Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(2):285-302.

Normal forms of vector fields induced by holomorphic actions of the group $SL(2,\mathbb{C})$ on a complex manifold

Formas normales de campos vectoriales inducidos por acciones holomorfas del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ sobre una variedad compleja

Benito Leonardo Ostos Cordero

Received, Set. 15, 2024; *Accepted, Dec. 12, 2024;* *Published, Dec. 27, 2024*

How to cite this article:
Benito O. *Formas normales de campos vectoriales inducidos por acciones holomorfas del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ sobre una variedad compleja* . Selecciones Matemáticas. 2024;11(2):285–302. **http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.02.07**

Abstract

In this work, we study actions of the Lie group $SL(2,\mathbb{C})$ on a complex manifold of dimension three or higher. It is demonstrated that these types of actions induce three complete holomorphic vector fields, one of which is periodic, and that there exists a particular relationship between them, given by the Lie bracket, which generates a singular holomorphic foliation of codimension two. Subsequently, the types of singularities are classified, and the normal forms of these vector fields are obtained in a neighborhood of each singular point of the foliation.

Keywords . Vector fields, Lie bracket, holomorphic action, singular set.

Resumen

En este trabajo se estudian las acciones del grupo de Lie $SL(2,\mathbb{C})$ sobre una variedad compleja de dimensión mayor o igual a tres. Se demuestra que este tipo de acciones induce tres campos vectoriales holomorfos completos, uno de los cuales es periódico, y que existe una relación particular entre ellos, dada por el corchete de Lie, que genera una foliación holomorfa singular de codimensión dos. Posteriormente, se clasifican los tipos de singularidades y se obtienen las formas normales de estos campos en una vecindad de cada punto singular de la foliación.

Palabras clave. Campos vectoriales, corchete de Lie, acción holomorfa, conjunto singular.

1. Introducción. El estudio de acciones holomorfas de un grupo de Lie G sobre una variedad compleja puede, en ciertos casos, inducir una foliación singular y, a su vez, generar campos vectoriales que representen la acción. Analizar estos campos en una vecindad de un punto singular proporciona información relevante sobre la acción original, como la forma normal de los campos en torno a dicho punto. Por ejemplo, cuando G es compacto y la acción es C^k-diferenciable con un punto fijo, el teorema de Bochner-Cartan garantiza que la acción es linealizable (véase[1]). En ese mismo artículo, se demuestra que, para acciones analíticas o acciones C^∞, la acción $SL(2,\mathbb{R})$ sobre $(\mathbb{R}^n, 0)$ es analíticamente linializable en el primer caso y formalmente linealizable en el segundo caso.

En este artículo, se estudian las acciones holomorfas del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ sobre una variedad compleja. En el teorema 3.1 se muestra que este tipo de acciones inducen tres campos holomorfos completos, de los cuales uno es periódico, y que dichos campos presentan relaciones específicas entre sí mediante el corchete

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú. **Correspondece author** (bostosc@uni.edu.pe).

de Lie. Los teoremas 3.2 y 3.3 establecen las relaciones entre los flujos de los campos inducidos por la acción.

Asimismo, se analiza el conjunto singular de la acción, clasificando las singularidades en seis tipos, denominados Tipo de Singularidad I, Tipo de Singularidad II, y así sucesivamente. El teorema 4.1 describe las formas normales de estos campos en una vecindad de cada punto singular. En ciertos tipos de singularidades, el conjunto singular incluye curvas analíticas. Finalmente, en el teorema 5.2, se estudia en profundidad el Tipo de Singularidad I; bajo una condición similar a la de Poincaré para la linealización, se logra fortalecer el resultado del teorema 4.1.

2. Preliminares. Las referencias bibliográficas para esta sección pueden ser encontrados en [2], [3], [4], [5] y [6].

Definición 2.1. *Sea M una variedad compleja. Un campo vectorial holomorfo X en M es una aplicación holomorfa, $X : M \to TM$ tal que para cada $p \in M$, $X(p) \in T_pM$.* Es decir, $\pi \circ X = id_M$. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ el espacio vectorial de campos vectoriales holomorfos en M.

Definición 2.2. *Dado un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$. Un mapa $\varphi : D \times M \to M$ definido en un abierto $D \subset \mathbb{C} \times M$ es un flujo de X si φ es holomorfo y*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,p) = X(\varphi(t,p)), \quad \forall\, (t,p) \in D.$$

El mapa φ satisface:

1. *$\varphi(0,p) = p$, para todo $p \in M$,*
2. *$\varphi(t_1+t_2,p) = \varphi(t_1, \varphi(t_2,p))$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ en donde este definido φ.*

Denotaremos por $X_t(p) = \varphi(t,p)$ el flujo del campo X. Así $X_t : M \to M$ es un biholomorfismo tal que:

1. *$X_0 = I$,*
2. *$X_{t_1+t_2} = X_{t_1} \circ X_{t_2}$,*
3. *$(X_t)^{-1} = X_{-t}$.*

Definición 2.3.

Una curva holomorfa $\gamma : I \to M$ definido en un disco abierto $I \subset \mathbb{C}$ con $0 \in I$, es llamada curva integral de X en p, si $\gamma(0) = p$ y

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \forall\; t \in I.$$

Sea $\varphi : U \to \mathbb{C}^m$ una carta local en M. La expresión de X con respecto a φ es la aplicación $\varphi_*(X) : \varphi(U) \to \mathbb{C}^m$ dado por:

$$\varphi_*(X)(q) = d\varphi(\varphi^{-1}(q)) \cdot X(\varphi^{-1}(q)), \quad \forall\, q \in \varphi(U). \tag{2.1}$$

La aplicación $\varphi_*(X)$ es llamada expresión local de X con respecto a (U, φ) y denotamos por X_*.

Sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ dos campos en M. Fijando un punto $p \in M$ y otro punto $t \in \mathbb{C}$, el vector

$$v(t) = X_t^*(Y)(p) = DX_{-t}(X_t(p)) \cdot Y(X_t(p))$$

es tangente a M en p.

Definición 2.4.

El corchete de Lie de X e Y es un campo vectorial $[X,Y]$ definido por

$$[X,Y](p) = \frac{d}{dt}(X_t^*(Y)(p))\mid_{t=0}, \text{ para todo } p \in M.$$

Lema 2.1. *Sea M una variedad compleja de dimensión m y $\varphi : U \subset M \to \mathbb{C}^m$ una carta local de M. Si $X_* = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y_* = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces $[X,Y]_* = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, donde*

$$c_i = \sum_{j=1}^m \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right).$$

Proposición 2.1. *El corchete de Lie tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\mathbb{C}-$ lineal: $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$ y $[X, aY_1 + bY_2] = a[X, Y_1] + b[X, Y_2]$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, $X, X_1, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.*
2. *Antisimétrica: $[X,Y] = -[Y,X]$, donde $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*
3. *Identidad de Jacobi: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z.X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.*
4. *Si f, g son funciones holomorfas, entonces $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.*

Observación 2.1. *Todo lo que se hizó hasta el momento puede es válido para en el caso cuando los campos sean diferenciables. Para el caso de campos no suaves, la definición generalizada del corchete de lie puede ser encontrada en [7], [8]; así como también la equivalencia de $[X, Y] = 0$ con la conmutatividad de sus flujos. Y la extensión para campos vectoriales en el espacio de Sobolev fue analizado en [9].*

Definición 2.5. *Dado una función $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n_+$ y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que f es una función cuasi-homogenea de tipo $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y de peso k si*

$$f(t^{\alpha_1} z_1, \cdots, t^{\alpha_1} z_n) = t^k f(z_1, \cdots, z_n), \quad \forall\, t \in \mathbb{C}.$$

Definición 2.6. *Dado un campo vectorial $X = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in \mathcal{X}(\mathbb{C}^n)$. Decimos que X es cuasi-homogeneo de tipo $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y de peso k si f_j es una función cuasi-homogenea de tipo $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y de peso $k + \alpha_j$.*

En todo lo que sigue consideraremos que G es un grupo de Lie complejo con una operación $\cdot$ y M una variedad compleja. Además G y M tienen dimensines n y m, respectivamente.

Definición 2.7. *Decimos que $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ es una acción holomorfa del grupo G sobre la variedad M cuando φ es un mapa holomorfo y satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\varphi(e, p) = p$ para todo $p \in M$, donde e es la identidad de G.*
2. *$\varphi(g_1 \cdot g_2, p) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, p))$, para todo g_1, $g_2 \in G$ y para todo $p \in M$.*

Para cada punto $p \in M$ el grupo de isotropía y la órbita de φ en el punto p son conjuntos definidos por:

$$\begin{aligned} G_p(\varphi) &= \{g \in G : \varphi(g, p) = p\}, \\ \mathcal{O}_p(\varphi) &= \{\varphi(g, p) : g \in G\}. \end{aligned}$$

El grupo de isotropía $G_p(\varphi)$ es un subgrupo de Lie cerrado de G y la órbita $\mathcal{O}_p(\varphi)$ es una subvariedad inmersa en M. El conjunto de órbitas es denotado por M/G.

Otro conjunto importante es el conjunto de puntos fijos de φ y está definido por:

$$\sum(\varphi) = \{p \in M : \varphi(g, p) = p, \text{ para todo } g \in G\}.$$

En este conjunto las órbitas son siempre de un solo elemento, es decir para cada $p \in \sum(\varphi)$, $\mathcal{O}_p(\varphi) = \{p\}$.

Definición 2.8. *Un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ con una aplicación $\mathbb{C}-$bilineal $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que:*

1. *Antisimétrica: $[x, y] = -[y, x]$.*
2. *Identidad de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.*

Dado un grupo de Lie G, podemos definir las acciones $L, R, Ad : G \times G \to G$ en G, donde $L(g, h) = g \cdot h$, $R(g, h) = h \cdot g$ y $Ad(g, h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$. Estas se llaman acción a la izquierda, acción a la derecha y acción adjunta, respectivamente.

Un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(G)$ se llama invariante a la izquierda si $(L_g)_* X = X$, es decir, si satisface:

$$X(g \cdot h) = dL_g(h) X(h), \text{ para todo, } g, h \in G.$$

Denotemos por $\mathcal{L}(G)$ al conjunto de campos invariantes a la izquierda. Equipado con el corchete de Lie de campos vectoriales en G, $\mathcal{L}(G)$ se convierte en un álgebra de Lie, llamada álgebra de Lie de G. Los espacios $\mathcal{L}(G)$ y $T_e G$ son isomorfos. El isomorfismo está dada por la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(G) & \to & T_e G \\ X & \mapsto & X(e) \end{array}$$

cuyo inverso es,

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \to & \mathcal{L}(G) \\ v & \mapsto & X^v, \end{array}$$

donde $X^v(g) = dL_g(e) v$ para todo $g \in G$. Gracias a este isomorfismo podemos dotar a $T_e G$ de una estructura de álgebra de Lie. Dados dos vectores cualesquiera v, $w \in T_e G$, entonces definimos $[v, w] = [X^v, X^w](e)$.

De ahora y en adelante el álgebra de Lie de un grupo de Lie G será denotado por $\mathfrak{g}$.

Consideremos $\gamma_v : \mathbb{C} \to G$ la curva integral de X^v tal que $\gamma_v(0) = e$. La aplicación exponencial es un morfismo de grupos de Lee definido por:

$$\begin{array}{rccc} \exp: & T_eG & \to & G \\ & v & \mapsto & \gamma_v(1), \end{array}$$

La curva integral γ_v satisface las siguientes propiedades:
1. $\gamma_v(ts) = \gamma_{tv}(s)$, para todo $t \in \mathbb{C}$.
2. $\gamma_v(t+s) = \gamma_v(t)\gamma_v(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{C}$.

Así,

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp(tv);$$

y en general, se puede probar que X^v tiene como flujo $X_t^v(g) = g\exp(tv)$ para todo $(t, g) \in \mathbb{C} \times G$.

Dado un campo $X \in \mathcal{L}(G)$ denotaremos $\exp_X : \mathbb{C} \to G$ a la curva integral de X tal que $\exp_X(0) = e$. Así el flujo de X es $X_t(g) = g\exp_X(t)$ para todo $(t, g) \in \mathbb{C} \times G$.

Sea $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ una acción holomorfa y consideremos $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$. Entonces para cada $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, tenemos

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^k X_k,$$

donde los $c_{i,j}^k$ son números complejos que satisfacen:
1. $c_{i,j}^k = -c_{j,i}^k$
2. $\sum_{r=1}^n [c_{i,j}^r c_{k,r}^m + c_{j,k}^r c_{i,r}^m + c_{k,i}^r c_{j,r}^m] = 0$.

Sea $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$ morfismos de algebras de Lie definido por

$$\rho_*(X)(p) = d\varphi_p(e)(X(e)), \ \forall\ X \in \mathfrak{g}, \forall p \in M,$$

cuyo flujo es $\rho_*(X)_t(p) = \varphi(\exp_X(t), p)$ para todo $(t, p) \in \mathbb{C} \times M$. El conjunto de campos vectoriales en M, determinado por la acción φ, está dado por el conjunto $\{\rho_*(X_1), ..., \rho_*(X_n)\}$ y están realcionados por:

$$[\rho_*(X_i), \rho_*(X_j)] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^k \rho_*(X_k).$$

El conjunto $Sing(\varphi) = \{p \in M; \rho_*(X_1) \wedge \rho_*(X_2) \wedge \cdots \wedge \rho_*(X_n) = 0\}$ es llamado conjunto singular de la acción φ. Además observamos que si $p \in \sum(\varphi)$, entonces $\rho_*(X)(p) = 0$. Así $\sum(\varphi) \subset Sing(\varphi)$. Más aún, $Sing(\varphi)$ es un conjunto analítico, es decir para cada punto $p \in M$ existe un conjunto abierto $U \subset M$ con $p \in U$ tal que $Sing(\varphi) \cap U$ esta formado por los ceros de una cantidad finita de funciones holomorfas.

En general, si $X_1, ..., X_m$ son campos vectoriales en M, entonces

$$\begin{array}{rccc} X_1 \wedge \cdots \wedge X_m : & M & \to & \bigcup_p \Lambda^m(T_pM) \\ & p & \mapsto & (X_1 \wedge \cdots \wedge X_m)(p) \end{array}$$

es tal que $(X_1 \wedge \cdots \wedge X_m)(p) = X_1(p) \wedge \cdots \wedge X_m(p) \in \Lambda^m(T_pM)$, donde $\Lambda^m(T_pM)$ es el espacio de las m-formas exteriores en T_pM.

Definición 2.9.

Una acción $\varphi : G \times M \to M$ es llamada foliada si para cada p el espacio tangente de $\mathcal{O}_p(\varphi)$ tiene dimensión k fija. Cuando k es la dimensión de G decimos que φ es localmente libre.

En general, para cada $p \in M$ la órbita $\mathcal{O}_p(\varphi)$ tiene espacio tangente $T_p\mathcal{O}_p(\varphi) = T_eG/T_eG_p(\varphi) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$, donde $\mathfrak{g}_p$ es el álgebra de Lie de $G_p(\varphi)$. Cuando φ es foliada, para cada $p \in M$, los grupos de isotropía $G_p(\varphi)$ son de dimensión $n - k$. Cuando φ es localmente libre los subgrupos de isotropía son todos discretos y su algebra de isotropía correspondientes es cero.

Definición 2.10.

Una acción $\varphi : G \times M \to M$ es llamada libre si para cada x el subgrupo de isotropía $G_x = \{e\}$.

En este caso el morfismo de algebra $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$ es inyectiva.

El espacio vectorial de las matrices de orden n y con entradas en $\mathbb{K}$, denotado por $M_n(\mathbb{K})$, se convierte en un álgebra de Lee cuando se le equipa con el conmutador de matrices definido por:

$$[A,B] = AB - BA,\ \forall\ A,B \in M_n(\mathbb{K}).$$

Este álgebra de Lee se denota por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$ puede ser identificado con $\mathbb{R}^{n^2}$ y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$ puede ser identificado con $\mathbb{C}^{2n^2}$. El grupo de Lie general $GL(n,\mathbb{K})$ de matrices invertibles (grupo con la multiplicación de matrices) es un conjunto abierto de $M_n(\mathbb{K})$ y su espacio tangente $T_I GL(n,\mathbb{K})$ se identifica con $M_n(\mathbb{K})$, en donde I es la matriz identidad.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ entonces para cada $g \in GL(n,\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} X^A(g) &= dL_g(I)A = dL_g(I)\left(\frac{d}{dt}(I+tA)|_{t=0}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(L_g(I+tA)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(g(I+tA)\right)|_{t=0} \\ &= gA. \end{aligned}$$

Dado $\gamma_A : \mathbb{K} \to GL(n,\mathbb{K})$ la curva integral de X^A tal que $\gamma_A(I)$, entonces $\gamma_A(t) = \exp(tA)$. Se puede probar que $\exp(tA)$ coincide con la exponencial de matrices de tA. Por lo tanto, X^A tiene por flujo $X_t^A(B) = Be^{tA}$ para todo $B \in GL(n,\mathbb{K})$ y para todo $t \in \mathbb{K}$.

Algunos subgrupos de Lie del grupo $GL(n,\mathbb{C})$ son: el grupo especial lineal, el grupo unitario y el grupo unitario especial

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}); \det(A) = 1\} \\ U(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}); A^{-1} = \overline{A}^T\} \\ SU(n) &= U(n) \cap SL(n,\mathbb{C}) \end{aligned}$$

con álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &= \{A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}); Tr(A) = 0\} \\ \mathfrak{u}(n) &= \{A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}); A + \overline{A}^T = 0\} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}); A + \overline{A}^T = 0, Tr(A) = 0\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

El conjunto $SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo no abeliano con la multiplicación de matrices, más aún, es un grupo de Lie de dimensión tres cuyo algebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es isomorfo a:

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a+d = 0, a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$$

con base:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A estás matrices les corresponden campos vectoriales X,Y y Z en $SL(2,\mathbb{C})$ que son invariantes por traslaciones a la izquierda. Explícitamente estos campos son:

$$\begin{aligned} X\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ Y\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Z\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y están relacionadas por el corchete de Lie mediante:

$$[X,Y] = Y,\ [X,Z] = -Z,\ [Y,Z] = X.$$

3. Acción holomorfa. Dada una acción holomorfa $SL(2,\mathbb{C})$ sobre una variedad compleja, estudiaremos como están relacionadas sus campos relacionados a él.

Teorema 3.1. *Sea $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \times M \to M$ una acción del grupo de Lie $SL(2,\mathbb{C})$ sobre M, entonces existen campos holomorfos completos $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ tales que*

1. *El flujo de $\widetilde{X}$ es periódico de periodo $4\pi i$.*
2. $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] = \widetilde{Y},\ [\widetilde{X},\widetilde{Z}] = -\widetilde{Z},\ [\widetilde{Y},\widetilde{Z}] = \widetilde{X}$.
3. *Dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. Si $d \neq 0$, $\varphi_A = \widetilde{Y}_s \circ \widetilde{X}_t \circ \widetilde{Z}_u$, donde $s = b/d$, $u = c/d$ y $t = -2\ln d$. Si $d = 0$, $\varphi_A = \varphi_J \circ \widetilde{X}_t \circ \widetilde{Z}_u$, donde $t = -2\ln b$, $u = a/b$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*

Demostración: Sean $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ campos vectoriales definidos por $\widetilde{X}(p) = \rho_*(X)(p)$, $\widetilde{Y}(p) = \rho_*(Y)(p)$, $\widetilde{Z}(p) = \rho_*(Z)(p)$ para todo $p \in M$. Es decir,

$$\widetilde{X}(p) = (d\varphi_p(I))(X(I)), \quad \widetilde{Y}(p) = (d\varphi_p(I))(Y(I)), \quad \widetilde{Z}(p) = (d\varphi_p(I))(Z(I)),$$

donde I es la matriz identidad de orden dos. Verifican las relaciones

$$[\widetilde{X},\widetilde{Y}] = \widetilde{Y},\ [\widetilde{X},\widetilde{Z}] = -\widetilde{Z},\ [\widetilde{Y},\widetilde{Z}] = \widetilde{X}.$$

Además los flujos de $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ y $\widetilde{Z}$ son:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t(p) &= (\varphi_p \circ \exp_X)(t) = \varphi(\exp_X(t), p) \\ \widetilde{Y}_t(p) &= (\varphi_p \circ \exp_Y)(t) = \varphi(\exp_Y(t), p) \\ \widetilde{Z}_t(p) &= (\varphi_p \circ \exp_Z)(t) = \varphi(\exp_Z(t), p), \end{aligned}$$

donde

$$\exp_X(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \quad \exp_Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp_Z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

De esto es claro que $\widetilde{X}$ es un campo cuyo flujo es periodico de período $4\pi i$, y haciendo $C = \exp_Y(s) \circ \exp_X(t) \circ \exp_Z(u)$, tenemos

$$\begin{aligned} C &= \exp_Y(s) \circ \exp_X(t) \circ \exp_Z(u) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} + use^{-t/2} & se^{-t/2} \\ ue^{-t/2} & e^{-t/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces $\varphi_C = \widetilde{Y}_s \circ \widetilde{X}_t \circ \widetilde{Z}_u$.

Esto motiva a descomponer cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ de la siguiente manera:

Primer caso. Si $d \neq 0$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} + \frac{bc}{d} & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/d & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, existen $s, t, u \in \mathbb{C}$ tales que $b = sd$, $c = ud$ y $d = e^{-t/2}$. Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

y $\varphi_A = \widetilde{Y}_s \circ \widetilde{X}_t \circ \widetilde{Z}_u$.

Segundo caso. Si $d = 0$, entonces $bc = -1$; y la matriz A se puede exprezar como:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a/b & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando escalares u y t tales que $a = ub$, $b = e^{-t/2}$, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

y $\varphi_A = \varphi_J \circ \widetilde{X}_t \circ \widetilde{Z}_u$, donde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ □

Observación 3.1. *Los campos $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ y $\widetilde{Z}$ que aparecen en el teorema (3.1) satisfacen*

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{Y},\ [\widetilde{X}, \widetilde{Z}] = -\widetilde{Z},\ [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}] = \widetilde{X}.$$

De las dos primeras, $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{Y},\ [\widetilde{X}, \widetilde{Z}] = -\widetilde{Z}$, sus flujos se relacionan

$$\widetilde{Y}_t \circ \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_s \circ \widetilde{Y}_{e^s t}; \quad \widetilde{Z}_{e^s t} \circ \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_s \circ \widetilde{Z}_t. \tag{3.1}$$

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $d \neq 0$, $d' \neq 0$ y $cb' + dd' \neq 0$.

Caso 2. $d \neq 0$, $d' \neq 0$ y $cb' + dd' = 0$.

Caso 3. $d = 0$, $d' \neq 0$ y $cb' + dd' \neq 0$.

Caso 4. $d = 0$, $d' \neq 0$ y $cb' + dd' = 0$.

Caso 5. $d \neq 0$, $d' = 0$ y $cb' + dd' \neq 0$

Caso 6. $d \neq 0$, $d' = 0$ y $cb' + dd' = 0$.

Caso 7. $d = 0$, $d' = 0$ y $cb' + dd' \neq 0$.

Caso 8. $d = 0$, $d' = 0$ y $cb' + dd' = 0$.

Teorema 3.2. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

con $dd' \neq 0$. Si $cb' + dd' \neq 0$, entonces existen números complejos u_1, t_1, t_2, s_2 tales que los flujos de los campos dados en el teorema (3.1) satisfacen:

$$\begin{cases} \widetilde{Y}_{\frac{e^{t_1} s_2}{u_1 s_2 + 1}} & = & \widetilde{Z}_{e^{t_1} u_1} \circ \widetilde{X}_{\ln(u_1 s_2 + 1)} \\ \widetilde{Z}_{\frac{e^{t_2} u_1}{u_1 s_2 + 1}} & = & \widetilde{X}_{\ln(u_1 s_2 + 1)} \circ \widetilde{Y}_{e^{t_2} s_2}. \end{cases}$$

Demostración: Como $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ entonces $AB \in SL(2, \mathbb{C})$.

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

donde $d \neq 0$, $d' \neq 0$ y $cb' + dd' \neq 0$. Dados los números complejos $s_1, s_2, s, u_1, u_2, t_1, t_2, t \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{cases} b = ds_1 & c = du_1 & d = e^{-t_1/2} \\ b' = d's_2 & c' = d'u_2 & d' = e^{-t_2/2} \\ ab' + bd' = s(cb' + dd') & ca' + dc' = u(cb' + dd') & cb' + dd' = e^{-t/2} \end{cases}$$

Por el teorema (3.1),

$$\varphi_A = \widetilde{Y}_{s_1} \circ \widetilde{X}_{t_1} \circ \widetilde{Z}_{u_1} \text{ y } \varphi_B = \widetilde{Y}_{s_2} \circ \widetilde{X}_{t_2} \circ \widetilde{Z}_{u_2}.$$

Así usando las ecuaciones en (3.1)

$$\begin{aligned} \varphi_A \circ \varphi_B &= \widetilde{Y}_{s_1} \circ (\widetilde{X}_{t_1} \circ \widetilde{Z}_{u_1}) \circ (\widetilde{Y}_{s_2} \circ \widetilde{X}_{t_2}) \circ \widetilde{Z}_{u_2} \\ &= \widetilde{Y}_{s_1} \circ \widetilde{Z}_{e^{t_1}u_1} \circ \widetilde{X}_{t_1} \circ \widetilde{X}_{t_2} \circ \widetilde{Y}_{e^{t_2}s_2} \circ \widetilde{Z}_{u_2} \\ &= (\widetilde{Y}_{s_1} \circ \widetilde{Z}_{e^{t_1}u_1}) \circ \widetilde{X}_{t_1+t_2} \circ (\widetilde{Y}_{e^{t_2}s_2} \circ \widetilde{Z}_{u_2}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

También,

$$\begin{cases} ab' + bd' &= \left(\frac{1+bc}{d}\right) b' + dd's_1 = \frac{b'}{d} + s_1cb' + dd's_1 = \frac{b'}{d} + s_1(cb' + dd') \\ ca' + dc' &= c\left(\frac{1+b'c'}{d'}\right) + dd'u_2 = \frac{c}{d'} + cb'u_2 + dd'u_2 = \frac{c}{d'} + u_2(cb' + dd') \\ cb' + dd' &= dd'u_1s_2 + dd' = dd'(u_1s_2 + 1) = e^{\frac{-t_1-t_2}{2}}(u_1s_2 + 1) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{cases} s &= \frac{b'}{d(cb'+dd')} + s_1 = \frac{e^{-t_2/2}s_2}{e^{-t_1/2}e^{-t/2}} = \frac{e^{t_1}s_2}{u_1s_2+1} + s_1. \\ u &= \frac{c}{d'(cb'+dd')} + u_2 = \frac{e^{-t_1/2}u_1}{e^{-t_2/2}e^{t/2}} + u_2 = \frac{e^{t_2}u_1}{u_1s_2+1} + u_2 \\ t &= t_1 + t_2 - 2\ln(u_1s_2 + 1). \end{cases}$$

Sustituyendo $t_1 + t_2 = t + 2\ln(u_1s_2 + 1)$ en (3.2) y distribuyendo en forma conveniente, obtenemos

$$\varphi_A \circ \varphi_B = (Y_{s_1} \circ Z_{e^{t_1}u_1} \circ X_{\ln(u_1s_2+1)}) \circ X_t \circ (X_{\ln(u_1s_2+1)} \circ Y_{e^{t_2}s_2} \circ Z_{u_2}) \tag{3.3}$$

También tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{AB} &= Y_s \circ X_t \circ Z_u \\ &= Y_{s_1} \circ Y_{\frac{e^{t_1}s_2}{u_1s_2+1}} \circ X_t \circ Z_{\frac{e^{t_2}u_1}{u_1s_2+1}} \circ Z_{u_2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$, entones por (3.3) y (3.4):

$$\begin{cases} Y_{\frac{e^{t_1}s_2}{u_1s_2+1}} &= Z_{e^{t_1}u_1} \circ X_{\ln(u_1s_2+1)} \\ Z_{\frac{e^{t_2}u_1}{u_1s_2+1}} &= X_{\ln(u_1s_2+1)} \circ Y_{e^{t_2}s_2}. \end{cases}$$

□

Teorema 3.3. *Si $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ y $\widetilde{Z}$ son los campos inducidos por φ, entonces*

$$Y_s^*(\widetilde{Z})(p) = -\frac{s^2}{2}\widetilde{Y}(p) + s\widetilde{X}(p) + \widetilde{Z}(p)$$

Demostración: Las dos primeras relaciones permiten obtener la relación entre los flujos:

$$\widetilde{Y}_t \circ \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_s \circ \widetilde{Y}_{e^s t} \text{ y } \widetilde{Z}_{e^s t} \circ \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_s \circ \widetilde{Z}_t, \ \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Veamos para $[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}] = \widetilde{X}$:

$$\frac{d}{ds}\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z})(p) = \widetilde{Y}_s^*[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}](p) = \widetilde{Y}_s^*(\widetilde{X})(p).$$

Entonces derivando otra vez:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z})(p) &= \frac{d}{ds}\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{X})(p) = \widetilde{Y}_s^*[\widetilde{Y}, \widetilde{X}](p) = \widetilde{Y}_s^*(-\widetilde{Y})(p) \\ &= -\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Y})(p). \end{aligned}$$

Derivando una vez mas:

$$\frac{d^3}{ds^3}\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z})(p) = -\frac{d}{ds}\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Y})(p) = \widetilde{Y}_s^*[\widetilde{Y}, \widetilde{Y}](p) = 0.$$

Integrando

$$\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z})(p) = C_1\frac{s^2}{2} + C_2s + C_3, \quad \forall\, s \in \mathbb{C},$$

dondde C_1, C_2, C_3 son constantes.

$$\frac{d^2}{ds^2} Y_s^*(\widetilde{Z})(p) = C_1 = -\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Y})(p) \quad \Rightarrow \quad \text{tomando } s=0, C_1 = -\widetilde{Y}(p).$$
$$\frac{d}{ds} \widetilde{Y}_s^*(Z)(p) = C_1 s + C_2 = \widetilde{Y}_s^*(\widetilde{X})(p) \quad \Rightarrow \quad \text{tomando } s=0, C_2 = X(p).$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z})(p) = -\frac{s^2}{2}\widetilde{Y}(p) + s\widetilde{X}(p) + \widetilde{Z}(p). \tag{3.5}$$

□

Observación 3.2. *En [10] se encuentra: Si X, Y son campos holomorfos con flujo X_s, X_t, entonces*

$$\frac{d}{dt}\left(X_t \circ Y_t\right)(p) = X(X_t \circ Y_t(p)) + ((X_t)^* Y)(X_t \circ Y_t(p)).$$

Ahora si X, Y son campos conmutativos, entonces $(X_t)^* Y = Y$. Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\left(X_t \circ Y_t\right)(p) = X(X_t \circ Y_t(p)) + Y(X_t \circ Y_t(p)) = (X+Y)(X_t \circ Y_t(p)).$$

Es decir, el flujo de $X+Y$ es $(X+Y)_t = X_t + Y_t$. Sin embargo, no es cierto este resultado para campos no conmutativos

Observación 3.3. *Para cada $s \in \mathbb{C}$, los flujos de $\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z}), -\frac{s^2}{2}\widetilde{Y}, s\widetilde{X}, \widetilde{Z}$ que aparecen en el teorema (3.3) son:*

$$\begin{array}{rcl} t & \mapsto & \widetilde{X}_{s^{-1}} \circ \widetilde{Y}_t \circ \widetilde{X}_s \\ t & \mapsto & \widetilde{Y}_{-\frac{s^2}{2}t} \\ t & \mapsto & \widetilde{X}_{st} \\ t & \mapsto & \widetilde{Z}_t. \end{array}$$

En (3.5) el campo $\widetilde{Y}_s^*(\widetilde{Z})$ aparece como la suma de los campos $-\frac{s^2}{2}\widetilde{Y}, s\widetilde{X}, \widetilde{Z}$. No podemos juntar los flujos de $-\frac{s^2}{2}\widetilde{Y}(p)$, $s\widetilde{X}(p)$ y $\widetilde{Z}(p)$ para obtener el flujo de la suma $-\frac{s^2}{2}\widetilde{Y}(p) + s\widetilde{X}(p) + \widetilde{Z}(p)$ ya que estos campos no son conmutativos; pero si podemos obtener soluciones aproximadas formales (es decir, no se garantiza la convergencia) usando la expansión de la serie de Magnus para ecuaciones diferenciales autónomas (véase [11]). Dicho método garantiza que no pierde información de la solución exacta.

4. Formas normales de los campos $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$. El conjunto singular de φ es $Sing(\varphi) = \{p \in M : \widetilde{X}(p) \wedge \widetilde{Y}(p) \wedge \widetilde{Z}(p) = 0\}$. Se determina las formas normales de los campos $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ en una vecindad de un punto singular. Para ello clasificaremos un punto $p \in Sing(\varphi)$ como de tipo de singularidad I,II,III,IV,V o VI, según corresponda a la descripción dada a continuación:

1. Tipo I: $Z(p) \neq 0$;
2. Tipo II: $Z(p) = 0$, $X(p) = 0$, $Y(p) = 0$;
3. Tipo III: $Z(p) = 0$, $X(p) = 0$, $Y(p) \neq 0$;
4. Tipo IV: $Z(p) = 0$, $X(p) \neq 0$, $Y(p) \neq 0$ l.d. (linealmente dependiente);
5. Tipo V: $Z(p) = 0$, $X(p) \neq 0$, $Y(p) = 0$;
6. Tipo VI: $Z(p) = 0$, $X(p) \neq 0$, $Y(p) \neq 0$ l.i. (linealmente independientes).

Teorema 4.1. *Sea $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \times M \to M$ una acción del grupo de Lie $SL(2,\mathbb{C})$ sobre M con $\dim(M) = 4$. Si $p \in Sing(\varphi)$, entonces existen una vecindades U de p en M y V de 0 en $\mathbb{C}^4$, y un biholomorfismo $\phi : U \to V$ tal que $\phi(p) = 0$ y transforma los campos $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ y $\widetilde{Z}$, según corresponda:*

1. *Si p es de tipo I:*

$$I : \left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{X}^0(z) & = & (z_1 + k)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^4 \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \widetilde{Y}^0(z) & = & (-\frac{z_1^2}{2} - k z_1 + \widetilde{b}_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum\limits_{j=2}^{4}(-\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'))\frac{\partial}{\partial z_j} \\ \widetilde{Z}^0(z) & = & \frac{\partial}{\partial z_1}, \end{array} \right.$$

donde $k \in \mathbb{C}$, y $\widetilde{b}_j$ satisfacen las ecuaciones (4,1) y (4,2).

2. *Si p es de tipo II:*

$$\widetilde{X}^0(z) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \widetilde{Y}^0(z) = \sum_{j=1}^{4} b_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \widetilde{Z}^0(z) = \sum_{j=1}^{4} c_j(z) \frac{\partial}{\partial z_k},$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (\mathbb{Z}/2)^4$, y $\widetilde{Y}^0(z)$, $\widetilde{Z}^0(z)$ son campos cuasi-homogeneos de tipo $(\lambda_1, ..., \lambda_4)$ y de grado 1 y -1, respectivamente. Además, $b_j(0) = c_j(0) = 0$ para todo $j = 1, 2, 3, 4$.

3. *Si p es de tipo III:*

$$\begin{cases} \widetilde{X}^0(z) &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \widetilde{Y}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ \widetilde{Z}^0(z) &= (-\frac{z_1^2}{2} + \widetilde{c}_1(z')) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum\limits_{i=2}^{4} (\lambda_i z_1 z_i + \widetilde{c}_i(z')) \frac{\partial}{\partial z_i}, \end{cases}$$

donde para cada $i = 1, 2, 3, 4$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}/2$ y $\widetilde{c}_i$ con $\widetilde{c}_i(0') = 0$ satisface la ecuación (4.3).

4. *No existe singularidad tipo IV y V.*
5. *Si p es de tipo VI:*

$$\begin{cases} \widetilde{X}^0(z) &= (-z_1 + a_1(z')) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum\limits_{i=2}^{4} a_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i}, \exists\, i \in \{2, 3, 4\} / a_i(0) \neq 0 \\ \widetilde{Y}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \widetilde{Z}^0(z) &= (-\frac{z_1^2}{2} + a_1(z') z_1 + \widetilde{b}_1(z')) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum\limits_{i=2}^{4} (a_i(z') z_1 + \widetilde{b}_i(z')) \frac{\partial}{\partial z_i}, \end{cases}$$

donde $a_i(z')$ y $\widetilde{b}_i(z')$ satisfacen las ecuaciones (4.8) y (4.9). Además, $\widetilde{b}_i(0) = 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración: Para la prueba dividiremos en varios casos

Caso 1: Si $Z(p) \neq 0$. En [12] y [13] se estudio este caso pero cuando $\widetilde{X}$ es 2π periodo y $[\widetilde{X}, \widetilde{Z}] = -\widetilde{Z}$. Para el caso $\widetilde{X}$ es 4π periodo es muy similar: Como $[\widetilde{X}, \widetilde{Z}] = -\widetilde{Z}$ existe un cambio de holomorfo de coordenadas en una vecindad de p tal que $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Z}$ se transforman en:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^0(z) &= (z_1 + k) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \widetilde{Z}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

donde $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (\mathbb{Z}/2)^3$ y $k \in \mathbb{C}$.

Expresando en este sistema de coordenadas $\widetilde{Y}$ como $\widetilde{Y}^0 = \sum_{i=1}^{4} b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ y usando $[\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] = \widetilde{X}^0$, se tiene:

$$\frac{\partial b_1}{\partial z_1} = -z_1 - k, \ \frac{\partial b_2}{\partial z_1} = -\lambda_2 z_2, \ \frac{\partial b_3}{\partial z_1} = -\lambda_3 z_3, \ \frac{\partial b_4}{\partial z_1} = -\lambda_4 z_4.$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} b_1(z) &= -\frac{z_1^2}{2} - k z_1 + \widetilde{b}_1(z') \\ b_j(z) &= -\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'), \ \text{para } j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Donde $z' = (z_2, z_3, z_4)$ y $z = (z_1, z')$. Usando $[\widetilde{X}^0, \widetilde{Y}^0] = \widetilde{Y}^0$ con las ecuaciones anteriores se tiene: Para la primera componente:

$$-(z_1 + k)^2 - b_1(z) + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial \widetilde{b}_1}{\partial z_i}(z') = b_1(z)$$

Entonces

$$2b_1(z) = -(z_1 + k)^2 + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial \widetilde{b}_1}{\partial z_i}(z')$$

Así,

$$2\widetilde{b_1}(z') = -k^2 + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial \widetilde{b_1}}{\partial z_i}(z') \tag{4.1}$$

y para $j = 2$:

$$-(z_1 + k)(\lambda_2 z_2) + (\lambda_2 z_2)\left(-\lambda_2 z_1 + \frac{\partial \widetilde{b_2}}{\partial z_2}(z)\right) - \lambda_2 b_2 + (\lambda_3 z_3)\frac{\partial \widetilde{b_2}}{\partial z_3}(z) + (\lambda_4 z_4)\frac{\partial \widetilde{b_2}}{\partial z_4}(z) = b_2(z)$$

Entonces

$$-\lambda_2 z_2(z_1 + k) - \lambda_2^2 z_1 z_2 + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial \widetilde{b_2}}{\partial z_i}(z') = (1 + \lambda_2) b_2(z)$$

En general para $j = 2, 3, 4$, tenemos:

$$-\lambda_j z_j(z_1 + k) - \lambda_j^2 z_1 z_j + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial \widetilde{b_j}}{\partial z_i}(z') = (1 + \lambda_j) b_j(z).$$

Luego,

$$(1 + \lambda_j)\widetilde{b_j}(z') = -\lambda_j z_j k + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial \widetilde{b_j}}{\partial z_i}(z'). \tag{4.2}$$

Por lo tanto

$$I : \begin{cases} \widetilde{X}^0(z) &= (z_1 + k)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \widetilde{Y}^0(z) &= (-\frac{z_1^2}{2} - k z_1 + \widetilde{b}_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{j=2}^{4}(-\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'))\frac{\partial}{\partial z_j} \\ \widetilde{Z}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1}, \end{cases}$$

donde $\widetilde{b}_j$ satisfacen (4,1) y (4,2).

A partir de aquí y en adelante $Z(p) = 0$.

Caso 2:$\widetilde{X}(p) = 0$ y $\widetilde{Y}(p) = 0$.
Por ser $\widetilde{X}^0$ un campo cuyo flujo es periodico de periodo $4\pi i$, $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{Y}$ y $[\widetilde{X}, \widetilde{Z}] = -\widetilde{Z}$, entonces (usando las mismas referencias que el caso 1, salvo el cambio de periodo) existe un cambio holomorfo de coordenadas en una vecindad de p tal que $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ y $\widetilde{Z}$ se transforman en:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^0 &= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \text{ donde } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (\mathbb{Z}/2)^4 \\ \widetilde{Y}^0 &= \sum_{i=1}^{4} b_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \text{ donde } b_i(z) = \sum_{<J,\lambda>=1+\lambda_i} b_J^i z^J \\ \widetilde{Z}^0 &= \sum_{i=1}^{4} c_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \text{ donde } c_i(z) = \sum_{<J,\lambda>=-1+\lambda_i} c_J^i z^J \end{aligned}$$

Es decir, Los campos $\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0$ son campos quasi-homogeneos de tipo $(\lambda_1, ..., \lambda_4)$ y de grado 1 y -1, respectivamente.

Caso 3: Si p es de tipo III o de tipo IV, es decir, $\widetilde{X}(p) = 0$ y $\widetilde{Y}(p) \neq 0$ o cuando $\widetilde{X}(p) \neq 0$, $\widetilde{Y}(p) \neq 0$ linealmente dependiente. Entonces usando $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{Y}$ hay un bajo cambio de coordenadas (Similar al inicio del caso 1) tales que:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^0(z) &= (-z_1 + k)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \widetilde{Y}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

donde $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (\mathbb{Z}/2)^3$. Hacemos notar que el tipo de singularidad III es cuando $k = 0$ y para tipo de singularidad IV es cuando $k \neq 0$.

Expresando $\widetilde{Z}$ en esas nuevas coordenadas como $\widetilde{Z}^0 = \sum_{i=1}^4 c_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ y usando $[\widetilde{X}^0, \widetilde{Z}^0] = -\widetilde{Z}^0$ tenemos para todo $i = 1, 2, 3, 4$:

$$c_i(z) = \sum_{<J,\lambda>=-1+\lambda_i} c_J^i Z^J$$

con $\lambda_1 = -1$.

Usando $[\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] = \widetilde{X}^0$ se tiene:

$$\frac{\partial c_1}{\partial z_1}(z) = -z_1 + k, \quad \frac{\partial c_2}{\partial z_1}(z) = \lambda_2 z_2,$$
$$\frac{\partial c_3}{\partial z_1}(z) = \lambda_3 z_3, \text{ y } \quad \frac{\partial c_4}{\partial z_1}(z) = \lambda_4 z_4.$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} c_1(z) &= kz_1 - \frac{z_1^2}{2} + \widetilde{c}_1(z') \\ c_i(z) &= \lambda_i z_1 z_i + \widetilde{c}_i(z'), \text{ para } i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Donde $\widetilde{c}_i(0') = 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Obervamos que $c_{1000}^1 = k$. Si $k \neq 0$, entonces $\lambda_1 = -1 + \lambda_1$ esto es una contradicción. Así el tipo singularidad IV no existe. Además,

$$\widetilde{c}_i(z') = \sum_{<J',\lambda'>=-1+\lambda_i} c_{J'}^i z^{J'} \tag{4.3}$$

con $\lambda' = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $z' = (z_2, z_3, z_4)$ e $J' = (j_2, j_3, j_4)$. Por lo tanto

$$\begin{cases} \widetilde{X}^0(z) &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^4 \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \widetilde{Y}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \widetilde{Z}^0(z) &= (-\frac{z_1^2}{2} + \widetilde{c}_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^4 (\lambda_i z_1 z_i + \widetilde{c}_i(z'))\frac{\partial}{\partial z_i}, \end{cases}$$

donde para cada $i = 1, 2, 3, 4$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}/2$ y $\widetilde{c}_i(z')$ con $\widetilde{c}_i(0') = 0$ satisface la ecuación (4.3).

Caso 4: Si $\widetilde{X}(p) \neq 0$ y $\widetilde{Y}(p) = 0$. Entonces:

$$\widetilde{X}^0 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \widetilde{Y}^0 = e^{z_1} \sum_{i=1}^4 g_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \widetilde{Z}^0 = e^{-z_1} \sum_{i=1}^4 h_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i},$$

donde $g_i(0) = h_i(0) = 0$, para todo $j = 1, 2, 3, 4$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} [e^{-z_1}\widetilde{Y}^0, e^{z_1}\widetilde{Z}^0] &= [\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] + e^{-z_1}\widetilde{Y}^0(e^{z_1})\widetilde{Z}^0 - e^{z_1}\widetilde{Z}^0(e^{-z_1})\widetilde{Y}^0 \\ &= [\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] + g_1 e^{z_1}\widetilde{Z}^0 - h_1 e^{-z_1}\widetilde{Y}^0, \end{aligned}$$

es decir $[\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0]$ es un campo que no depende de z_1. Usando $[\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] = \widetilde{X}^0$ se tiene

$$\sum_{i=2}^4 \left(g_i \frac{\partial h_1}{\partial z_i} - h_i \frac{\partial g_1}{\partial z_i} \right) = 1 + 2g_1 h_1 \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=2}^4 \left(g_i \frac{\partial h_j}{\partial z_i} - h_i \frac{\partial g_j}{\partial z_i} \right) = g_1 h_j - h_1 g_j, \tag{4.5}$$

para $j = 2, 3, 4$. La ecuación (4.4) es imposible porque el orden de los g_js y el de los h_js en cero es mayor o igual a uno.

Caso 5: Si $\widetilde{X}(p) \neq 0$, $\widetilde{Y}(p) \neq 0$ y linealmente independientes.

Como $\widetilde{X}(p) \neq 0$, $[\widetilde{X}^0, \widetilde{Y}^0] = \widetilde{Y}^0$ y $[\widetilde{X}^0, \widetilde{Z}^0] = -\widetilde{Z}^0$ existe un cambio holomorfo de coordenadas en una vecindad de p tal que $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ se transforman en:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \widetilde{Y}^0(z) &= e^{z_1} \sum_{i=1}^4 g_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i}, \ \exists\, i \in \{2, 3, 4\}/g_i(0) \neq 0 \\ \widetilde{Z}^0(z) &= e^{-z_1} \sum_{i=1}^4 h_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i}, \ h_i(0') = 0 \ \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Usando $[\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] = \widetilde{X}^0$ se tiene

$$\sum_{i=2}^{4} \left(g_i \frac{\partial h_1}{\partial z_i} - h_i \frac{\partial g_1}{\partial z_i} \right) = 1 + 2g_1 h_1 \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=2}^{4} \left(g_i \frac{\partial h_j}{\partial z_i} - h_i \frac{\partial g_j}{\partial z_i} \right) = g_1 h_j + h_1 g_j, \tag{4.7}$$

para $j = 2, 3, 4$.

Otro cambio de coordenadas posible consiste en aplicar el Teorema de Flujo Tubular a $\widetilde{Y}$, obteniendo $\widetilde{Y}^0 = \frac{\partial}{\partial z_1}$. A partir de la relación $[\widetilde{X}^0, \widetilde{Y}^0] = \widetilde{Y}^0$, se deriva que

$$\widetilde{X}^0 = (-z_1 + a_1(z')) \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4} a_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i},$$

donde $a_i(0) \neq 0$ para algún $i = 2, 3, 4$.

Sea $\widetilde{Z}^0(z) = \sum_{i=1}^{4} b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ y, utilizando la relación $[\widetilde{Y}^0, \widetilde{Z}^0] = \widetilde{X}^0$, se obtiene:

$$-z_1 + a_1(z') = \frac{\partial b_1}{\partial z_1}, \ a_i(z') = \frac{\partial b_i}{\partial z_1}, \forall i = 2, 3, 4$$

Resolviendo se encuentra:

$$\begin{aligned} b_1(z) &= -\frac{z_1^2}{2} + a_1(z') z_1 + \widetilde{b}_1(z') \\ b_i(z) &= a_i(z') z_1 + \widetilde{b}_i(z'), \ \forall \ i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Finalmente al aplicar $[\widetilde{X}^0, \widetilde{Z}^0] = -\widetilde{Z}^0$, se obtiene:

$$-2\widetilde{b}_1 - a_1^2 = \sum_{i=2}^{4} \left(a_i(z') \frac{\partial \widetilde{b}_1}{\partial z_i}(z') - \widetilde{b}_i(z') \frac{\partial a_1}{\partial z_i}(z') \right) \tag{4.8}$$

$$-\widetilde{b}_j - a_1 a_j = \sum_{i=2}^{4} \left(a_i(z') \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_i}(z') - \widetilde{b}_i(z') \frac{\partial a_j}{\partial z_i}(z') \right) \tag{4.9}$$

Sustituyendo $z = (z_1, 0')$ en las ecuaciones (4.8) y (4.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} -a_1^2(0') &= \textstyle\sum_{i=2}^{4} a_i(0') \frac{\partial \widetilde{b}_1}{\partial z_i}(0') \\ -a_1(0') a_j(0') &= \textstyle\sum_{i=2}^{4} a_i(0') \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_i}(0'), \end{aligned}$$

para todo $j = 2, 3, 4$. Si $a_1(0') = 0$, entonces

$$0 = \sum_{i=2}^{4} a_i(0') \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_i}(0'),$$

para todo $j = 1, 2, 3, 4$.

Como para $j = 2, 3, 4$, existe $a_j(0') \neq 0$, supongamos que $a_2(0') \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_2}(0') = -\frac{a_3(0')}{a_2(0')} \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_3}(0') - \frac{a_4(0')}{a_2(0')} \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_4}(0') \quad \forall \, j = 1, 2, 3, 4.$$

Dado que a_2 es continua, existe una vecindad de $0'$ en la cual $a_2(z') \neq 0$, y se cumple que

$$\frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_2}(z') = -\frac{a_3(z')}{a_2(z')} \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_3}(z') - \frac{a_4(z')}{a_2(z')} \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_4}(z') \quad \forall \, j = 1, 2, 3, 4.$$

Esto equivale a que

$$0 = \sum_{i=2}^{4} a_i(z') \frac{\partial \widetilde{b}_j}{\partial z_i}(z') \quad \forall \, j = 1, 2, 3, 4. \tag{4.10}$$

Luego, sustituyendo (4.10) en las ecuaciones (4.8) y (4.9), se obtiene:

$$2\widetilde{b}_1(z') - a_1^2(z') = \sum_{i=2}^{4} \widetilde{b}_i(z')\frac{\partial a_1}{\partial z_i}(z') \tag{4.11}$$

$$\widetilde{b}_j(z') - a_1(z')a_j(z') = \sum_{i=2}^{4} \widetilde{b}_i(z')\frac{\partial a_j}{\partial z_i}(z'), \tag{4.12}$$

para todo $j = 2, 3, 4$. □

Observación 4.1. *Las formas normales de los campos que aparecen en la singularidad de tipo II pueden ser extendidos en el espacio proyectivo ponderado siempre que los campo $\widetilde{Y}^0$ y $\widetilde{Z}^0$ sean campos polinomiales. El estudio de campos cuasi-homogeneo y su extensión en un espacio ponderado puede encontrarse en [14], [15] y [16].*

5. Conjunto singular a partir de las formas normales. En esta sección estudiaremos la codimensión del conjunto singular de una acción holomorfa $SL(2,\mathbb{C})$ sobre M. Además, añadiendo alguna condición sobre los λ's dados en el teorema (4.1) podemos mejorar las formas normales.

Teorema 5.1. *Sea $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \times M \to M$ como en el teorema 4.1. Si p es de tipo I, III o VI, entonces existe una curva analítica $\gamma_p : D \to \mathbb{C}^4$, donde $D \subset \mathbb{C}$ es un disco abierto que contiene al origen de coordenadas tal que $\gamma_p(D) \subset Sing(\varphi)$. Siendo γ_p la curva integral del campo Z que pasa por p en el tipo I, y γ_p es la curva integral del campo Y que pasa por p para el reto de los casos.*

Demostración: **Caso 1**: Si p es de tipo I.

Dado $z \in \mathbb{C}^4$ cerca de cero tal que $\widetilde{X}^0(z) \wedge \widetilde{Y}^0(z) \wedge \widetilde{Z}^0(z) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \left((z_1+k)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4}\lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) \wedge \left((-\frac{z_1^2}{2} - kz_1 + \widetilde{b}_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{j=2}^{4}(-\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'))\frac{\partial}{\partial z_j}\right) \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} \\
&= \left((z_1+k)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4}\lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) \wedge \sum_{j=2}^{4}(-\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'))\frac{\partial}{\partial z_j} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} \\
&= \left(\sum_{i=2}^{4}\lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) \wedge \sum_{j=2}^{4}(-\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'))\frac{\partial}{\partial z_j} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} \\
&= \left(\lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \lambda_3 z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} + \lambda_4 z_4 \frac{\partial}{\partial z_4}\right) \wedge \\
&\quad \left((-\lambda_2 z_1 z_2 + \widetilde{b}_2(z'))\frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} + (-\lambda_3 z_1 z_3 + \widetilde{b}_3(z'))\frac{\partial}{\partial z_3} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} - \lambda_4 z_1 z_4 + \widetilde{b}_4(z'))\frac{\partial}{\partial z_4} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1}\right) \\
&= (\lambda_2 z_2 \widetilde{b}_3(z') - \lambda_3 z_3 \widetilde{b}_2(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_3} \\
&+ (\lambda_2 z_2 \widetilde{b}_4(z') - \lambda_4 z_4 \widetilde{b}_2(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_4} \\
&+ (\lambda_3 z_3 \widetilde{b}_4(z') - \lambda_4 z_4 \widetilde{b}_3(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_3} \wedge \frac{\partial}{\partial z_4}.
\end{aligned}$$

Entonces $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z') \in Sing(\varphi)$ si:

$$\begin{cases}
\lambda_2 z_2 \widetilde{b}_3(z') - \lambda_3 z_3 \widetilde{b}_2(z') &= 0 \\
\lambda_2 z_2 \widetilde{b}_4(z') - \lambda_4 z_4 \widetilde{b}_2(z') &= 0 \\
\lambda_3 z_3 \widetilde{b}_4(z') - \lambda_4 z_4 \widetilde{b}_3(z') &= 0
\end{cases}$$

Observamos que una parte del eje z_1 está contenido en el conjunto singular de la acción generada por $\widetilde{X}^0$, $\widetilde{Y}^0$ y $\widetilde{Z}^0$. Además, una de las ecuaciones anteriores se deducen de las otras. Así el conjunto singular que pasa por p tiene codimensión mayor o igual a dos.

Caso 2: Si p es de tipo III.

dado $z \in \mathbb{C}^4$ cerca de cero tal que $\widetilde{X}^0(z) \wedge \widetilde{Y}^0(z) \wedge \widetilde{Z}^0(z) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \left[-z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4}\lambda_i z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \left[(-\frac{z_1^2}{2} + \widetilde{c}_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4}(\lambda_i z_1 z_i + \widetilde{c}_i(z'))\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \\
&= \left[\sum_{i=2}^{4}\lambda_i z_i\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1}\right] \wedge \left[\sum_{i=2}^{4}(\lambda_i z_1 z_i + \widetilde{c}_i(z'))\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \\
&= [\lambda_3 z_3\widetilde{c}_2 - \lambda_2 z_2\widetilde{c}_3]\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_3} + [\lambda_4 z_4\widetilde{c}_3 - \lambda_3 z_3\widetilde{c}_4]\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_3} \wedge \frac{\partial}{\partial z_4} \\
&+ [\lambda_4 z_4\widetilde{c}_2 - \lambda_2 z_2\widetilde{c}_4]\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_4}
\end{aligned}$$

Entonces $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z') \in Sing(\varphi)$ si:

$$\begin{cases}
\lambda_3 z_3\widetilde{c}_2(z') - \lambda_2 z_2\widetilde{c}_3(z') &= 0 \\
\lambda_4 z_4\widetilde{c}_3(z') - \lambda_3 z_3\widetilde{c}_4(z') &= 0 \\
\lambda_4 z_4\widetilde{c}_2(z') - \lambda_2 z_2\widetilde{c}_4(z') &= 0
\end{cases}$$

Observamos que este sistema de ecuaciones es la misma que en el caso 1, entonces tiene misma conclusión.

Caso 3: Si p es de tipo VI.
Dado $z \in \mathbb{C}^4$ cerca de cero tal que $\widetilde{X}^0(z) \wedge \widetilde{Y}^0(z) \wedge \widetilde{Z}^0(z) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \left[(-z_1 + a_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4}a_i(z')\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \left[\left(-\frac{z_1^2}{2} + a_1(z')z_1 + \widetilde{b}_1(z')\right)\frac{\partial}{\partial z_1} + \right. \\
&\left. \sum_{i=2}^{4}(a_i(z')z_1 + \widetilde{b}_i(z'))\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \\
&= \left[\sum_{i=2}^{4}a_i(z')\frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_1}\right] \wedge \left[\sum_{i=2}^{4}(a_i(z')z_1 + \widetilde{b}_i(z'))\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \\
&= (a_3(z')\widetilde{b}_2(z') - a_2(z')\widetilde{b}_3(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_3} + (a_4(z')\widetilde{b}_2(z') - a_2(z')\widetilde{b}_4(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2} \wedge \frac{\partial}{\partial z_4} \\
&+ (a_4(z')\widetilde{b}_3(z') - a_3(z')\widetilde{b}_4(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_3} \wedge \frac{\partial}{\partial z_4}
\end{aligned}$$

Entonces $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z') \in Sing(\varphi)$ si:

$$\begin{cases}
a_3(z')\widetilde{b}_2(z') - a_2(z')\widetilde{b}_3(z') &= 0 \\
a_4(z')\widetilde{b}_2(z') - a_2(z')\widetilde{b}_4(z') &= 0 \\
a_4(z')\widetilde{b}_3(z') - a_3(z')\widetilde{b}_4(z') &= 0
\end{cases}$$

Así vemos parte del eje z_1 se encuentra contenido en el conjunto singular.

Teorema 5.2. *Sea $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \times M \to M$ como en el teorema 4.1. Sea p una singularidad de tipo I y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ autovalores de $DX(p)$. Si para cada $j = 1, 2, 3, 4$, $1 + \lambda_j \neq \lambda_2 j_2 + \lambda_3 j_3 + \lambda_4 j_4$ para todo índice $J = (j_2, j_3, j_4)$ con $|J| \geq 2$, entonces*

$$I : \begin{cases}
\widetilde{X}^0(z) &= (z_1 + k)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^{4}\lambda_i z_i\frac{\partial}{\partial z_i} \\
\widetilde{Y}^0(z) &= (-\frac{z_1^2}{2} - kz_1 + \widetilde{b}_1(z'))\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{j=2}^{4}(-\lambda_j z_1 z_j + \widetilde{b}_j(z'))\frac{\partial}{\partial z_j} \\
\widetilde{Z}^0(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1},
\end{cases}$$

donde:
$\widetilde{b}_1(z') = -\frac{k^2}{2} + c_{100}^1 z_2 + c_{010}^1 z_3 + c_{001}^1 z_4$ *tal que*

$$(2 - \lambda_2)c_{100}^1 = (2 - \lambda_3)c_{010}^1 = (2 - \lambda_4)c_{001}^1 = 0,$$

$\widetilde{b}_2(z') = c_{000}^2 - \lambda_2 k z_2 + c_{010}^2 z_3 + c_{001}^2 z_4$ *tal que*

$$(1 + \lambda_2)c_{000}^2 = (1 + \lambda_2 - \lambda_3)c_{010}^2 = (1 + \lambda_2 - \lambda_4)c_{001}^2 = 0,$$

$\widetilde{b}_3(z') = c^3_{000} + c^3_{100}z_2 - \lambda_3 k z_3 + c^3_{001}z_4$ *tal que*

$$(1+\lambda_3)c^3_{000} = (1+\lambda_3-\lambda_2)c^3_{100} = (1+\lambda_3-\lambda_4)c^3_{001} = 0,$$

$\widetilde{b}_4(z') = c^4_{000} + c^4_{100}z_2 + c^4_{010}z_3 - \lambda_4 k z_4$ *tal que*

$$(1+\lambda_4)c^4_{000} = (1+\lambda_4-\lambda_2)c^4_{100} = (1+\lambda_4-\lambda_3)c^4_{010} = 0$$

Demostración: Los autovalores de $DX(p)$ son lo mismo que los autovalores de $D\widetilde{X}^0(0)$ que son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{Z}/2$. Sea $\widetilde{b}_j(z') = \sum_{i_2+i_3+i_4 \geq 0} c^j_{i_2,i_3,i_4} z_2^{i_2} z_3^{i_3} z_4^{i_4}$ su desarollo de Taylor al rededor del origen de coordenadas.

Caso 1:

Para $j = 1$. Usando la ecuación (4.1)

$$2\sum_{|I|\geq 0} c^1_I (z')^I = -k^2 + \sum_{l=2}^{4} \lambda_l i_l \sum_{|I|\geq 1} c^j_I (z')^I = -k^2 + \sum_{|I|\geq 1} c^1_I \left(\sum_{l=2}^{4}\lambda_l i_l\right)(z')^I$$

Entonces para $I = (i_2, i_3, i_4)$ con $|I| \geq 2$, tenemos:

$$\left(2 - \sum_{l=2}^{4} \lambda_l i_l\right) c^1_I = 0$$

Por la no resonancia $2 \neq \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 + \lambda_4 i_4$, entonces $C^1_I = 0$.

Para $j = 2, 3, 4$, sustituimos en la ecuación (4.2):

$$(1+\lambda_j)\sum_{|I|\geq 0} c^j_I (z')^I = -\lambda_j z_j k + \sum_{l=2}^{4}\lambda_l i_l \sum_{|I|\geq 1} c^j_I (z')^I = -\lambda_j z_j k + \sum_{|I|\geq 1} c^j_I \left(\sum_{l=2}^{4}\lambda_l i_l\right)(z')^I$$

Entonces para $I = (i_2, i_3, i_4)$ con $|I| \geq 2$, tenemos:

$$(1+\lambda_2)c^2_I = \sum_{l=2}^{4}\lambda_l i_l c^2_I \Rightarrow \left(1 + \lambda_2 - \sum_{l=2}^{4}\lambda_l i_l\right) c^2_I = 0$$

Nuevamente por la no resonancia

$$1 + \lambda_2 \neq \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 + \lambda_3 i_4,$$

entonces $c^j_I = 0$.

Caso 2:

Para $j = 1$:

$$\begin{aligned} 2c^1_{000} &= -k^2 \Rightarrow c^1_{000} = -k^2/2 \\ 2c^1_{100} &= c^1_{100}\lambda_2 \Rightarrow (2-\lambda_2)c^1_{100} = 0 \\ 2c^1_{010} &= c^1_{010}\lambda_3 \Rightarrow (2-\lambda_3)c^1_{010} = 0 \\ 2c^1_{001} &= c^1_{001}\lambda_4 \Rightarrow (2-\lambda_4)c^1_{001} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{b}_1(z') = -\frac{k^2}{2} + c^1_{100}z_2 + c^1_{010}z_3 + c^1_{001}z_4$ tal que

$$(2-\lambda_2)c^1_{100} = (2-\lambda_3)c^1_{010} = (2-\lambda_4)c^1_{001} = 0.$$

Para $j = 2$:

$$\begin{aligned} (1+\lambda_2)c^2_{000} &= 0 \\ (1+\lambda_2)c^2_{100} &= -\lambda_2 k + \lambda_2 c^2_{100} \Rightarrow c^2_{100} = -\lambda_2 k \\ (1+\lambda_2)c^2_{010} &= \lambda_3 c^2_{010} \Rightarrow (1+\lambda_2-\lambda_3)c^2_{010} = 0 \\ (1+\lambda_2)c^2_{001} &= \lambda_4 c^2_{001} \Rightarrow (1+\lambda_2-\lambda_4)c^2_{001} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{b}_2(z') = c^2_{000} - \lambda_2 k z_2 + c^2_{010}z_3 + c^2_{001}z_4 \tag{5.1}$$

tal que

$$(1+\lambda_2)c^2_{000} = (1+\lambda_2-\lambda_3)c^2_{010} = (1+\lambda_2-\lambda_4)c^2_{001} = 0.$$

Para $j=3$:

$$\begin{array}{rcl}(1+\lambda_3)c^3_{000} & = & 0 \\ (1+\lambda_3)c^3_{100} & = & \lambda_2 c^3_{100} \Rightarrow (1+\lambda_3-\lambda_2)c^3_{100} \\ (1+\lambda_3)c^3_{010} & = & -\lambda_3 k + \lambda_3 c^3_{010} \Rightarrow c^3_{010} = -\lambda_3 k \\ (1+\lambda_3)c^3_{001} & = & \lambda_4 c^3_{001} \Rightarrow (1+\lambda_3-\lambda_4)c^3_{001} = 0\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{b}_3(z') = c^3_{000} + c^3_{100}z_2 - \lambda_3 k z_3 + c^3_{001}z_4,$$

tal que

$$(1+\lambda_3)c^3_{000} = (1+\lambda_3-\lambda_2)c^3_{100} = (1+\lambda_3-\lambda_4)c^3_{001} = 0.$$

Para $j=4$:

$$\begin{array}{rcl}(1+\lambda_4)c^4_{000} & = & 0 \\ (1+\lambda_4)c^4_{100} & = & \lambda_2 c^4_{100} \Rightarrow (1+\lambda_4-\lambda_2)c^4_{100} \\ (1+\lambda_4)c^4_{010} & = & \lambda_3 c^4_{010} \Rightarrow (1+\lambda_4-\lambda_3)c^4_{010} \\ (1+\lambda_4)c^4_{001} & = & -\lambda_4 k + c^4_{001}\lambda_4 \Rightarrow c^4_{001} = -\lambda_4 k.\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{b}_4(z') = c^4_{000} + c^4_{100}z_2 + c^4_{010}z_3 - \lambda_4 k z_4,$$

tal que,

$$(1+\lambda_4)c^4_{000} = (1+\lambda_4-\lambda_2)c^4_{100} = (1+\lambda_4-\lambda_3)c^4_{010} = 0.$$

□

Authorcontributions. Mi contribución en este trabajo consiste en determinar, alrededor de cada punto singular de una acción holomorfa del grupo lineal especial sobre una variedad compleja, las formas normales de los tres campos vectoriales asociados a dicha acción.

Funding. Esta investigación no recibió financiación externa.

Conflicts of interest. Declaro que no hay ningún conflicto de interés con otros autores.

ORCID and License

Benito Leonardo Ostos Cordero https://orcid.org/0000-0001-5931-3595

Referencias

[1] Cairns G, Ghys E. The local linearization problem for amoth SL(n)-actions. L'Enseignenemet Mathematicque. 1997;43:133-71.
[2] Camacho C, Neto L. A geometrix theory of foliations. Boston INC: Birkhäuser; 1985.
[3] Viana M, Espinar J. Differential equations, a dynamical systems approach to theory and practice. Commitee: American Mathematical Society; 2020.
[4] Bröcker T, Dieck T. Representations of compact Lie groups. Graduate Texts in Mathematics 98. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 1985.
[5] Akhiezer D. Lie group actions in complex analysis; aspects of mathematics. 37. Aspects of Mathematics; 1994.
[6] Duistermaat J, Kolk J. Lie groups. Universitext. Springer; 2004.
[7] Rampazzo F, Sussmann H. Commutators of flow maps of nonsmooth vector fields. J Differential Equations. 2006;232:134-75.
[8] Reducci A, Zizza M. Geometric interpretation of the vanishing Lie Bracket for two-dimensional rough vector fields. arXiv:240602340. 2024.
[9] Columbo M, Tione R. On the commutativity of flows of rough vector fileds. Journal des Mathematiques pures et appliqyues. 2021;159:294-312.
[10] Posilicano A. A group structure on the space of time-dependent vector fields. Springer Verlag. 1988;105:287-93.
[11] Blade S, Casas F, Oteo J, Ros J. The Magnus expansion and some of its aplications. Elsevier, Physics Report. 2008;470:151-238.

[12] Coutinho H. Linearizaçao de ações do gruupo afim [Tesis Doctoral]. Rio de Janeiro; 2008.
[13] Ostos B. Estudio local y global, tipos de órbitas y existencia de separatrices para una acción holomorfa [Tesis Doctoral]. Lima: Universidad Nacional de ingeniería; 2014.
[14] Chiba H. Kovalevskaya exponents and the space of initial conditions of a quasi homogeneous vector field. J Diferential Equations. 2015;259:7681-716.
[15] Brochero F, Corrêa Jr M, Rodríguez A. Poincaré problem for weighted proyective foliations. Bulletin of the Brazilia Mathematical Society. 2017;48:219-35.
[16] Corrêa Jr M, Soares M. A note on Poincaré's problem for quasi-homogeneous foliations. American Mathematical Society. 2022;140:3145-50.