these two notions of completeness to be equivalent. To illustrate this, inspired by the work of Leon W. Cohen and Gertrude Ehrlich, we present an example of a Cauchy-complete non-Archimedean ordered field in which the supremum axiom is not equivalent to the nested intervals principle.

Keywords . Supremum axiom, Cauchy sequences, complete ordered field, Archimedean field.

Resumo

Os números reais são uma ferramenta fundamental para demonstrações rigorosas de resultados do cálculo diferencial e integral. Mesmo após um século da sua formalização em bases sólidas, discussões sobre a construção deste corpo são muitas vezes omitidas em cursos avançados como Análise Real. No presente trabalho, apresentamos uma revisão detalhada sobre a construção e caracterização do corpo dos números reais. A apresentação tem como foco a construção por meio de sequências de Cauchy de números racionais. A noção de completude é delimitada de forma diferente da completude quando a construção por cortes de Dedekind é utilizada. Os resultados indicam que a condição de que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sejam Arquimedianos é necessária para que estas duas noções de completude sejam equivalentes. Para ilustrar isso, inspirados no trabalho de Leon W. Cohen e Gertrude Ehrlich, apresentamos um exemplo de

[*] Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN), Foz do Iguaçu-Paraná, Brasil. **Correspondence author** (victor.leon@unila.edu.br).

[†] Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza (ILACVN), Foz do Iguaçu-Paraná, Brasil. (rgbloot@gmail.com).

[‡] Secretaria de Educação do Estado do Paraná, Foz do Iguaçu-Paraná, Brasil. (leholiveira977@gmail.com).

um corpo ordenado não Arquimediano do tipo Cauchy-completo no qual o axioma do supremo não é equivalente ao princípio dos intervalos encaixantes.

Palavras-chave. Axioma do supremo, sequências de Cauchy, corpo ordenado completo, corpo Arquimediano.

1. Introdução. O Cálculo tem suas origens no século XVII sendo em geral atribuído a Isaac Newton (1643-1727) e desde aquela época tem sido utilizado em uma variedade de problemas. O ensino de Cálculo faz parte de todos os currículos de cursos de engenharia, ciências e licenciaturas. Seu procedimentos baseiam-se principalmente no conceito de limite de uma função de variáveis reais (ou complexas) e durante muito tempo desde a sua criação os matemáticos tentaram colocar suas bases de forma consistente com o objetivo de dar sentido formal para conceitos vagos e estranhos como "x tende a x_0" e frases como "tão perto quanto se queira","suficientemente grande ou pequeno" ou "infinitamente próximo".

A aritmetização da análise foi consolidada por Karl Weierstrass (1815-1897) introduzindo uma definição de limites baseada puramente em números reais. No entanto, uma vez que o cálculo tinha toda sua base agora suportada por este conjunto numérico, era necessário entender rigorosamente o que significava um número ser real e qual a estrutura deste conjunto além de formalização de conceitos como o infinito.

Os fundamentos dos números reais foram introduzidos por Richard Dedekind (1831-1916) inspirado na teoria de proporções de Eudoxo, um filósofo de origem grega, que viveu no século IV a.C. Partindo do corpo ordenado dos números racionais, ele definiu uma estrutura denominada *corte* como um par de classes de números racionais. Com a ajuda do postulado conhecido pelo seu nome, em que determina que todo corte tem um elemento separador, ele conseguiu definir um corpo ordenado $\mathbb{R}$. Por meio do Teorema que recebe seu nome, ele mostrou que este novo corpo é completo. A formulação de Dedekind é equivalente a caracterização de números por intervalos encaixantes.

A construção dos números reais por cortes de Dedekind pode ser consultada na referência [1]. O procedimento de Dedekind para os números irracionais não leva em conta a natureza do procedimento que usamos para construir as duas classes que serão usadas no corte, tornando-o anti-intuitivo e abstrato. A formulação de George Cantor (1845-1918) é mais intuitiva e, até certo ponto, construtiva. Como comentado em [2], na formulação proposta por Cantor, qualquer sequência de números racionais define um número real se ela for convergente.

No entanto, em seus estudos ele conseguiu demonstrar que a natureza dos números irracionais é bastante distinta dos racionais. Cantor demonstrou que $\mathbb{Q}$ podia ser posto em bijeção com o conjunto dos números naturais. Este procedimento definiu uma forma de contagem para infinitos elementos o qual é chamado *enumerabilidade*. Cantor constatou que os reais não eram enumeráveis e, portanto existiam categorias diferentes de infinitos, uns maiores que os outros, com o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ possuindo muito mais exemplares que $\mathbb{Q}$.

Os resultados de Cantor desencadearam uma crise nos fundamentos da disciplina com vários matemáticos proeminentes, incluindo Henry Poincaré (1854-1912) e Leolpold Kronecker (1823-1891), tentando desacreditar sua teoria de conjuntos. No entanto, o proeminente matemático David Hilbert (1862-1943) adotou os procedimentos de Cantor em sua agenda ambiciosa para fundamentar a Matemática usando a lógica proposicional clássica. Desta crise nos fundamentos, duas escolas de pensamento surgiram (formalista e construtivista) de forma a decidir qual seria o futuro da pesquisa nesta área do conhecimento.

Como comentado em [3], se fosse possível de alguma forma diferenciar um matemático formalista de um construtivista, uma maneira de fazê-lo seria descrevendo a matemática em si de duas formas diametralmente diferentes. Na visão formalista, a matemática é um campo que existe em si próprio cujos resultados são descobertos por meio do uso formal da lógica proposicional clássica, incluindo provas de pura existência que recorrem ao princípio do terceiro excluído bem como provas por contraposição. Evidentemente existem técnicas algorítmicas para demonstração de resultados, porém um matemático formalista não exita em usar provas de pura existência. Para o construtivista, por outro lado, a matemática é uma invenção da mente humana e seus resultados devem ser ilustrados por meio de um número finito de passos. A utilização de demonstrações por meio do uso de redução ao absurdo é terminantemente proibido nesta linha de pesquisa.

A matemática clássica (veja em [3]) tem como suporte para suas demonstrações a lógica clássica introduzida por Platão (428 a.C-348 a.C), enquanto a matemática construtivista utiliza a lógica intuicionista introduzida pelo matemático e filósofo E. J. Brouwer (1881-1966). Por exigir uma abordagem pesada e artificial, esta linha de pesquisa foi caindo no esquecimento. O matemático construtivista Errett Bishop (1928-1983), por meio de uso moderado do axioma da escolha, conseguiu apresentar alguns resultados consistentes na referência [4]. No entanto, não usar o axioma do supremo reduz esta linha chamada Análise Construtiva a uma curiosidade com escassa quantidade de resultados de uso prático.

Os autores da presente revisão não possuem nenhum tipo de desconforto com o infinito de "fato" e, por esse motivo, a abordagem usada é a clássica e todas as ferramentas lógicas disponíveis para demonstrações serão usadas. Além disso, os resultados foram selecionados de forma a ter o mínimo necessário para que a apresentação fosse auto-contida. A linha aqui adotada é a mesma de Cantor e, seguindo a estrutura lógica estabelecida nas referências [5] e [6], vamos construir os números reais usando o corpo ordenado dos racionais.

No desenvolvimento do trabalho, o conceito de lacunas será introduzido em $\mathbb{Q}$ por meio da demonstração de que existem sequências de Cauchy que não convergem para valores que estejam em $\mathbb{Q}$. Com o objetivo de "preencher" estas lacunas nos racionais, o corpo ordenado dos números reais é construído por meio de uma classe de equivalências de sequências de Cauchy. Este corpo ordenado real vai se notabilizar por ser completo no sentido de que toda a sequência de Cauchy contida nele é convergente para algum elemento dele.

A última parte técnica da abordagem proposta consiste em caracterizar este corpo por meio de equivalências do axioma do supremo. Para este fim, os resultados deixarão claro que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ precisam ser necessariamente Arquimedianos. Para ilustrar isso, apresentamos um exemplo de um corpo ordenado que é completo no sentido de Cauchy mas que não é Arquimediano. Além disso, neste corpo, o axioma do supremo não é equivalente a propriedade dos intervalos encaixantes.

Com o corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ caracterizado, com as equivalências do axioma do supremo, é possível construir todo o edifício da análise. Tais resultados incluem sequências de números reais, funções contínuas, funções diferenciáveis e integráveis. Como o objetivo era somente estudar a caracterização dos reais, nenhuma demonstração sobre funções será realizada.

No entanto, sabendo a validade de tais resultados, é possível apresentar algumas aproximações para números irracionais por meio de alguma precisão. Por outro lado, sabemos que os números irracionais estão permanentemente fora de nosso alcance. Por construção, trata-se de uma entidade ideal em um contexto formal em que o infinito de "fato" é aceito como verdade. Finalizamos o trabalho com nossas conclusões e comentários.

2. O conjunto dos números racionais. Para iniciar a construção, vamos aceitar que o conjunto dos *números racionais* são conhecidos, isto é, o conjunto dado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\},$$

dotado das seguintes operações de soma e multiplicação usuais. Dados $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ com $n, n' \neq 0$ temos definidos,

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'},$$

verifica-se as seguintes propriedades:

(S1) Fechadura da adição: Se $x, y \in \mathbb{Q}$ então, $x + y \in \mathbb{Q}$.

(S2) Associatividade da adição: $(x + y) + z = x + (y + z),$ para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(S3) Comutatividade da adição: $x + y = y + x,$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

(S4) Elemento neutro aditivo: Existe um único $0_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0_{\mathbb{Q}} = x,$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(S5) Elemento inverso aditivo: Para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe um único $-x \in \mathbb{Q}$ tal que $x + (-x) = 0_{\mathbb{Q}}$.

(M1) Fechadura da multiplicação: Se $x, y \in \mathbb{Q}$ então $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

(M2) Associatividade da multiplicação: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$ para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(M3) Comutatividade da multiplicação: $x \cdot y = y \cdot x,$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

(M4) Elemento neutro multiplicativo: Existe um único $1_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot 1_{\mathbb{Q}} = x,$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(M5) Elemento inverso multiplicativo: Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq e$, existe um único $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{Q}}$.

(D) Distributividade: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,$ para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Obsdervação 2.1. Como no livro de [7], onde o autor assume a existência dos números naturais e, a partir deles, introduz os números inteiros e racionais sem recorrer à construção desses conjuntos por classes de equivalência, adotamos aqui a mesma perspectiva. Da mesma forma, os números reais são construídos assumindo-se sua existência, destacando apenas que os racionais podem ser imersos nos reais. Para leitores interessados nas construções detalhadas dos racionais e reais, recomendamos as referências de [5, 8] e, para demonstrações mais aprofundadas, [9]. Neste artigo, partimos da existência dos racionais e, então, construímos os números reais por meio de classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Vale observar que também é possível construir o conjunto dos reais com a propriedade do menor limite superior usando os cortes de Dedekind [10]; no entanto, esse não foi nosso objetivo.

Obsdervação 2.2. Denotaremos xy em vez de $x \cdot y$. Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados *números racionais*. Um conjunto não vazio A com duas operações de soma e multiplicação que verificam as propriedades (S), (M) e (D) é chamado de *corpo*, o qual denotaremos por $(A, +, \cdot)$.

Em $\mathbb{Q}$, consideremos o conjunto

$$P = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q};\ pq \in \mathbb{N} \right\},$$

chamado *conjunto dos elementos positivos de* $\mathbb{Q}$, que satisfazem as duas propriedades seguintes:

(A1) $x,\ y \in P$ então, $x + y \in P$ e $xy \in P$.

(A2) (Tricotomia) Se $x \in \mathbb{Q}$ então, uma, e só uma, das três seguintes condições são satisfeitas:

(a) $x = 0$; (b) $x \in P$; (c) $-x \in P$.

Obsdervação 2.3. Seja $(A, +, \cdot)$ um corpo, um subconjunto $P \subseteq A$ que satisfaz as propriedades (A1) e (A2), é chamado *conjunto de elementos positivos de* A e é denotado por A^+. Portanto, $\mathbb{Q}^+ = P$.

Definição 2.1. Se $<$ denota uma relação de ordem em um corpo $(A, +, \cdot)$ tal que

(i) para $a < b$ em A, $a + c < b + c$, para todo $c \in A$, e

(ii) para $a < b$ em A, $a \cdot c < b \cdot c$, para todo $c > 0_A$ em A,

então o sistema $(A, +, \cdot, <)$ é chamado um *corpo ordenado*.

Teorema 2.1 (Teorema 2.19 em [5]). Se $(A, +, \cdot)$ é um corpo e A^+ é um conjunto de elementos positivos de A, então

1. $T = \{(a, b) \in A \times A;\ b - a \in A^+\}$ é uma relação de ordem em A.
2. Se escrevemos $a < b$ (ou $b > a$) para $(a, b) \in T$, então $(A, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado.
3. $A^+ = \{a;\ a > 0_A\}$.

Assim, pelo Teorema 2.1, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado e $\mathbb{Q}+ = \{x;\ x > 0_\mathbb{Q}\}$.

Definição 2.2. Se $(A, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado, e $F : A \to A$ definida por

$$F(x) = \max\{x, -x\},$$

então, para $x \in A$, $F(x)$ é chamado de *valor absoluto* de x, e é denotado por $|x|$. Pela tricotomia da relação de ordem em A, existe tal função.

Obsdervação 2.4. Se $(A, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado. São satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $|x| \geq 0$, para todo $x \in A$.
2. $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$.
3. $|xy| = |x| \cdot |y|,$ para todo $x, y \in A$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|,$ para todo $x, y \in A$.

5. $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in A$.

6. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in A$.

Num corpo ordenado $(A, +, \cdot, <)$, é possível mostrar que se pode considerar o conjunto $\mathbb{N}$ naturalmente imerso em A, isto é, encontrar uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to A$ que preserva a soma, multiplicação e ordem. Costuma-se identificar $\mathbb{N}'$ com $\mathbb{N}$ e considerar os números naturais contidos em A. Assim, temos $\mathbb{N} \subseteq A$ e escrevemos 1, em vez de 1_A.

Definição 2.3. Um corpo ordenado $(A, +, \cdot, <)$ é chamado de *Arquimediano* se, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $0_A < a < b$ em A, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Teorema 2.2 (Teorema 3.17 em [5]). $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ é Arquimediano.

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < x < y$, logo $x, y \in \mathbb{Q}^+$. Daí, existem $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ tais que $x = \dfrac{p}{q}$ e $y = \dfrac{r}{s}$. Então, tomando $n = qr + 1 \in \mathbb{N}$, obtemos

$$nx = \frac{p}{q} \cdot (qr + 1) > \frac{p}{q} \cdot (qr) = pr \geq r \geq \frac{r}{s} = y.$$

□

Definição 2.4. Seja $(A, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Um par ordenado (X, Y) é chamado *corte* em A se X e Y são subconjuntos não vazios de A tais que

(i) $X \cap Y = \emptyset$,

(ii) $X \cup Y = A$,

(iii) se $x \in X$ e $y \in Y$ então, $x < y$.

Os conjuntos X e Y são chamados, respectivamente, de *classe inferior* e *classe superior* do corte. Um corte é uma *lacuna* se sua classe inferior não tiver o elemento máximo, e sua classe superior não tiver o elemento mínimo em A.

Example 2.1 (Exemplo 5.1 em [11]). Considere $X = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. O par (X, Y) é uma lacuna em $\mathbb{Q}$.

No que segue, consideraremos $(A, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado.

Definição 2.5. Uma função F de $\mathbb{N}$ em A é chamada de *sequência* em A. Se $F(n) = x_n$ para cada n, escrevemos (x_n) para a função F. Se $x_n = a$ para cada n, escrevemos (a) para (x_n).

Teorema 2.3 (Teorema 3.18 em [5]). Se (X, Y) é uma lacuna em $\mathbb{Q}$ então, existem sequências (x_n) e (y_n) em $\mathbb{Q}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $y_n - x_n = \dfrac{1}{n}$ e

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n},\ |y_m - y_n| < \frac{1}{n} \text{ em } \mathbb{Q},\ \text{para todo } m \geq n \text{ em } \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Demonstração: Como (X, Y) é um corte então, X e Y são não vazios. Segue que, existem $x \in X$ e $y \in Y$. Daí, pela Definição 2.4 parte (iii), $x < y$ em $\mathbb{Q}$. Assim, $y - x > 0$ em $\mathbb{Q}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\dfrac{1}{n(y-x)} > 0$ em $\mathbb{Q}$, como $\mathbb{Q}$ é um corpo Arquimediano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n(y-x)} > \dfrac{1}{k}$ em $\mathbb{Q}$. Daí, obtemos $\dfrac{k}{n} > y - x$ em $\mathbb{Q}$. Como $y \in Y$ e

$$x + \frac{k}{n} > y, \tag{2.2}$$

temos que $x + \dfrac{k}{n} \in Y$.

De fato, se $x + \dfrac{k}{n} \notin, Y$ pela Definição 2.4 parte (ii), $x + \dfrac{k}{n} \in X$ e, pela Definição 2.4 parte (iii), temos que $x + \dfrac{k}{n} < y$ o que contradiz (2.2). Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$M_n = \left\{m \in \mathbb{N};\ x + \frac{m}{n} \in Y\right\}$$

é um subconjunto de $\mathbb{N}$ não vazio (pois $x + \frac{k}{n} \in Y$). Pelo Principio da Boa Ordenação, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n = \min M_n$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_n = x + \frac{m_n - 1}{n} \in X, \quad y_n = x + \frac{m_n}{n} \in Y \quad \text{e} \quad y_n - x_n = \frac{1}{n}.$$

Pela Definição 2.4, $x_n < y_m$ em $\mathbb{Q}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$x_n < y_m = x_m + \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad x_m < y_n = x_n + \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $m \geq n$, tem-se

$$|x_m - x_n| = \max\{x_m - x_n, x_n - x_m\} < \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{n}$$

e

$$|y_m - y_n| = \max\{y_m - y_n, y_n - y_m\} < \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$$

em $\mathbb{Q}$.

□

Definição 2.6. Uma sequência (x_n) em A é chamada *limitada* se existe $a \in A$ tal que $|x_n| < a$ em A para todo $n \in \mathbb{N}$.

Obsdervação 2.5. Se (x_n) e (y_n) são sequências limitadas em A, então $(x_n \pm y_n)$ e $(x_n y_n)$ são sequências limitadas em A.

Definição 2.7. Uma sequência (x_n) em A é chamada *de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ em A, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } m, n \geq n_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}.$$

Teorema 2.4 (Teorema 3.19 em [5]). Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em A, então (x_n) é um sequência limitada.

Teorema 2.5 (Teorema 3.20 em [5]). Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em A, então $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ são sequências de Cauchy em A.

Definição 2.8. Uma sequência (x_n) *converge* para a em A se, para cada $\varepsilon > 0$ em A, existe algum $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}.$$

Teorema 2.6 (Teorema 3.21 em [5]). Uma sequência (x_n) tem um único limite em A.

Obsdervação 2.6. Se (x_n) converge para a, denotaremos $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Se a ordem em A é Arquimediana então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ em A, como A é Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0\varepsilon > 1$. Logo,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0 \text{ em } \mathbb{N}.$$

Teorema 2.7 (Teorema 3.22 em [5]). Se (x_n) é uma sequência convergente em A, então (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Teorema 2.8 (Teorema 3.23 em [5]). Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ em A, então

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

Teorema 2.9 (Teorema 3.24 em [5]). Existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem em $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Seja (X, Y) a lacuna do Exemplo 2.1 e, seja $(x_n), (y_n)$ definidos como no Teorema 2.3 para a lacuna (X, Y). Como $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pela Definição 2.4 parte (iii), $x_n < y$ em $\mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in Y$. Logo,

$$y_n = x_n + \frac{1}{n} < y + 1 \text{ em } \mathbb{Q} \tag{2.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in Y$.

Afirmação 2.10. (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

De fato, como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ em $\mathbb{Q}$ (pois, $\mathbb{Q}$ é Arquimediano), dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Daí, para $m \geq n \geq n_0$, por (2.1), temos

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

Afirmação 2.11. (x_n) não converge em $\mathbb{Q}$.

Suponha que (x_n) seja convergente em $\mathbb{Q}$, isto é, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ em $\mathbb{Q}$.

Pelo Teorema 2.8, $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = z^2$. Observe que, como $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, $x_n^2 < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, por (2.3), temos

$$0 < 2 - x_n^2 < y_n^2 - x_n^2 = (y_n + x_n)(y_n - x_n) < \frac{2y_n}{n} < \frac{2(y+1)}{n}. \tag{2.4}$$

Por outro lado, como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ em $\mathbb{Q}$, dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2(y+1)}, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{2.5}$$

Daí, por (2.4) e (2.5), para $n \geq n_0$ obtemos

$$|x_n^2 - 2| = 2 - x_n^2 < \frac{2(y+1)}{n} < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 2$ em $\mathbb{Q}$. Daí, pelo Teorema 2.6, $z^2 = 2$ para $z \in \mathbb{Q}$. Mas, isto é impossível. □

Teorema 2.12 (Teorema 3.25 em [5]). Se (x_n) é uma sequência de Cauchy que não tem limite zero em A, então existe uma sequência de Cauchy (y_n) em A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 1$.

Demonstração: Suponha que (x_n) não tem limite zero em A. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ em A tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n \geq n$ com

$$|x_{k_n}| \geq \varepsilon_0 \text{ em } A. \tag{2.6}$$

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe um $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon_0}{2} \text{ em } A \text{ para todo } m, n \geq \overline{n} \text{ em } \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

De (2.6), tem-se

$$|x_{k_{\overline{n}}}| \geq \varepsilon_0. \tag{2.8}$$

Daí, por (2.8) e (2.7), obtemos

$$|x_n| = |x_{k_{\overline{n}}} - (x_{k_{\overline{n}}} - x_n)| \geq |x_{k_{\overline{n}}}| - |x_{k_{\overline{n}}} - x_n| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.9}$$

para todo $n \geq \overline{n}$. Portanto, $x_n \neq 0$ para todo $n \geq \overline{n}$. Agora, defina

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{para } n < \overline{n}, \\ \dfrac{1}{x_n} & \text{para } n \geq \overline{n}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Então, (y_n) é uma sequência em A. Como (x_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ em A quaisquer, existe algum $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon}{4} \text{ para todo } m, n \geq n_\varepsilon. \tag{2.11}$$

Portanto, por (2.9), (2.10) e (2.11), obtemos

$$|y_m - y_n| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m| \cdot |x_n|} < \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon}{4} \cdot \frac{4}{\varepsilon_0^2} = \varepsilon$$

para todo $m, n \geq \max\{\overline{n}, n_\varepsilon\}$. Isso implica que (y_n) é uma sequência de Cauchy em A. Também, como $x_n y_n = 1$ para todo $n \geq \overline{n}$, temos que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 1$. □

Definição 2.9. Uma sequência (x_n) em A é chamada *positiva* se, existem $\varepsilon > 0$ em A e $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$x_n \geq \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k \text{ em } \mathbb{N}.$$

Teorema 2.13 (Teorema 3.26 em [5]). Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em A, então exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. (x_n) é positiva.
3. $(-x_n)$ é positiva.

Demonstração: Primeiro mostraremos que pelo menos uma das afirmações (1), (2) e (3) é verdadeira. Suponha que (1) seja falsa. Então, existe $\varepsilon > 0$ em A tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$|x_k| \geq \varepsilon \text{ em } A \text{ para algum } k \geq n \text{ em } \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Como $\varepsilon/2 > 0$ em A e (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe algum $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ em } A \text{ para todo } m, n \geq n_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Por (2.12), tomando $n = n_\varepsilon$, temos

$$\max\{x_k, -x_k\} = |x_k| \geq \varepsilon \text{ em } A \text{ para algum } k \geq n_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Se $x_k > 0$, por (2.13) e (2.14), tem-se

$$x_n = x_k - (x_k - x_n) \geq \varepsilon - |x_k - x_n| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k \text{ em } \mathbb{N}.$$

Portanto, por definição, (x_n) é positivo e (2) é verdadeiro.
Caso contrário, $x_k < 0$, por (2.13) e (2.14), obtemos

$$-x_n = -x_k - (x_n - x_k) \geq \varepsilon - |x_n - x_k| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k \text{ em } \mathbb{N}.$$

Daí, por definição, $(-x_n)$ é positivo e (3) é verdadeiro.
Agora, mostraremos que não mais do que uma das três afirmações é verdadeira. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, então, para cada $\varepsilon > 0$ em A, existe algum n_ε em $\mathbb{N}$ tal que

$$\max\{x_n, -x_n\} = |x_n| < \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}.$$

Portanto, não existe $\varepsilon > 0$ em A tal que, para algum $k \in \mathbb{N}$, ou

$$x_n \geq \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k \text{ em } \mathbb{N},$$

ou

$$-x_n \geq \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k \text{ em } \mathbb{N}.$$

Assim, se (1) for verdadeiro, então (2) e (3) são ambos falsos. Se (2) e (3) forem ambos verdadeiros, então para alguns ε' e ε'', positivos em A, e $k', k'' \in \mathbb{N}$, tais que

$$x_n \geq \varepsilon' \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k' \text{ em } \mathbb{N} \text{ e } -x_n \geq \varepsilon'' \text{ em } A \text{ para todo } n \geq k'' \text{ em } \mathbb{N}.$$

Para $n = \max\{k', k''\} \in \mathbb{N}$, tem-se

$$0 < \varepsilon'' \leq -x_n \leq -\varepsilon' < 0 \text{ em } A.$$

O que é um absurdo.
Concluímos que exatamente uma das afirmações (1), (2) e (3) deve ser verdadeira. □

Obsdervação 2.7. Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy positivas em A, então $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ são positivas em A.

3. Construção do conjunto dos números reais. Os números naturais são construídos através dos axiomas de Peano, os números inteiros como classes de equivalência de pares ordenados de números naturais, e os números racionais como classes de equivalência de pares ordenados de inteiros. Na construção dos números reais, começamos novamente com a definição de uma relação de equivalência. Neste caso, a relação de equivalência será definida no conjunto de todas as sequências de Cauchy racionais.

Assim, um número real será uma classe de equivalência de sequências de Cauchy racionais. Por meio de definições adequadas de adição, multiplicação e ordem, o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais será transformado em um corpo ordenado que é uma extensão do corpo ordenado $\mathbb{Q}$. A ordem em $\mathbb{R}$ não terá lacunas. Portanto, sequências de Cauchy de números reais terão um limite em $\mathbb{R}$.

Usaremos "$F_{\mathbb{Q}}$" para denotar o conjunto de todas as sequências de Cauchy racionais.

Teorema 3.1 (Teorema 4.1 em [5]). Existe uma relação de equivalência Q em $F_{\mathbb{Q}}$ tal que $(x_n) \sim (y_n)$ vale sempre que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Demonstração: O conjunto

$$Q = \{((x_n), (y_n));\ \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0\}$$

é um subconjunto de $F_{\mathbb{Q}} \times F_{\mathbb{Q}}$. Como $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$ para cada $(x_n) \in F_{\mathbb{Q}}$, $\sim$ é reflexiva. Se $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, então $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, isto é, $\sim$ é simétrica. Se $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0$, então $\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = 0$ devido ao Teorema 2.8. Portanto, $\sim$ é transitiva. $\square$

Obsdervação 3.1. Denotaremos $(x_n) \sim (y_n)$ em vez de $((x_n), (y_n)) \in Q$, e denotamos por $[(x_n)]$ a classe de equivalência que contém (x_n). Para $(x_n) \in F_{\mathbb{Q}}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se, e só se, $(x_n) \sim (a)$.

Definição 3.1. Um *número real* é uma classe de equivalência $[(x_n)]$ com respeito à relação de equivalência Q do Teorema 3.1, onde (x_n) é uma sequência de Cauchy racional.

Denotaremos o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais. Usaremos $\xi, \eta, \ldots$ para denotar números reais.

Teorema 3.2 (Teorema 4.2 em [5]). Se $(x_n),\ (y_n),\ (x'_n),\ (y'_n) \in F_{\mathbb{Q}}$, $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então

1. $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$.
2. $(x_n y_n) \sim (x'_n y'_n)$.

Demonstração:

1. Pelo Teorema 2.8,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}([x_n + y_n] - [x'_n + y'_n]) &= \lim_{n\to\infty}(x_n - x'_n + y_n - y'_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(x_n - x'_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n - y'_n)\\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$
em $\mathbb{Q}$.

2. Pelo Teorema 2.4, uma vez que $(x_n),\ (y_n) \in F_{\mathbb{Q}}$, então existem constantes $a,\ b \in \mathbb{Q}$ tal que
$$|x_n| < a \ \text{ e } \ |y_n| < b \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$
Pelo Teorema 2.5, $(x_n y_n)$ e $(x'_n y'_n)$ são sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Desde que $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então para cada $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$ existem n'_ε e n''_ε em $\mathbb{N}$ tal que
$$|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2b} \text{ em } \mathbb{Q} \text{ para todo } n \geq n'_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N} \tag{3.2}$$
e
$$|y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{2a} \text{ em } \mathbb{Q} \text{ para todo } n \geq n''_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}. \tag{3.3}$$
Portanto, por (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos
$$\begin{aligned}|x_n y_n - x'_n y'_n| &\leq |x_n| \cdot |y_n - y'_n| + |y'_n| \cdot |x_n - x'_n|\\ &< a \cdot \frac{\varepsilon}{2a} + b \cdot \frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon\end{aligned}$$
para todo $n \geq n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ em $\mathbb{N}$. Assim, $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - x'_n y'_n) = 0$ em $\mathbb{Q}$, daí, $(x_n y_n) \sim (x'_n y'_n)$.

□

Teorema 3.3 (Teorema 4.3 em [5]). Existem operações binárias F e G em $\mathbb{R}$ tais que,

$$F([(x_n)],[(y_n)]) = [(x_n + y_n)] \text{ e } G([(x_n)],[(y_n)]) = [(x_n y_n)]$$

para todo $[(x_n)],\ [(y_n)] \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Os conjuntos

$$F = \{([(x_n)],[(y_n)],[(x_n + y_n)]);\ [(x_n)],\ [(y_n)] \in \mathbb{R}\}$$

e

$$G = \{([(x_n)],[(y_n)],[(x_n y_n)]);\ [(x_n)],\ [(y_n)] \in \mathbb{R}\}$$

são subconjuntos de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}$, devido ao Teorema 2.5. Agora, vejamos que F e G são de fato funções. Para isso, sejam $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}$ tais que $\xi = [(x_n)]$ e $\eta = [(y_n)]$. Se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$ então, pelo Teorema 3.2, $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ e $(x_n y_n) \sim (x'_n y'_n)$. Daí, $F(\xi,\eta) = [(x_n + y_n)] = [(x'_n + y'_n)]$ e $G(\xi,\eta) = [(x_n y_n)] = [(x'_n y'_n)]$. □

Definição 3.2. Chamamos as operações binárias F e G do Teorema 3.3 de *adição em* $\mathbb{R}$ e *multiplicação em* $\mathbb{R}$, respectivamente, e escrevemos "$\xi +_{\mathbb{R}} \eta$" e "$\xi \cdot_{\mathbb{R}} \eta$" para $F(\xi,\eta)$ e $G(\xi,\eta)$. Como de costume, omitiremos o subscrito "$\mathbb{R}$" caso não haja confusão.

Teorema 3.4 (Teorema 4.4 em [5]). $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ é um corpo.

Demonstração: As propriedades associativa, comutativa e distributiva são verificadas facilmente. Observamos que $0_{\mathbb{R}} := [(0)]$ serve como identidade aditiva, $1_{\mathbb{R}} := [(1)]$ como identidade multiplicativa, e $-[(x_n)] := [(-x_n)]$ como inverso aditivo de $[(x_n)]$. Se $[(x_n)] \neq 0_{\mathbb{R}}$, então (x_n) não é equivalente a (0), de modo que (x_n) não tem limite zero em $\mathbb{Q}$. Pelo Teorema 2.12, existe uma sequência $(y_n) \in F_{\mathbb{Q}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1_{\mathbb{Q}}$. Portanto, $(x_n y_n) \sim (1)$, daí

$$[(x_n)] \cdot_{\mathbb{R}} [(y_n)] = [(x_n y_n)] = [(1)] = 1_{\mathbb{R}}.$$

Assim, $[(y_n)] := \dfrac{1}{[(x_n)]}$ é o inverso multiplicativo de $[(x_n)]$. Conclui-se que $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ é um corpo. □

Definiremos os elementos positivos de $\mathbb{R}$ como as classes de equivalência pertencentes a sequências positivas em $F_{\mathbb{R}}$. Denotaremos

$$\mathbb{R}^+ = \{\xi;\ \text{para algum } (x_n) \in \xi,\ (x_n) \text{ é positivo}\}.$$

Teorema 3.5 (Teorema 4.5 em [5]). Se $(x_n) \sim (x'_n)$ e (x_n) é uma sequência positiva, então (x'_n) é uma sequência positiva.

Demonstração: Se (x_n) é uma sequência positiva, então, existem $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$ e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n \geq \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_\varepsilon. \tag{3.4}$$

Como $(x_n) \sim (x'_n)$, existe algum $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x'_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geq n'_\varepsilon \text{ em } \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$-\frac{\varepsilon}{2} < x'_n - x_n < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geq n'_\varepsilon. \tag{3.5}$$

Mas então, se $\overline{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$, por (3.4) e (3.5), temos

$$x'_n = (x'_n - x_n) + x_n > -\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ para todo } n \geq \overline{n}_\varepsilon.$$

Portanto, (x'_n) é uma sequência positiva em $\mathbb{Q}$. □

Como consequência do Teorema 3.5 obtemos:

Corolario 3.1. $\mathbb{R}^+ = \{\xi;\ (x_n) \text{ é positivo para todo } (x_n) \in \xi\}$.

Teorema 3.6 (Teorema 4.6 em [5]). $\mathbb{R}^+$ é um conjunto de elementos positivos para $\mathbb{R}$, isto é, se

1. $\xi + \eta \in \mathbb{R}^+$ para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^+$,
2. $\xi \cdot \eta \in \mathbb{R}^+$ para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^+$,
3. para $\xi \in \mathbb{R}$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\xi \in \mathbb{R}^+, \quad \xi = 0_{\mathbb{R}}, \quad -\xi \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração: Se $\xi, \eta \in \mathbb{R}^+$, então $\xi = [(x_n)]$, $\eta = [(y_n)]$, onde (x_n), (y_n) são sequências positivas em $\mathbb{Q}$. Pela Observação 2.7, $\xi + \eta = [(x_n + y_n)] \in \mathbb{R}^+$ e $\xi \cdot \eta = [(x_n y_n)] \in \mathbb{R}^+$, de modo que (1) e (2) são satisfeitas. Se $\xi = [(x_n)]$, então, pelo Corolário 3.1,

$$\xi \in \mathbb{R}^+ \text{ se, e só se, } (x_n) \text{ é uma sequência positiva em } \mathbb{Q},$$

$$\xi = 0_{\mathbb{R}} = [(0))] \text{ se, e só se, } \lim_{n\to\infty} x_n = 0_{\mathbb{Q}},$$

$$-\xi = [(-x_n)] \in \mathbb{R}^+ \text{ se, e só se, } (-x_n) \text{ é uma sequência positiva em } \mathbb{Q}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.13, exatamente uma das afirmações deve ser verdadeira. Assim, (3) é satisfeita, e $\mathbb{R}^+$ é um conjunto de elementos positivos para $\mathbb{R}$. □

Pelo item 1 do Teorema 2.1 temos:

Teorema 3.7 (Teorema 4.7 em [5]). O conjunto $T = \{(\xi, \eta);\ \eta - \xi \in \mathbb{R}^+\}$ é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$. Denotaremos $\xi <_{\mathbb{R}} \eta$ ($\eta >_{\mathbb{R}} \xi$) se $(\xi, \eta) \in T$. Geralmente, omitimos o subscrito "$\mathbb{R}$".

Pelo Teorema 3.7, obtemos:

Teorema 3.8 (Teorema 4.8 em [5]). $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$ é um corpo ordenado.

Definição 3.3. Um corpo ordenado A é chamado *completo* se toda sequência de Cauchy em A é convergente. Mostraremos que $\mathbb{R}$ é completo. Primeiro, provaremos que toda sequência de Cauchy racional converge em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.9 (Teorema 4.9 em [5]). A função $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $E(x) = [(x)]$ é uma função injetora de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ que preserva adição, multiplicação e ordem.

Demonstração: E é uma função injetora de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. De fato, $[(x)] = [(y)]$ se, e só se, $(x) \sim (y)$, isto é, se e só se, $x = y$ em $\mathbb{Q}$. Por outro lado, se $x, y \in \mathbb{Q}$, então

$$E(x + y) = [(x + y)] = [(x)] +_{\mathbb{R}} [(y)] = E(x) +_{\mathbb{R}} E(y),$$

e

$$E(xy) = [(xy)] = [(x)] \cdot_{\mathbb{R}} [(y)] = E(x) \cdot_{\mathbb{R}} E(y).$$

Assim, E preserva a adição e a multiplicação. Finalmente, vejamos que preserva ordem. Se $x < y$ em $\mathbb{Q}$ se, e só se, $y - x > 0$ em $\mathbb{Q}$, de modo que $(y - x)$ é uma sequência positiva em $F_{\mathbb{Q}}$. Por outro lado, $[(x)] <_{\mathbb{R}} [(y)]$ em $\mathbb{R}$ se, e só se, $[(y)] - [(x)] > 0$ em $\mathbb{R}$, de modo que $(y - x)$ é uma sequência positiva em $F_{\mathbb{Q}}$. Portanto, $x < y$ em $\mathbb{Q}$ se, e só se, $[(x)] <_{\mathbb{R}} [(y)]$ em $\mathbb{R}$. □

Identificaremos $\mathbb{Q}$ com sua imagem isomórfica em $\mathbb{R}$ e usaremos os símbolos x e $[(x)]$ de forma intercambiável.

Teorema 3.10 (Teorema 4.10 em [5]). Se $(x_n) \in \xi$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Para $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, seja ϵ um número racional tal que $0 < \epsilon < \varepsilon$. Como (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, existe um $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } m, n \geq n_\epsilon.$$

Portanto, para todo $m, n \geq n_\epsilon$,

$$\epsilon - |x_n - x_m| > \frac{\epsilon}{2}$$

e, para cada $n \geq n_\epsilon$, $(y_m) = (\epsilon - |x_n - x_m|)$ é uma sequência de Cauchy positiva em $\mathbb{R}$. Conclui-se que, para cada $n \geq n_\epsilon$,

$$[(y_m)] = [(\epsilon - |x_n - x_m|)] > 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Mas então,

$$|x_n - \xi| = |[(x_n)] - [(x_m)]| = |[(x_n - x_m)]| = [(|x_n - x_m|)] < [(\epsilon)] = \epsilon < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_\epsilon,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \text{ em } \mathbb{R}.$$

□

Corolario 3.2. Se $\xi \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe um $x \in \mathbb{Q}$ tal que $|\xi - x| < \varepsilon$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Se $(x_n) \in \xi$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Daí, para todo $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\xi - x_n| < \varepsilon \text{ em } \mathbb{R} \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

Em particular, $x = x_{n_\varepsilon} \in \mathbb{Q}$, assim $|\xi - x| < \varepsilon$. □

Corolario 3.3. Se $\xi < \eta$ em $\mathbb{R}$, existe um $z \in \mathbb{Q}$ tal que $\xi < z < \eta$.

Demonstração: Note $\zeta = \frac{\xi+\eta}{2} \in \mathbb{R}$ e, daí $\xi < \zeta < \eta$ em $\mathbb{R}$. Seja $\varepsilon = \min\{\zeta-\xi, \eta-\zeta\} > 0$ em $\mathbb{R}$, então, pelo Corolário 3.2, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $|\zeta - z| < \varepsilon$ em $\mathbb{R}$. Assim, obtemos

$$\xi \leq \zeta - \varepsilon < z < \zeta + \varepsilon \leq \eta.$$

□

Corolario 3.4. $\mathbb{R}$ é Arquimediano.

Demonstração: Para $0 < \xi < \eta$ em $\mathbb{R}$, pelo Corolário 3.3, existem $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que

$$0 < x < \xi < \eta < y < \xi + \eta \text{ em } \mathbb{R}.$$

Desde que $\mathbb{Q}$ é Arquimediano e pelo Teorema 3.9, E preserva adição e ordem, segue-se que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$ em $\mathbb{R}$. Mas, então $n\xi > nx > y > \eta$ em $\mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}$ é Arquimediano. □

Teorema 3.11 (Teorema 4.11 em [5]). $\mathbb{R}$ é completo.

Demonstração: Seja (ξ_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pelo Corolário 3.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um número racional z_n tal que

$$|\xi_n - z_n| < \frac{1}{n} \text{ em } \mathbb{R}.$$

Mostraremos que (z_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ em $\mathbb{R}$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\xi_n - z_n| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geq n_1. \tag{3.6}$$

Como (ξ_n) é uma sequência de Cauchy, existe um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\xi_m - \xi_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } m, n \geq n_2. \tag{3.7}$$

Portanto, por (3.6) e (3.7), obtemos

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - \xi_m| + |\xi_m - \xi_n| + |\xi_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para todo $m, n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Assim, (z_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Pelo Teorema 3.10, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = [(z_n)] = \xi$ em $\mathbb{R}$. Portanto, existe um $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - \xi| < \frac{2\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geq n_3. \tag{3.8}$$

Assim, por (3.6) e (3.8), temos

$$|\xi_n - \xi| \leq |\xi_n - z_n| + |z_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para todo $n \geq \max\{n_1, n_3\}$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. □

4. Caracterização clássica dos reais. Pelo Teorema 3.11, o corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais é completo no sentido de que toda sequência de Cauchy real é convergente em $\mathbb{R}$. Pelo Corolário 3.4, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado Arquimediano. A completude de $\mathbb{R}$ é uma das várias propriedades do corpo dos números reais que desempenham um papel fundamental na teoria das funções de valor real e que levaram a importantes generalizações na matemática. Nesta seção, destacamos seis propriedades, além da completude, e provamos que um corpo ordenado tem qualquer uma dessas propriedades se, e só se, ele for Arquimediano e completo. O corpo ordenado $\mathbb{R}$, sendo Arquimediano e completo, possui todas as propriedades.

No que segue $(A, +, \cdot, <)$ será um corpo ordenado.

Definição 4.1.

1. Um subconjunto X de A é *limitado superiormente* se existe um elemento $b \in A$ tal que

$$x \leq b \text{ para todo } x \in X.$$

O elemento b é chamado de *cota superior* de X.

2. Um subconjunto X de A é *limitado inferiormente* se existe um elemento $a \in A$ tal que
$$a \leq x \text{ para todo } x \in X.$$
O elemento a é chamado de *cota inferior* de X.
3. Um subconjunto X de A é *limitado* se ele tem tanto uma cota superior quanto uma cota inferior.

Obsdervação 4.1. X é limitado se, e só se, existem elementos $a_1, a_2 \in A$ tais que
$$a_1 \leq x \leq a_2 \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 4.2. Um elemento a de A é chamado de *menor cota superior (supremo)* de $X \subseteq A$ se

1. a é uma cota superior de X,
2. $a \leq u$ para todas as cotas superiores u de X.

Um elemento b de A é chamado de *maior cota inferior (ínfimo)* de $X \subseteq A$ se

1. b é uma cota inferior de X,
2. $v \leq b$ para todas as cotas inferiores v de X.

Obsdervação 4.2. Escrevemos $\sup X$ para o supremo de X e $\inf X$ para o ínfimo de X. Se $\sup X \in X$ podemos escrever $\max X$ em vez $\sup X$. Se $\inf X \in X$ podemos escrever $\min X$ em vez $\inf X$.

Definição 4.3. Um subconjunto X é chamado de *intervalo* em A se, para alguns $a, b \in A$, uma das seguintes condições for satisfeita:

1. $X = \{x;\ a \leq x \leq b\}$,
2. $X = \{x;\ a < x < b\}$,
3. $X = \{x;\ a \leq x < b\}$,
4. $X = \{x;\ a < x \leq b\}$.

Os elementos a e b são chamados de *extremidades* do intervalo. O elemento $b-a$ é chamado de *comprimento* do intervalo. No primeiro caso, chamamos X de *intervalo fechado* e denotamos $X = [a, b]$. No segundo caso, chamamos X de *intervalo aberto* e denotamos $X =]a, b[$. Nos terceiro e quarto casos, X não é nem aberto nem fechado. Denotamos $X = [a, b[$ no terceiro caso e $X =]a, b]$ no quarto caso. Observamos que se $b \leq a$, então $]a, b[$, $[a, b[$, e $]a, b]$ são todos vazios. Se $b < a$, então $[a, b]$ é vazio, e se $b = a$, então $[a, b] = \{a\}$.

Definição 4.4. Um elemento $p \in A$ é chamado de *ponto de acumulação* de $X \subseteq A$ se $X \cap (]a, b[- \{p\}) \neq \emptyset$ para todos os intervalos abertos $]a, b[$ contendo p.

Lema 4.1 (Lema 5.1 em [11]). O elemento $p \in A$ é um ponto de acumulação de $X \subseteq A$ se, e só se, $X \cap]a, b[$ é um conjunto infinito para todos os intervalos abertos $]a, b[$ contendo p.

Demonstração: Seja p é um ponto de acumulação de X. Suponha por contradição que existe um intervalo aberto $]a, b[$ $(a < b)$ contendo p tal que $X \cap]a, b[$ é um conjunto finito. Assim podemos considerar que $X \cap \Big( ]a, b[- \{p\} \Big) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{|x_1 - p|, |x_2 - p|, \cdots, |x_n - p|, p - a, b - p\}$. Como p é ponto de acumulação de X temos que
$$X \cap \Big( ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\} \Big) \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Note, também, que
$$X \cap \Big( ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\} \Big) \subset X \cap]a, b[= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \tag{4.2}$$

pois, se $x \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\}$ então
$$a = p + (a - p) < p - \varepsilon < x < p + \varepsilon < p + (b - p) = b.$$

Daí, $x \in X \cap]a, b[$. Mas, por (4.1) e (4.2), existe x_i para algum $i = 1, 2, \cdots, n$ tal que $x_i \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\}$.

Assim,
$$0 < |x_i - p| < \varepsilon < |x_i - p|$$

o que é um absurdo. □

Example 4.1 (Exemplo 5.3 em [11]). Para $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, o conjunto $X = \{na;\ n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto infinito que não tem pontos de acumulação.

De fato, suponha que existe $p \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de X. Pelo Lema 4.1, temos que

$$X \cap \left]p - \frac{|a|}{2}, p + \frac{|a|}{2}\right[\text{ é um conjunto infinito.}$$

Logo, existem $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ tais que

$$na, ma \in X \cap \left]p - \frac{|a|}{2}, p + \frac{|a|}{2}\right[.$$

Daí, temos que

$$|m-n||a| = |ma - na| \leq |ma - p| + |na - p| < \frac{|a|}{2} + \frac{|a|}{2} = |a|,$$

o que implica que $0 < |m - n| < 1$ e sendo $m, n \in \mathbb{N}$, temos um absurdo.

Definição 4.5. Um subconjunto X de A é *fechado* se todo ponto de acumulação de X pertence a X.

Definição 4.6. Uma *cobertura* de um conjunto $X \subseteq A$ é uma família $\mathcal{C} = \{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (onde Λ é um conjunto de índices) de subconjuntos K_λ de A, tais que $X \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$. Isto é, para todo $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in K_\lambda$. Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = \{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tais que ainda se tem $X \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} K_\lambda$.

Agora listamos seis afirmações referentes a um corpo ordenado $(A, +, \cdot, <)$ que provamos serem equivalentes, no sentido de que para um dado corpo ordenado, todas as afirmações são verdadeiras se qualquer uma delas for verdadeira.

Teorema 4.1 (Teorema 5.1 em [5]). No corpo ordenado $(A, +, \cdot, <)$, as seguintes sentenças são equivalentes:

1. A é Arquimediano e toda sequência de Cauchy em A converge em A.
2. Todo subconjunto não vazio de A que é limitado superiormente tem um supremo em A (*axioma do supremo*).
3. Não há lacunas em A.
4. Todo subconjunto não vazio de A que é limitado inferiormente tem um ínfimo em A (*axioma do ínfimo*).
5. Se X é um subconjunto limitado e fechado de A e, T é uma cobertura de X formada por intervalos abertos, então, T tem um subcobertura finita S de X (*Propriedade de Heine-Borel*).
6. Todo subconjunto infinito limitado de A tem um ponto de acumulação em A (*Propriedade de Bolzano-Weierstrass*).
7. A é Arquimediano e, se para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n é um intervalo fechado e limitado em A e $J_{n+1} \subseteq J_n$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$ (*Princípio dos intervalos encaixantes*).

Demonstração:
(1) $\Rightarrow$ (2): Seja $X \subseteq A$ não vazio e limitado superiormente. Assim, existe $b \in A$ tal que

$$x < b, \text{ para todo } x \in X. \tag{4.3}$$

Como $X \neq \emptyset$, existe $\overline{x} \in X$ e, por (4.3), temos que $\overline{x} < b$. Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, temos que $\dfrac{1}{n(b - \overline{x})} > 0$. Agora, desde que A é Arquimediano, obtemos que existe $\overline{p}_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$b < \overline{x} + \frac{\overline{p}_n}{n}. \tag{4.4}$$

Assim, por (4.4), $\overline{x}+\dfrac{\overline{p}_n}{n}$ é cota superior de X. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$B_n = \{p \in \mathbb{N};\ \overline{x} + \frac{p}{n} \text{ é uma cota superior de } X\}$$

é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ (pois $\bar{p}_n \in B_n$) e, pelo Principio da Boa Ordenação, existe $p_n = \min B_n$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$y_n = \overline{x} + \frac{p_n}{n} \text{ é cota superior de } X \tag{4.5}$$

e

$$x_n = y_n - \frac{1}{n} = \overline{x} + \frac{p_n - 1}{n} \le x \text{ para algum } x \in X. \tag{4.6}$$

Daí, por (4.6), temos que

$$x_m < y_n, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_m - x_n < y_n - \left(y_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{ e } x_n - x_m < y_m - \left(y_m - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}.$$

Portanto, para $m, n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$|x_m - x_n| = \max\{x_m - x_n, x_n - x_m\} \le \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}. \tag{4.7}$$

Agora, como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (devido a que A é Arquimediano), tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ para todo } n \ge n_0. \tag{4.8}$$

Agora, de (4.7) e (4.8) temos

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \text{ para } m, n \ge n_0$$

o que, por definição, nos diz que (x_n) é uma sequência de Cauchy em A e, por hipótese, (x_n) é convergente em A, isto é, existe $a \in A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Afirmação 4.2. a é uma cota superior de X.

De fato, caso contrário, existe $x \in X$ tal que $a < x$. Agora, como $\dfrac{x-a}{2} > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - a| < \frac{x-a}{2}, \text{ para todo } n \ge n_1, \tag{4.9}$$

e

$$\frac{1}{n} < \frac{x-a}{2}, \text{ para todo } n \ge n_2. \tag{4.10}$$

Logo, para $n_3 = n_1 + n_2$, em (4.9) e (4.10), obtemos

$$x_{n_3} - a \le |x_{n_3} - a| < \frac{x-a}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n_3} < \frac{x-a}{2}. \tag{4.11}$$

Então, por (4.6) e (4.11), temos

$$y_{n_3} = x_{n_3} + \frac{1}{n_3} < \left(a + \frac{x-a}{2}\right) + \frac{x-a}{2} = x.$$

O que contradiz (4.5), desde que $x \in X$.

Afirmação 4.3. a é a menor das cotas superiores.

De fato, caso contrário, existe c uma cota superior de X tal que $c < a$. Agora, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $a - c > 0$, existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - x_{n_4} \le |x_{n_4} - a| < a - c.$$

Daí, temos que $c < x_{n_4}$ e, por (4.6), $c < x_{n_4} \leq x$ para algum $x \in X$. Isso contradiz o fato de c ser uma cota superior de X.

Portanto, da Afirmação 4.2 e Afirmação 4.3, temos que $a = \sup X$.

(2) ⇒ (3): Suponha que (X, Y) seja um corte em A. Então, X é um subconjunto não vazio de A e todo elemento do conjunto não vazio Y é uma cota superior para X (Definição 2.4). Pela hipótese, existe $a \in A$ tal que $a = \sup X$.

Afirmação 4.4. $a = \max X$ ou $a = \min Y$.

De fato, como (X, Y) é um corte em A, $a \in X$ ou $a \in Y$.

- Se $a \in X$ então, $\sup X = a = \max X$.
- Se $a \in Y$ então, já que cada elemento de Y é uma cota superior para X, $\sup X = a = \min Y$.

Portanto, pela Afirmação 4.4, não há lacunas em A.

(3) ⇒ (4): Seja B um subconjunto não vazio de A que é limitado inferiormente. Definimos $X = \{x \in A;\ x \leq b, \text{ para todo } b \in B\}$ e $Y = A - X$.

Afirmação 4.5. (X, Y) é um corte em A.

De fato, verifiquemos cada item da Definição 2.4:

- Como B é limitado inferiormente, existe $p \in A$ tal que $p \leq b$ para todo $b \in B$. Logo, $p \in X$. Portanto, $X \neq \emptyset$.
- Como B é não vazio, existe $b_0 \in B$. Logo, $b_0 + 1 \in Y$. Daí, temos $Y \neq \emptyset$.
- Por definição de X e Y, claramente, temos $X \cup Y = A$ e $X \cap Y = \emptyset$.
- Se $x \in X$ e $y \in Y$ então, $x < y$. Caso contrário, $y \leq x \leq b$ para todo $b \in B$. Logo, $y \in X$ o que contradiz que $X \cap Y = \emptyset$.

Agora temos duas possibilidades:

- Se $b_0 \in X$ para algum $b_0 \in B$ então, $b_0 = \max X = \inf B$. De fato, se $x \in X$ então, $x \leq b$ para todo $b \in B$. Em particular, $x \leq b_0$. Logo, $b_0 = \max X$.
- Se $b \in Y$ para todo $b \in B$ então, existe $\inf B$. De fato, suponha que existe $y_0 = \min Y$. Logo, $y_0 \notin X$ (pois $y_0 \in Y$). Daí, existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 < y_0$. Mas, como $b_0 \notin Y$ (pois $b_0 \in B$), isso contradiz a minimalidade de y_0. Portanto, não existe $\min Y$. Agora, como por hipótese, o corte (X, Y) não é uma lacuna, pela Definição 2.4, existe $x_0 = \max X$. Claramente, x_0 é cota inferior de B. Agora, se x_1 é outra cota inferior de B, temos que $x_1 \leq b$ para todo $b \in B$. Logo, $x_1 \in X$ e, como $x_0 = \max X$, temos que $x_1 \leq x_0$ o que mostra que existe $x_0 = \inf B$.

(4) ⇒ (5): Seja X um subconjunto fechado e limitado de A e seja $T = \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de intervalos abertos que cobre X. Desde que X é limitado, existem $u, v \in A$ tais que $X \subseteq [u, v]$. Por outro lado, para todo $y \in [u, v] - X$, desde que X é fechado y não é ponto de acumulação de X. Daí, existe J_y intervalo aberto contendo y tal que $X \cap J_y = \emptyset$. Assim, temos que

$$[u, v] = X \cup ([u, v] - X) \subseteq \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right) \cup \left(\bigcup_{y \in [u,v]-X} J_y \right).$$

Seja agora

$$L = \{x \in [u, v];\ [x, v] \text{ é coberto por um subconjunto finito de } M\},$$

onde $M = \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{J_y\}_{y \in [u,v]-X}$.

Afirmação 4.6. *$L \neq \emptyset$ e limitado inferiormente.*

De fato, desde que $[v, v]$ é coberto por algum intervalo I_λ se $v \in X$, ou por J_v se $v \notin X$, segue que $v \in L$. Portanto, $L \neq \emptyset$. Também, desde que $u \leq x$, para todo $x \in L$ temos que L é limitado inferiormente.

Agora, pela Afirmação 4.6 e pela hipótese, temos que existe $x_0 = \inf(L)$.

Afirmação 4.7. $x_0 \in L$.

De fato, como $x_0 \in [u, v]$, existe um intervalo aberto T_0 em M tal que $x_0 \in T_0$. Seja $T_0 =]a, b[$ então, $a < x_0 < b$. Agora, como $x_0 = \inf L$, temos que existe $z_0 \in L$ tal que $x_0 < z_0 < b$. Desde que $z_0 \in L$, existe um conjunto finito $\{I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ que cobrem $[z_0, v]$. Daí o conjunto finito $\{T_0, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ cobre $[x_0, v]$.

Afirmação 4.8. $x_0 = u$.

De fato, se $x_0 \neq u$ então, $u < x_0$. Pela Afirmação 4.7, temos que $a < x_0$ então, $\max\{u,a\} < x_0$. Agora, tomando $z_1 = \dfrac{\max\{u,a\}+x_0}{2}$, temos que

$$u, a \leq \max\{u,a\} < z_1 < x_0 < b \leq v.$$

Daí, $z_1 \in [u,v]$ e $[z_1,v]$ é coberto por $\{T_0, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\}$. Portanto, $z_i \in L$ e $z_1 < x_0$ o que contradiz que $x_0 = \inf L$.
Finalmente, pela Afirmação 4.8 e Afirmação 4.7, $[u,v]$, e portanto o subconjunto X de $[u,v]$, é coberto por $\{T_0, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$. Aqui, como $T_0 \in M$, temos duas possibilidades:

- Se $T_0 = I_{\lambda_0}$ então, X é coberto por $\{I_{\lambda_0}, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ e, desde que os intervalos J_y não contem pontos de X, temos que X é coberto por $\{I_{\lambda_0}, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}\}$.

- Se $T_0 = J_{y_0}$ então, X é coberto por $\{I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_0}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ e, desde que os intervalos J_y não contém pontos de X, temos que X é coberto por $\{I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}\}$.

Em qualquer caso, X é coberto por um conjunto finito de T.
(5) $\Rightarrow$ (6) : Seja X um subconjunto infinito limitado de A e suponha que X não tenha pontos de acumulação. Então X é fechado. Note que, dado $x \in X$, como x não é um ponto de acumulação de X, existe um intervalo aberto J_x tal que $X \cap J_x = \{x\}$. Logo, o conjunto $T = \{J_x\}_{x \in X}$ cobre X. Como X é fechado e limitado, por hipótese, existe um subconjunto finito $\{J_{x_1}, \ldots, J_{x_n}\}$ de T que cobre X, isto é, $X \subseteq J_{x_1} \cup J_{x_2} \cup \ldots \cup J_{x_n}$. Daí, para todo $x \in X$, existe algum $1 \leq k \leq n$ tal que $x \in J_{x_k}$. Assim, $x \in X \cap J_{x_k} = \{x_k\}$ e, portanto, $x = x_k$. Mas, então, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que é um conjunto finito, contradizendo a hipótese.
(6) $\Rightarrow$ (7): Suponhamos que A não é Arquimediano. Logo, existem $a, b \in A$ com $0 < a < b$ tal que $a \leq na < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o conjunto $X = \{na;\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado e infinito, e não tem ponto de acumulação (pelo Exemplo 4.1), contrariando a hipótese. Assim, A é Arquimediano. Suponha que $J_n = [a_n, b_n]$ e $J_{n+1} \subseteq J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ para cada n. Seja $X = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Desde que $a_1 \leq a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, X é um subconjunto limitado de A. Se para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $a_m = a_{n_0}$ para todo $m \geq n_0$ então, $a_n \leq a_{n_0} \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, $a_{n_0} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a_n$. Desta forma, o conjunto X não tem maior elemento e é, portanto, um subconjunto infinito de A. Pela hipótese, o conjunto infinito limitado X tem um ponto de acumulação $x \in A$. Se $a_{n_0} > x$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então, $a_m \geq a_{n_0} > x$ para todo $m \geq n_0$. Assim, se $0 < \varepsilon < a_{n_0} - x$, o intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contém apenas um número finito de pontos de X, contrariando o Lema 4.1. Portanto, $a_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b_{n_0} < x$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então, $a_m \leq b_{n_0} < x$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, se $0 < \varepsilon < x - b_{n_0}$, o intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ não contém pontos de X, contrariando o Lema 4.1. Portanto, $x \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, então, $a_n \leq x \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$.
(7) $\Rightarrow$ (1): Por hipótese já temos que A é Arquimediano. Suponha que (x_n) é uma sequência de Cauchy em A. Por definição, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{k}, \quad \text{se } m, n \geq n_k. \tag{4.12}$$

Logo, por (4.12), temos

$$x_{n_k} - \frac{1}{k} < x_n < x_{n_k} + \frac{1}{k}, \quad \text{se } n \geq n_k. \tag{4.13}$$

Agora, para $m \in \mathbb{N}$, note que existem

$$p_m = \max\{n_k;\ k \leq m\} \in \mathbb{N}, \tag{4.14}$$

$$a_m = \max\left\{x_{n_k} - \frac{1}{k};\ k \leq m\right\} \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

$$b_m = \min\left\{x_{n_k} + \frac{1}{k};\ k \leq m\right\} \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Então, por (4.14), (4.15) e (4.16), temos que

$$a_m \le a_{m+1} < x_n < b_{m+1} \le b_m, \ \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \text{ para todo } n \ge p_{m+1}. \tag{4.17}$$

Seja agora $J_m = [a_m, b_m]$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, por (4.17), $J_{m+1} \subseteq J_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Daí, por hipótese, existe $a \in A$ tal que

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_m. \tag{4.18}$$

Vejamos a seguir que (x_n) é convergente.

Afirmação 4.9. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

De fato, por (4.15), (4.16) e (4.18),

$$x_{n_m} - \frac{1}{m} \le a_m \le a \le b_m \le x_{n_m} + \frac{1}{m}, \ \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Por (4.13),

$$x_{n_m} - \frac{1}{m} < x_n < x_{n_m} + \frac{1}{m}, \text{ para todo } n \ge n_m. \tag{4.20}$$

Daí, por (4.19) e (4.20), temos

$$|x_n - a| = \max\{x_n - a, a - x_n\} \le \frac{2}{m}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ e para todo } n \ge n_m. \tag{4.21}$$

Dado $\epsilon > 0$ e pelo fato de A ser Arquimediano, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_0 \varepsilon > 2. \tag{4.22}$$

Portanto, por (4.21) e (4.22), tem-se

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ para todo } n \ge n_{m_0}.$$

O que mostra a Afirmação 4.9.

□

O próximo exemplo vai mostrar que um corpo ser completo no sentido de Cauchy não implica necessariamente que ele é Arquimediano. Evidentemente a ordenação tem papel importante e vai ser definida adequadamente.

Example 4.2. Seja $A = \mathbb{R}((t))$ o corpo das *séries de Laurent formais com coeficientes reais*: um elemento de A é uma soma formal

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n, \ a_n \in \mathbb{R}$$

onde existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a_n = 0$ para todo $n < N$. Adicionamos essas séries termo a termo e as multiplicamos da mesma maneira que multiplicamos polinômios. Não é difícil mostrar que A é, na verdade, um corpo: pulamos essa demonstração. Precisamos equipar A com uma ordenação; equivalente a isso, precisamos especificar um conjunto de elementos positivos. Para cada elemento não nulo $x \in A$, definimos $\nu(x) = \min\{n \in \mathbb{Z}; a_n \neq 0\}$. Então, dizemos que x é positivo se o coeficiente $a_{\nu(x)}$ do menor termo não nulo for um número real positivo. É fácil ver que a soma e o produto de elementos positivos são positivos e que, para cada $x \in A$ não nulo, exatamente um de x e $-x$ é positivo, então isso dá uma ordenação em A da maneira usual: denotamos que $x < y$ se, e só se $y - x$ é positivo.

Vejamos que A é completo. Seja $\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{n,i} t^i\right)$ uma sequência de Cauchy em A, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ em A, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{n,i} t^i - \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{m,i} t^i \right| < \varepsilon \text{ em } A \text{ para todo } m, n \ge n_\varepsilon.$$

Em particular, para todo k inteiro existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{n,i} t^i - \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{m,i} t^i \right| < t^k \text{ em } A \text{ para todo } m, n \ge N_k.$$

Segue-se que

$$a_{n,i} - a_{m,i} = 0 \text{ para todo } i < k \text{ e } m, n \geq N_k. \tag{4.23}$$

Por outro lado, como $\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{n,i}t^i\right)$ uma sequência de Cauchy em A, pelo Teorema 2.4, é limitada, daí, existe N inteiro com $e_N > 0$ tal que

$$\left|\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{n,i}t^i\right| < \sum_{i=N} e_i t^i \text{ em } A \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, temos que

$$a_{n,i} = 0 \text{ para todo } i < N \text{ e todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$

Então, por (4.23) e (4.24), temos que para todo $i \geq N$ a sequência $(a_{n,i})$ é eventualmente constante, podemos definir a_i como esse valor eventual. É possível verificar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{n,i}t^i\right) = \sum_{i=N} a_i t^i \text{ em } A.$$

Finalmente, vejamos agora que essa ordenação é não Arquimediana. De fato, o elemento $\frac{1}{t}$ é positivo, pois seu único coeficiente não nulo é 1, que é um número real positivo, e também tem-se que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{t} - n$ ainda é positivo (lembre que olhamos para o coeficiente do menor grau para verificar a positividade) então

$$\frac{1}{t} > n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.25}$$

Em particular, $\frac{1}{t} > 1$. Suponhamos agora que A seja Arquimediano então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{t}$ o que contradiz (4.25).

Observamos que, pelo Exemplo 4.2, a propriedade Arquimediana no item 1 do Teorema 4.1 não é uma consequência da completude de um corpo ordenado. Pode-se mostrar que o Exemplo 4.2 não verifica a Propriedade dos intervalos encaixantes (Basta considerar os intervalos $J_n = [\sum_{j=1} nt^j, \frac{1}{n}]$), portanto completude e principio dos intervalos encaixantes não são equivalentes. Também existem exemplos que mostram que a propriedade arquimediana do item 7 no Teorema 4.1 não é uma consequência da propriedade dos intervalos encaixantes (ver [6]). Assim, a hipótese de que o corpo ordenado é Arquimediano é realmente necessária nos itens 1 e 7.

5. Aproximações de números irracionais. Neste ponto fica evidente que o conjunto dos números reais possuem elementos que são caracterizados de forma decimal finita (todos os elementos em $\mathbb{Q}$) com os demais não podendo ser escritos em tal forma. Nas seções anteriores, por meio de sequências de Cauchy e de uma análise qualitativa, a construção e caracterização dos números reais foi realizada. Na abordagem proposta, que segue a linha formalista delimitada por [5], foram demonstrados resultados que garantem a existência de um corpo ordenado completo e que contém elementos que não são pertencentes ao corpo $\mathbb{Q}$. Estes números são conhecidos como números Irracionais com o mais famoso, do ponto de vista histórico, sendo o número $\sqrt{2}$.

Nesta seção, por meio de uma abordagem quantitativa, vamos fazer a construção de aproximações para alguns números irracionais. Começamos por introduzir a definição de erro absoluto em uma aproximação de irracionais por racionais.

Definição 5.1. Se o número $\xi^* \in \mathbb{Q}$ é uma aproximação para o número irracional ξ, definimos o *erro absoluto* desta aproximação por $|\xi - \xi^*|$.

Apesar da teoria garantir que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (Corolário 3.2), observe que a definição acima não possui efetivamente um significado físico ou prático. Não é possível descrever de forma finita o valor de ξ sendo impossível determinar o erro absoluto cometido. Levando em conta esta dificuldade, o procedimento será estabelecer uma precisão em que o erro absoluto está sendo limitado (ver [12]). Portanto, dada uma precisão $\varepsilon > 0$, queremos $|\xi - \xi^*| < \varepsilon$.

Pela teoria apresentada, existem sequências (x_n) em $\mathbb{Q}$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Portanto, temos que dada uma precisão $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\xi - \xi^*| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_n - \xi^*|$$

para $n > n_0$. Para que um número racional seja uma aproximação para ξ com precisão menor que ε, precisamos ter

$$|x_n - \xi^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Levando em conta que todos os termos da sequência (x_n) são números racionais, e que ela é uma sequência de Cauchy, usaremos um dos termos desta sequência para fornecer uma aproximação para o número irracional alvo de interesse. Isto é, vamos determinar a aproximação usando $\xi^* = x_{m_0}$ de forma que

$$|x_{m_0} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $n,\ m_0 > n_0$. Para os propósitos de um algoritmo, a ser implementado em algum dispositivo que faça cálculos por meio de k iterações, vamos estabelecer como critério de parada

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por fim, dada esta caracterização da precisão desejada, é necessário obter a sequência de Cauchy (x_n) que vai corretamente convergir do ponto de vista teórico para o número irracional escolhido. Como demonstrado em [13], os números irracionais não podem ser enumerados. No entanto, existe um subconjunto de números irracionais que pode ser colocado em bijeção com o conjunto $\mathbb{Q}$.

Estes números irracionais são classificados como números algébricos e Cantor demonstrou que este conjunto é enumerável. Seguindo a definição estabelecida em [2], mas considerando apenas o caso real, dizemos que um número irracional ξ é algébrico se é zero de uma função da forma

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{5.1}$$

com $m > 1$ e $a_m \neq 0$. Todos os coeficientes a_i são números inteiros. Portanto, para um número irracional ξ existem coeficientes inteiros adequados de tal forma que $f(\xi) = 0$.

Sob este ponto de vista, podemos afirmar que existe uma quantidade infinita, porém enumerável, de números irracionais que podem ser obtidos por meio de aproximações dos zeros destas funções. Além disso, de acordo com as seções anteriores deste manuscrito, a utilização do axioma do supremo na caracterização deste corpo real garante que resultados importantes sobre funções continuas são verdadeiros (ver [13]).

Considere f uma função da forma (5.1), definida no corpo completo de números reais que foi construído, cujo zero é o número irracional de interesse. Se existem dois números racionais q_1 e q_2 com $q_1 < q_2$ e tais que $f(q_1) < 0 < f(q_2)$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 4 do Capítulo 7 em [13]) existe $\xi \in \mathbb{R}$ que anula a função escolhida, isto é, $f(\xi) = 0$. Considere dois conjuntos $Y = \{y \in \mathbb{Q};\ f(y) < 0\}$ e $X = \{x \in \mathbb{Q};\ f(x) > 0\}$ em $\mathbb{Q}$. Nas condições do Teorema 2.3, existem duas sequências $(x_n) \subset X$ e $(y_n) \subset Y$ tais que

$$y_n - x_n = \frac{1}{n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e as sequências devem possuir o mesmo limite ξ. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f(x_n)f(y_n) < 0$.

Consequentemente, uma vez que são válidos $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(\xi)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$ bem como $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)f(y_n) \leq 0$, a convergência destas sequências resultam na expressão

$$0 \leq f^2(\xi) \leq 0.$$

Isso garante que, se as sequências em cada corte forem tomadas dentro da classe de equivalência que representa ξ, o limite delas é um zero da função f (veja a Figura 5.1).

A questão agora é escolher um método que seja adequado para construir as sequências que serão usadas para aproximar o número irracional. No caso dos algébricos vamos usar o método de Newton-Raphson (veja [12]) para, a partir de um valor inicial dado x_0, gerar uma sequência da forma

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \qquad \text{onde} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

A diferenciabilidade é garantida por resultados de análise e esta sequência não será consistente somente se $f'(x_k) = 0$ para algum k. A seguir apresentamos dois exemplos obtidos por um código no *Matlab* que realiza o método com uma precisão, chute inicial e critérios de parada estabelecidos:

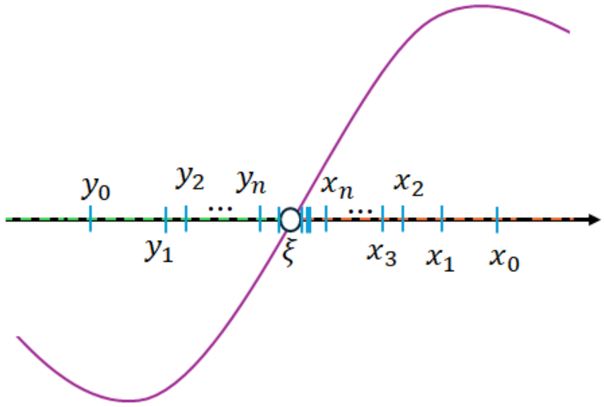

Figura 5.1: Figura ilustrando Y e X em $\mathbb{Q}$ dados em verde e laranja pontilhados, respectivamente. As sequências $(x_n) \subset X$ e $(y_n) \subset Y$ são tais que $f(x_n) > 0 > f(y_n)$ para todo n. Além disso, estas sequências são convergentes e $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi = \lim_{n\to\infty} y_n$, note que $\xi \notin \mathbb{Q}$.

Example 5.1. Aproximação de $\sqrt{2}$, para isso tome a função $f(x) = x^2 - 2$, um chute inicial $x_0 = 1$ e uma precisão de $\varepsilon = 10^{-6}$. Utilizando o algoritmo obtemos:

$$\xi^* = 1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732.$$

Example 5.2. Aproximação de $(1+\sqrt{5})/2$, para isso tome $f(x) = x^2 - x - 1$, um chute inicial $x_0 = 1$ e uma precisão de $\varepsilon = 10^{-14}$. Utilizando o algoritmo obtemos a aproximação:

$$\xi^* = 1.61803398874989490252573887119069695472 7.$$

Se levarmos em conta que $\mathbb{R}$ é não-enumerável, então existem números irracionais que não são algébricos. Tais números são chamados de *transcendentes* e entre seus exemplares mais notórios temos os números irracionais π e e. A demonstração formal que estes dois números são irracionais e transcendentes é feita em detalhes em [2] e [14].

Da mesma forma que para os números irracionais algébricos, a análise e seus resultados obtidos por meio do axioma do supremo, permitem obter resultados ideais que podem ser usados para aproximarmos números transcendentes. Por exemplo, os dois transcendentes citados podem ser escritos analiticamente como

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

e

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Ambos resultados podem ser aproximados por meio de rotinas finitas de acordo com uma precisão $\varepsilon > 0$ dada. Vejamos dois exemplos implementados no *Matlab*.

Example 5.3. Usando o método de $1/3$- Simpson para aproximar a integral, é possível obter uma aproximação ξ^* para π dada por:

$$\xi^* = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816.$$

Example 5.4. Usando um truncamento na série é possível obter uma aproximação ξ^* para e dada por:

$$\xi^* = 2.71828182845904553488480814849026501178741455078125.$$

O cálculo de valores aproximados para este números por meio de sequências de Cauchy de números racionais está implícito nestas formas analíticas exatas. Os efeitos numéricos como a troca existente entre erro de truncamento e arredondamento, intrínseco da arquitetura do equipamento utilizado para os cálculos, podem dificultar a convergência da sequência. No entanto, estas são questões de cálculo numérico que extrapolam os propósitos desta revisão (veja [12]).

6. Considerações finais. No presente trabalho apresentamos uma revisão abrangente sobre números reais, englobando aspectos históricos e técnicos para construir e caracterizar o conjunto $\mathbb{R}$, com base em resultados consolidados da literatura. Em nossa investigação, descobrimos a existência de certa controvérsia (veja [4] e [15]) com respeito da formulação da matemática, em especial quando o infinito de fato é considerado em detrimento do infinito em potencial. Ao analisar o capítulo de números reais da referência [4], percebemos uma formulação que é dada em termos de sequências de Cauchy mas que usa para suas demonstrações a lógica intuicionista de Brouwer no lugar da lógica clássica. Alguns defensores desta abordagem como [15], alegam que ela descreve os números reais de maneira mais fiel a realidade que a apresentada nessa revisão.

Inspecionando a abordagem construtivista, percebemos que conceitos, como o axioma do supremo, são profundamente modificados de maneira a tornar inválidos, ou fracos, teoremas que são chaves na versão clássica da análise como o Teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema do Valor Intermediário e a própria definição de função integrável, entre outros. Do nosso ponto de vista, tal abordagem empobrece, significativamente, de resultados a Análise Real.

No nosso entendimento, a formulação ideal dos reais, em termos da lógica clássica, não apresenta problemas do ponto de vista mais mundano de aproximações destes números irracionais com respeito a alguma precisão estabelecida. Assumindo a construção formal, é possível obter os resultados consagrados da análise (Teorema do Valor Intermediário, Séries de potências, Integrais de Riemann) e, com eles produzir tais aproximações. De fato, ilustramos alguns casos de interesse didático no corpo do texto.

O resultado principal discutido e demonstrado nesse trabalho evidencia que a construção de $\mathbb{R}$, por meio de classes de equivalência de sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$, implica na existência de um corpo ordenado completo. Desta forma, pelo princípio Arquimediano, temos que a formulação explorada no corpo do texto é equivalente a introduzir os números reais por meio do axioma do supremo, como a realizada em [13]. Portanto, simplesmente assumir a existência de um corpo ordenado completo conhecido como o corpo dos números reais é perfeitamente aceitável do ponto de vista formal.

Inspirado pela referência [5], foi apresentado um exemplo de um corpo ordenado que não é Arquimediano, mas que é completo no sentido de Cauchy. No entanto, tal corpo não verifica a propriedade dos intervalos encaixantes. Consequentemente, neste corpo não é possível deduzir o axioma do supremo como um teorema. De fato, sob a ordem definida para o corpo em questão, sequer é possível introduzir um axioma do supremo para ele nos moldes do que é realizado nos reais.

Finalmente, acreditamos que a presente revisão pode ser usada como material de apoio em cursos de análise por docentes interessados em realizar uma construção do ambiente onde a Análise Real será feita. Entretanto, essa revisão não está limitada apenas a isso, esse material também é indicado para apoio em cursos de Análise Numérica Avançada. Acreditamos que é importante entender as limitações da aritmética de ponto flutuante em contraposição ao corpo abstrato dos reais e sua influência sobre os métodos numéricos. Note que muitas técnicas numéricas são elas próprias baseadas em resultados exatos e ideais fornecidos pelo cálculo.

Contribuições dos autores. Os autores desta publicação contribuíram igualmente nos seguintes aspectos: conceituação, pesquisa, análise formal, metodologia, validação, revisão e redação.

Financiamento. Este trabalho não conta com financiamento externo.

Conflitos de interesses. Os autores declaram não ter conflitos de interesses.

ORCID and License

Víctor Arturo Martínez León https://orcid.org/0000-0002-2082-6665
Rodrigo Bloot https://orcid.org/0000-0001-6504-5718
Ana Letícia de Oliveira https://orcid.org/0009-0004-4981-9575

Referências

[1] Ferreira J. A Construção dos Números. Textos Universitários - SBM. 4. ed., Rio de Janeiro, 2022.

[2] Courant R, Robbins H. O que é Matemática?. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2000.

[3] Mortari CA. Introdução à Lógica. Editora UNESP, São Paulo, 2016.

[4] Bishop E, Bridges D. Constructive Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg GmbH, 1985.

[5] Cohen LW, Ehrlich G. The Structure of the Real Number System. 1. ed. The University Series in Undergraduate Mathematics. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1963.

[6] Cohen LW, Goffman C. A theory of transfinite convergence. Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), no. 1, 65-74.

[7] Lima EL. Curso de Análise. Projeto Euclides - IMPA, 12. ed., Rio de Janeiro, 2009.

[8] Bloch ED. The Real Numbers and Real Analysis. Springer-Verlag, New York, 2011.

[9] Graeff M. Construção dos Conjuntos Numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática - Licenciatura) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Paraná, 2023.

[10] Moreira CN, Cabral MAP. Curso de Análise Real. Editora Instituto de Matemática. 2. ed. Rio de Janeiro, 2021.

[11] Oliveira AL. Equivalências do axioma do supremo. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática - Licenciatura) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Paraná, 2023.

[12] Ruggiero MAG, Lopes VLR. Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais. PEARSON, 2. ed, São Paulo, 1997.

[13] Lima EL. Análise Real volume 1. Funções de uma variável. Coleção Matemática Universitária - IMPA. 12. ed., Rio de Janeiro, 2014.

[14] Figueiredo DG. Números Irracionais e Transcedentes. Coleção iniciação científica - SBM. 4. ed., Rio de Janeiro, 2011.

[15] Calder A. O infinito: teste decisivo para o construtivismo. Scientific American Brasil, edição especial, DUETTO (2006), no. 15, 48-55.