Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(2):409-416.

REVIEW

Existence and construction of the Peano selection for a multivalued function

Existencia y construcción de la selección de Peano para una función multivaluada

Rosario D. Delgado V.[*], Waymer A. Barreto V.[†] and Teodoro L. Acevedo T.[‡]

Received, Set. 11, 2024; Accepted, Dec. 13, 2024; Published, Dec. 27, 2024

How to cite this article:
Delgado R. et al. *Existence and construction of the Peano selection for a multivalued function*. Selecciones Matemáticas. 2024;11(2):409–416. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.02.12

Abstract

In the present article, the necessary conditions are presented for a multivalued function in order to define a Peano selection. To achieve this, a bibliographic review was carried out on general results of compact topological spaces, open and closed sets and continuity. To then address the same topics, but on metric spaces. Next, the theory of multivalued functions was studied, specifically semicontinuity, both superiorly and inferiorly. Finally, using the General Theorem of multivalued functions, the necessary conditions are determined for the multivalued function, $F : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$ *to admit the construction of the selection of Peano.*
Keywords . Peano selection, multivalued function.

Resumen

En el presente artículo se presentan las condiciones necesarias para que una función multivaluada permita definir una selección de Peano. Para lograrlo se hizo una revisión bibliográfica sobre resultados generales de espacios topológicos compactos, conjuntos abiertos, cerrados y continuidad. Para luego abordar los mismos temas, pero sobre espacios métricos. Enseguida se estudió lo concerniente a la teoría de funciones multivaluadas, específicamente la semicontinuidad, tanto superior como inferiormente. Finalmente haciendo uso del Teorema General de funciones multivaluadas, se determinan las condiciones necesarias para que la función multivaluada, $F : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$ *admita la construcción de la selección de Peano.*
Palabras clave. Selección de Peano, Función multivaluada

1. Introducción. Este trabajo está enmarcado dentro del área de Matemática y línea de investigación del Análisis Multívoco[1]. Las funciones multivaluadas, son el objeto principal de estudio del Análisis Multívoco y estas tienen muchas aplicaciones en la Teoría de Control, Babiarz [2], Cálculo Intervalar, Pérez [3], Biología, Doe [4], Economía, Pérez [5], Estadística [6].

En ese sentido si consideramos a $X \neq \phi$ y $Y \neq \phi$, definimos a una función multivaluada $F : X \twoheadrightarrow Y$ como una aplicación que a cada x de X se le asigna un subconjunto $F(x) \subset Y$, Aubin [7]. Esta idea de aplicaciones punto a conjunto, fueron reconocidas a inicios del siglo XX por los creadores del Cálculo Multivaluado: Painlevé [8], Hausdorff [6], Bouligand [9], y Kuratowski [10].

*Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. **Autor de correspondencia**(rdelgado@unitru.edu.pe).
†Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (wbarreto@unitru.edu.pe).
‡Universidad Nacional de Trujillo, Perú. (tacevedo@unitru.edu.pe).

Fue Kuratowski en su importante libro **Topología**, quien dio un especial estudio a las funciones multivaluadas. Planteando que, para una función multivaluada, $F : X \twoheadrightarrow Y$, una **selección** de F, es una aplicación unívoca $f : X \longrightarrow Y$ tal que la imagen $f(x)$ de cada uno de los elementos x de X es un elemento del conjunto $F(x)$. Ahora si se considera a X y Y espacios topológicos, diremos que si f es continua, entonces f es una selección continua de la función multivaluada F.

Es así que la teoría de selecciones continuas ha experimentado un notable desarrollo en los últimos años, gracias a sus múltiples aplicaciones en los campos del análisis, la topología y la geometría. Este tema ha sido abordado en diversas investigaciones, tales como las obras de Castaing y Valadier [11], donde se exploran aspectos fundamentales de la teoría de selecciones, y en estudios más recientes que analizan su aplicabilidad en la geometría no euclidiana Vallée [12] y el análisis funcional, Martínez [13]. En este contexto ha generado la necesidad de identificar las condiciones necesarias que aseguren la existencia de funciones unívocas en el marco de las funciones multivaluadas.

Por las razones expuestas, este trabajo tiene por finalidad, determinar las condiciones necesarias para que una función multivaluada admita una selección continua. Un resultado importante para este fin, y que nos ayuda significativamente, está dado por el Teorema de Michael, Aubin [7], que, bajo condiciones impuestas sobre las funciones multivaluadas, permiten la existencia de una selección continua.

En esta ocasión consideraremos, a $X = [0, 1]$ e $Y = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, donde D_i es un espacio métrico compacto y $D_i \cap D_{i+1} \neq \phi$ para $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Definimos la función multivaluada

$$F : X \twoheadrightarrow 2^Y,$$

de una forma adecuada, de tal manera que garantice la existencia de una selección continua, la cual llamaremos selecciones de Peano, que constituye una de las funciones denominadas como los monstros de Weierstrass, que son aquellas funciones univalentes que no son derivables en ningún punto de su dominio. Las curvas de Peano pueden generalizarse y entenderse: o bien como aplicaciones continuas y sobreyectivas entre dos espacios X e Y, o bien como curvas cuya imagen tiene área. Cada una de estas dos interpretaciones define una clase de conjuntos diferente.

En 1890, Giuseppe Peano llevó a cabo la construcción de una curva que marcaría el inicio de un nuevo tipo de curvas: las "curvas que rellenan el espacio". La curva ideada por Peano es densa en el intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$ y constituye un ejemplo de función continua de la forma $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. La motivación de Peano para desarrollar esta curva se originó en el trabajo que George Cantor publicó en 1878 [14].

Una variante de las curvas de Peano son las curvas de Hilbert [15], que llenan el plano en dos dimensiones y, en su versión tridimensional, el espacio entero. Esta última fue descrita por primera vez por el matemático alemán David Hilbert en 1891.

También existen artículos que abordan las selecciones de Peano, como, por ejemplo, la curva de Sierpinski [16], que es un fractal y se considera un caso particular de selección de Peano. También recomendamos revisar [17, 18].

1.1. Justificación. Ante la diversidad de problemas existentes en la Teoría de control, Cálculo Intervalar, Biología, Inteligencia Artificial, Economía y Estadística, los cuales son modelados mediante las inclusiones diferenciales como, por ejemplo,

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \tag{1.1}$$

donde $x : [0, T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar que describe el estado del sistema y $F : [0, T\rangle \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función multivaluada; y considerando que las funciones comúnmente usadas (funciones univaloradas) no son adecuadas para representar una solución de la inclusión diferencial (1.1), es que se requieren de herramientas más generales, que son las llamadas funciones multivaluadas, que con sus respectivas selecciones continuas, serán tomadas en cuenta para determinar su solución y luego tomar una decisión correcta.

2. Preliminares. Se debe precisar que en la presente investigación trabajaremos con espacios métricos compactos y conexos.

Definición 2.1. *[19] Sea (X, d) un espacio métrico compacto y conexo, definimos como **hiperespacio**, al conjunto:*

$$2^X = \{F : \textit{ talque } F \subset X \textit{ cerrado y diferente del vacío}\}.$$

*Una **métrica en este hiperespacio** se define de la siguiente manera: Para* $\delta > 0$ *y* $F \in 2^X$*, definimos,*

$$V(\delta, F) = \{x \in X : \exists y \in F,\ \textit{donde}\ d(y,x) < \delta\}.$$

La métrica sobre 2^X *se define, como:*

$$D(F_1, F_2) = \text{ínf}\{\delta > 0 : F_1 \subset V(\delta, F_2)\ \textit{y}\ F_2 \subset V(\delta, F_1)\}. \tag{2.1}$$

Definición 2.2. *La correspondencia:*

$$\begin{aligned} F:\ & X \twoheadrightarrow 2^Y \\ & x \longmapsto F(x) \subset Y. \end{aligned}$$

*Se llama **función multivaluada**, donde* X*,* Y *son espacios métricos compactos, es así como serán considerados más adelante.*

Por ejemplo, si consideramos a los espacios métricos compactos, $X = [0,1]$, $Y = [0,1] \times [0,1]$, se define la función multivaluada:

$$\begin{aligned} F:\ & X \twoheadrightarrow 2^Y \\ & t \longmapsto F(t) = t \times [0,t] \end{aligned} \tag{2.2}$$

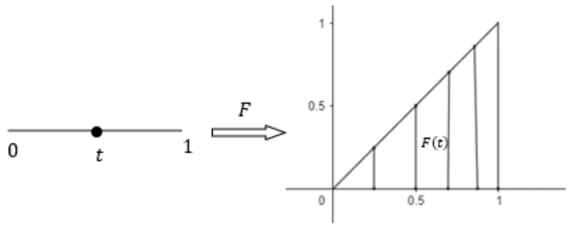

Figura 2.1: Representación gráfica de la función F en (2.2).

Definición 2.3. *La función multivaluada,* $F : X \twoheadrightarrow 2^Y$*, es **semicontinua superiormente** en* $a \in X$ *si para cada conjunto abierto* G *de* Y *donde* $F(a) \subset G$*, existe un conjunto abierto* U *de* X *tal que* $a \in U$ *y* $F(x) \subset G$*,* $\forall x \in U$*.*

Proposición 2.1.

i. La función multivaluada $F : X \twoheadrightarrow 2^Y$ *es semicontinua superiormente* $\Longleftrightarrow$ $\{x \in X : F(x) \cap B \neq \phi\}$ *es cerrado en* X*, para cada conjunto cerrado* B *en* Y*.*

ii. Sea la función multivaluada $F : X \twoheadrightarrow 2^Y$ *es semicontinua superiormente tales que para todo* $x \in X$*,* $F(x) = \{z_x\}$*. Entonces la función unívoca* $f : X \longrightarrow Y$ *definida por* $f(x) = z_x$ *es continua.*

Definición 2.4. *Dadas las funciones multivaluadas,* $F_i : X \twoheadrightarrow 2^Y$*. Diremos que* $\{F_i\}_{i=1,2,\cdots}$ *es **sucesión decreciente** si para cada* $x \in X$*,* $\{F_i(x)\}_{i=1,2,\cdots}$ *es una sucesión decreciente de conjuntos.*

Definición 2.5. *Sea* $\{F_i\}_{i=1,2,\cdots}$ *una sucesión decreciente de funciones multivaluadas. Definimos la función multivaluada,*

$$F_\infty(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(x)$$

La cual es semicontinua superiormente.

Definición 2.6. *La función multivaluada* $F : X \twoheadrightarrow 2^Y$ *cubre* Y *si,*

$$\bigcup_{x \in X} F(x) = Y$$

Proposición 2.2. *Sean* X*,* Y *espacios métricos compactos y* $\{F_i\}_{i=1,2,\cdots}$ *una sucesión decreciente de funciones multivaluadas semicontinuas superiormente. Si* F_i *cubre a* Y *para cada* i*, entonces* F_∞ *cubre a* Y*.*

Demostración: Ver [10] □

Teorema 2.1. ***(Teorema General de Funciones)*** *[19]. Sea $\{F_i\}_{i=1,2,\cdots}$ una sucesión decreciente de funciones multivaluadas semicontinuas superiormente, donde F_i cubren Y, $\forall i = 1, 2, 3, \cdots$, y $\forall x \in X$,*

$$\lim_{i\to\infty} diam(F_i(x)) = 0. \tag{2.3}$$

Entonces existe una selección continua sobreyectiva, $f : X \longrightarrow Y$.

Demostración: Empezamos definiendo una selección continua de la función multivaluada F_∞.

$$f(x) = \text{ único punto } y_k \text{ de } F_\infty.$$

Veremos que esta función está bien definida, luego analizamos su continuidad y finalmente se estudia la sobreyectividad.

- Sobre si $f(x)$ está bien definida: como $F_\infty(x) \neq \phi$, supongamos que existen dos puntos distintos y_1 y y_2 en $F_i(x)$ para todo i. Pero,

  $$0 < d(y_1, y_2) < diam(F_i(x)).$$

  Entonces se llega a una contradicción de la hipótesis de que

  $$\lim_{i\to\infty} diam(F_i(x)) = 0.$$

  Por lo tanto $f(x)$ está bien definida.

- Analizamos la continuidad de $f(x)$: por la Definición 2.5, F_∞ es semicontinua superiormente y por la Proposición 2.1-(ii) se obtiene que $f(x)$ es continua.

- Para culminar demostraremos que $f(x)$ es sobreyectiva: sea $y \in Y$, entonces $y \in F_\infty(x)$ para algún $x \in X$. Como $F_\infty(x) = \{f(x)\}$, entonces $y = f(x)$.

Por lo tanto, el teorema general de funciones queda demostrado. □

3. Selección de Peano. La construcción de la selección de Peano se basa en el principio de selección de conjuntos, donde establece que, dado un conjunto de conjuntos disjuntos no vacíos, se puede seleccionar un elemento de cada conjunto a la vez. En el contexto de funciones multivaluadas, esto significa que se seleccionará un valor único para cada elemento del dominio.

Proposición 3.1. *Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, donde (D_i, d) son espacios métricos compactos, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, además $D_i \cap D_{i+1} \neq \phi$, para $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Entonces existe función multivaluada $F : [0, 1] \twoheadrightarrow 2^Y$ talque F cubre a Y y para cada $t \in [0, 1]$ se tiene que:*

$$F(t) = D_i \ \ o \ \ D_i \cup D_{i+1} \ \ \textit{para algún} \ \ i. \tag{3.1}$$

Demostración: Definimos,

$$F(t) = \begin{cases} D_1, & si \ \ t \in [0, t_1\rangle, \\ D_1 \cup D_2, & si \ \ t \in t = t_1, \\ D_2, & si \ \ t \in \langle t_1, t_2\rangle, \\ D_2 \cup D_3, & si \ \ t \in t = t_2, \\ & \vdots \\ D_k, & si \ \ t \in \langle t_{k-1}, t_k\rangle, \\ D_k \cup D_{k+1}, & si \ \ t = t_k, \\ & \vdots \\ D_{n-1} \cup D_n, & si \ \ t = t_{n-1}, \\ D_n, & si \ \ t \in \langle t_{n-1}, t_n], \end{cases}$$

Demostraremos que F es semicontinua superiormente.

- Para $t = 0$, y $G \in \tau_Y$ (un abierto en Y), consideramos:
$$D_1 = F(0) \subset G, \textit{ se define } F(t) = D_1, \forall t \in [0, t_1\rangle.$$
- Para $t = t_1$, y $G \in \tau_Y$ (un abierto en Y), consideramos:
$$D_1 \cup D_2 = F(t_1) \subset G, \textit{ se define } F(t) = D_1 \cup D_2, \textit{ para } t = t_1.$$

$\vdots$

- Para $t = t_{n-1}$, y $G \in \tau_Y$ (un abierto en Y), consideramos:
$$D_{n-1} \cup D_n = F(t_{n-1}) \subset G, \textit{ se define } F(t) = D_{n-1} \cup D_n, \textit{ para } t = t_{n-1}.$$
- Para $t = t_n = 1$, y $G \in \tau_Y$ (un abierto en Y), consideramos:
$$D_n = F(t_n) \subset G, \textit{ se define } F(t) = D_n, \textit{ para } t \in \langle t_{n-1}, t_n].$$

Obteniéndose la semicontuindad superior de la función multivaluada $F : [0, 1] \twoheadrightarrow 2^Y$.
Para finalizar, demostraremos que $F([0, 1])$ cubre Y.
$$[0, 1] = [0, t_1\rangle \cup \{t_1\} \cup \langle t_1, t_2\rangle \cup \{t_2\} \cup \cdots \cup \{t_{n-1}\} \cup \langle t_{n-1}, 1]$$
A seeguir veremos que $\bigcup_{t\in[0,1]} F(t) = Y$. Para lo cual se usará la doble inclusión.

- Sea
$$y \in \bigcup_{t\in[0,1]} F(t).$$
Resulta que para algún i:
$$y \in D_i \ \ o \ \ y \in D_i \cup D_{i+1}.$$
Entonces $y \in Y$.
- Ahora sea $y \in Y$, entonces $y \in D_i$ para algún i. Así $y \in F(t)$ para algún $t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle$ o $t = t_i$. Entonces
$$y \in \bigcup_{t\in[0,1]} F(t).$$

Por lo tanto, $\bigcup_{t\in[0,1]} F(t) = Y$. □
Por intermedio de la Proposición 3.1, demostraremos la hipótesis de investigación.
Teorema 3.1. *Para la función multivaluada*
$$F(t) = \begin{cases} D_1, & si \;\; t \in [0, t_1\rangle, \\ D_1 \cup D_2, & si \;\; t \in t = t_1, \\ D_2, & si \;\; t \in \langle t_1, t_2\rangle, \\ D_2 \cup D_3, & si \;\; t \in t = t_2, \\ & \vdots \\ D_k, & si \;\; t \in \langle t_{k-1}, t_k\rangle, \\ D_k \cup D_{k+1}, & si \;\; t = t_k, \\ & \vdots \\ D_{n-1} \cup D_n, & si \;\; t = t_{n-1}, \\ D_n, & si \;\; t \in \langle t_{n-1}, t_n], \end{cases}$$
Existe una función sobreyectiva de Peano
$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1].$$

Demostración: Iniciamos dividiendo el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en cuatro cuadrados cerrados,

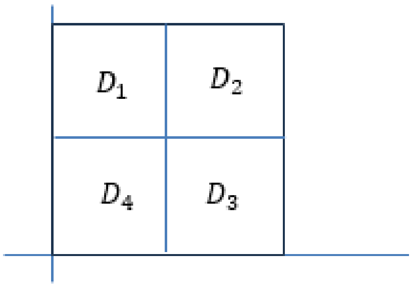

Figura 3.1: División del cuadrado en cuatro partes iguales.

$$D_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$
$$D_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$
$$D_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$
$$D_4 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Definimos $F_1 : [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]\times[0,1]}$, como

$$\left.\begin{aligned} F_1(0) = &\quad \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \times \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \\ F_1(1) = &\quad \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \times \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \\ F_1\left(\tfrac{i}{4}\right) = &\quad D_i \cup D_{i+1},\ i = 1,2,3, \\ F_1(t) = &\quad D_i,\ si\ t \in \left\langle \tfrac{i-1}{4}, \tfrac{i}{4} \right\rangle,\ i = 1,2,3,4. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

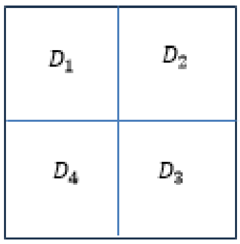

Figura 3.2: inicio de evaluación de F_1.

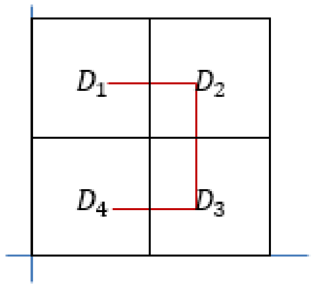

Figura 3.3: Imagenes de $F_1(t)$.

F_1 es semicontinua superiormente.
Ahora dividimos cada D_i en cuatro cuadrado congruentes D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}, D_{i4}, tales que cada D_{ij}, D_{ij+1}, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3$, tengan una arista en común.

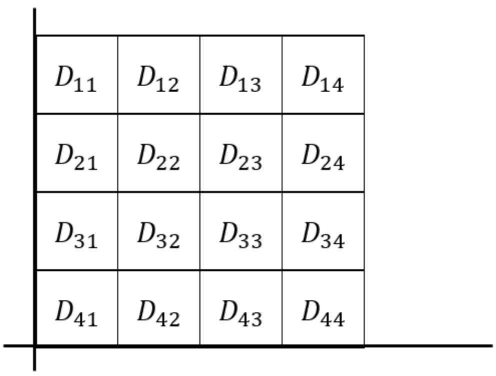

Figura 3.4: División del cuadrado en dieciséis partes iguales.

Se define F_2 sobre $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, de la siguiente manera:

$$F_2(0) = D_{i1},\ i = 1, 2, 3,$$
$$F_2\left(\frac{1}{4}\right) = D_{14} \cup D_{21},$$
$$F_2\left(\frac{j}{16}\right) = D_{1j} \cup D_{1,j+1},\ j = 1, 2, 3,$$
$$F_2(t) = D_{1j},\ si\ t \in \left\langle \frac{j-1}{16}, \frac{j}{16} \right\rangle,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

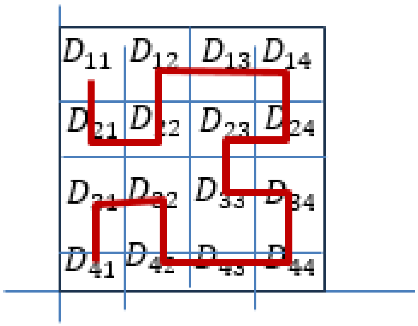

Figura 3.5: Imagenes de $F_2(t)$.

De forma similar se define F_2 para los intervalos $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$,$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Nuevamente F_2 es una función multívoca semicontinua superiormente en $[0, 1]$. También

$$[0, 1] \times [0, 1] = \bigcup_{t \in [0,1]} F_(t)$$

Además, $\forall t \in [0, 1]$, $F_1(t) \supset F_2(t)$ y $dim(F_1(t)) \leq 1$ y $dim(F_2(t)) \leq \frac{1}{2}$.
Del mismo modo se definen las funciones multivaluadas $F_n : [0, 1] \to 2^{[0,1][0,1]}$, que satisface:

- F_n es semicontinua superiormente para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $F_n(t) \supset F_{n+1}(t)$, para cada $t \in [0, 1]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $\bigcup_{t \in [0,1]} F_n(t) = [0, 1] \times [0, 1]$.
- $\lim\limits_{n \to \infty} diam(F_n(t)) = 0$.
- Entonces por el teorema general de funciones multivaluadas, existe una función sobreyectiva:
$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1].$$

□

4. Conclusiones.

- Sean X y Y dos espacios métricos compactos y
$$F_i : X \longrightarrow 2^Y,\ \ i = 1, 2, 3, \cdots,$$
funciones multivaluadas, donde
$$F_i(x) = Y,\ \ \forall x \in X,\ \ y\text{ -}\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$$
una sucesión decreciente, con
$$\lim_{i \to \infty} diam(F_i(x)) = 0.$$
Entonces existe una función sobreyectiva $f : X \to Y$, $f(x) \in F(x)$, $\forall x \in X$.

- Basada en la conclusión anterior, Si $Y = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, donde (D_i, d) son espacios métricos compactos, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, además $D_i \cap D_{i+1} \neq \phi$, para $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Entonces existe función multivaluada $F : [0, 1] \twoheadrightarrow 2^Y$ talque F cubre a Y y para cada $t \in [0, 1]$ se tiene que:

$$F(t) = D_i \;\; o \;\; D_i \cup D_{i+1} \;\; para\ algún\ \ i.$$

Contribución de autores . La contribución de los autores fue la siguiente: RD. en la concepción y actualización del trabajo, WB. en la descripción de la función de Peano, LA. en la metodlogia y justificación el tema.

Financiamiento . Este trabajo no tiene financiamiento externo.

Conflictos de interés. Los autores Declaran no tener conflicto de interes.

ORCID and License

Rosario D. Delgado V. https://orcid.org/0000-0001-7584-7634
Waymer A. Barreto V. https://orcid.org/0000-0001-6726-0462
Teodoro L. Acevedo T. https://orcid.org/0000-0001-7630-0251

Referencias

[1] Frankowska H, Aubin L. Set-Valued Analysis. ed. Birkhauser Boston, Paris, MA, 1990.

[2] Babiarz A., and Niezabitowski M. Controllability Problem of Fractional Neutral Systems. Mathematical Problems in Engineering. 2017; vol. 1:15.

[3] Got A. Gunter M. Análisis de Intervalos: Teoría y Aplicaciones.2000, ELSEVIER, 2000; 121(1 y 2):421-464.

[4] Jun Y. and, Jing F. Multi-period medical diagnosis method using a single valued neutrosophic similarity measure based on tangent function. Computer Methods and Programs in Biomedicine. 2016; 123:142-149.

[5] Medina S. Teoremas de punto fijo para multifunciones y apliación al equilibrio Walrasiano, Universidad de Murgia, Tesis de MASTER de Matemática avanzada. 2009.

[6]] Kattov, M. "Felix Hausdorff," in Dictionary of Scientific Biography. Volume VI. Edited by Charles Coulston Gillispie. New York: Charles Scribner's Sons, 1974, pp. 176–177.

[7] Aubin JP, Frankowska H. The value does not exist! A motivation for extremal analysis, Probability, Rev. American Institute of Mathematics Sciences, 2022, 7(3):195-214.

[8] Painlevé P. La théorie des systèmes différentiels, Sur les fonctions multivalentes. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1896.

[9] Bouligand H. La mathèmatique et son unité. 1948; 1(8):311.

[10] Kuratowski K. Introduction a la theorie des ensembles et a la topologie. Paris, Francia: ed. Enseignement Mathematique, 1966.

[11] Castaing C, Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Springer, Berlin, 1982.

[12] Libesking S. Jumbra I. Euclidean, No-Euclidean, and Transformationald Geometry. Ed. Birkhauser, 2024.

[13] Aizenberg I, Aizenberg N and Vandewalle J. Multi-Valued and Universal Binary Neurons: Theory, Learning and Applications. Springer, Media.B.V. Eslovaquia, 2000.

[14] Cantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1878; 84:242-258.

[15] Sagan H. Space-Filling Curves, Ed. Springer-Verlan, New York, 1994.

[16] Román T, Mendieta J, Cantor J. Una construcción alternativa de la curva de Sierpinski. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 2018; 18(2):1-14.

[17] Kaczynski T. Los mapas multivaluados como herramienta para el modelado y la rigurosidad numérica. 2008; 4:151-176.

[18] Ordoñez N. Los Hiperespacios de subcontinuos Regulares y Magros. UNAM-Dirección General de Biblioteca, México, 2013.

[19] Márquez L. Introducción a los continuos de Peano. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2017.