Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(1):30-41.

Prime submodules and maximal submodules in the idealization of a module

Submódulos primos y submódulos maximales en la idealización de un módulo

Alex Molina, Mario Santiago and Juan Villanueva

Received, Feb. 01, 2024; Accepted, Jul. 11, 2024; Published, Jul. 29, 2024

How to cite this article:
Molina A., Santiago M., Villanueva J. *Prime submodules and maximal submodules in the idealization of a module*. Selecciones Matemáticas. 2024;11(1):30–41. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.01.03

Abstract

This paper describes certain types of prime submodules and maximal submodules that are found within the idealization of a module. As a consequence of this, it is concluded that every module over a commutative ring with identity element has an extension whose prime spectrum is nonempty.
Keywords . Rings, prime spectrum of a module, idealization of a module, modules, producto directo, maximal submodule, prime submodule.

Resumen

En este artículo se describe ciertos tipos de submódulos primos y submódulos maximales que se encuentran dentro de la idealización de un módulo. Como consecuencia de esto, se concluye que todo módulo sobre un anillo conmutativo con elemento identidad posee una extensión cuyo espectro primo es no vacío.
Palabras clave. Anillos, espectro primo de un módulo, idealización de un módulo, módulos, producto directo, submódulo maximal, submódulo primo.

1. Introducción. En [1], se introduce el concepto de *submódulo primo* de un módulo sobre un anillo arbitrário, como una generalización del concepto de ideal primo de un anillo. Posteriormente, en [2], [3] y [4], son estudiados en módulos sobre un anillo conmutativo con elemento identidad. Esta clase de submódulos primos hacen parte de una línea de investigación activa.

El *espectro primo* de un módulo es el conjunto de todos sus submódulos primos. Como sucede en los anillos, el comportamiento topológico del espectro primo de un módulo determina el comportamiento algebraico del módulo en cuestión y viceversa, ver por ejemplo [5] y [6].

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Ciudad Universitaria, Lima, Perú. (amolinas@unmsm.edu.pe).
†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Ciudad Universitaria, Lima, Perú. (msantiagos@unmsm.edu.pe).
‡Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Campus Universitário do Araguaia, Universidade Federal de Mato Grosso, 78605-091, Barra do Garças, MT, Brasil. **Correspondence author** (vz_juan@yahoo.com.br).

A lo largo de este artículo, A denotará un anillo conmutativo con elemento identidad 1_A diferente del elemento neutro aditivo 0_A, y todos los A-módulos son unitarios.

La *idealización* de un A-módulo es una técnica introducida por Nagata en [7], el cual permite pasar problemas relacionados a submódulos de un A-módulo M a problemas de ideales de un anillo, más precisamente a la idealización de M, y de manera recíproca permite generalizar resultados de anillos a módulos. En [8], se caracterizan los ideales primos e ideales maximales de la idealización, los cuales serán utilizados en este trabajo.

El propósito de este artículo, es caracterizar ciertos submódulos primos y submódulos maximales de la idealización de un módulo. Utilizando esta técnica, se obtendrá un módulo con espectro primo no vacío, el cual es una extensión de módulo dado.

Después de la introducción, el resto de este artículo consta de cinco secciones, organizadas de la siguiente manera: En la Sección 2, se presenta algunos conceptos y resultados que serán utilizados en este artículo. Esta sección abarca tres subsecciones distribuidos del siguiente modo: En la Subsección 2.1, se presenta las definiciones de submódulos maximales y submódulos primos. En la Subsección 2.2, se describe ciertos submódulos en el producto directo de un anillo por un módulo sobre el mismo anillo. En la Subsección 2.3, se describe sobre la idealización de un módulo. En la Sección 3, se presenta algunos resultados sobre el ideal cociente en el producto directo de dos módulos. En la Sección 4, se muestran familias de submódulos primos en la idealización de un módulo formado por ideales de la idealización. En la Sección 5, se presentan ejemplos de submódulos primos en la idealización de un módulo, los cuales no son ideales de la idealización. Finalmente, en la Sección 6, se exibe un módulo con espectro primo no vacío que es una extensión de un módulo dado.

2. Notación y preliminares. En esta sección, se introduce notaciones y algunos resultados preliminares sobre submódulos primos, el producto directo de un anillo por un módulo sobre el mismo anillo y la idealización de un módulo.

2.1. Submódulos primos y submódulos maximales. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que el submódulo $\mathfrak{M}$ de M es un *submódulo maximal*, si $\mathfrak{M}$ es un elemento maximal, con respecto a la inclusión, del conjunto de submódulos propios de M.

Para cualquier submódulo N de un A-módulo M y cualquier ideal I de A, el *submódulo extendido de I por* N, denotado por IN, es definido como el submódulo de M generado por $\{an :\ a \in I,\ n \in N\}$. En particular, si $I = \langle a \rangle$ para algún $a \in A$, se denota IN por aN. En este caso, $aN = \{an :\ n \in N\}$.

Para cualesquiera submódulos N y K de un A-módulo M, el *ideal cociente de* N *por* K, denotado por $(N :_A K)$, es definido como el conjunto de todos los elementos a en A tales que $aK \subset N$. De hecho, este es un ideal de A.

Lema 2.1. *Sean* M *y* N *dos módulos sobre un anillo* A *y* $f : M \longrightarrow N$ *un homomorfismo de módulos. Si* K *y* P *son submódulos de* M, *entonces* $(K :_A P) \subset (f(K) :_A f(P))$.

Demostración: Dado $r \in (K :_A P)$, se tiene que $rP \subset K$. De esta forma, si $m \in P$ entonces $rm \in K$. Luego, $rf(m) = f(rm) \in f(K)$. Por lo tanto, $rf(P) \subset f(K)$, y así $r \in (f(K) :_A f(P))$. Esto muestra que $(K :_A P) \subset (f(K) :_A f(P))$. □

Proposición 2.1. *Sean* M *y* N *dos módulos sobre un anillo* A *y* $f : M \longrightarrow N$ *un homomorfismo de módulos. Si* K *es un submódulo de* M *tal que* $\ker f \subset K$, *entonces*

$$(K :_A P) = (f(K) :_A f(P)),$$

para todo submódulo P *de* M.

Demostración: Por el Lema 2.1, es suficiente mostrar que $(f(K) :_A f(P)) \subset (K :_A P)$. De hecho, dado $r \in (f(K) :_A f(P))$, se tiene que $rf(P) \subset f(K)$. De esta forma, si $m \in P$ entonces $f(rm) = rf(m) \in f(K)$. Luego, $f(rm) = f(n)$, para algún $n \in K$. De donde, $f(rm - n) = 0_N$ y, por lo tanto, $rm - n \in \ker f$. Como $\ker f \subset K$ y $n \in K$, concluyese que $rm \in K$. Por lo tanto, $rP \subset K$, y así $r \in (K :_A P)$. Esto muestra que $(f(K) :_A f(P)) \subset (K :_A P)$. □

Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que el submódulo propio $\mathfrak{P}$ de M es un *submódulo primo* si, para cualesquiera $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am \in \mathfrak{P}$, implique que $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$ o $m \in \mathfrak{P}$.

Se define el *espectro primo de* M, denotado por $\mathrm{Spec}_A(M)$, como el conjunto de todos los submódulos primos de M.

El siguiente resultado es el teorema fundamental de los submódulos primos, el cual proporciona una caracterización de los submódulos primos.

Teorema 2.1 ([9, Lema 1]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{P}$ es un submódulo de M, entonces $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M si, y solamente si, $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A y el $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-módulo $M/\mathfrak{P}$ es sin torsión.*

2.2. Ciertos submódulos en el producto directo $A \times M$. En esta subsección se presentan dos tipos de submódulos del producto directo $A \times M$, donde A es un anillo y M es un A-módulo, los cuales serán utilizados en las próximas secciones.

Sean M y N dos módulos sobre un anillo A, recuérdese que el *producto directo* de M y N es el A-módulo $M \times N$, cuyas operaciones de adición y multiplicación por escalar son definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(m,n)+(m',n') &= (m+m',n+n'),\\ a(m,n) &= (am,an),\end{aligned}$$

para todos $(m,n),(m',n') \in M \times N$ y $a \in A$. Las aplicaciones naturales

$$\begin{array}{rccc} \iota_M: & M & \longrightarrow & M\times N \\ & m & \longmapsto & (m,0_N) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} \iota_N: & N & \longrightarrow & M\times N \\ & n & \longmapsto & (0_M,n) \end{array}$$

son homomorfismos de A-módulos inyectivos tales que $\iota_M(M) = M \times \langle 0_N\rangle$ y $\iota_N(N) = \langle 0_M\rangle \times N$. Estas aplicaciones son llamadas *inclusión en la primera componente* e *inclusión en la segunda componente*, respectivamente.

Asimismo, las proyecciones

$$\begin{array}{rccc} \pi_M: & M\times N & \longrightarrow & M \\ & (m,n) & \longmapsto & m \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} \pi_N: & M\times N & \longrightarrow & N \\ & (m,n) & \longmapsto & n \end{array}$$

son homomorfismos de A-módulos sobreyectivos tales que $\ker \pi_M = \langle 0_M\rangle \times N$ y $\ker \pi_N = M \times \langle 0_N\rangle$. Estas aplicaciones son llamadas *proyección en la primera componente* e *proyección en la segunda componente*, respectivamente.

Tanto las imágenes de las inclusiones como los núcleos de las proyecciones son submódulos del A-módulo $M \times N$.

Lema 2.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $\langle 0_A\rangle \times M$, entonces*

$$\pi_A(\mathcal{L}) = \iota_A^{-1}(\mathcal{L}).$$

Demostración: Dado $a \in \pi_A(\mathcal{L})$, existe $m \in M$ tal que $(a,m) \in \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $\langle 0_A\rangle \times M$, se tiene que $(0_A,m) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$(a,0_M) = (a,m) - (0_A,m) \in \mathcal{L}.$$

Luego, $a \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\pi_A(\mathcal{L}) \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$. Para establecer la inclusión contraria, sea $a \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$. Entonces, $(a,0_M) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto, $a \in \pi_A(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \subset \pi_A(\mathcal{L})$. $\square$

Proposición 2.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea $\mathcal{L}$ un submódulo de $A\times M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\langle 0_A\rangle \times M \subset \mathcal{L}$;

(2) $\mathcal{L} = \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M$;

(3) $\mathcal{L} = \pi_A(\mathcal{L}) \times M$.

Demostración: Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). Supóngase que $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A\times M$

conteniendo $\langle 0_A\rangle \times M$. Entonces, dado $(a,m) \in \mathcal{L}$, se tiene que $(0_A, m) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$(a, 0_M) = (a,m) - (0_A, m) \in \mathcal{L}.$$

Luego, $a \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$. Por lo tanto, $(a,m) \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M$. Esto muestra que $\mathcal{L} \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M$. Para establecer la inclusión contraria, sea $(a,m) \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M$. Entonces, $a \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $(a, 0_M) \in \mathcal{L}$. Por otro lado, como $(0_A, m) \in \mathcal{L}$, concluyese que

$$(a,m) = (a, 0_M) + (0_A, m) \in \mathcal{L}.$$

Esto muestra que $\iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M \subset \mathcal{L}$.

Ahora se probará que (2) implica (3). Supóngase que $\mathcal{L} = \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M$. Como $\iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ es un submódulo de A, sigue que $\langle 0_A\rangle \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $\langle 0_A\rangle \times M \subset \mathcal{L}$. Entonces, por el Lema 2.2, $\pi_A(\mathcal{L}) = \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$. De esta forma $\mathcal{L} = \pi_A(\mathcal{L}) \times M$.

Finalmente, se probará que (3) implica (1). Supóngase que $\mathcal{L} = \pi_A(\mathcal{L}) \times M$. Como $\pi_A(\mathcal{L})$ es un submódulo de A, sigue que $\langle 0_A\rangle \subset \pi_A(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $\langle 0_A\rangle \times M \subset \mathcal{L}$. $\square$

Lema 2.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $A \times \langle 0_M\rangle$, entonces*

$$\pi_M(\mathcal{L}) = \iota_M^{-1}(\mathcal{L}).$$

Demostración: Dado $m \in \pi_M(\mathcal{L})$, existe $a \in A$ tal que $(a,m) \in \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $A \times \langle 0_M\rangle$, se tiene que $(a, 0_M) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$(0_A, m) = (a,m) - (a, 0_M) \in \mathcal{L}.$$

Luego, $m \in \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\pi_M(\mathcal{L}) \subset \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Para establecer la inclusión contraria, sea $m \in \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Entonces, $(0_A, m) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto, $m \in \pi_M(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\iota_M^{-1}(\mathcal{L}) \subset \pi_M(\mathcal{L})$. $\square$

Proposición 2.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea $\mathcal{L}$ un submódulo de $A \times M$. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $A \times \langle 0_M\rangle \subset \mathcal{L}$;

(2) $\mathcal{L} = A \times \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$;

(3) $\mathcal{L} = A \times \pi_M(\mathcal{L})$.

Demostración: Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). Supóngase que $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $A \times \langle 0_M\rangle$. Entonces, dado $(a,m) \in \mathcal{L}$, se tiene que $(a, 0_M) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$(0_A, m) = (a,m) - (a, 0_M) \in \mathcal{L}.$$

Luego, $m \in \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Por lo tanto, $(a,m) \in A \times \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\mathcal{L} \subset A \times \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Para establecer la inclusión contraria, sea $(a,m) \in A \times \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Entonces, $m \in \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $(0_A, m) \in \mathcal{L}$. Por otro lado, como $(a, 0_M) \in \mathcal{L}$, concluyese que

$$(a,m) = (0_A, m) + (a, 0_M) \in \mathcal{L}.$$

Esto muestra que $A \times \iota_M^{-1}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

Ahora se probará que (2) implica (3). Supóngase que $\mathcal{L} = A \times \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. Como $\iota_M^{-1}(\mathcal{L})$ es un submódulo de M, sigue que $\langle 0_M\rangle \subset \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $A \times \langle 0_M\rangle \subset \mathcal{L}$. Entonces, por el Lema 2.3, $\pi_M(\mathcal{L}) = \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$. De esta forma $\mathcal{L} = A \times \pi_M(\mathcal{L})$.

Finalmente, se probará que (3) implica (1). Supóngase que $\mathcal{L} = A \times \pi_M(\mathcal{L})$. Como $\pi_M(\mathcal{L})$ es un submódulo de M, sigue que $\langle 0_M\rangle \subset \pi_M(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $A \times \langle 0_M\rangle \subset \mathcal{L}$. $\square$

2.3. La idealización de un módulo. Sean A un anillo y M un A-módulo. Al producto directo $A \times M$, se dota de una estructura multiplicativa, de la siguiente manera:

$$(a, m) \cdot (b, n) = (ab, an + bm),$$

para todos (a, m) y (b, n) en $A \times M$. De esta forma, el producto directo $A \times M$ se convierte en una A-álgebra conmutativa con elemento identidad $(1_A, 0_M)$. Esta A-álgebra es llamada de *idealización de* M y se le denotará por $A \ltimes M$.

Observación 2.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Para cualesquiera $r \in A$ y $(a, m) \in A \ltimes M$, $r(a, m) = (r, 0_M) \cdot (a, m)$. En efecto, dados $r \in A$ y $(a, m) \in A \ltimes M$, se tiene que*

$$r(a, m) = (ra, rm) = (r, 0_M) \cdot (a, m).$$

Observación 2.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{I}$ es un ideal de $A \ltimes M$, entonces $\mathcal{I}$ es un submódulo de $A \ltimes M$. En efecto, es suficiente probar que $\mathcal{I}$ es absorbente con respecto a la multiplicación escalar. De hecho, dados $r \in A$ y $(a, m) \in \mathcal{I}$, se tiene que $(r, 0_M) \cdot (a, m) \in \mathcal{I}$, ya que $\mathcal{I}$ es un ideal de $A \ltimes M$. Entretanto, por la Observación 2.1, $r(a, m) = (r, 0_M) \cdot (a, m)$. Luego, $r(a, m) \in \mathcal{I}$ y, por lo tanto, $\mathcal{I}$ es un submódulo de $A \ltimes M$.*

La recíproca de la Observación 2.2 no es necesariamente cierto. En efecto, considérese A un anillo y a un elemento que no sea una unidad en A. Se tiene que $A \times \langle a \rangle$ es un submódulo de $A \ltimes A$. Entretanto, $A \times \langle a \rangle$ no es un ideal de $A \ltimes A$. De hecho, se tiene que $(1_A, 1_A - a) \in A \ltimes A$ y $(1_A, a) \in A \times \langle a \rangle$, pero

$$(1_A, 1_A - a) \cdot (1_A, a) = (1_A, 1_A) \notin A \times \langle a \rangle,$$

ya que $\langle a \rangle \neq A$.

La inclusión en la primera componente $\iota_A : A \longrightarrow A \ltimes M$ es un homomorfismo de A-álgebras inyectivo, y la proyección en la primera componente $\pi_A : A \ltimes M \longrightarrow A$ es un homomorfismo de A-álgebras sobreyectivo.

Siendo ι_A un homomorfismo de anillos, la imagen $\iota_A(B)$ es un subanillo de $A \ltimes M$, para todo subanillo B de A. Asimismo, siendo ι_A un homomorfismo de A-módulos, la imagen inversa $\iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ es un submódulo de A y $\ker \iota_A \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$, para todo submódulo $\mathcal{L}$ de $A \ltimes M$. En particular, la imagen inversa $\iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ es un ideal de A, para todo submódulo $\mathcal{L}$ de $A \ltimes M$.

También, siendo la inclusión en la segunda componente $\iota_M : M \longrightarrow A \ltimes M$ un homomorfismo de A-módulos, la imagen inversa $\iota_M^{-1}(\mathcal{L})$ es un submódulo de M y $\ker \iota_M \subset \iota_M^{-1}(\mathcal{L})$, para todo submódulo $\mathcal{L}$ de $A \ltimes M$.

De la misma manera, siendo π_A un homomorfismo de anillos, la imagen inversa $\pi_A^{-1}(I)$ es un ideal de $A \ltimes M$ y $\ker \pi_A \subset \pi_A^{-1}(I)$, para todo ideal I de A. En particular, por la Observación 2.2, la imagen inversa $\pi_A^{-1}(I)$ es un submódulo de $A \ltimes M$, para todo ideal I de A.

Observación 2.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M, entonces $\iota_M(N)$ es un ideal de $A \ltimes M$. En efecto, es suficiente probar que $\iota_M(N)$ es absorbente con respecto a la multiplicación. De hecho, dados $(a, m) \in A \ltimes M$ y $n \in N$, se tiene que $an \in N$ y*

$$(a, m) \cdot \iota_M(n) = (a, m) \cdot (0_A, n) = (0_A, an) = \iota_M(an) \in \iota_M(N).$$

Por lo tanto, $\iota_M(N)$ es un ideal de $A \ltimes M$.

Por la Observación 2.3, $\iota_M(M)$ es un ideal de $A \ltimes M$. También, se tiene que $\iota_A(A)$ es un subanillo de $A \ltimes M$. De esta forma, se consigue incrustar el anillo A como un subanillo del anillo $A \ltimes M$ y el módulo M como un ideal de este. Esta técnica fue utilizada por Nagata en [7]. En particular, concluyese que el A-módulo $A \ltimes M$ es una extensión del A-módulo M.

A continuación, se presenta un resultado que proporciona una caracterización de los ideales formados por un producto directo en la idealización de un módulo, el cual se encuentra en [8].

Teorema 2.2 ([8, Teorema 3.1]). *Sean A un anillo y M un A-módulo.*

(1) *Si I es un ideal de A y N es un submódulo de M, entonces $I \times N$ es un ideal de $A \ltimes M$ si, y solamente si, $IM \subset N$.*

(2) *Si $\mathcal{I}$ es un subconjunto de $A \ltimes M$, entonces $\mathcal{I}$ es un ideal de $A \ltimes M$ conteniendo $\langle 0_A \rangle \times M$ si, y solamente si, $\mathcal{I} = I \times M$, para algún ideal I de A.*

Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo propio de M, por el ítem (1) del Teorema 2.2, se tiene que el submódulo $A \times N$ de $A \ltimes M$ no es un ideal de $A \ltimes M$, ya que $AM = M \not\subset N$.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal de $A \ltimes M$. Si $\mathcal{I} = I \times N$, donde I es un ideal de A y N es un submódulo de M, el ideal $\mathcal{I}$ se denotará por $I \ltimes N$. Por ejemplo, por el ítem (1) del Teorema 2.2, $I \ltimes M$ es un ideal de $A \ltimes M$, ya que $IM \subset M$, para todo ideal I de A.

Observación 2.4. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \ltimes M$ conteniendo $\langle 0_A \rangle \ltimes M$, entonces $\mathcal{L}$ es un ideal de $A \ltimes M$. En efecto, como $\langle 0_A \rangle \ltimes M \subset \mathcal{L}$, por la Proposición 2.2, se tiene que $\mathcal{L} = \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \times M$. Siendo $\iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ un ideal de A, concluyese que $\mathcal{L}$ es un ideal de $A \ltimes M$.*

El siguiente resultado es un corolario del Teorema 2.2, el cual proporciona una caracterización de los ideales primos y maximales en la idealización de un módulo.

Teorema 2.3 ([8, Teorema 3.2]). *Sean A un anillo y M un A-módulo.*

(1) *Si $\mathfrak{M}$ es un subconjunto de $A \ltimes M$, entonces $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal si, y solamente si, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \ltimes M$, para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.*

(2) *Si $\mathfrak{P}$ es un subconjunto de $A \ltimes M$, entonces $\mathfrak{P}$ es un ideal primo si, y solamente si, $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \ltimes M$, para algún ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.*

3. Ideal cociente en el producto directo.

Lema 3.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M e I y J son ideales de A, entonces $(I \times N :_A J \times K) \subset (N :_A K)$.*

Demostración: Supóngase que $r \in (I \times N :_A J \times K)$. Entonces, $r(J \times K) \subset I \times N$. Por lo tanto, dado $m \in K$, se tiene que $(0_A, rm) = r(0_A, m) \in I \times N$. De donde, $rm \in N$, y así $r \in (N :_A K)$. Esto muestra que $(I \times N :_A J \times K) \subset (N :_A K)$. □

Proposición 3.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si I y J son ideales de A tales que $J \subset I$, entonces*

$$(I \times N :_A J \times K) = (N :_A K),$$

para cualesquiera submódulos N y K de M.

Demostración: Por el Lema 3.1, es suficiente mostrar que $(N :_A K) \subset (I \times N :_A J \times K)$. En efecto, dado $r \in (N :_A K)$, se tiene que $rK \subset N$. Luego, para cualquier $(a, m) \in J \times K$, se tiene que $r(a, m) = (ra, rm) \in I \times N$ (ya que $J \subset I$). Por lo tanto, $r(J \times K) \subset I \times N$, y así $r \in (I \times N :_A J \times K)$. Esto muestra que $(N :_A K) \subset (I \times N :_A J \times K)$. □

Corolario 3.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M e I es un ideal de A, entonces*

$$(I \times N :_A I \times K) = (N :_A K).$$

Demostración: Es inmediato de la Proposición 3.1. □

Lema 3.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M e I es un ideal de A, entonces $(I \times N :_A A \times K) \subset I$.*

Demostración: Supóngase que $r \in (I \times N :_A A \times K)$. Entonces, $r(A \times K) \subset I \times N$ y, por lo tanto, $(r, 0_M) = r(1_A, 0_M) \in I \times N$. De donde, $r \in I$, y así $(I \times N :_A A \times K) \subset I$. □

Teorema 3.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M e I es un ideal de A, entonces $I \subset (I \times N :_A A \times K)$ si, y solamente si, $IK \subset N$. En este caso,*

$$(I \times N :_A A \times K) = I.$$

Demostración: Supóngase inicialmente que $I \subset (I \times N :_A A \times K)$. Sean $a \in I$ y $m \in K$. Se probará que $am \in N$. En efecto, como $a \in I \subset (I \times N :_A A \times K)$, se tiene que $a(A \times K) \subset I \times N$ y, por lo tanto,

$$(0_A, am) = a(0_A, m) \in I \times N.$$

De donde, $am \in N$. Esto muestra que $IK \subset N$.

Recíprocamente, supóngase que $IK \subset N$. Luego, dado $r \in I$, para cualquier $(a,m) \in A \times K$, se tiene que $rm \in N$. Entonces,

$$r(a,m) = (ra, rm) \in I \times N.$$

Por lo tanto, $r(A \times K) \subset I \times N$, y así $r \in (I \times N :_A A \times K)$. Esto muestra que $I \subset (I \times N :_A A \times K)$.

Finalmente, por el Lema 3.2, concluyese que $(I \times N :_A A \times K) = I$. □

El siguiente teorema proporciona otra caracterización de los ideales formados por un producto directo en la idealización de un módulo.

Teorema 3.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea I un ideal de A y N un submódulo de M. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $I \times N$ *es un ideal de* $A \ltimes M$;

(2) $IM \subset N$;

(3) $I \subset (I \times N :_A A \ltimes M)$.

En este caso,

$$(I \ltimes N :_A A \ltimes M) = I.$$

Demostración: Se probará que (1) es equivalente a (2) y (2) es equivalente a (3). Por el Teorema 2.1, se tiene que (1) es equivalente a (2), y por el Teorema 3.1, se tiene que (2) es equivalente a (3).

Finalmente, por el Teorema 3.1, concluyese que $(I \ltimes N :_A A \ltimes M) = I$. □

Lema 3.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$, entonces*
$(\mathcal{L} :_A A \times M) \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$.

Demostración: Supóngase que $r \in (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Entonces, $r(A \times M) \subset \mathcal{L}$ y, por lo tanto, $(r, 0_M) = r(1_A, 0_M) \in \mathcal{L}$. De donde, $r \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$, y así $(\mathcal{L} :_A A \times M) \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$.
□

Proposición 3.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$, entonces $\iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} :_A A \times M)$ si, y solamente si, $\langle 0_A \rangle \times \iota_A^{-1}(\mathcal{L})M \subset \mathcal{L}$. En este caso*,

$$(\mathcal{L} :_A A \times M) = \iota_A^{-1}(\mathcal{L}).$$

Demostración: Supóngase inicialmente que $\iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Sea $m \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})M$. Se probará que $(0_A, m) \in \mathcal{L}$. En efecto, como $m \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})M$, existen $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ y $m_i \in M$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq k$, con

$$m = \sum_{i=1}^{k} a_i m_i.$$

Como $a_i \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} :_A A \times M)$, se tiene que $a_i(A \times M) \subset \mathcal{L}$. Luego, $a_i(0_A, m_i) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$(0_A, m) = \sum_{i=1}^{k} (0_A, a_i m_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i(0_A, m_i) \in \mathcal{L}.$$

Esto muestra que $\langle 0_A \rangle \times \iota_A^{-1}(\mathcal{L})M \subset \mathcal{L}$.

Recíprocamente, supóngase que $\langle 0_A \rangle \times \iota_A^{-1}(\mathcal{L})M \subset \mathcal{L}$. Entonces, dado $r \in \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$, se tiene que $(r, 0_M) \in \mathcal{L}$. Luego, para cualquier $(a,m) \in A \times M$, se tiene que

$$r(a,m) = (ra, rm) = a(r, 0_M) + (0_A, rm) \in \mathcal{L}.$$

Por lo tanto, $r(A \times M) \subset \mathcal{L}$, y así $r \in (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Esto muestra que $\iota_A^{-1}(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} :_A A \times M)$.

Finalmente, por el Lema 3.3, concluyese que $(\mathcal{L} :_A A \times M) = \iota_A^{-1}(\mathcal{L})$. □

Proposición 3.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A\times M$ conteniendo $\langle 0_A\rangle \times M$, entonces*

$$(\mathcal{L} :_A A \times M) = \pi_A(\mathcal{L}),$$

donde $\pi_A : A \times M \longrightarrow A$ es la proyección en la primera componente.

Demostración: Como $\ker \pi_A = \langle 0_A\rangle \times M \subset \mathcal{L}$, por la Proposición 2.1, se tiene que

$$(\mathcal{L} :_A A \times M) = (\pi_A(\mathcal{L}) :_A \pi_A(A \times M)).$$

Finalmente, teniendo en vista que $\pi_A(A \times M) = A$, concluyese que $(\pi_A(\mathcal{L}) :_A \pi_A(A \times M)) = \pi_A(\mathcal{L})$ y, por lo tanto, $(\mathcal{L} :_A A \times M) = \pi_A(\mathcal{L})$. □

Proposición 3.4. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A\times M$ conteniendo $A \times \langle 0_M\rangle$, entonces*

$$(\mathcal{L} :_A A \times M) = (\pi_M(\mathcal{L}) :_A M),$$

donde $\pi_M : A \times M \longrightarrow M$ es la proyección en la segunda componente.

Demostración: Como $\ker \pi_M = A \times \langle 0_M\rangle \subset \mathcal{L}$, por la Proposición 2.1, se tiene que

$$(\mathcal{L} :_A A \times M) = (\pi_M(\mathcal{L}) :_A \pi_M(A \times M)).$$

Finalmente, teniendo en vista que $\pi_M(A \times M) = M$, concluyese que $(\mathcal{L} :_A A \times M) = (\pi_M(\mathcal{L}) :_A M)$. □

4. Ideales de $A \ltimes M$ que son submódulos primos y submódulos maximales de $A \ltimes M$.

Teorema 4.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $A \ltimes M$, entonces $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de $A \ltimes M$.*

Demostración: Como $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $A \ltimes M$, $\mathfrak{P}$ es un submódulo propio de $A \ltimes M$ y, por el ítem (2) del Teorema 2.3, $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \ltimes M$, para algún ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. Sean ahora $r \in A$ y $(a, m) \in A \ltimes M$ tales que $r(a, m) \in \mathfrak{P}$ y $r \notin (\mathfrak{P} :_A A \ltimes M)$. Se probará que $(a, m) \in \mathfrak{P}$. De hecho, ya que $(ra, rm) = r(a, m) \in \mathfrak{P}$, sigue que $ra \in \mathfrak{p}$. Por otro lado, por el Teorema 3.2, se tiene que $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \ltimes M :_A A \ltimes M)$. Teniendo en vista que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo y $r \notin (\mathfrak{P} :_A A \ltimes M) = \mathfrak{p}$, concluyese que $a \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $(a, m) \in \mathfrak{P}$. Esto muestra que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de $A \ltimes M$. □

Teorema 4.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal de A. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) *$\mathfrak{p} \ltimes M$ es un submódulo primo de $A \ltimes M$;*

(2) *$\mathfrak{p} \ltimes M$ es un ideal primo de $A \ltimes M$;*

(3) *$\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A.*

Demostración: Se probará que (1) implica (3), (3) implica (2) y (2) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (3). Como $\mathfrak{p} \ltimes M$ es un submódulo primo de $A \ltimes M$, por el Teorema 2.1, $(\mathfrak{p} \ltimes M :_A A \ltimes M)$ es un ideal primo de A. Ahora, por el Teorema 3.2, $(\mathfrak{p} \ltimes M :_A A \ltimes M) = \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A.

Ahora se probará que (3) implica (2). De hecho, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, por el ítem (2) del Teorema 2.3, $\mathfrak{p} \ltimes M$ es un ideal primo de $A \ltimes M$.

Finalmente, por el Teorema 4.1, se tiene que (2) implica (1). □

Teorema 4.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si I es un ideal de A y N es un submódulo propio de M tal que $I \times N$ es un submódulo primo de $A \times M$, entonces N es un submódulo primo de M.*

Demostración: Sea $r \in A$ y $m \in M$ tales que $rm \in N$ y $r \notin (N :_A M)$. Se probará que $m \in N$. De hecho, como $r(0_A, m) = (0_A, rm) \in I \times N$ y siendo $I \times N$ un submódulo primo de $A \times M$, se tiene que $r \in (I \times N :_A A \times M)$ o $(0_A, m) \in I \times N$. Como $r \notin (N :_A M)$, por el Lema 3.1, concluyese que $r \notin (I \times N :_A A \times M)$. Por lo tanto, $(0_A, m) \in I \times N$, y así $m \in N$. Esto muestra que N es un submódulo primo de M. □

Observación 4.1. *La recíproca del Teorema 4.3 no es necesariamente cierto. En efecto, considérese p un número primo positivo y sea n un número entero positivo diferente* *de* 1 *y* p. *Se tiene que* $\langle p\rangle$ *es un submódulo primo del* $\mathbb{Z}$*-módulo* $\mathbb{Z}$. *Entretanto, por [10, Teorema 2.7],* $\langle n\rangle \times \langle p\rangle$ *no es un submódulo primo del* $\mathbb{Z}$*-módulo* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

La siguiente proposición proporciona una especie de recíproca del Teorema 4.3.

Proposición 4.1. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Si* $\mathfrak{P}$ *es un submódulo primo de* M*, entonces* $(\mathfrak{P} :_A M) \times \mathfrak{P}$ *es un submódulo primo de* $A\times M$.

Demostración: Como $\mathfrak{P}$ es un submódulo propio de M, $(\mathfrak{P} :_A M) \times \mathfrak{P}$ es un submódulo propio de $A\times M$. Sean ahora $r\in A$ y $(a,m)\in A\times M$ tales que $r(a,m)\in (\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P}$ y $r\notin ((\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P} :_A A\times M)$. Se probará que $(a,m)\in(\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P}$. De hecho, ya que $(ra,rm)=r(a,m)\in(\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P}$, sigue que $ra\in(\mathfrak{P} :_A M)$ y $rm\in\mathfrak{P}$. Por otro lado, como $(\mathfrak{P} :_A M)M\subset\mathfrak{P}$, por el Teorema 3.1, $((\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P} :_A A\times M)=(\mathfrak{P} :_A M)$. Además, siendo $\mathfrak{P}$ un submódulo primo de M, por el Teorema 2.1, $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A. De esta forma, como $ra\in(\mathfrak{P} :_A M)$ y $r\notin(\mathfrak{P} :_A M)$, concluyese que $a\in(\mathfrak{P} :_A M)$. También, como $rm\in\mathfrak{P}$, se tiene que $m\in\mathfrak{P}$. Por lo tanto, $(a,m)\in(\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P}$. Esto muestra que $(\mathfrak{P} :_A M)\times\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de $A\times M$. □

Teorema 4.4. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Si* $\mathfrak{M}$ *es un ideal maximal de* $A\ltimes M$*, entonces* $\mathfrak{M}$ *es un submódulo maximal de* $A\ltimes M$.

Demostración: Como $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal de $A\ltimes M$, por la Observación 2.2, $\mathfrak{M}$ es un submódulo propio de $A\ltimes M$ y, por el ítem (1) del Teorema 2.3, $\mathfrak{M}=\mathfrak{m}\ltimes M$, para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Sea ahora $\mathcal{L}$ un submódulo propio de $A\ltimes M$ tal que $\mathfrak{M}\subset\mathcal{L}$. Se probará que $\mathcal{L}=\mathfrak{M}$. De hecho, como $\langle 0_A\rangle\ltimes M\subset\mathfrak{m}\ltimes M\subset\mathcal{L}$, por la Observación 2.4, $\mathcal{L}$ es un ideal propio de $A\ltimes M$. Luego, como $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal de $A\ltimes M$, sigue que $\mathcal{L}=\mathfrak{M}$. Esto muestra que $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de $A\ltimes M$. □

Observación 4.2. *La recíproca del Teorema 4.4 no es necesariamente cierto. En efecto, considérese* p *un número primo positivo y sea* $\mathfrak{M}_p=\mathbb{Z}\times\langle p\rangle$. *Por [10, Lema 2.4],* $\mathfrak{M}_p$ *es un submódulo maximal del* $\mathbb{Z}$*-módulo* $\mathbb{Z}\ltimes\mathbb{Z}$. *Entretanto, por el ítem (1) del Teorema 2.3,* $\mathfrak{M}_p$ *no es un ideal maximal de* $\mathbb{Z}\ltimes\mathbb{Z}$.

Proposición 4.2. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Si* $\mathfrak{M}$ *es un ideal y un submódulo maximal de* $A\ltimes M$*, entonces* $\mathfrak{M}$ *es un ideal maximal de* $A\ltimes M$.

Demostración: Procediendo por el absurdo, supóngase que $\mathfrak{M}$ no es un ideal maximal de $A\ltimes M$. Luego, siendo $\mathfrak{M}$ un ideal propio de $A\ltimes M$, existe un ideal maximal $\mathfrak{M}'$ de $A\ltimes M$ tal que $\mathfrak{M}\subsetneq\mathfrak{M}'$. Por otro lado, por la Observación 2.2, $\mathfrak{M}'$ es un submódulo propio de $A\ltimes M$, lo que contradice el hecho de ser $\mathfrak{M}$ un submódulo maximal. Por lo tanto, $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal de $A\ltimes M$. □

Corolario 4.1. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Sea* $\mathfrak{m}$ *un ideal de* A*. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $\mathfrak{m}\ltimes M$ *es un submódulo maximal de* $A\ltimes M$;

(2) $\mathfrak{m}\ltimes M$ *es un ideal maximal de* $A\ltimes M$;

(3) $\mathfrak{m}$ *es un ideal maximal de* A.

Demostración: Se probará que (1) es equivalente a (2) y (2) es equivalente a (3). Por la Proposición 4.2, se tiene que (1) implica (2), y por el Teorema 4.4, se tiene que (2) implica (1). Finalmente, por el ítem (1) del Teorema 2.3, se tiene que (2) es equivalente a (3). □

Sea $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local. Si M es un A-módulo finitamente generado, entonces $(A\ltimes M,\mathfrak{m}\ltimes M)$ es un anillo local, cf. [8]. Sin embargo, $A\ltimes M$ no necesariamente posee un único submódulo maximal, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo. Si* $\mathcal{S}$ *es un subespacio vectorial del* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* $\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}$*, entonces* $\mathcal{S}$ *es un submódulo maximal de* $\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}$ *si, y solamente si,* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{S}=1$. *En particular,* $\langle 0_{\mathbb{K}}\rangle\ltimes\mathbb{K}$ *y* $\mathbb{K}\ltimes\langle 0_{\mathbb{K}}\rangle$ *son submódulos maximales de* $\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}$. *En efecto, si* $\mathcal{S}$ *es un submódulo maximal de* $\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}$*, entonces* $\mathcal{S}\neq\langle(0_{\mathbb{K}},0_{\mathbb{K}})\rangle$*, ya que* $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}=2$. *Como* $\mathcal{S}$ *es un subespacio vectorial propio, sigue que* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{S}=1$. *Recíprocamente, supóngase que* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{S}=1$. *Sea ahora* $\mathcal{L}$ *un submódulo propio de* $\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}$ *tal que* $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$. *Entonces,* $\mathcal{L}=\mathcal{S}$*, ya que* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{L}=1$. *Por lo tanto,* $\mathcal{S}$ *es un submódulo maximal de* $\mathbb{K}\ltimes\mathbb{K}$.

Teorema 4.5. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Sea* $\mathcal{L}$ *un submódulo de* $A\times M$ *conteniendo* $\langle 0_A\rangle\times M$*. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $\mathcal{L}$ *es un submódulo primo de* $A\times M$;

(2) $\pi_A(\mathcal{L})$ *es un ideal primo de* A, *donde* $\pi_A : A \times M \longrightarrow A$ *es la proyección en la primera componente*;

(3) $\iota_A^{-1}(\mathcal{L})$ *es un ideal primo de* A, *donde* $\iota_A : A \longrightarrow A \times M$ *es la inclusión en la primera componente*.

Demostración: Se probará que (1) es equivalente a (2) y (2) es equivalente a (3). Inicialmente, se probará que (1) es equivalente a (2). Como $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $\langle 0_A \rangle \times M$, por la Proposición 2.2, se tiene que $\mathcal{L} = \pi_A(\mathcal{L}) \times M$. Luego, $\mathcal{L}$ es un submódulo propio de $A \times M$ si, y solamente si, $\pi_A(\mathcal{L})$ es un ideal propio de A.

Ahora, supóngase que $\mathcal{L}$ es un submódulo primo de $A \times M$. Sean a y b en A tales que $ab \in \pi_A(\mathcal{L})$ y $a \notin \pi_A(\mathcal{L})$. Se probará que $b \in \pi_A(\mathcal{L})$. De hecho, ya que $ab \in \pi_A(\mathcal{L})$, existe $m \in M$ tal que $(ab, m) \in \mathcal{L}$. Entonces, $(0_A, m) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$a(b, 0_M) = (ab, 0_M) = (ab, m) - (0_A, m) \in \mathcal{L}.$$

Como $\mathcal{L}$ es un submódulo primo de $A \times M$, sigue que $a \in (\mathcal{L} :_A A \times M)$ o $(b, 0_M) \in \mathcal{L}$. Por otro lado, por la Proposición 3.3, se tiene que $\pi_A(\mathcal{L}) = (\mathcal{L} :_A A \times M)$. De esta forma, $a(b, 0_M) \in \mathcal{L}$ y $a \notin (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Teniendo en vista que $\mathcal{L}$ es un submódulo primo, concluyese que $(b, 0_M) \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $b \in \pi_A(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\pi_A(\mathcal{L})$ es un ideal primo de A.

Reciprocamente, supóngase que $\pi_A(\mathcal{L})$ es un ideal primo de A. Sean $r \in A$ y $(a, m) \in A \times M$ tales que $r(a, m) \in \mathcal{L}$ y $r \notin (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Se probará que $(a, m) \in \mathcal{L}$. De hecho, ya que $(ra, rm) = r(a, m) \in \mathcal{L}$, sigue que $ra \in \pi_A(\mathcal{L})$. Por otro lado, utilizando nuevamente la Proposición 3.3, se tiene que $(\mathcal{L} :_A A \times M) = \pi_A(\mathcal{L})$. De esta forma, $ra \in \pi_A(\mathcal{L})$ y $r \notin \pi_A(\mathcal{L})$. Teniendo en vista que $\pi_A(\mathcal{L})$ es un ideal primo, concluyese que $a \in \pi_A(\mathcal{L})$. Entonces, existe $n \in M$ tal que $(a, n) \in \mathcal{L}$. Como $\langle 0_A \rangle \times M \subset \mathcal{L}$, se tiene que $(0_A, m - n) \in \mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$(a, m) = (a, n) + (0_A, m - n) \in \mathcal{L}.$$

Esto muestra que $\mathcal{L}$ es un submódulo primo de $A \times M$.

Finalmente, por el Lema 2.2, se tiene que (2) es equivalente a (3). □

5. Submódulos primos de $A \ltimes M$ que no son ideales de $A \ltimes M$.

En la Sección 4, se mostró familias de submódulos primos en la idealización de un módulo formado por ideales de la idealización. En esta sección, se muestran ejemplos de submódulos primos en la idealización de un módulo, los cuales no son ideales de la idealización.

El siguiente teorema proporciona otra caracterización de los submódulos primos de un módulo.

Teorema 5.1. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Si* $\mathfrak{P}$ *es un submódulo de* M, *entonces* $\mathfrak{P}$ *es un submódulo primo de* M *si, y solamente si,* $A \times \mathfrak{P}$ *es un submódulo primo de* $A \times M$.

Demostración: Supóngase inicialmente que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M. Entonces, $\mathfrak{P}$ es un submódulo propio de M y, por lo tanto, $A \times \mathfrak{P}$ es un submódulo propio de $A \times M$. Sean ahora $r \in A$ y $(a, m) \in A \times M$ tales que $r(a, m) \in A \times \mathfrak{P}$ y $r \notin (A \times \mathfrak{P} :_A A \times M)$. Se probará que $(a, m) \in A \times \mathfrak{P}$. De hecho, ya que $(ra, rm) = r(a, m) \in A \times \mathfrak{P}$, sigue que $rm \in \mathfrak{P}$. Por otro lado, por el Corolario 3.1, se tiene que $(\mathfrak{P} :_A M) = (A \times \mathfrak{P} :_A A \times M)$. De esta forma, $rm \in \mathfrak{P}$ y $r \notin (\mathfrak{P} :_A M)$. Teniendo en vista que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo, concluyese que $m \in \mathfrak{P}$. Por lo tanto, $(a, m) \in A \times \mathfrak{P}$. Esto muestra que $A \times \mathfrak{P}$ es un submódulo primo de $A \times M$.

La recíproca es un caso particular del Teorema 4.3, ya que $\mathfrak{P}$ es un submódulo propio de M. □

Ejemplo 5.1. *Sea* A *un anillo. Si* M *es un* A*-módulo cuyo espectro primo es no vacío, por el Teorema 5.1, se tiene que* $A \times \mathfrak{P}$ *es un submódulo primo de* $A \ltimes M$, *para todo submódulo primo* $\mathfrak{P}$ *de* M. *Además,* $A \times \mathfrak{P}$ *no es un ideal de* $A \ltimes M$.

Teorema 5.2. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo. Sea* $\mathcal{L}$ *un submódulo de* $A \times M$ *conteniendo* $A \times \langle 0_M \rangle$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $\mathcal{L}$ *es un submódulo primo de* $A \times M$;

(2) $\pi_M(\mathcal{L})$ *es un submódulo primo de* M, *donde* $\pi_M : A \times M \longrightarrow M$ *es la proyección en la segunda componente*;

(3) $\iota_M^{-1}(\mathcal{L})$ *es un submódulo primo de* M, *donde* $\iota_M : M \longrightarrow A \times M$ *es la inclusión en la segunda componente.*

Demostración: Se probará que (1) es equivalente a (2) y (2) es equivalente a (3). Inicialmente, se probará que (1) es equivalente a (2). Como $\mathcal{L}$ es un submódulo de $A \times M$ conteniendo $A \times \langle 0_M \rangle$, por la Proposición 2.3, se tiene que $\mathcal{L} = A \times \pi_M(\mathcal{L})$. Luego, $\mathcal{L}$ es un submódulo propio de $A \times M$ si, y solamente si, $\pi_M(\mathcal{L})$ es un submódulo propio de M.

Ahora, supóngase que $\mathcal{L}$ es un submódulo primo de $A \times M$. Sean $r \in A$ y $m \in M$ tales que $rm \in \pi_M(\mathcal{L})$ y $r \notin (\pi_M(\mathcal{L}) :_A M)$. Se probará que $m \in \pi_M(\mathcal{L})$. De hecho, ya que $rm \in \pi_M(\mathcal{L})$, existe $a \in A$ tal que $(a, rm) \in \mathcal{L}$. Entonces, $(a, 0_M) \in \mathcal{L}$ y, por lo tanto,

$$r(0_A, m) = (0_A, rm) = (a, rm) - (a, 0_M) \in \mathcal{L}.$$

Como $\mathcal{L}$ es un submódulo primo de $A \times M$, sigue que $r \in (\mathcal{L} :_A A \times M)$ o $(0_A, m) \in \mathcal{L}$. Por otro lado, por la Proposición 3.4, se tiene que $(\pi_M(\mathcal{L}) :_A M) = (\mathcal{L} :_A A \times M)$. De esta forma, $r(0_A, m) \in \mathcal{L}$ y $r \notin (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Teniendo en vista que $\mathcal{L}$ es un submódulo primo, concluyese que $(0_A, m) \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $m \in \pi_M(\mathcal{L})$. Esto muestra que $\pi_M(\mathcal{L})$ es un submódulo primo de M.

Reciprocamente, supóngase que $\pi_M(\mathcal{L})$ es un submódulo primo de M. Sean $r \in A$ y $(a, m) \in A \times M$ tales que $r(a, m) \in \mathcal{L}$ y $r \notin (\mathcal{L} :_A A \times M)$. Se probará que $(a, m) \in \mathcal{L}$. De hecho, ya que $(ra, rm) = r(a, m) \in \mathcal{L}$, sigue que $rm \in \pi_M(\mathcal{L})$. Por otro lado, utilizando nuevamente la Proposición 3.4, se tiene que $(\mathcal{L} :_A A \times M) = (\pi_M(\mathcal{L}) :_A M)$. De esta forma, $rm \in \pi_M(\mathcal{L})$ y $r \notin (\pi_M(\mathcal{L}) :_A M)$. Teniendo en vista que $\pi_M(\mathcal{L})$ es un submódulo primo, concluyese que $m \in \pi_M(\mathcal{L})$. Entonces, existe $b \in A$ tal que $(b, m) \in \mathcal{L}$. Como $A \times \langle 0_M \rangle \subset \mathcal{L}$, se tiene que $(a - b, 0_M) \in \mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$(a, m) = (b, m) + (a - b, 0_M) \in \mathcal{L}.$$

Esto muestra que $\mathcal{L}$ es un submódulo primo de $A \times M$.

Finalmente, por el Lema 2.3, se tiene que (2) es equivalente a (3). □

Como una aplicación del Teorema 5.2, se dará a continuación otra demostración que $\mathbb{Z} \times \langle p \rangle$ es un submódulo primo del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ver Observación 4.2). Asimismo, esto implicará otro ejemplo de un submódulo primo de la idealización que no es un ideal.

Ejemplo 5.2. *Dado un número primo positivo* p, *sea* $\mathcal{L}_p = \mathbb{Z} \ltimes \langle p \rangle$. *Se tiene que* $\pi_{\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_p) = \langle p \rangle$ *es un submódulo primo de* $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{Z} \ltimes \langle 0 \rangle \subset \mathcal{L}_p$. *Luego, por el Teorema 5.2,* $\mathcal{L}_p$ *es un submódulo primo del* $\mathbb{Z}$*-módulo* $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}$. *Además,* $\mathcal{L}_p$ *no es un ideal de* $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}$.

6. Una extensión de un módulo con espectro primo no vacío. Sea A un anillo. Para cualquier A-módulo cero $M = \{0_M\}$, se tiene que $\operatorname{Spec}_A(M) = \emptyset$. Por otro lado, para cualquier A-módulo M no cero finitamente generado, se tiene que $\operatorname{Spec}_A(M) \neq \emptyset$. Sin embargo, existen módulos no finitamente generados cuyo espectro primo es vacío. Por ejemplo, dado un número primo positivo p, el p-módulo de Prüfer

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ [m/p^n] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

es un $\mathbb{Z}$-módulo cuyo espectro primo es vacío, cf. [3, Ejemplo, pág. 3745].

Sea A un anillo. Como una aplicación de la idealización de un A-módulo M, se mostrará la existencia de una extensión de M cuyo espectro primo sea no vacío. Más precisamente, se probará que existe un A-módulo $\overline{M}$ y un homomorfismo de módulos inyectivo $\varphi : M \longrightarrow \overline{M}$ tal que $\operatorname{Spec}_A(\overline{M}) \neq \emptyset$.

Teorema 6.1. *Sea* A *un anillo. Para todo* A*-módulo* M, $\operatorname{Spec}_A(A \times M)$ *es no vacío. En particular, existe una extensión* $\overline{M}$ *de* M *tal que* $\operatorname{Spec}_A(\overline{M})$ *es no vacío.*

Demostración: Considérese $\overline{M} = A \times M$. Se tiene que $\overline{M}$ es una extensión de M por medio de la inclusión en la segunda componente $\iota_M : M \longrightarrow \overline{M}$. Ahora, por el Teorema 4.2, la extensión $\overline{M}$ es un A-módulo cuyo espectro primo es no vacío. □

Ejemplo 6.1. *Sea* A *un anillo. El producto directo* $A \times \{0_M\}$ *es una extensión del* A*-módulo cero* $M = \{0_M\}$. *En este caso, se tiene que*

$$\operatorname{Spec}_A(A \times \{0_M\}) = \{\mathfrak{p} \times \langle 0_M \rangle : \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\}.$$

Ejemplo 6.2. *Sea* p *un número primo positivo. El producto directo* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(p^\infty)$ *es una extensión del* p*-módulo de Prüfer. En este caso, se tiene que* $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}(p^\infty)$ *y* $\langle q \rangle \times \mathbb{Z}(p^\infty)$ *son submódulos primos de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(p^\infty)$, *para todo número primo positivo* q.

Contribuciones de los autores. Los autores de esta publicación contribuyeron equitativamente en los siguientes aspectos: conceptualización, investigación, análisis formal, metodología, validación, revisión y redacción. Asimismo, los autores han leído y aceptado la versión publicada del artículo.

Conflicto de intereses. Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

ORCID and License
Alex Molina https://orcid.org/0000-0001-6270-9654
Mario Santiago https://orcid.org/0000-0002-3453-4153
Juan Villanueva https://orcid.org/0000-0002-1939-2580

Referencias

[1] Dauns J. Prime modules. Journal für die reine und angewandte Mathematika. 1978;298:156-81.

[2] Lu CP. Prime submodules of modules. Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli. 1984;33(1):61-9.

[3] Lu CP. Spectra of modules. Communications in Algebra. 1995;23(10):3741-52.

[4] McCasland RL, Moore ME. Prime submodules. Communications in Algebra. 1992;20(6):1803-17.

[5] Lu CP. The Zariski topology on the prime spectrum of a module. Houston Journal of Mathematics. 1999;25(3):417-32.

[6] Duraivel T. Topology on spectrum of modules. Journal of the Ramanujan Mathematical Society. 1994;9(1):25-34.

[7] Nagata M. Local rings. New York: Robert E. Krieger Publishing Company; 1975.

[8] Anderson DD, Winders M. Idealization of a module. Journal of Commutative Algebra. 2009;1(1):3-56.

[9] Jenkins J, Smith PF. On the prime radical of a module over a commutative ring. Communications in Algebra. 1992;20(12):3593-602.

[10] Molina A, Santiago M, Villanueva J. On the prime spectrum of $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sometido para publicación. 2024:15 pp.