



Spectral Differentiation and Mimetic Methods for Solving the Scalar Burgers Equation

Métodos de diferenciación espectral y mimético para la solución de la ecuación de Burgers escalar

Bertha K. Rodriguez-Chavez^{ib} and Yessica E. Zarate-Pedrerá^{ib}

Received, Set. 22, 2023;

Accepted, Nov. 12, 2024;

Published, Dec. 27, 2024



How to cite this article:

Rodriguez-Chavez B., Zarate-Pedrerá Y. *Spectral Differentiation and Mimetic Methods for Solving the Scalar Burgers Equation*. *Selecciones Matemáticas*. 2024;11(1):259–270. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2024.02.05>

Abstract

In the present work, the spectral differentiation method was studied to solve the scalar Burgers' partial differential equation. This equation has been of considerable physical interest as it can be regarded as a simplified version of the Navier-Stokes equations. Through this study, the spectral differentiation method and its convergence were described; additionally, the mimetic method and the use of the MOLE library for numerically solving the scalar Burgers equation were presented.

Keywords . Burgers' equation, spectral differentiation, mimetic method.

Resumen

En el presente trabajo se estudió el método de diferenciación espectral para resolver la ecuación diferencial parcial de Burgers escalar, esta ecuación ha sido de considerable interés físico debido a que puede considerarse como una versión simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes. A través de este estudio se describió el método de diferenciación espectral y su convergencia; también se presentó el método mimético y el uso de la librería MOLE para resolver numéricamente la ecuación de Burgers escalar.

Palabras clave. Ecuación de Burgers, diferenciación espectral, método mimético.

1. Introducción. Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son fundamentales para el modelado de fenómenos naturales que aparecen en las diferentes ramas de la ciencia. Algunas veces se pueden encontrar matemáticamente sus soluciones, o solo es un poco difícil lidiar con estas. Es por ello que surge, la necesidad de utilizar métodos numéricos para resolverlas.

La ecuación parabólica no lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

*Escuela de Matemáticas, FCFyM, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (brodriguezch@unitru.edu.pe).

†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. **Correspondence author**(p810313621@unitru.edu.pe).

es conocida como ecuación de Burgers, ha sido de considerable interés físico debido a que puede considerarse como una versión simplificada de la ecuación de Navier - Stokes, pero que interpreta la modelización de ondas de choque; a su papel en la jerarquía de aproximaciones de las ecuaciones de Navier- Stokes. Apareció por primera vez en el trabajo de Bateman en 1915, luego fue nombrado por Jan Burgers en 1948, quien estudió la ecuación como un modelo matemático de turbulencia [1]. Es así que, la ecuación de Burgers modela con éxito el transporte de ciertos gases, la acústica y el fenómeno de turbulencia.

Entre 1950 y 1951, Cole y Hopf brindaron una solución exacta y completa en términos de sus condiciones iniciales, las soluciones analíticas son complicadas de calcular, motivando así el surgimiento de métodos numéricos que permiten encontrar una solución aproximada. Los métodos numéricos más conocidos son los métodos de diferencias finitas, que tuvieron un gran impacto en la década de los cincuenta; los métodos de elementos finitos, cuyo desarrollo y aplicación llegó en la década de los sesenta; y por último, los métodos espectrales, que lograron difundirse y utilizarse en la década de los setenta. [2]

A finales de 1980 durante el GAMM workshop realizado en Louvain-la -Neuve, algunos investigadores propusieron resolver la ecuación no lineal de Burgers con viscosidad igual a $1/100\pi$, aplicando Métodos espectrales y de diferencias finitas; donde, los reportes computacionales arrojan que los esquemas espectrales tienen mejor precisión [3, 4]. Por otro lado, en el año 2011 en el trabajo de Mohamad Reza [5] se demuestra un algoritmo para la simulación de problemas periódicos. Este algoritmo el cual es llamado Método espectral de Fourier utiliza una representación de Fourier en el espacio y se utiliza la transformada discreta de Fourier. En contraste a la técnica convencional de Fourier en el cual se resuelven las ecuaciones en el espacio de frecuencias, el nuevo algoritmo realiza todos los cálculos en el dominio físico. El método espectral de Fourier ha sido propuesto por su precisión y eficiencia computacional de flujos periódicos. Así mismo, en el año 2020 en el trabajo de Álvaro Cía Mina [6] se describen los algoritmos de diferenciación espectral que son empleados en la transformada de Fourier discreta, donde también se detalla la base de la teoría de la aproximación que permitió estudiar la convergencia de la diferenciación espectral; implementando el método espectral centrándose en los métodos de colocación de Fourier para resolver la ecuación Korteweg-de Vries, y comprobando numéricamente su eficiencia.

Nótese que los métodos de diferencias finitas dan soluciones aproximadas en los puntos de la malla computacional elegida; por otro lado, los métodos de elementos finitos dan aproximaciones polinomiales continuas o continuas por partes en regiones poligonales (por lo general triangulares en dos dimensiones), mientras que los métodos espectrales brindan soluciones aproximadas en forma de polinomio sobre todo su dominio [7].

Los métodos espectrales son técnicas para la discretización espacial de ecuaciones diferenciales parciales. Estas se basan en la aproximación de la solución exacta por polinomios. Como consecuencia y en contraste con otros métodos como diferencia finita o elementos finitos, ellas son capaces de lograr un grado infinito de precisión. Desde el punto de vista teórico, está relacionado con el hecho de que cualquier función analítica puede aproximarse por polinomios de forma exponencial. Desde el punto de vista numérico, esto significa que el orden de convergencia de la solución discreta a la solución exacta está limitado únicamente por la regularidad de la solución exacta. Desde el punto de vista práctico, menos grados de libertad son necesarios en muchas simulaciones numéricas para obtener una precisión dada. Este alto orden de precisión, justifica el uso cada vez mayor de métodos espectrales, al menos para problemas elípticos o parabólicos, en un gran número de laboratorios universitarios de investigación, así como en departamentos de investigación industrial.[8, 9]

Por otro lado, los métodos de diferencias miméticas han emergido como una técnica poderosa para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), especialmente en problemas donde la preservación de ciertas propiedades geométricas y físicas es crucial. A diferencia de los métodos de diferencias finitas tradicionales, que pueden introducir errores y violar propiedades fundamentales de las ecuaciones originales, los métodos miméticos están diseñados para conservar integralmente las propiedades del problema original, como la conservación de masa, momento y energía. [10]

En este artículo, planteamos el problema, luego definimos los métodos de diferenciación espectral, después hacemos la aproximación espectral de la ecuación, estudiamos su convergencia, presentamos los resultados computacionales y los contrastamos con los resultados mediante métodos miméticos.

2. Diferenciación espectral. Para estudiar este método, necesitamos conocer la expansión discreta de Fourier y algunas desigualdades para demostrar la convergencia del método de Fourier- Galerkin utilizando diferenciación espectral.

2.1. Expansión discreta de Fourier. Para cualquier entero $N > 0$, consideramos el conjunto de puntos

$$x_j = \frac{2\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

que se refieren a los nodos o puntos de la malla. Los *coeficientes discretos de Fourier* de función compleja u en $[0, 2\pi]$ con respecto a estos puntos son

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ikx_j}, \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1. \quad (2.2)$$

Debido a la relación de ortogonalidad

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ipx_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = Nm, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.3)$$

Se tiene la fórmula inversa

$$u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{ikx_j}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Así, el polinomio

$$I_N u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{ikx} \quad (2.5)$$

es el polinomio interpolante trigonométrico de grado $N/2$ en los nodos (2.1), es decir, $I_N u(x_j) = u(x_j)$, $j = 0, \dots, N-1$. Este polinomio también es conocido como serie de discreta de Fourier de u .

Los coeficientes \tilde{u}_k dependen solo de los N valores de u en los nodos (2.1). La transformada discreta de Fourier es la aplicación entre los N valores complejos $u(x_j)$, $j = 0, \dots, N-1$ y los N valores complejos \tilde{u}_k , $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$. Las dos formas convencionales de transformadas discretas de Fourier son dadas en la expresión (2.2) y (2.4), donde esta última expresión es denominada la inversa de la transformada discreta de Fourier. Esta transformada de Fourier discreta puede ser ejecutada por el algoritmo de la transformada rápida de Fourier desarrollado por Cooley y Tukey en el año 1965. Note que los coeficientes continuos de Fourier del polinomio interpolantes son precisamente los valores calculados vía la transformada discreta de Fourier (2.2).

2.2. Aproximación espectral. Generalmente al realizar el análisis numérico de las ecuaciones diferenciales parciales, se trabaja con las normas de Sobolev; por ello, los resultados de aproximación que se presentan en esta sección harán uso de estas normas. Como referencia general puede tomarse el libro de Adams y Fournier ([11]).

Una propiedad que se utilizará para el análisis del método será la *desigualdad inversa* en las normas de Sobolev para los polinomios trigonométricos:

$$\|\phi\|_s \leq \lambda(s) N^{s-r} \|\phi\|_r, \quad 0 \leq r \leq s, \phi \in \mathcal{S}_N \quad (2.6)$$

donde $\lambda(s)$ es una constante que depende solo de s .

Una desigualdad que es notoria y surge de la identidad de Parseval, que también utilizaremos más adelante es:

$$\|u\|_1^2 = \sum_{k=-N/2}^{N/2} (1+k^2) |\hat{u}(k)|^2 \leq |\hat{u}(0)|^2 + 2 \left\| \frac{du}{dx} \right\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}_N. \quad (2.7)$$

En el espacio $L^2(0, 2\pi)$ se sabe que la familia

$$\left\{ \phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.8)$$

es un sistema ortonormal y completo. Se define para $N \in 2\mathbb{Z}$, el espacio de polinomios trigonométricos de grado menor o igual que $N/2$, como

$$\mathcal{S}_N = \text{span} \left\{ \phi_k, \frac{-N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} \right\} \quad (2.9)$$

y se denotará por $P_N : L^2(0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{S}_N$ al operador de proyección sobre \mathcal{S}_N con respecto al producto interno de $L^2(0, 2\pi)$.

Proposición 2.1.

$$(P_N u)' \equiv P_N u', \quad \forall u \in H^1(0, 2\pi). \quad (2.10)$$

Demostración: Utilizando los coeficientes de Fourier y al integrar por partes, se obtiene

$$(\hat{u}')_k = \langle u', \phi_k \rangle = -\langle u, \phi_k' \rangle = ik \langle u, \phi_k \rangle = ik \hat{u}(k) \quad (2.11)$$

Así, cada término de la suma $P_N u'$ coincide con la derivada de cada término de la suma $P_N u$.
□

Ahora, se incluirán las estimativas para el error de truncamiento y de interpolación, toman- do como referencia las obras de Canuto, Hussaini, Quarteroni y Zang [12, 13].

Proposición 2.2. Estimativa para el error de truncamiento. Para l, m enteros tales que $m \geq 0$ y $0 \leq l \leq m$, se cumple

$$\|u - P_N u\|_l \leq c N^{l-m} \|u^{(m)}\|, \quad \forall u \in H^m(0, 2\pi), \quad (2.12)$$

donde c denotará una constante positiva que no depende de N .

Se considera oportuno introducir un resultado para el orden de convergencia de la interpo- lación, para poder estudiar el orden de convergencia de la diferenciación espectral. Denóte- se por $I_N u$ el interpolante trigonométrico de una función u en los nodos $x_j = 2\pi j/N, j = 0, \dots, N-1$.

Proposición 2.3. Estimativa para el error de interpolación. Para l, m enteros tales que $m \geq 1$ y $0 \leq l \leq m$, se cumple

$$\|u - I_N u\|_l \leq c N^{l-m} \|u^{(m)}\|, \quad \forall u \in H^m(0, 2\pi). \quad (2.13)$$

Estos dos resultados muestran que asintóticamente cuando $N \rightarrow \infty$, tanto el error de trun- camiento como el de interpolación se pueden acotar de la misma forma. Además, se observa que solo de la regularidad de la función u depende el orden de convergencia. Se puede afirmar que si u es suficientemente regular, entonces el error de truncamiento como el de interpolación decrecen más rápido que cualquier potencia de h . Estas proposiciones permitirán demostrar que la diferenciación espectral también satisface esta propiedad.

2.3. Convergencia. El interpolante trigonométrico de la función sobre los puntos de la malla homogénea, es la base fundamental para la diferenciación espectral puesto que, esto hace posible calcular la derivada del polinomio interpolador. Lo que permitirá aplicar el resultado de error de interpolación para obtener la convergencia de la diferenciación espectral. En esta sección se denotará el operador de diferenciación espectral como D_N para mostrar explícitamente el número de puntos de la malla como subíndice, puesto que tenemos como propósito estudiar el comportamiento del error de diferenciación cuando $N \rightarrow \infty$.

Proposición 2.4. Para el error de diferenciación espectral se cumple la siguiente cota:

$$\|u' - D_N u\| \leq c N^{1-m} \|u^{(m)}\|, \quad \forall u \in H^m(0, 2\pi), m \geq 1.$$

Demostración: Sabiendo que, $D_N u = (I_N u)'$. Inclusive, por como esta definida la norma en $H^1(0, 2\pi)$ se tiene

$$\|u' - D_N u\| = \|(u - I_N u)'\| \leq \|u - I_N u\|_1,$$

y utilizando el resultado (2.13) para $l = 1$ obtenemos la desigualdad deseada. □

Ahora, demostraremos el resultado fundamental de esta subsección que es la convergencia de la aproximación de Fourier-Galerkin a la solución de la ecuación de Burgers utilizando diferenciación espectral.

Teorema 2.1. Suponga que $u^0 \in H^m(0, 2\pi)$ para algún entero $m \geq 2$. Entonces existe una constante $c > 0$ independiente de N tal que para todo t , con $0 \leq t \leq T$ se tiene:

$$\|u(\cdot, t) - u_N(\cdot, t)\| \leq c N^{1-m}. \quad (2.14)$$

Demostración: Para todo $t, 0 \leq t \leq T$, definimos $e(t) = P_N u(t) - u_N(t)$, donde

$$P_N u(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}(t) \phi_k,$$

$$u_N(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k(t) \phi_k.$$

Para Burgers, tenemos la solución aproximada

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N \cdot \frac{\partial u_N}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2},$$

y la solución exacta

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Aplicando P_N a la solución exacta y utilizando el resultado en (2.10), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} P_N u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} P_N u^2 = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_N u. \quad (2.15)$$

Reemplazando $e(t)$ en la diferencia de (2.15) con la solución aproximada, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} e - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} e = -u \cdot u_x + u_N \cdot u_{N_x}.$$

Observe que $[P_N u, u] = P_N u \cdot (P_N u)_x - u u_x$, además $\langle P_N u - u, \Phi \rangle = 0, \forall \Phi \in S_N$. Además, considere la notación $E[f, g] = f g_x - g g_x$. Entonces, para todo $\phi \in S_N$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle -u u_x + u_N u_{N_x}, \phi \rangle &= \langle -u u_x + P_N u (P_N u)_x - P_N u P_N u_x + u_N u_{N_x}, \phi \rangle \\ &= \langle E[P_N u, u] - E[P_N u, u_N], \phi \rangle. \end{aligned}$$

Tomando $\phi = e$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} e - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} e, e \right\rangle &= \langle E[P_N u, u], e \rangle - \langle E[P_N u, u_N], e \rangle, \\ \frac{d}{dt} \|e\|^2 - \nu \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} e, e \right\rangle &= \langle E[P_N u, u], e \rangle - \langle E[P_N u, u_N], e \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observar que integrando por partes y aplicando periodicidad, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left\langle \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} e, e \right\rangle &= \nu \frac{\partial e}{\partial x} e \Big|_0^{2\pi} - \nu \langle e_x, e_x \rangle \\ &= -\nu \int_0^{2\pi} e_x^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Para el primer sumando del segundo miembro de (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} |\langle E[P_N u, u], e \rangle| &= \left| \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} ((P_N u)^2 - u^2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (P_N u + u) (P_N u - u) \right|, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \left| \langle E[P_N u, u], e \rangle \right| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \left| \langle (P_N u)_x + u_x \rangle (P_N u - u), e \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \left\langle (P_N u + u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (P_N u - u), e \right\rangle \right| \right\}, \end{aligned}$$

Por desigualdad de Schwarz se tiene:

$$\left| \langle E[P_N u, u], e \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \left\{ \|(P_N u)_x + u_x\| \cdot \|P_N u - u\| \cdot \|e\| + \|P_N u + u\|_{L^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \|P_N u - u\|_{L^2} \cdot \|e\| \right\}.$$

Por desigualdad de Poincaré se tiene:

$$\left| \langle E[P_N u, u], e \rangle \right| \leq \frac{1}{2} c \left\{ (\|P_N u\|_1 + \|u\|_1) \cdot \|P_N u - u\|_1 + (\|P_N u\|_1 + \|u\|_1) \cdot \|P_N u - u\|_1 \cdot \|e\| \right\}.$$

$$\begin{aligned} |\langle E[P_N u, u], e \rangle| &\leq \frac{1}{2} c \left\{ (\|P_N u\|_1 + \|u\|_1) \cdot \|P_N u - u\|_1 \cdot \|e\| \right. \\ &\leq \frac{1}{2} c \left\{ (\|P_N u - u\|_1 + 2\|P_N u\|_1) \|P_N u - u\|_1 \cdot \|e\| \right. \\ &\leq \frac{1}{2} c \left\{ (c_1 + 2c_2) (\|P_N u - u\|_1) \right\} \cdot \|e\| \\ &\leq C \|P_N u - u\|_1 \cdot \|e\| \\ &\leq C \left\{ \frac{1}{2} \|P_N u - u\|_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \|e\|^2 \right\} \\ &\leq C (\|P_N u - u\|_1^2 + \|e\|^2). \end{aligned}$$

Para el segundo sumando tenemos,

$$\begin{aligned} \langle E[P_N u, u_N], e \rangle &= \langle P_N u \cdot (P_N u)_x - u_N \cdot (u_N)_x, e \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (P_N u)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_N)^2, e \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(P_N u)^2 - (u_N)^2], e \right\rangle. \end{aligned}$$

Integrando por partes y aplicando la periodicidad de u se obtiene,

$$\begin{aligned} \langle E[P_N u, u_N], e \rangle &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(P_N u + u_N)(P_N u - u_N)] \frac{\partial e}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (P_N u + u_N) \cdot e \cdot \frac{\partial e}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (P_N u + u_N) \cdot \frac{\partial e^2}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Nuevamente, integrando por partes y aplicando periodicidad de u , obtenemos,

$$\langle E[P_N u, u_N], e \rangle = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (P_N u + u_N) \cdot e^2 dx,$$

entonces;

$$\begin{aligned} |\langle [P_N u, u_N], e \rangle| &= \left| \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (P_N u + u_N) \cdot e^2 dx \right| \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (P_N u + u_N), e^2 \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} (P_N u + u_N) \right\|_{L^2} \cdot \|e\|^2 \\ &\leq c \cdot \|e\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e\|^2 &\leq c_1 (\|u - P_N u\|_1^2 + \|e\|^2) + c_2 \|e\|^2 \\ \frac{d}{dt} \|e\|^2 &\leq C (\|u - P_N u\|_1^2 + \|e\|). \end{aligned}$$

Como ha sido definido e , se tiene que $e(0) = 0$. Luego utilizando el resultado del lema de Gronwall se obtiene la desigualdad

$$\|e(t)\| \leq ce^{ct} \left(\int_0^t \|u(s) - P_N u(s)\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Por la estimativa para el error de truncamiento, se tiene que

$$\|u - P_N u\| \leq c \cdot N^{1-m} \|u\|,$$

entonces

$$e(t) \leq ce^{ct} \left(\int_0^t [c \cdot N^{1-m} \cdot \|u\|_m]^2 ds \right)^{1/2}.$$

El resultado obtenido del teorema 2.1 nos muestra que el método de Galerkin es convergente, inclusive que el orden de convergencia solamente depende de la regularidad de la condición inicial u^0 . Esto significa que si u^0 es lo suficientemente regular, implica que el error en norma $L^2(0, 2\pi)$ tiende a cero más rápido que cualquier potencia de $1/N$. Esta forma de comportarse la función respecto al límite hace referencia a la *convergencia exponencial* que es una de las principales ventajas que presentan los métodos espectrales respecto a los otros métodos.

2.4. Métodos miméticos. Los métodos de diferencias miméticas que describiremos son los proporcionados por Castillo y Grone en el artículo [14], en el cual los autores construyen aproximaciones discretas de alto orden para derivadas, en mallas de volúmenes finitos uniformes unidimensionales, que satisfacen la ley de conservación global.

Las aproximaciones son de segundo orden para la derivada, sus técnicas permiten la construcción de versiones discretas del operador gradiente y divergencia, que tienen alto orden de precisión en la frontera. Este esquema mimético con gran precisión en la frontera, garantiza el alto orden de precisión. El esquema mimético usa discretizaciones que poseen propiedades análogas al teorema de la divergencia, ley de conservación local y ley de conservación global. Los autores encuentran aproximaciones de alto orden para la divergencia (div) y el gradiente (∇) que satisfacen un análogo discreto del teorema de la divergencia:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{v})f \, dV + \int_{\Omega} \vec{v} \nabla f \, dV = \int_{\partial\Omega} f \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS. \tag{2.17}$$

Esta ecuación, en una dimensión, $\Omega = [0, 1]$, es simplemente el teorema de integración por partes:

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f \, dx + \int_0^1 v \frac{df}{dx} \, dx = v(1)f(1) - v(0)f(0). \tag{2.18}$$

Como el método es conservativo, la ecuación anterior se cumple con $f \equiv 1$, entonces:

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} \, dx = v(1) - v(0), \tag{2.19}$$

Los autores en [14] obtienen resultados para una malla unidimensional uniforme, abordan el problema de desarrollar aproximaciones de alto orden para las derivadas, mediante el uso del análisis matricial, que además cumplan con la ley de conservación global. En su trabajo, diseñan métodos de aproximación de alto orden, específicamente de cuarto orden, tanto para el operador divergencia como para el gradiente, que mantienen este nivel de precisión tanto en el interior del dominio como en sus fronteras. Su enfoque se extiende de manera natural a aproximaciones de orden superior; de hecho, logran reproducir las aproximaciones de sexto orden descritas en investigaciones previas.

Los métodos de diferencias miméticas desarrollados por Corbino y Castillo en [15] utilizan staggered grids y operadores diferenciales con alto orden de precisión. Estos operadores han sido implementados en MatLab por los autores [15], poniendo a disponibilidad una librería con

los operadores en forma matricial, llamada MOLE (Mimetic Operators Library Enhanced). En su trabajo demuestran que el esquema de diferencias finitas miméticas usando estos operadores produce excelentes resultados. Luego de verificar algunos ejemplos de la librería, realizamos el programa en MatLab, que permita usar los operadores miméticos, tales como Divergencia y Laplaciano.

3. Resultados computacionales. En esta sección se presenta el algoritmo para el método de Fourier - Galerkin que resuelve la ecuación de Burgers.

Considerar el producto

$$w_j = w(x_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

para dos funciones en puntos de la malla (espacio físico)

$$\begin{aligned} u_j &= u(x_j) \\ v_j &= v(x_j) \\ w_j &= u_j \cdot v_j \end{aligned} \tag{3.1}$$

podemos transformar al espacio espectral con ayuda de la transformada discreta de Fourier:

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k e^{ikx_j} \\ \hat{u}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j e^{-ikx_j} \end{aligned} \tag{3.2}$$

y la forma discreta de la relación de ortogonalidad.

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{ikx_j} e^{imx_j} = \delta_{k,-m+n \cdot N} \tag{3.3}$$

La expresión (3.3), $n \in \mathbb{Z}$ corresponde a un múltiplo arbitrario de N , el cual está estrechamente relacionado a errores de aliasing, finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} w_l &= \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N/2} \sum_{|m| \leq N/2} \hat{u}_k \hat{v}_m \cdot \sum_{j=1}^N e^{ikx_j} e^{i(m-l)x_j} \\ w_l &= \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N/2} \sum_{|m| \leq N/2} \hat{u}_k \hat{v}_m \cdot \delta_{k,(l-m)} \\ w_l &= \sum_{\substack{k=-N/2 \\ l=k+m \\ |m| \leq k}} \hat{u}_k \hat{v}_m. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Una eficiente evaluación del producto no lineal de dos funciones dadas en el espacio espectral

$$\left[\frac{d}{dt} \hat{u}_l(t) + \nu l^2 \hat{u}_l(t) \right] + \sum_{\substack{k=-N/2 \\ l=k+m \\ |m| \leq k}}^{N/2} im \hat{u}_k(t) \cdot \hat{u}_m(t), = 0, \tag{3.5}$$

donde los \hat{u}_k , y los $\hat{v}_m = im \hat{u}_m$ se obtienen por los siguientes pasos:

1. Transformar \hat{u}_k, \hat{v}_m al espacio físico utilizando Transformada Rápida de Fourier.

$$\begin{aligned} u_j &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_k), \\ v_j &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}_m), \end{aligned}$$

2. Multiplicando en el espacio físico $w_j = u_j \cdot v_j$.
3. Transformando de vuelta al espacio espectral $w_l = \mathcal{F}(w_j)$.

Este resultado final se lee:

$$\hat{w}_l = \sum_{\substack{k=-N/2 \\ l=k+m+n \cdot N \\ |m| \leq k}} \hat{u}_k \cdot \hat{v}_m.$$

La implementación ha sido dividida en varios subprogramas y los resultados de las simulaciones se presentan en la sección Simulaciones.

3.1. Librería MOLE. Usaremos métodos miméticos para dar solución a la ecuación de Burgers. La librería MOLE en el programa en MATLAB permite utilizar operadores miméticos, como divergencia y laplaciano, los cuales han sido usados por autores como en [16]. Para implementar diferencias miméticas realizamos la discretización de la variable espacial en la ecuación diferencial parcial $u_t + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, utilizando operadores miméticos.

Sea U la variable discreta que aproxima $u(x, t)$ en los centros de las celdas de la malla mimética, siendo D y L los operadores en diferencias miméticas divergencia y laplaciano, respectivamente, entonces el esquema en diferencias miméticas para la ecuación es:

$$U_t = \nu LU - \frac{1}{2} DU^2. \tag{3.6}$$

Usando la discretización de un solo paso para la derivada en el tiempo, el esquema numérico discreto queda de la siguiente forma:

$$U^{n+1} = U^n + dt(\nu LU - \frac{1}{2} DU^2). \tag{3.7}$$

Finalmente, codificamos en MatLab usando la librería MOLE.

3.2. Simulaciones. Para poder entender mejor como se comporta gráficamente la ecuación de Burgers, se utilizó la condición inicial $u_0 = e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$, 2000 nodos espaciales, $T_{max} = 20s$ y 800 nodos temporales.

Ejecución. Al generar los gráficos de la función con el coeficiente de viscosidad $\nu = 0.01$, observamos que la Figura 3.1 nos muestra la superficie generada por el viaje de la onda a través del tiempo.

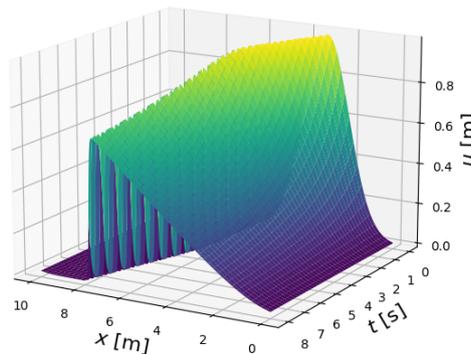


Figura 3.1: Superficie solución u con método espectral

Además, podemos observar en la Figura 3.2 como ha cambiado la posición de la onda inicial viajando en el tiempo.

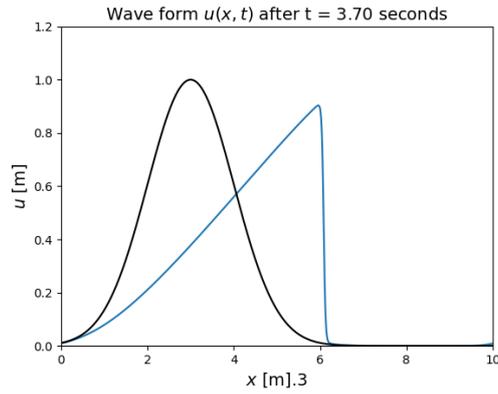


Figura 3.2: Viaje de la onda inicial $u_0 = e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$ en el tiempo $t=3.70s$ con método espectral

Con el método mimético, la misma condición inicial muestra los siguientes resultados: En la Figura 3.3 se presenta la superficie generada por el viaje de la onda a través del tiempo.

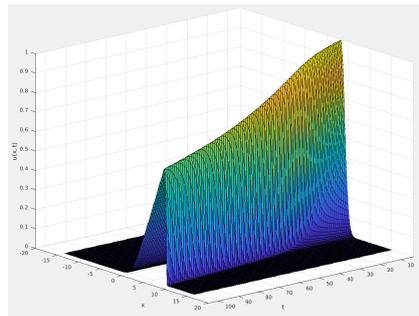


Figura 3.3: Superficie solución u con método mimético

En la Figura 3.4 podemos observar el viaje de la onda respecto a la posición inicial en el tiempo $t=3.70$ segundos.

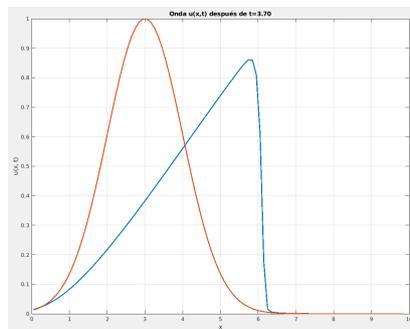
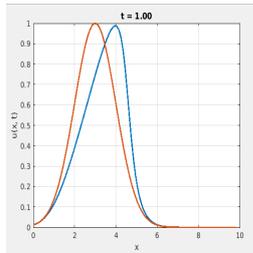
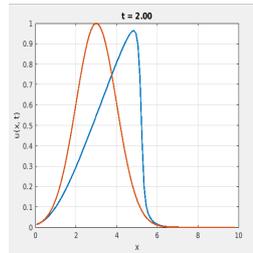
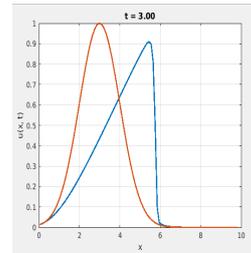
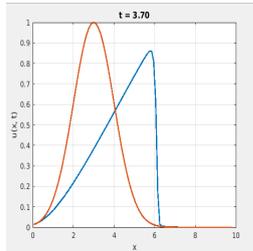
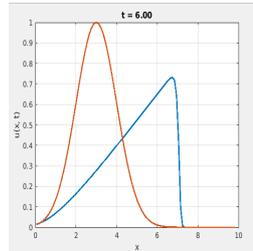
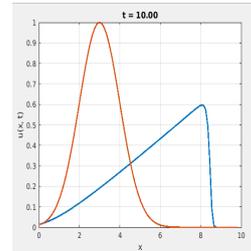


Figura 3.4: Viaje de la onda inicial $u_0 = e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$ en el tiempo $t=3.70s$ con método mimético

(a) Posición de la onda en el tiempo $T = 1s$.(b) Posición de la onda en el tiempo $T = 2s$.(c) Posición de la onda en el tiempo $T = 3s$.(d) Posición de la onda en el tiempo $T = 3.7s$.(e) Posición de la onda en el tiempo $T = 6s$.(f) Posición de la onda en el tiempo $T = 10s$.Figura 3.5: Posición de la onda al variar el tiempo con viscosidad $\nu = 0.01$.

Observamos en la Figura 3.5c que en el tiempo $t = 3s$, la onda se va deformando, y por la presencia de la difusividad va bajando su energía; además, por la presencia de la no linealidad la parte posterior de la onda avanza más rápido hasta que se superpone a la parte frontal de la onda generando múltiples soluciones, esto ocurre en la Figura 3.5d a partir del tiempo $t = 3,7s$, donde aparece una onda de choque, lo cual indica que se elige una solución con discontinuidad, y en las Figuras posteriores 3.5e y 3.5f se presentan soluciones discontinuas que viajan en el tiempo.

4. Conclusiones.

1. Se ha revisado las bases para determinar el interpolante trigonométrico de una función sobre los nodos de una malla homogénea, haciendo posible calcular la derivada del polinomio interpolador que permitirá encontrar la solución u mediante diferenciación espectral.
2. Se describe mediante el teorema de convergencia del método de Fourier- Galerkin, donde se observa que orden de convergencia depende de la regularidad de la condición inicial u_0 .
3. Se realizaron simulaciones numéricas con métodos de diferenciación espectral y también con los métodos miméticos donde se observó que a medida que avanza el tiempo la onda viajera se va deformando, y por la presencia de la difusividad va bajando su energía; además, por la presencia de la no linealidad va avanzando sobre los otros datos, generando múltiples soluciones, definiendo una onda de choque, lo cual que indica discontinuidad. Estas simulaciones presentan soluciones discontinuas que viajan en el tiempo.

Contribución de los autores. BKRCH: Estudio y simulación numérica con el método espectral en la ecuación de Burgers. YEZP: presentación del método mimético y uso de la librería MOLE en la simulación numerica en la ecuación de Burgers.

Financiamiento. Ninguno.

Conflictos de interés. Los autores declaran no tener conflictos de interes.

ORCID and License

Bertha K. Rodríguez-Chavez <https://orcid.org/0009-0003-9407-4472>

Referencias

- [1] Landajuela M. Burgers equation. BCAM Internship report: Basque Center for Applied Mathematics; 2011.
- [2] Quarteroni A, Sacco R, Saleri F. Numerical Mathematics. Springer; 2010.
- [3] Basdevant C, Deville M, Haldenwang P, Lacroix JM, Ouazzani J, Peyret R, Orlandi P, Patera AT. Spectral and finite difference solutions of the Burgers equation. *Computer & fluids*, 1986 14(1):23- 41.
- [4] Gottlieb D, Orszag SA. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. SIAM; 1977.
- [5] Reza M. Numerical solution of the Burgers' equation using Fourier spectral method and comparison with finite difference method. 7th International conference on computational heat and mass transfer, 2011; 27(4).
- [6] Cía A. Métodos pseudoespectrales para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales [tesis maestría]. Repositorio Universidad de Valladolid, Facultad de ciencias; 2020.
- [7] Bernardi C, Maday Y. Handbook of numerical analysis. Techniques of Scientific Computing. 1997; 5(2):209-485.
- [8] Folland GB. Fourier analysis and its applications. Brooks/Cole Publishing Company. 1992.
- [9] Schlatter P. Spectral methods. Lecture notes KTH. 2009.
- [10] Bochev PB, Hyman JM. Principles of Mimetic Discretizations of Differential Operators. In: Arnold DN, Bochev PB, Lehoucq RB, Nicolaides RA, Shashkov M. (eds) Compatible Spatial Discretizations. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol 142. Springer, New York. 2006.
- [11] Adams RA, Fournier JFF. Sobolev Spaces. Elsevier Science. 2003; pp 59- 79.
- [12] Canuto C, Quarteroni A, Hussaini MY, Zang TA. Spectral Methods, fundamentals in single domains. Springer Scientific computation. 2006; 27(4):118- 166.
- [13] Canuto C, Quarteroni A, Hussaini MY, Zang TA. Spectral methods in fluid dynamics. Springer series in computational physics. 1988; 36(3):31-65, 275- 280.
- [14] Castillo J, Grone R. A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law. *SIAM Journal*. 2003; 25(1):128-142.
- [15] Corbino J, Castillo JE. High Order Mimetic Finite Difference Operators Satisfying a Gauss Divergence Theorem. *J Appl Computat Math*. 2018; 7: 387. doi: [10.4172/2168-9679.1000387](https://doi.org/10.4172/2168-9679.1000387)
- [16] Andreucci D. et al. Some Numerical Results on Chemotactic Phenomena in Stem Cell Therapy for Cardiac Regeneration. *Mathematics*, 2024; 12(13), 1937. <https://doi.org/10.3390/math12131937>