



## Numerical implementation of a stochastic differential equation of motion Implementación numérica de una ecuación diferencial estocástica de movimiento

Saúl Moisés Torres Murga 

Received, Aug. 05, 2024;

Accepted, Nov. 04, 2024;

Published, Dec. 27, 2024



### How to cite this article:

Torres S. Numerical implementation of a stochastic differential equation of motion. *Selecciones Matemáticas*. 2024;11(2):271–284. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.02.06>

### Abstract

*Using the ordinary differential equation of motion it is possible to determine the position in time of a mass that moves because it is disturbed by some deterministic action. For this work it was proposed to model a mass supporting a random disturbance. To do this, it was required to model Brownian motion since it efficiently represents the randomness of the phenomenon. Using the fundamentals of Functional Analysis, Probability Theory and Stochastic Processes, a stochastic differential equation of motion was obtained. In order to extract solutions from this equation, the Euler-Maruyama method was used, which was implemented computationally. The results obtained showed that the use of a non-deterministic version to model movement generates satisfactory results and of interest to science.*

**Keywords** . Stochastic Processes, probability, Brownian motion, stochastic differential equation, Euler-Maruyama method.

### Resumen

*Mediante la ecuación diferencial ordinaria de movimiento es posible determinar la posición en el tiempo de una masa que se desplaza debido a que es perturbada por alguna acción determinística. Para este trabajo se propuso modelar a una masa soportando una perturbación aleatoria. Para ello, se requirió modelar al movimiento browniano ya que éste representa eficientemente la aleatoriedad del fenómeno. Utilizando los fundamentos del Análisis Funcional, la Teoría de la Probabilidad y los Procesos Estocásticos, se obtuvo una ecuación diferencial estocástica de movimiento. Con objeto de extraer soluciones de esta ecuación, se usó el método de Euler-Maruyama el cual se implementó computacionalmente. Los resultados obtenidos mostraron que el uso de una versión no determinística para modelar el movimiento genera resultados satisfactorios y de interés para la ciencia.*

**Palabras clave.** Procesos estocásticos, probabilidad, movimiento Browniano, ecuación diferencial estocástica, método de Euler-Maruyama.

\*Universidad Nacional Agraria La Molina, Perú. Correspondence author (storres@lamolina.edu.pe).

**1. Introducción.** En dinámica, a una masa puntual conectada a una base (el apoyo) mediante una estructura de soporte de peso despreciable se le conoce como un sistema de un grado de libertad (1 GDL).

El modelo que se usa para representar a los sistemas con un grado de libertad consiste en una masa conectada a un resorte de rigidez  $k$  y a un dispositivo de amortiguamiento con constante  $c$  (Fig.1.1).

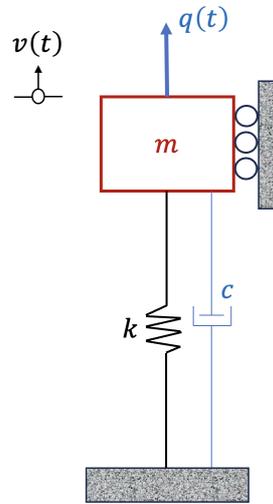


Figura 1.1: Modelo de un sistema de un grado de libertad para una carga dinámica vertical  $q(t)$ : una masa  $m$  con rodillos sobre una superficie lisa vertical conectada a un resorte de rigidez  $k$  y a un dispositivo de amortiguamiento con constante  $c$ .

Experimentalmente se observa que, si la masa  $m$  sufre un desplazamiento  $v$ , se producirá una fuerza interna  $f_S$  en el resorte, la cual, **en el rango elástico**, cumple la relación lineal:

$$f_S = kv. \quad (1.1)$$

De igual manera, existe una relación lineal entre la velocidad  $\dot{v}$  de la masa  $m$  y la fuerza interna del dispositivo de amortiguamiento  $f_D$  considerando la constante  $c$ :

$$f_D = c\dot{v}. \quad (1.2)$$

**1.1. Formación de la ecuación diferencial.** La segunda ley de Newton del movimiento indica que:

$$\sum_i^n \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (1.3)$$

Para un modelo de un sistema de un grado de libertad con carga vertical, en la dirección positiva del eje  $v$  se considera una fuerza externa  $q(t)$  y en la dirección negativa las fuerzas  $f_S$  y  $f_D$ . Entonces, debido a la ecuación (1.3):

$$q(t) - f_S - f_D = m\ddot{v},$$

la cual escribiremos como

$$m\ddot{v} + f_S + f_D = q(t). \quad (1.4)$$

Finalmente, por (1.1) y (1.2) en (1.4) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de movimiento:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = q(t), \quad (1.5)$$

donde

$$v = v(t) = \text{desplazamiento de } m,$$

$$\dot{v} = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \text{velocidad de } m,$$

$$\ddot{v} = \ddot{v}(t) = \frac{d^2v}{dt^2} = \text{aceleración de } m.$$

A  $v(t)$  suele llamársele “**la respuesta del sistema**” debido a una carga dinámica de entrada  $q(t)$ . Para algunas cargas  $q(t)$  que toman la forma de funciones constantes, lineales, sinusoidales, etc. se pueden encontrar soluciones exactas de la ecuación (1.5). Para cargas más complejas, existen diversos métodos numéricos (ver [1]).

**1.2. EDO de movimiento producido por un desplazamiento vertical del apoyo.** Supóngase ahora que en lugar de una carga dinámica  $q(t)$  aplicada directamente a la masa  $m$ , se presenta un desplazamiento vertical (determinístico)  $z = z(t)$  en la base del soporte (el apoyo). El desplazamiento total de la masa será  $v = y + z$  (Fig. 1.2), entonces, por la segunda ley de Newton del movimiento:

$$-f_S - f_D = m(\ddot{y} + \ddot{z}) \Rightarrow m\ddot{y} + f_S + f_D = -m\ddot{z}.$$

Como  $f_S$  y  $f_D$  dependen de  $y$  y  $\dot{y}$ , respectivamente, se tiene que

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{z}. \tag{1.6}$$

Esta ecuación muestra que un sistema con desplazamiento  $z = z(t)$  en la base es equivalente a uno con la base fija pero con una masa perturbada por una carga  $q(t) = -m\ddot{z}(t)$  (Fig. 1.3). Por lo tanto, la ecuación diferencial ordinaria de movimiento (1.5) también aplica para el caso de sistemas con desplazamiento en la base.

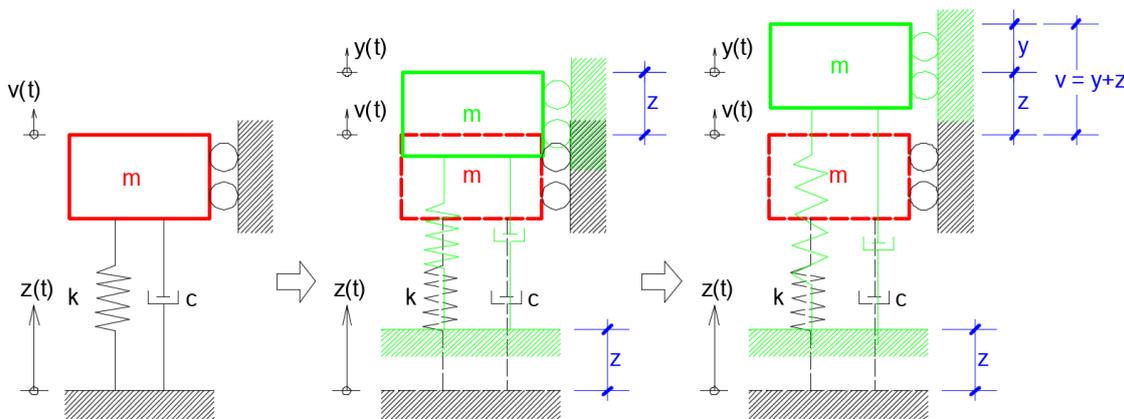


Figura 1.2: Sistema de un grado de libertad perturbado por un desplazamiento vertical  $z = z(t)$  en su base.

Dividiendo la ecuación (1.6) entre  $m$  la ecuación adquiere la forma:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{z}(t), \tag{1.7}$$

donde  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

La ecuación (1.7) puede ser llamada ecuación diferencial ordinaria de movimiento debido al desplazamiento vertical  $z = z(t)$  de la base.

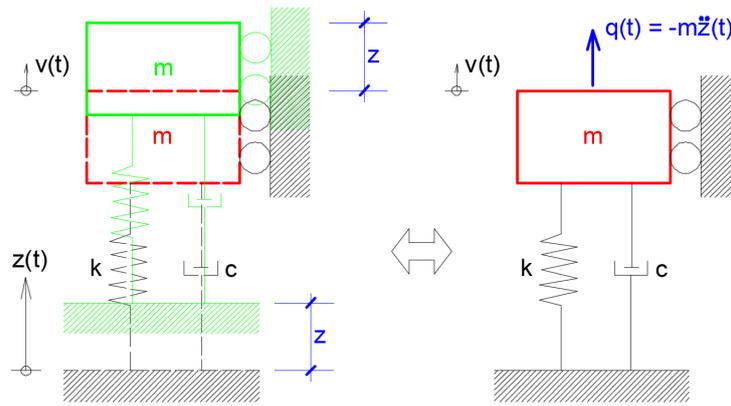


Figura 1.3: El sistema con la base desplazada  $z(t)$  es equivalente a otro con la base fija pero con una masa  $m$  perturbada por una carga  $q(t) = -m\ddot{z}(t)$ .

Este modelo es absolutamente determinístico. Es decir, la carga sobre la masa está controlada y se la puede conocer plenamente a lo largo del tiempo. Y la respuesta del sistema también. La ecuación diferencial nos permite predecir cuál será la posición de la masa a lo largo del tiempo.

Siendo más realistas, tanto la carga como la respuesta están envueltas en procesos aleatorios. Por ello, algunos investigadores (véase por ejemplo, [2]) propusieron refinar el modelo del movimiento incorporando un comportamiento aleatorio.

En este trabajo, se presenta los resultados de este tipo de investigaciones sobre modelos físicos que no solo pueden ser usados para estudiar al movimiento, sino también a otros fenómenos de interés para la ciencia ([3]).

## 2. Modelo matemático. En la ecuación (1.7):

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{z}(t),$$

si la aceleración en la base  $\ddot{z}(t)$  es vertical y es producida por un evento aleatorio, Bolotin [2] propone representarla de manera no determinística como:

$$\ddot{z}(t) = I(t)\xi_t,$$

donde  $I(t)$  es una función determinística y  $\xi_t$  es un proceso aleatorio (ruido).

Para el componente determinístico  $I(t)$ , se puede usar la siguiente función (propuesta por Shinozuka y Sato [4]):

$$I(t) = \frac{1}{\gamma}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}),$$

donde  $\gamma$  puede elegirse usando

$$\gamma = \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} - \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} \right].$$

De esta manera, el modelo del movimiento con componente estocástica será la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \omega_n^2 y = -I(t)\xi_t, \quad (2.1)$$

donde

$$I(t) = \frac{1}{\gamma}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

La ecuación (2.1) modela el desplazamiento vertical de un sistema de un grado de libertad debido a desplazamientos verticales de la base de soporte generados por un evento aleatorio.

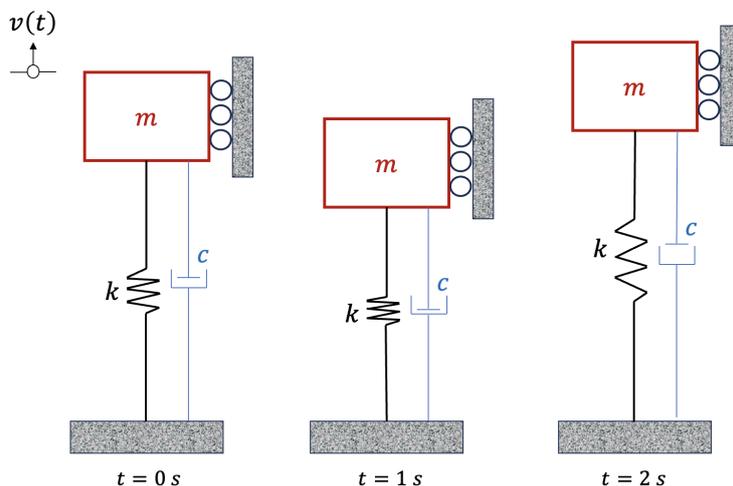


Figura 2.1: Modelo físico para el movimiento en un grado de libertad vertical amortiguado. La ecuación (2.1) es el modelo matemático para la determinación en el tiempo de su desplazamiento vertical ante cargas aleatorias en la base.

**3. Movimiento browniano.** Antes de dar una definición matemática del movimiento browniano, se presentarán algunas definiciones importantes.

**Definición 3.1 (Proceso estocástico).** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $X_t$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y parametrizadas por  $t \in T$  donde  $T \subset \mathbb{R}^n$  para  $n \geq 1$ .*

- Si  $T = \{1, 2, \dots\}$  se dice que  $X_t$  es un proceso estocástico en tiempo discreto (sucesión de variables aleatorias).
- Si  $T = [0, \infty)$  se dice que  $X_t$  es un proceso estocástico en tiempo continuo.

En un proceso estocástico  $X_t$ , para cada  $t \in T$  fijo se tiene a una variable aleatoria:

$$\omega \longrightarrow X_t(\omega); \quad \omega \in \Omega,$$

y si se fija  $\omega \in \Omega$  se tiene a la función

$$t \longrightarrow X_t(\omega); \quad t \in T,$$

llamada una “ruta”, “trayectoria”, “camino muestral” o “realización” de  $X_t$ .

La notación alternativa  $X(t, \omega)$  para un proceso estocástico sugiere que éste puede ser considerado como una función  $X : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Si se fijase algún  $t \in T$  la función  $X(t, \cdot)$  dada por  $\omega \mapsto X(t, \omega)$  es una variable aleatoria conocida como el valor del proceso  $X$  en el instante  $t$ . Si se fijase algún  $\omega \in \Omega$  la función  $X(\cdot, \omega)$  dada por  $t \mapsto X(t, \omega)$  es medible y representa a la realización de  $X$  correspondiente a  $\omega$ .

**Definición 3.2 (Filtración).** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una filtración se define como una colección de sub  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para  $0 \leq s \leq t$ . Al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  se le conoce como espacio de probabilidad filtrado.*

**Definición 3.3 (Proceso adaptado).** *Sea  $X_t$  un proceso estocástico. Se dice que  $X_t$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  o simplemente es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado si  $X_t$  es  $\{\mathcal{F}_t\}$ -medible para cada  $t \geq 0$  o, dicho de otra forma, si  $X_t$  es una variable aleatoria con respecto a la sub  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  para cada  $t \geq 0$ .*

**Definición 3.4 (Movimiento Browniano).** *Un proceso estocástico  $B_t : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es llamado proceso de Wiener o movimiento Browniano estándar en  $\mathbb{R}$  con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si posee las siguientes propiedades*

- (1)  $B_0 = 0$  c.s.
- (2) Si  $t > s \geq 0$ , entonces  $B_t - B_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ .
- (3) Si  $t > s \geq 0$ , entonces  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ .
- (4) Las realizaciones  $B(\cdot, \omega)$  son continuas c.s., es decir,

$$P(\{\omega \in \Omega; B(\cdot, \omega) \text{ es continua} \}) = 1.$$

**4. Ecuaciones diferenciales estocásticas.** Con objeto de presentar a las ecuaciones diferenciales estocásticas, Øksendal [5] se refiere al modelo de crecimiento poblacional simple el cual es modelado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0 \quad (\text{constante}),$$

donde  $N(t)$  es el tamaño de la población al tiempo  $t$ , y  $a(t)$  es la tasa relativa de crecimiento al tiempo  $t$ .

Considérese ahora modificar a  $a(t)$  incorporándole un término que refleje efectos aleatorios que se pueden producir en el fenómeno. De esta forma, se tiene que

$$a(t) = r(t) + \text{ruido},$$

donde  $r(t)$  es determinística. Luego, la ecuación diferencial del crecimiento poblacional adopta la siguiente forma no determinística:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (r(t) + \text{ruido})N(t), \\ \frac{dN}{dt} &= r(t)N(t) + N(t) \cdot \text{ruido}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Generalizando la ecuación (4.1) al hacer  $N = X$ ,  $r(t)N(t) = b(t, X_t)$  y  $N(t) \cdot \text{“ruido”} = \sigma(t, X_t) \cdot \text{“ruido”}$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial no determinística:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{ruido}.$$

El modelo matemático que se usará para el ruido será un proceso estocástico  $W_t$  que cumpla con las siguientes características:

- (i)  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$  y  $W_{t_2}$  son independientes.
- (ii)  $W_t$  es estacionario, es decir, la distribución de  $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$  no depende de  $t$ .
- (iii)  $E[W_t] = 0$  para todo  $t$ .

Luego:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t. \quad (4.2)$$

Si se hace  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$  se podrá considerar una versión discreta de (4.2):

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k\Delta t_k, \quad (4.3)$$

donde

$$X_j = X(t_j), \quad W_k = W_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Se hará  $W_k\Delta t_k = \Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$  donde  $\{V_t\}_{t \geq 0}$  es algún proceso estocástico adecuado. Por (i), (ii) y (iii) para  $W_t$  se colige que  $V_t$  debería tener incrementos independientes estacionarios de media cero. En [5], y citando a Knight (1981) y Kallenberg (2002), se indica que el único proceso estocástico con rutas continuas y que cumple con esta condición es el movimiento browniano  $B_t$  por lo que  $V_t = B_t$ . Entonces la ecuación (4.3) adopta la siguiente forma discreta:

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j. \quad (4.4)$$

Considerando que los límites del lado derecho de (4.4) existen se puede, aplicando la notación usual de integración, obtener la siguiente ecuación:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad (4.5)$$

o en notación diferencial

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad (4.6)$$

a la cual podemos denominar como **ecuación diferencial estocástica (EDE)**.

Se debe definir la existencia del límite que conlleva a la integral  $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ . Para ello, pueden plantearse diversas propuestas [6], pero las más usadas son las de Itô y la de Stratonovich. En esta investigación se usará la interpretación de Itô.

**Definición 4.1 (Funciones Itô-integrables).** Sea  $\nu = \nu(S, T)$  la clase de funciones  $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$ -medible donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel.
- (ii)  $f(t, \omega)$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado.
- (iii)  $E \left[ \int_T^S f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$ .

**Definición 4.2 (Funciones elementales).** Una función  $\phi \in \nu$  es llamada elemental si tiene la forma

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega)1_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

donde  $e_j$  es una función  $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible. De esta forma, es razonable definir:

$$\int_S^T \phi(t, \omega)dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega).$$

**Definición 4.3 (La integral de Itô).** Sea  $f \in \nu$ . Entonces, la integral de Itô  $\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega)dB_t(\omega)$  es definida por

$$\int_S^T f(t, \omega)dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega)dB_t(\omega),$$

donde  $\{\phi_n\}$  es una sucesión de funciones elementales tal que

$$E \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**4.1. Propiedades de la integral de Itô.** Sean  $f, g \in \nu(0, T)$ ,  $0 \leq S < U < T$  y  $\alpha$  una constante. Entonces

a)  $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t, \quad \text{c.s.}$

b) La integral de Itô es lineal i.e.

$$\int_S^T (\alpha f + g) dB_t = \alpha \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t, \quad \text{c.s.}$$

c) La integral de Itô tiene media cero, i.e.

$$E \left[ \int_S^T f dB_t \right] = 0.$$

d)  $\int_S^T f dB_t$  es  $\mathcal{F}_T$ -medible.

**Teorema 4.1 (La isometría de Itô).** Para todo  $f \in \nu(S, T)$

$$E \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega)dB_t \right)^2 \right] = E \left[ \int_S^T f^2(t, \omega)dt \right]$$

Para la prueba ver Øksendal [5].

**Definición 4.4 (Proceso de Itô en una dimensión).** Sea  $B_t$  un movimiento Browniano unidimensional en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Un proceso de Itô o integral estocástica es un proceso estocástico  $X_t$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s,$$

o en su notación diferencial

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

donde  $u$  (llamado la “tendencia”, “deriva” o “drift”) es  $\mathcal{H}_t$ -adaptada y es tal que

$$P \left[ \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1,$$

y  $v$  (llamado la “volatilidad” o “coeficiente de difusión”) es tal que

$$P \left[ \int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1,$$

Nótese que un proceso de Itô incluye a una integral de Itô.

El siguiente teorema establece que, cuando a un proceso de Itô se le aplica una función lo suficientemente suave, el proceso resultante sigue siendo un proceso de Itô.

**Teorema 4.2 (La fórmula de Itô en una dimensión).** Sea  $X_t$  un proceso de Itô dado por

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

Sea  $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$  (i.e.  $g$  es dos veces continuamente diferenciable en  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ ). Entonces

$$Y_t = g(t, X_t),$$

es nuevamente un proceso de Itô y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

donde  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  es calculado de acuerdo a las reglas

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

*Demostración:* Un bosquejo de la prueba se encuentra en [5]. □

**Teorema 4.3 (Existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas).** Sea  $T > 0$  y sean  $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funciones medibles satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

1. Condición de acotamiento o crecimiento lineal (para la existencia):

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

para alguna constante  $C$  y

2. Condición de Lipschitz (para la unicidad):

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

para alguna constante  $D$ .

Sea también  $Z$  una variable aleatoria independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$  generada por  $B_s(\cdot)$ ,  $s \geq 0$  y tal que

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

Entonces la EDE

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, X_0 = Z$$

o su versión integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

tiene una única solución  $X_t(\omega)$  la cual cumple con las siguientes dos propiedades:

1.  $X_t$  es adaptada a la filtración  $\mathcal{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $B_s(\cdot)$ ;  $s \leq t$  y

$$2. E \left[ \int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty.$$

*Demostración:* Ver [5] y [7]. □

**5. Solución analítica de una EDE de movimiento.** La solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE) como la presentada en (2.1) es un proceso estocástico. Por ello, para el desarrollo de esta sección se requirió de un estudio riguroso del Análisis Funcional y la Teoría de la Probabilidad (ver [8], [9], [10], [3], [6],[11], [5] y [12]).

Para resolver analíticamente la EDE (2.1) se empezará usando la misma estrategia que se usa en la solución de EDOs de segundo orden. Sean

$$\begin{aligned} y &= Y_1 = Y_1(t, \omega), \\ \dot{y} &= Y_2 = Y_2(t, \omega). \end{aligned}$$

Con estos procesos se conformará el siguiente vector:

$$Y = Y(t, \omega) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(t, \omega) \\ Y_2(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Se aprecia que, como  $Y_1 = y$ , entonces  $dY_1 = \dot{y} = Y_2 dt$ . Análogamente, ya que  $Y_2 = \dot{y}$ , entonces  $dY_2 = \ddot{y} = -I(t)\xi_t dt - \frac{c}{m}Y_2 dt - \omega_n^2 Y_1 dt$ . Luego, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} dY_1 = Y_2 dt, \\ dY_2 = -I(t)\xi_t dt - \frac{c}{m}Y_2 dt - \omega_n^2 Y_1 dt. \end{cases}$$

Según la interpretación de Itô presentada en la sección anterior, se tiene que  $\xi_t dt = dB_t$ . Entonces:

$$\begin{cases} dY_1 = Y_2 dt, \\ dY_2 = -I(t) dB_t - \frac{c}{m}Y_2 dt - \omega_n^2 Y_1 dt. \end{cases}$$

Ordenando matricialmente:

$$d \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ -I(t) \end{pmatrix} dB_t$$

es decir,

$$dY = AY dt + F(t) dB_t \quad (5.1)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\gamma}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \end{pmatrix}.$$

Se observa que la ecuación (5.1) es bidimensional con coeficientes continuos.

Para una matriz  $A$  de  $n \times n$  elementos, se define a la matriz de  $n \times n$  elementos **exponencial de  $A$**  como

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Esta serie converge para toda matriz  $A$ .

Multiplicando (5.1) por  $e^{-At}$ :

$$\begin{aligned} e^{-At} dY &= e^{-At} AY dt + e^{-At} F(t) dB_t, \\ e^{-At} dY - e^{-At} AY dt &= e^{-At} F(t) dB_t. \quad (*) \end{aligned}$$

Por la fórmula de Itô multidimensional aplicada a las funciones de dos coordenadas  $g_1, g_2$

$$g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dado por} \quad g(t, x_1, x_2) = e^{(-At)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$d(e^{(-At)}X(t)) = (-A)e^{(-At)}X(t) dt + e^{(-At)} dX(t).$$

Usando este resultado en (\*):

$$\begin{aligned} d(e^{-At}Y) &= e^{-At}F(t) dB_t, \\ e^{-At}Y - Y(0) &= \int_0^t e^{-As}F(s) dB_s, \\ e^{-At}Y &= Y(0) + \int_0^t e^{-As}F(s) dB_s, \\ Y &= e^{At} \left[ Y(0) + \int_0^t e^{-As}F(s) dB_s \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\gamma}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \end{pmatrix}.$$

La ecuación (5.2) representa la solución analítica de la ecuación de movimiento (2.1) [y, por lo tanto, también de (5.1)] con componente estocástico bajo la propuesta de Bolotin [2]. Es de notar que se trata de una solución que está dependiendo de la integral estocástica multidimensional  $\int_0^t e^{-As}F(s) dB$  la cual a su vez depende de la exponencial de una matriz. Por ello, será conveniente buscar una solución numérica.

**6. Solución numérica de una EDE de movimiento.** La respuesta de la ecuación (5.1) resuelve la EDE de movimiento (2.1).

Kloeden y Platen [3] indican que una de los métodos numéricos más simples para un proceso de Itô es la aproximación de Euler (llamada también de Euler-Maruyama). En este método, una EDE puede ser usada discretizando el tiempo en intervalos  $t_i$  partiendo de una valor inicial de tal manera que para  $t_0$  el valor inicial de la respuesta sería  $X_{t_0} = X_0$ .

Llámesse  $\hat{X}_i = X(t_i)$ . De esta forma, una EDE puede ser derivada para representar el siguiente esquema iterativo:

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i) \Delta t + b(X_i) \Delta B_i, \quad (6.1)$$

el cual puede ser utilizado para buscar una solución numérica de una EDE.

Sea  $X_t$  el proceso de Itô el cual es la solución de la siguiente EDE:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t,$$

en  $t_0 \leq t \leq T$  con valor inicial  $X_{t_0} = X_0$ .

Para la discretización  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$  del intervalo de tiempo  $[t_0, T]$  una **aproximación de Euler-Maruyama** es un proceso estocástico a tiempo discreto  $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$  satisfaciendo el esquema iterativo

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}),$$

o escrito de manera compacta

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta B_n,$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  con valor inicial  $Y_0 = X_0$  (se ha usado la notación  $Y_n = Y(\tau_n)$  y  $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ ).

Llámesse  $\delta = \max_n \Delta_n$  al máximo “tamaño de paso”. Si la discretización del intervalo de tiempo  $[t_0, T]$  fuese equidistante se cumplirá que

$$\tau_n = t_0 + n\delta,$$

donde

$$\delta = \Delta_n = \Delta = \frac{(T - t_0)}{N},$$

para algún entero  $N$  tal que  $\delta \in (0, 1)$ .

La sucesión  $\{Y_n, n = 0, 1, \dots, N\}$  de valores de la aproximación de Euler estocástica en los instantes de la discretización de tiempo  $(\tau)_\delta = \{\tau_n, n = 0, 1, \dots, N\}$  puede ser calculada de manera similar que el caso determinístico pero incluyendo ahora los incrementos aleatorios

$$\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n},$$

para  $n = 0, 1, \dots, N_1$  del movimiento Browniano  $B = \{B_t, t \geq 0\}$ .

El movimiento browniano tiene incrementos independientes con distribución normal y varianza igual al incremento del tiempo. Esto significa que

$$E(\Delta B_n) = 0,$$

y

$$\text{Var}((\Delta B_n)^2) = \Delta_n.$$

Luego, para simular los incrementos  $\Delta B_n$ , es posible, iniciando en 0, dar un valor aleatorio de distribución normal e ir incrementando y acumulando los resultados según la variación  $\Delta_n = t - s$ . El tamaño de paso  $\Delta_t$  considerado en la implementación computacional representa una conveniente variación del tiempo.

Sea  $Y_i = Y(t_i)$  y  $Y_{i+1} = Y(t_{i+1})$ . Entonces, bajo el esquema de Euler-Maruyama (ver [3]), la ecuación (5.1) adopta la siguiente forma (versión integral):

$$Y_{i+1} - Y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} AY dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t) dB_t,$$

$$Y_{i+1} - Y_i \approx AY_i \Delta t + F(t_i) \Delta B_i. \quad (6.2)$$

Ordenando:

$$Y_{i+1} = (I + A \Delta t)Y_i + F(t) \Delta B_i, \quad (6.3)$$

donde

$$Y_{i+1} = \begin{pmatrix} Y_1^{i+1} \\ Y_2^{i+1} \end{pmatrix}, \quad Y_i = \begin{pmatrix} Y_1^i \\ Y_2^i \end{pmatrix}.$$

$$I + A \Delta t = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_n^2 \Delta t & 1 - (\frac{c}{m}) \Delta t \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -I(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta B_i = B_{i+1} - B_i.$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} Y_1^{i+1} \\ Y_2^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_n^2 \Delta t & 1 - (\frac{c}{m}) \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^i \\ Y_2^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -I(t) \end{pmatrix} \Delta B_i.$$

Luego, el esquema iterativo para el método numérico será:

$$\begin{cases} Y_1^{i+1} = Y_1^i + \Delta t Y_2^i, \\ Y_2^{i+1} = -\omega_n^2 \Delta t Y_1^i + (1 - (\frac{c}{m}) \Delta t) Y_2^i - I(t) \Delta B_i. \end{cases} \quad (6.4)$$

No es difícil implementar este esquema iterativo usando algún lenguaje de programación. Considérese por ejemplo un sistema de un grado de libertad consistente por una masa  $m = 1019,37$  kg. Supóngase también que dicha masa está sostenida por una elemento de soporte vertical de módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^4$  MPa, 3 m de altura y sección transversal cuadrada de lado 0,40 m.

Se define a la rigidez axial  $k$  del elemento de soporte vertical de la siguiente manera:

$$k = \frac{EA}{L} = \frac{(2 \times 10^{10}) \times (0,40^2)}{3} = 1\,066\,666\,666,67 \text{ N/m}$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal de la columna y  $L$  es su altura.

La frecuencia circular natural de vibración  $\omega_n$  es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1\,066\,666\,666,67}{1019,37}} = 1022,94 \text{ rad/s}$$

El coeficiente de amortiguamiento crítico  $c_c$  es (ver [1]):

$$c_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} = 2\,085\,498,37 \text{ N}\cdot\text{s/m}.$$

Se va a considerar que  $c = 104\,274,92 \text{ N}\cdot\text{s/m}$  (i.e. 5 % del coeficiente del amortiguamiento crítico).

Como se indicó, la función determinística  $I(t)$  escogida para el modelo es la propuesta por Shinozuka y Sato [4]:

$$I(t) = \frac{1}{\gamma}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}),$$

donde  $\gamma$  puede elegirse usando

$$\gamma = \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} - \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} \right].$$

Se usarán los valores de  $\alpha = 0,085$ ,  $\beta = 0,17$  y  $\gamma = 0,25$  (ver Fig. 6.1).

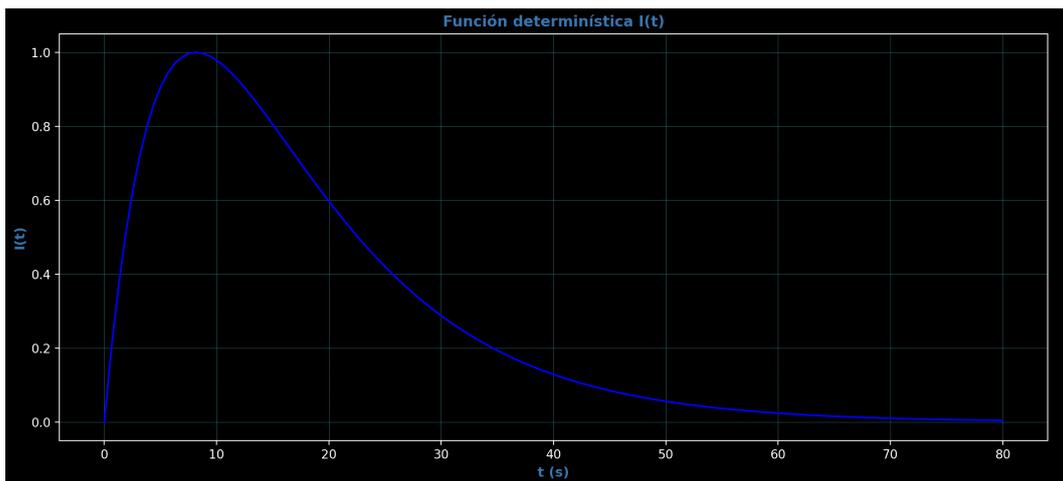


Figura 6.1: Función determinística  $I(t)$  propuesta por Shinozuka-Sato con  $\alpha = 0,085$  y  $\beta = 0,17$ .

La Fig. 6.2 muestra los resultados de desplazamiento y velocidad obtenidos para un tamaño de paso  $\Delta t = 2^{-10} \text{ s}$  usando una implementación en Python.

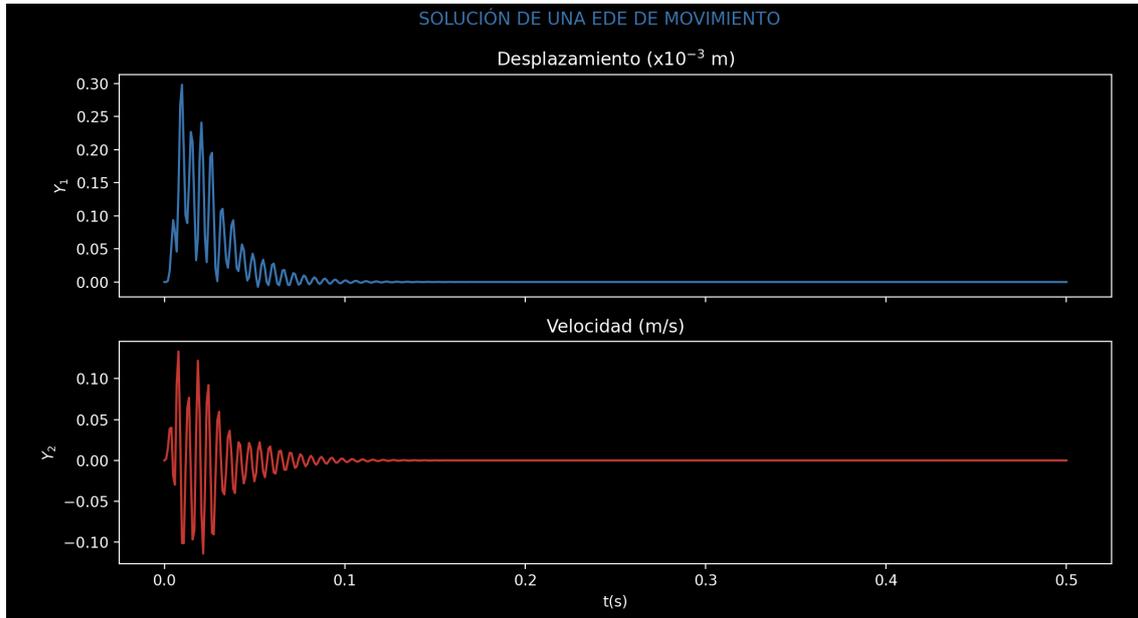


Figura 6.2: Solución numérica de una EDE de movimiento usando la aproximación de Euler-Maruyama para un tamaño de paso de  $\Delta_t = 2^{-10}$  s.

Analizando los resultados obtenidos, se observa lo siguiente:

- (a) Partiendo del cero, tanto el desplazamiento como la velocidad empiezan a crecer hasta alcanzar un valor pico. Luego, la respuesta se va atenuando hasta regresar al estado de equilibrio original.
- (b) La presencia del componente estocástico distorsiona la suavidad que se observaría en las trayectorias determinísticas haciendo que las realizaciones, con probabilidad 1, sean funciones continuas pero no diferenciables en ningún punto. Esta es una de las propiedades que presenta el movimiento browniano.
- (c) Al efectuar cambios en la semilla inicial y el tamaño de paso  $\Delta$ , las realizaciones mantienen su simetría con respecto al eje horizontal por lo que la media tiende al cero al fijar cualquier tiempo.

**7. Conclusiones.** Es posible la migración de la ecuación determinística del movimiento a una versión estocástica utilizando de manera conveniente al movimiento browniano para la representación de la aleatoriedad del fenómeno a modelar. El modelamiento estocástico de otros fenómenos de interés en la ciencia seguiría un proceso similar al presentado.

**Acknowledgment.** A Dios y a mis padres.

**Contribución de los autores.** El autor es responsable de todo lo presentado en el artículo.

**Financiamiento.** Ninguno.

**Conflictos de interés.** El autor declara no tener ningún conflicto de interés.

#### ORCID and License

Saúl Moisés Torres Murga <https://orcid.org/0000-0002-8008-8000>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Chopra A. Dynamics of Structures. Prentice Hall, 4th Ed., New Jersey; 2012.
- [2] Bolotin V. Statical theory of the seismic design of structures. Proc 2nd WEEE. 1960:1365.
- [3] Kloeden P, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1st Ed., 2nd. reprint, New York; 1995.
- [4] Shinozuka M, Sato Y. Simulation of nonstationary random processes. Journal of the Engineering Mechanics Division. 1967;93:11-40.
- [5] Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Springer, 6th Ed., Heilderber, Germany; 2013.
- [6] Kuo H. Introduction to Stochastic Integration. Springer, 1st Ed., Berkeley, Ca; 2006.
- [7] Evans L. An Introduction to Stochastic Differential Equations. UC Berkeley; 2014.
- [8] Ash R. Probability and Measure Theory. Harcourt Academic Press, 2nd Ed., San Diego, CA; 2000.
- [9] Brzezniak Z, Zastawniak T. Basic Stochastic Processes, A Course Through Exercises. Springer, 1st Ed., London, UK; 2005.
- [10] Durrett R. Probability: Theory and Examples. Cambridge University Press, 4th Ed., Cambridge, UK; 2013.
- [11] Luyo J. Notas de clase de Análisis Funcional I. UNMSM, Lima, Peru; 2023.
- [12] Rincón L. Introducción a los Procesos Estocásticos. UNAM, 1ra Ed., Mexico DF; 2012.