Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(1):153-188.

REVIEW

Some Aspects in the PDE. The Dirichlet and the Cauchy Problems

Algunos Aspectos en las EDP. Los Problemas de Dirichlet y de Cauchy

Alejandro Ortiz Fernández

A mi querido profesor Djairo G. de Figueiredo, por sus enseñanzas de las EDP, por su amistad y por valiosa producción matemática. Un homenaje a sus 90 años vividos con sabiduría.

Received, Jan. 31, 2024; Accepted, Jun. 13, 2024; Published, Jul. 29, 2024

How to cite this article:
Ortíz F. *Some Aspects in the PDE.*
The Dirichlet and the Cauchy Problems.. Selecciones Matemáticas. 2024;11(1):153–188. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.01.10

Abstract

In this article we present two classic problems in PDE: the Dirichlet problem and the Cauchy problem. Some ideas are previously discussed, such as functions and identities's Green, and "bad positions" problems. The work of L.Nirenberg [1] is discussed in detail where some results of L.Hörmander [2] are used.

Keywords . Potential, Newton, Cauchy, Nirenberg, Hörmander, problem and principle of Dirichlet, Cauchy problem.

Resumen

En este artículo presentamos dos problemas clásicos en las EDP: el problema de Dirichlet y el problema de Cauchy. Previamente se discuten algunas ideas como son la función y las identidades de Green, así como los problemas " mal puestos".Se discute con detalles el trabajo de L.Nirenberg, [1], sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy, en donde se usan algunos resultados de L.Hörmander [2].

Palabras clave. Potencial, Newton, Cauchy, Nirenberg, Hörmander, problema y principio de Dirichlet, problema de Cauchy.

1. Introducción y Motivaciones. Desde tiempos antiguos el hombre siempre ha deseado comprender a la naturaleza que lo rodeaba, a los hechos cotidianos. En sus inicios fueron las ecuaciones algebraicas las que ayudaron a comprender algunas cosas simples pero con limitaciones pues la naturaleza es compleja. Tuvieron que pasar algunos siglos

*Profesor Emérito Vitalicio de la Universidad Nacional de Trujillo. Ex profesor de la Pontífice Universidad Católica del Perú. (jortiz@pucp.edu.pe).

para que la evolución de la mente tienda a crear las herramientas más óptimas para estudiar e interpretar al universo. En esta ruta, Galileo a de ser uno de los iniciadores de la ciencia moderna; él, a través de sus estudios del movimiento de los cuerpos, crea conceptos que formalizados con el rigor matemático han de conducir al cálculo infinitesimal en el siglo XVII, creado independientemente por Newton y Leibniz. Newton consideró las ecuaciones diferenciales $\frac{dy}{dx} = f(x)$; $\frac{dy}{dx} = f(y)$ y $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Las dos primeras conducen a las ecuaciones diferenciales ordinarias y la tercera a las ecuaciones en derivadas parciales. Con el cálculo los científicos tuvieron una arma poderosa para comprender al mundo físico; Newton, con las ecuaciones diferenciales, nos dio valiosos modelos que contribuyeron a entender mejor al mundo en que vivimos. Así estableció la primera ecuación diferencial: $a = \frac{dv}{dt}$, donde a es la aceleración en la fórmula $F = ma$, F es la fuerza y m la masa. También afirmó que la fuerza es igual a la derivada del impulso. En este siglo las investigaciones se orientan a cuestiones de la física-matemática y de la astronomía, donde las ecuaciones diferenciales juegan un rol importante dado que éstas surgieron de los fenómenos naturales y estas vienen dadas por funciones de varias variables. También deben destacarse las contribuciones de Leibniz en la creación del cálculo infinitesimal pues nos dio las notaciones que usamos actualmente, así como reglas de cálculo para sumas, productos, cocientes, potencias y raíces, y muchas otras contribuciones. Las ecuaciones diferenciables sirvieron para que en los siglos XVII y XVIII se investiguen problemas de la geometría diferencial, del cálculo de variaciones y de la naciente rama de la física-matemática, la cual se desarrolla a mitad del siglo XVIII con los aportes de D'Alembert (1717-1789), Euler (1707-1783), D.Bernoulli (1700-1782), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Poisso (1781-1840) y Fourier (1768-1830).

Veamos algunos ejemplos de problemas de la física matemática investigados en el siglo XVIII (con lenguaje moderno).

1.1. El Problema de la Cuerda Vibrante. . Este problema fue, y es, uno de los más influyentes en su época que motivó discusiones en pro del cálculo infinitesimal; es un ejemplo típico de la física- matemática que condujo a una ecuación en derivadas parciales. Demos ligeramente la idea. Sea una cuerda de longitud L, fija en sus extremos, en su estado de reposo se asume que coincide con el eje x. Se asume también que es flexible, es decir, no ofrece resistencia y las partículas de la cuerda solo se mueven en la dirección del eje u (plano (x, u)); la tensión de la cuerda es siempre en la dirección de la tangente. Si la cuerda está en su estado de reposo y es perturbada, ella vibra transversalmente; es precisamente estas vibraciones que se desea estudiar, es decir encontrar el modelo o ecuación del movimiento que caracteriza la posición de la partícula $u(x, t)$ en el tiempo t, posterior a la perturbación dada. Después de algunos argumentos analíticos (donde se usa la segunda ley de Newton, fuerza= masa $\times$ aceleración) se llega a la ecuación en derivadas parciales

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

donde c es una constante física. Esta ecuación es llamada la ecuación de la onda unidimensional. Se observa que si existiera una fuerza externa f actuando sobre la cuerda, como serían la gravedad,la presión del aire, ..., entonces la ecuación toma la forma $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f$.

Así mismo, se observa que los extremos de la cuerda están fijos, y así surgen las condiciones de contorno o de frontera:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

También interesa conocer el desplazamiento inicial de la cuerda, $u(x, 0)$, así como la cuerda es dejada en tal posición, $u_t(x, 0)$; es decir, es conveniente conocer las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad , \text{si } 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad , \text{si } 0 \leq x \leq L \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Así se tiene el: Problema de valor inicial y de contorno, resolver la ecuación $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ satisfaciendo las condiciones (1.1) y (1.2). Este problema fue, después, estudiado en diferentes contextos. Fue el matemático D'Alembert quien dedujo la ecuación de tal problema obteniendo la fórmula general en 1747. La solución general encontrada es de la forma

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \text{ donde } f \text{ y } g \text{ son funciones arbitrarias.}$$

Este problema condujo a polémicas sobre el tipo de funciones a considerar y así a la necesidad precisar la idea de función y de esta forma poner en orden el análisis matemático. Se debe remarcar que a principios del siglo XIX existían diferentes nociones sobre lo que es una función; en 1829, Dirichlet presentó una definición que fue aceptada por algunos años, propuesta que hizo Dirichlet en un trabajo sobre series trigonométricas. En esta ruta debe destacarse también la contribución de Euler y su debate con D'Alembert sobre obtener una definición general sobre función. En esta escena participaron otros matemáticos, pero, esto es otra historia.

1.2. El Problema de la Conducción del Calor. Otro problema clásico de la física matemática es la conducción del calor estudiado por Fourier a inicios del siglo XIX y que condujo al análisis de Fourier, teoría que a su vez impulsaría la investigación de nuevas ideas, métodos y teorías centrales ,tanto en el siglo XIX como en XX, y aún en el XXI. Daremos una visión de este problema.Sea $(x,t) \in \mathbb{R}^3$, donde $x = (x_1, x_2, x_3)$, t es el tiempo. Sea D un dominio limitado por la superficie ∂D.
Cuestión: estudiar la conducción del calor en D. Precisemos que $u = u(x,t)$ representa la temperatura; $f = f(x,t)$ es la densidad de calor producido en D por unidad de tiempo; c, ρ, k son constantes físicas. En este escenario, f es una variable conocida y u es la variable por conocerse.Además, sea D_i un subdominio arbitrario de D. Se establece que el calor contenido en D_i en un tiempo dado es dado por $\int_{D_i} c\rho u dX$. Luego, el cambio de calor contenido en D_i es dado por

$$\frac{d}{dt}\int_{D_i} c\rho u dX = \int_{D_i} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dX \tag{1.3}$$

Por otro lado, el flujo de calor por unidad de tiempo en D_i, a través de ∂D_i es dado por

$$-\int_{\partial D_i} k\frac{\partial u}{\partial N} d\sigma \tag{1.4}$$

Finalmente, el calor producido por unidad de tiempo en D_i es dado por

$$\int_{D_i} f dX. \tag{1.5}$$

Ahora se aplica el Principio de la Conservación del Calor, que dice: (1.3)=(1.4)+(1.5), esto es

$$\int_{D_i} c\rho\frac{\partial u}{\partial t} dX + \int_{\partial D_i} k\frac{\partial u}{\partial N} d\sigma = \int_{D_i} f dX, \tag{1.6}$$

igualdad que es conocida como la ecuación-integral del calor.

Nota 1.1. *Si u y f no dependieran del tiempo, entonces (1.6) se reduce a*

$$\int_{\partial D_i} k\frac{\partial u}{\partial N} d\sigma = \int_{D_i} f dX.$$

Y si aún $f = 0$ se obtiene el teorema de Gauss $\int_{\partial D_i} \frac{\partial u}{\partial N} d\sigma = 0$.

¿ Cómo es la ecuación del calor en forma diferencial? ...

Veamos el siguiente argumento. Sea el campo vectorial $H = -k\nabla u$, de donde $< H, N > = < -k\nabla u, N > = -k\frac{\partial u}{\partial N}$, ($N$ es vector unitario normal exterior a ∂D_i), y $divH = -div(k\nabla u) = -k\Delta u$, donde en general si $G = (g_1, ..., g_n)$, por definición $divG = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$; Δu es el laplaciano de u. Ahora se usa el teorema de la divergencia, que dice:

Teorema 1.1. *“ Sea D un dominio apropiado y $G = (g_1, .., g_n)$ una función vectorial limitada que está en $C^0(\bar{D}) \cap C^1(D)$; si $divG$ es integrable, entonces se tiene*

$$\int_D divGdX = \int_{\partial D} < G, N_Q > d\sigma\text{”}.$$

Así, por este teorema, $-\int_{D_i} k\Delta udX = \int_{\partial D_i} k\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma$. Entonces, la igualdad (1.6) toma la forma

$$\int_{D_i} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dX - \int_{D_i} k\Delta udX = \int_{D_i} fdX,$$

de donde se tiene

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta = f \tag{1.7}$$

(1.7) es la ecuación del calor en forma diferencial. En el caso estacionario (no se depende del tiempo) se obtendrá $-k\Delta u = f$. La ecuación del calor es otra de las clásicas ecuaciones en derivadas parciales.

1.3. El Potencial Gravitacional. La idea es, derivar la ecuación de Laplace $\Delta v = 0$ vía un clásico problema de la mecánica celeste. Previamente digamos algunas palabras sobre este tema, que ha de conducirnos a teorías modernas, la teoría del potencial! Desde la época de Newton, y con más fuerza en el siglo XVIII, uno de los problemas que se estudió fue el determinar la magnitud de la atracción gravitatoria que una masa produce sobre otra masa; por ejemplo,la atracción que ejerce el Sol sobre la tierra. Esta inquietud condujo a ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Bien, sean $P_1 = (x, y, z)$ y $P_2 = (X, Y, Z)$ dos partículas con masas m_1 y m_2 respectivamente. Por la ley de gravitación de Newton se sabe que $F(fuerza) = -g\frac{m_1m_2}{r^2}$ donde

$$r = d(P_1, P_2) = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$$

y g es la gravedad, una constante que se asume igual a 1. Asumamos que la partícula P_1 está fija y que tiene masa m, y que ella ejerce una fuerza de atrcción sobre la partícula arbitraria P_2, con masa 1. De esta manera se tendría $F = -\frac{m}{r^2}$. El signo $-$ significa que la fuerza F es hacia P_1. El **potencial gravitacional** V en cualquier punto P_2, debido a la masa m en P_1, es definido vía

$$\begin{aligned} V &= \int_r^\infty \left(\frac{m}{r_1^2}\right) dr_1 = m \lim_{a\to\infty} \int_r^a \frac{1}{r_1^2}dr_1 = m \lim_{a\to\infty} \int_r^a r_1^{-2}dr_1 \\ &= m \lim_{a\to\infty} \left.\frac{r^{-1}}{-1}\right|_r^a = -m \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{r}\right]_r^a = -m \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right] = -m\left[0 - \frac{1}{r}\right] = \frac{m}{r} \end{aligned}$$

Esta definición se interpreta como el atraer una partícula de masa unitaria, bajo la atracción de una partícula de masa m que está en P_1, desde el infinito hasta P_2. El potencial gravitacional es el trabajo realizado.

Ahora, observemos que $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m}{r^2} = F$ y que V es función de (X, Y, Z). También observemos que $\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial X} = F\frac{X-x}{r} = F\cos\alpha = F_x$ donde F_x es la proyección de F sobre el eje X. En forma análoga se tiene que $\frac{\partial V}{\partial Y} = F_y$ y $\frac{\partial V}{\partial Z} = F_z$; así se tiene que $\nabla V = (F_x, F_y, F_z)$. Caso de una **distribución continua**. Si ahora no tuviéramos una partícula P_1, de masa m, sino una distribución continua de masa, de densidad $\delta(x, y, z)$ contenida en un dominio D, entonces el potencial gravitacional es definido siendo

$$V = \int_D \frac{\delta}{r}dxdydz = \int_D \frac{\delta(x,y,z)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}}dxdydz$$

de donde se obtiene $\frac{\partial V}{\partial X} = -\int_D \frac{X-x}{r}\frac{\delta(x,y,z)}{r^2}dxdydz$, $\frac{\partial V}{\partial Y} = -\int_D \frac{Y-y}{r}\frac{\delta(x,y,z)}{r^2}dxdydz$, $\frac{\partial V}{\partial Z} = -\int_D \frac{Z-z}{r}\frac{\delta(x,y,z)}{r^2}dxdydz$

o aún tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} &= -\int_D \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(X-x)^2}{r^5} \delta dxdydz \right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} &= -\int_D \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(Y-y)^2}{r^5} \delta dxdydz \right) \text{ y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} &= -\int_D \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(Z-z)^2}{r^5} \delta dxdydz \right). \end{aligned}$$

De donde, sumando estas igualdades, se obtiene $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0$.

De esta manera, el potencial (gravitacional) V, debido a una distribución continua de masas, satisface a la ecuación de Laplace $\Delta V = 0$, la que se llama la ecuación del potencial.

Nota 1.2. *La ecuación de Laplace también es satisfecha por otros potenciales, como son los potenciales electrostáticos, el potencial armónico en la teoría de la elasticidad, el potencial hidrodinámico, ... La investigación del potencial newtoniano se remonta al siglo XVII, 1666, con los trabajos de Newton sobre la gravitación universal, y al siglo XVIII con los estudios de Coulomb, en 1785, sobre la electricidad. Newton concluyó que la fuerza de la gravedad es generada por una masa gravitatoria y Coulomb concluye que la fuerza eléctrica es generada por cargas eléctricas. Conforme pasaron los años la evolución de la matemática y de la física condujo a generalizar las nociones de masa, de carga, y así surgió la idea de medida y se crearon nuevas teorías matemáticas.*

Pasemos a precisar un poco más las ideas mencionadas antes. Así el potencial newtoniano en un punto P con masa contenida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, con densidad ρ, es definida siendo $V(P) = \int_D \frac{\rho(Q)}{|P-Q|} dQ$, $Q \in \partial D$. Remarcamos que la teoría clásica del potencial está conectada con problemas que vienen de la física. Así decimos algo al respecto. Sea F una fuerza continua y conservativa sobre un dominio D, simplemente conexo, esto es, $\int_{P_0}^{P} Fdl$ es independiente del camino que va de P_0 a P. Entonces existe un campo escalar u tal que $F = -\nabla u$. Además, si F fuera libre y $F \in C^1(D)$, entonces se tiene $0 = divF = -\Delta u$, esto es, la función potencial u sería armónica. Pasados los años se introdujo el cálculo operacional y se introdujo la “función”δ de Dirac, que se define vía: $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$, $\delta(0) = +\infty$ y $\int \delta(x)dx = 1$. Observemos que desde el punto de vista del análisis se debería tener $\int \delta(x)dx = 0$. Sin embargo, esta definición funcionó bien en el estudio de la física moderna y este “problema”de contradicción fue resuelto años mas tarde por L. Schwartz con la introducción de su teoría de las distribuciones, teoría que fue muy útil en el tratamiento moderno de las ecuaciones en derivadas parciales, estudiada por L.Hörmander en su tesis de 1955. Esta función generalizada está relacionada con la función radial $F(x)$, definida vía

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(n-2)w_n|x|^{n-2}} & \text{... si } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} log|x| & \text{... si } n = 2 \end{cases}$$

donde w_n es la medida de la superficie de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$. Tal relación es $\Delta F = \delta$, por ello F es llamada “solución fundamental” o función de Green. Se observa que en $\mathbb{R}^n - \{sop\delta\}$, $F(x)$ es una función armónica; en esta dirección se llega a los llamados potenciales de camada simple y doble, las que servirán para resolver los problemas de Dirichlet y de Neumann sobre dominios regulares, problemas que trataremos con algún detalle.

Notaciones y Nociones Varias. Conforme las ideas fueron evolucionando respecto a los problemas físicos los matemáticos llegaron a algunas notaciones usuales, así como se plantearon algunos problemas clásicos los que condujeron a mayores investigaciones y progresos en las EDP’s.

Veamos. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un adecuado dominio; una ecuación en derivadas parciales es una ecuación de la forma $P(D)u = f$, donde f es una función conocida, u es una función a determinar y $P(D)$ es un operador diferencial lineal definido sobre Ω, de la forma $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$, donde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\alpha_j > 0$ es un número entero; además, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$, donde $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$; $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Los coeficientes $a_\alpha(x)$ son funciones definidas sobre Ω; $u = u(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. El más pequeño número m es llamado el **orden** de la ecuación y del operador. Vía la investigación del mundo físico se llegó a las primeras ecuaciones clásicas, como son:

- la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, donde $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, cuya solución u es llamada una función armónica; sus dos primeras derivadas son continúas;
- la ecuación de Poisson $\Delta u = f$, donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es dada;
- la ecuación de la onda $\Delta u = u_{tt}$; vivimos en un mundo lleno de todo tipo de ondas;
- la ecuación del calor $\Delta u = u_t$; Fourier a inicios del siglo XIX llegó a esta ecuación estudiando el problema de la conducción del calor, y dando inicios al "análisis de Fourier";
- la ecuación de Korteweg -de- Vries $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$,ecuación que surge en modelos obre propagación de ondas en aguas poco profundas;
- la ecuación de Schrödinger $iu_t + \Delta u = 0$, una ecuación importante en la mecánica cuántica;

Es claro, muchas otras ecuaciones en derivadas parciales las que surgen en las investigaciones en problemas de actualidad, como es el caso del surgimiento de nuevas enfermedades, por ejemplo.

1.4. EDP de segundo orden en dos variables. La forma general de estas ecuaciones son de la forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

donde, en general, A, B, ..., G son funciones de x e y. Tipos de ecuaciones

- si $B - 4AC > 0$, la ecuación es de tipo hiperbólico (la ecuación de la onda);
- si $B - 4AC = 0$, la ecuación es de tipo parabólico (la ecuación del calor); y
- si $B - 4AC < 0$, la ecuación es de tipo elíptico (la ecuación de Laplace).

Tales ecuaciones en derivadas parciales, y otras, se convierten en leyes que gobiernan el conocimiento de nuestra realidad física y de otros dominios, como ocurre actualmente. Debido a la evolución de estas ecuaciones,ellas son estudiadas según las dos tendencias siguientes:

- un estudio basado en los métodos clásicos, tal como surgieron históricamente; y
- basada en los métodos del análisis funcional y de la teoría de distribuciones.

En la teoría clásica las ecuaciones hiperbólicas, las elípticas y las parabólicas se distinguen por el comportamiento de sus soluciones; así, las soluciones de las ecuaciones elípticas son regulares, muy lisas o suaves; ellas tienen derivadas parciales continuas de todas las órdenes; las soluciones de ecuaciones hiperbólicas pueden ser funciones no continuas y las discontinuidades se distribuyen a lo largo de curvas, llamadas "curvas características". Así, cada tipo de ecuación es un problema especial, típico. Una ecuación diferencial es "dispersiva"si sus soluciones son ondas que tienen diferentes longitudes de ondas con diferentes velocidades.

1.5. Tareas en las EDP's. . Por lo expresado se tiene las siguientes tareas principales:

- Determinar el conjunto de las soluciones de la ecuación: una dificil tarea!
- Investigar las propiedades generales de las soluciones.
- Determinar las soluciones particulares a través de condiciones especiales, como sucede en los problemas de Dirichlet, problema de Cauchy y otros.

Se remarca que existen también los métodos numéricos. Veamos ahora lo que se entiende por un **problema en la teoría de las EDP**: "dado un conjunto de soluciones, se busca una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones dadas ". Ahora, dado un problema se estudia

- La existencia de la solución (problema de existencia);
- La unicidad de la solución (problema de unicidad); y
- La dependencia continua de la solución o su estabilidad , a pequeñas variaciones de las condiciones se desea pequeñas variaciones de las soluciones!

Cuando un problema goza de estas tres propiedades se dice que el problema es **"bien puesto"** o que el problema es bueno. Al respecto ,una ecuación en derivadas pardales con coeficientes no constantes puede tener más o ninguna solución, lo que contrasta con la intuición física. En esta dirección Hans Lewy en 1957 publicó un ejemplo de una ecuación diferencial $P(D)u = f$, analítica, con $u \in C^{\infty}$, la cual no tiene solución alguna. Ver [3]. En cuanto a la unicidad de la solución A.Plis dio un ejemplo, (1960) de no unicidad de la solución de un problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales de tipo elíptico, ver [4] (también [5]). Por otro lado, también se dieron ejemplos de problemas que no son estables, esto es, la solución no depende continuamente de los datos dados. Es decir, son problemas **"no buenos"** .

En la teoría clásica los problemas en las EDP son de los tipos siguientes: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio en que tiene lugar algún proceso físico, el que es descrito por medio de una ecuación en derivadas parciales; $\partial\Omega$ es su contorno o frontera. Se dan las condiciones:

- De contorno ,donde las condiciones se dan sobre el contorno $\partial\Omega$ y se obtiene el **problema de Dirichlet**, por ejemplo, el que es estable para las ecuaciones elípticas;
- Iniciales, los que se dan en el estado inicial $t = 0$ y se obtiene el '**"problema de Cauchy"** , el cual es estable para las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.

Además se tienen los problemas mixtos donde se dan condiciones de contorno e iniciales; aparecen cuando se estudia el problema de la cuerda vibrante, por ejemplo.

1.6. Referencias; Breves Comentarios. Demos algunos breves comentarios de las Referencias bibliográficas para esta Sección, que de algún modo nos son familiares desde nuestra época de estudiante; así, son libros clásicos muchos de ellos.

(i) Teoría Clássica do Potencial. D.G. de Figueiredo. [6]. Consta de 5 capítulos: teorema de la divergencia; funciones armónicas; el problema de Dirichlet; funciones armónicas en el plano; y el principio de Dirichlet. Es una excelente introducción a las EDP; motiva las ideas que trata ; en particular estudia el problema y el principio de Dirichlet en forma simple y motivadora.

(ii) Introduction to Partial Differential Equations. Donald Greenspan. [7]. Es un libro básico para aprender las EDP . Posee 8 capítulos donde se introducen los conceptos básicos ,las series de Fourier ;se discute las EDP de segundo orden. Los capítulos 4,5 y 6 los dedica a las tres ecuaciones clásicas: de las ondas, del potencial y del calor. Es un texto excelente para un curso introductorio a las EDP.

(iii) Partial Differential Equations. Bernard Epstein. [8]. Contiene los clásicos temas: el problema de Cauchy, la teoría del potencial, el problema de Dirichlet y la ecuación del calor. Como novedad ofrece la alternativa de Fredholm en espacios de Banach y en espacios de Hilbert. Al igual que [6] nos da algunos métodos para resolver el problema de Dirichlet. Es un libro que relaciona a las EDP con algunas nociones del análisis funcional.

(iv) Partial Differential Equations. An Introduction. Gunter Hellwig.[9]. El libro contiene 5 partes: Ejemplos (las ecuaciones de la onda, del potencial y del calor); clasificación de la EDP en tipos, teoría de las características; cuestiones de unicidad; cuestiones de existencia; y aplicaciqnes del análisis funcional a cuestiones de existencia. Exige algunos pre-requisitos de variable real-complejo y de análisis funcional.

(v) Partial Differential Equations of Mathematical Physic. Tyn Myint - U. [10]. Consta de 11 capítulos que cubren los temas clásicos, las funciones de Green y las transformadas-integral. Está orientado a estudiantes de ciencias dando énfasis a las soluciones de las EDP. Apropiado para un curso de física-matemática para estudiantes de matemática, de física y de ingeniería.

(vi) Methods of Mathematical Physis. R.Courant - D. Hilbert. Vol. II. PDE .R. Courant. [11]. Es un voluminoso libro que trata la teoría de las EDP desde un punto de vista de la física-matemática. Es una obra que puede servir de consulta para mayores detalles en un curso o seminario que se haga con estudiantes de ciencias o de ingeniería. Nos da muchos detalles sobre temas de las EDP dando énfasis a las aplicaciones,en particular a las ecuaciones diferenciales no lineales.

(vii) Análise de Fourier e Equaçoes diferenciais parciais . Djairo G. de Figueiredo. [12]. Luego de justificar porque se debe estudiar a las series de Fourier, se pasa a discutir a las series y la convergencia de tales series. Luego se discute a la transformada de Fourier y algunas aplicaciones. En tres capítulos se discute a las ecuaciones del calor, de las ondas y de Laplace. El autor enfatiza que el objetivo de la obra es la solución de algunas ecuaciones que aparecen en la física matemática.

(viii) La Matemática: su Contenido, métodos y Significado. A.D.Aleksandrov -otros. Sección 6. EDP.S.L. Sobolev - O.A. Ladyzenskaia . [13]. Este artículo consta de seis secciones: Introducción; las ecuaciones mas simples de la física matemática; problemas iniciales y de contorno, unicidad de la solución; propagación de ondas; métodos de construcción de ondas; y soluciones generalizadas. Es un excelente artículo para comprender las ideas y la utilidad de las EDP en problemas de la física matemática. Sobolev es un reconocido matemático sobre todo porque introdujo las soluciones generalizadas, idea que fue llevada como teoría por L. Schwartz .

(ix) El Pensamiento Matemático de la Antiguedad a nuestros Días. Morris Kline. [14]. El capítulo 22 está dedicado a las EDP en el siglo XVIII, y el 28 a las EDP en el siglo XIX. En estos capitulos se expone históricamente, con argumentos matemáticos, la evolución de las EDP en tales siglos. Recomendable su lectura para obtener información sobre los personajes que contribuyeron con la teoría y las aplicaciones, ideas que son motivadoras en la enseñanza de las EDP .

(x) Aspectos Básicos en Ecuaciones en Derivadas Parciales [15]; Tópicos sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales. Alejandro Ortiz .[16]. [15] posee 8 capítulos: el teorema de la divergencia y EDO; motivaciones físicas; Las EDP; series de Fourier; distribuciones y transformada de Fourier; espacios de Sobolev; el problema de Cauchy; y problemas de valor de contorno. Al final se dan algunos aspectos históricos de las EDP. [16] Se proponen seis capítulos: aspectos clásicos en las DP ;cálculo de variaciones; teoría de distribuciones; espacios de Sobolev $L^p_K(\mathbb{R}^n)$; métodos de análisis funcional en EDP, el problema de Dirichlet; el problema de Cauchy, unicidad según A.P.Calderón. Históricamente el cálculo de variaciones está fuertemente relacionado con las EDP.

2. Problemas de Valor de Contorno.

2.1. El Problema de Dirichlet. Ya hemos tenido la oportunidad de ver en la sección anterior a la ecuación de Laplace y que ella surgió al estudiar cuestiones de la mecánica celeste. En efecto, el potencial gravitacional V, definido en $\mathbb{R}^n$, satisface a tal ecuación, de donde se deriva el nombre de "ecuación del potencial". En este contexto, el llamado problema de Dirichlet contribuyó mucho en el progreso de las ecuaciones elípticas, en particular. Para estudiar a tal problema se usará a las "identidades de Green". El punto de partida es el "teorema de la divergencia". Ver [6], [7], [8], [15]. por ejemplo. Veamos. "Sea Ω un adecuado dominio en $\mathbb{R}^n$, H es una función vectorial limitada en $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, además asumimos que $divH$ es integrable. Entonces se tiene

$$\int_\Omega divH dx = \int_{\partial\Omega} < H, N_Q > d\sigma(Q),$$

donde recordamos que $divH = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(x)$, $H = (h_1, ..., h_n)$; N_Q es la normal unitaria externa a $\partial\Omega$ en Q".

Sean las funciones $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ y $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$; usando el teorema de la divergencia y argumentos del cálculo infinitesimal se obtiene (ver [6] o un libro de calculo avanzado)
Primera Identidad de Green (G1):

$$\int_\Omega (u\Delta v + < \nabla u, \nabla v >)dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma \tag{2.1}$$

donde ∇ es el gradiente. Caso particular: si $u = v$ y u es armónica, entonces (2.1) implica

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla u > dx = \int_{\partial\Omega} u \tfrac{\partial v}{\partial N} d\sigma, \text{ ó } \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u \tfrac{\partial v}{\partial N} d\sigma$$

Algunos problemas de la física-matemática condujeron de un modo natural a los problemas de contorno clásicos (ver [10], [11], [12], [13]); así, sea Ω un dominio limitado en $\mathbb{R}^n$ con frontera o contorno regular $\partial\Omega$. Sea $f \in C^0(\partial\Omega)$ una función dada, entonces se tienen los clásicos problemas de contorno,
El Problema de Dirichlet: hallar una función $u \in C^0(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \text{ y} \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Recordemos que el operador de Laplace apareció en la ecuación del calor, luego una interpretación física del problema de Dirichlet sería: si fijamos la temperatura sobre el contorno del dominio de acuerdo a ciertas condiciones del contorno, entonces la temperatura fluye hasta alcanzar un estado estacionario, temperatura que no cambiará en cada punto del dominio. Esta distribución de la temperatura en el interior del dominio será la solución del problema de Dirichlet correspondiente. Por otro lado, el problema de Dirichlet implica que la función u es dos veces continuamente diferenciable en el interior del dominio y es continua en el contorno. En esta dirección se tiene el llamado "principio de Dirichlet" que establece que si una función $u(x)$ es solución de la ecuación de Poisson ($\Delta u = f$), en un dominio en que se conoce las condiciones de contorno, entonces se puede encontrar una función que minimiza la "energía de Dirichlet", la que es definida vía: dado un dominio (abierto) en $\mathbb{R}$ y una función vectorial $v(x)$, entonces la energía de Dirichlet de $v(x)$ es definida vía: $E[v(x)] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 dx$. Históricamente, el principio de Dirichlet fue fundamental para el desarrollo de las EDP. Ver [6].

2.2. El Problema de Neumann. Dada la función f continua en el contorno $\partial\Omega$, hallar una función $u \in C^0(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial N} = f & \text{sobre } \partial\Omega \text{ (condición de flujo)}, \end{cases}$$

donde $N = N(x)$ es la normal unitaria exterior en el punto $x \in \partial\Omega$.
Según la física este problema significa la construcción de un potencial para un campo vectorial cuyo efecto es conocido en el contorno.

2.3. Problema de Robin (o problema mixto).. Dada la función f continua en el contorno $\partial\Omega$, hallar una función $u \in C^0(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ a(x)u + \frac{\partial u}{\partial N} = f & \text{sobre } \partial\Omega \text{ (condicion de radiación),} \end{cases}$$

donde $a(x)$ es una función positiva sobre $\partial\Omega$.

Veamos ahora los siguientes argumentos. Tengamos a la mano la identidad (2.1) y asumamos que $u = v$;

- si en el problema de Dirichlet la condición de contorno fuera $u = 0$ se obtendría $\int_\Omega < \nabla u, \nabla u > dx = 0$, luego $\nabla u = 0$ en Ω, entonces u es constante en Ω; pero u es continua en $\bar{\Omega}$ y es igual a cero en $\partial\Omega$, lo que implica $u = 0$ en $\bar{\Omega}$. Esta observación implica que si la solución del problema de Dirichlet existe, ella es única!
- En el problema de Neumann, si la condición de contorno fuera $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ se tendría que u es constante en Ω.
- En el problema de Robin, si la condición de contorno fuera $a(x)u + \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ sobre $\partial\Omega$ con $a(x) > 0$, entonces se tendría
$\int_\Omega < \nabla u, \nabla u > dx + \int_{\partial\Omega} au^2 d\sigma = 0$, de donde se tiene
$\int_\Omega < \nabla u, \nabla u > dx = 0$, lo que implica u constante en Ω y se tendría $\int_{\partial\Omega} au^2 d\sigma = 0$. Bien, como $a > 0$ y $\int_{\partial\Omega} au^2 d\sigma = 0$ entonces se tendría $u = 0$ en $\partial\Omega$. Pero u es continua en $\bar{\Omega}$ y constante en Ω, luego se tendrá $u = 0$ en Ω.

Nuevamente, veamos (2.1) y supongamos que $u = 1$ en $\bar{\Omega}$ y que v es armónica en Ω; entonces se obtendría el teorema de Gauss $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial N} d\sigma = 0$. Por otro lado, si en G1 intercambiamos los roles de u y v, y ambas funciones están en $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, y restamos se obtendrá

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N} \right) d\sigma \tag{2.2}$$

G2 es llamada la **segunda identidad de Green.**

Las identidades de Green, ya mencionadas, juegan un vital rol en las EDP clásicas. George Green (1793-1841), un matemático británico, fue uno de los primeros en tratar lo que sería el problema de Dirichlet en sus trabajos sobre la electricidad y magnetismo (1828), aun cuando sus argumentos no fueron del todo rigurosos ya vimos como usando (2.1) se puede probar de un modo simple la unicidad de la solución del problema de Dirichlet, si esta solución existe. Este problema fue estudiado por Peter G.Dirichlet (1805-1859) quien no logró resolver el problema pero su método fue muy importante pues relacionó a las EDP con el cálculo de variaciones. Veamos la idea. Sea $F = \{u \in C^0(\Omega) \cap C^1(\Omega)/u = f \text{ sobre } \partial\Omega\}$, $f \in C^0(\partial\Omega)$ y definamos $\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$; $\Phi(u)$ es llamado **la integral de Dirichlet**. Sea ahora $u_0 \in F$ tal que $\Phi(u_0) = \min_{u\in F} \Phi(u)$. Por otro lado, si $v \in F$ tal que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, sea $\phi(t) = \int_\Omega |\nabla(u + tv)|^2 dx$. Como u_0 es el mínimo de Φ en F, $\phi'(0) = 0$; luego se tendrá $\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx = 0$, $v \in F$; ahora, por el teorema de la divergencia se tendrá $\int_\Omega (\Delta u_0)v dx = 0$, para todo $v \in F$, $v = 0$ sobre $\partial\Omega$. Luego $\Delta u_0 = 0$ en Ω.

2.4. Conclusión:. si u_0 es solución del problema variacional, entonces u_0 es solución del problema de Dirichlet. ... Se verifica que el problema recíproco también es cierto. Pero, surgieron algunos cuestionamientos; así, por ejemplo: ¿existe $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $u = f$ sobre $\partial\Omega$ tal que $\Phi(u) < \infty$? Además, por otro lado, Friedrich E. Prym (1841-1915) en 1871 publica un trabajo en donde se observa que aun cuando el problema de Dirichlet tenga solución u en Ω, no se garantiza que la integral de Dirichlet sea finita; en esta ruta dio un ejemplo de una función $f \in C^0(\partial\Omega)$ tal que F es vacío. Más concretamente Prym expuso: "Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la bola unitaria; entonces existe una función armónica $u_0 \in C^0(\bar{B}) \cap C^\infty(B)$ tal que $\Phi(u_0) = \int_B |\nabla u_0|^2 dx = +\infty$.

Así mismo, Jacques S. Hadamard (1865-1963) en 1906 también construyó un ejemplo que muestra la no equivalencia entre el problema de Dirichlet y el principio de Diríchlet; para ello usa la representación de una función armónica por medio de una serie de Fourier sobre la bola unitaria en $\mathbb{R}$. En esta ruta la tarea que surgió fue probar que si tal $u_0 \in C^1(\Omega)$, entonces $u_0 \in C^2(\Omega)$.

Bien, Riemann asumió la suposición que tal mínimo u_0 existe en F ;a esta suposición lo llamó **"el Principio de Dirichlet"**, principio que fue motivado por consideraciones de la física (Riemann fue un notable físico, también) ya que el problema de Dirichlet no depende del tiempo y entonces la solución tendría que corresponder a un mínimo de energía dado por $\Phi(u_0)$ y por ello se asumió la existencia del mínimo como algo evidente e intuitivo y de esta manera se asumió que el problema de Dirichlet siempre tendría solución. **Pero**, Weierstrass, en 1869, demostró, con un simple argumento, que el mínimo de $\Phi(u)$ en F **no siempre existe**, lo que trajo cierto desconcierto en el ambiente matemático; y, como hemos dicho, Hadamard construyó una función sobre el contorno de una bola para el cual la solución del problema de Dirichlet no hace finita a la integral de Dirichlet.

2.5. Algo Más sobre el Problema de Dirichlet y el Principio de Dirichlet. Estos dos conceptos jugaron un papel muy importante en el desarrollo de las EDP y del naciente análisis funcional, tanto en el siglo XIX como en el XX. Veamos un poco más sobre las ideas introducidas anteriormente. Planteado el problema de Dirichlet surgieron los dos problemas básicos a resolver:

- la existencia de la solución; es decir, buscar métodos que conduzcan a la solución del problema;
- la unicidad de la solución.

Se introdujeron varios métodos para resolver al problema de Dirichlet; uno de ellos es el Principio de Dirichlet que fue así llamado por B.Riemann en 1851, pero que ya había sido formulado, de algún modo, por Gauss en 1840 y por W. Thompson (conocido como Lord Kelvin) en 1847. La idea del Principio de Dirichlet es transformar el problema de Dirichlet en un problema variacional en donde se desea determinar una función u que minimice a la funcional
$\Phi(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$, donde $u \in F$. Los elementos de F son llamados " funciones admisibles". El Princio de Dirichlet nos dice: "u es solución del problema variacional $\Phi(u) = \min_{v \in F} \phi(v)$ **si y solo si** u es solución del Problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ en Ω, $u = f$ sobre $\partial\Omega$. De esta manera, un problema diferencial (el problema de Dirichlet) es puesto en forma equivalente en un problema integral.

Riemann admitió que la existencia de tal mínimo estaba garantizada por consideraciones de la física y que la solución del problema corresponde a un mínimo de energía. Y se concluyó que "el problema de Dirichlet siempre tendría solución", vía este método. Y Riemann usó esta declaración en uno de sus trabajos .... Pasados algunos años, como ya hemos mencionado, Weierstrass construyó el ejemplo: sea $\{L(x, y) = ax + by + c\}$ una familia de rectas y sea $B = B(0, 1)$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$, entonces se tiene $\int_B \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2\right] = \pi(a^2 + b^2)$, de donde se obtiene $\inf_{a,b}\{\pi(a^2 + b^2)\} = 0$.
Pero ,...,no existe tal recta con $a^2 + b^2 = 0$.

Como este camino, el principio de Dirichlet, no resolvía el problema de Dirichlet aun cuando contenía bellas y buenas ideas en el método, los matemáticos buscaron otros métodos con tal propósito. Así,·se introdujeron las siguientes rutas:

(i) **La Función de Green.** George Green en 1828 introdujo un método para resolver el problema de Dirichlet, lo que expuso en un trabajo sobre electricidad y magnetismo. En esta ruta se tiene a la "función de Green" que permite resolver tal problema en casos especiales. El punto de partida es la llamada “tercera identidad de Green”. Tengamos a mano la identidad (2.2) y consideremos a la función armónica en $\Omega - \{x_0\}$, $v(x) = \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}$, $n > 2$, donde $x_0 \in \Omega$ es un punto fijo. Entonces se tiene

Tercera Identidad de Green: “sea $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ entonces se tiene

(i) si $n > 2$,

$$u(x_0) = \frac{1}{(2-n)w_n}\int_{\Omega}\frac{\Delta u}{|x-x_0|^{n-2}}dx + \frac{1}{(2-n)w_n}\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial N}|x-x_0|^{2-n} - |x-x_0|^{2-n}\frac{\partial u}{\partial N}\right)d\sigma;$$

(ii) si $n = 2$,

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} log|x-x_0|\Delta u dx + \frac{1}{2\pi}\left(u\frac{\partial}{\partial N}log|x-x_0| - log|x-x_0|\frac{\partial u}{\partial N}\right)d\sigma. \tag{2.3}$$

Estas igualdades las denotamos (2.3).

Veamos ahora el siguiente argumento .Sea $h(x, x_0)$ una función armónica de x para cada x_0 fijo, y $k = \frac{1}{(2-n)w_n}$; sea ahora la función
$V(x) = \frac{k}{|x-x_0|^{n-2}} + h(x, x_0)$. Remarcamos que se está tratando de resolver el problema de Dirichlet vía el método de Green; para ello se introducen estas funciones en un argumento usando (2.3) para obtenerse (ver [6])

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial N}\left[\frac{k}{|x-x_0|^{n-2}} + h(x, x_0)\right]d\sigma - \int_{\partial\Omega}\left[\frac{k}{|x-x_0|^{n-2}} + h(x, x_0)\right]\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma \tag{2.4}$$

Se tiene la definición: “Un dominio Ω tiene una función de Green $G(x, x_0)$ **si** para cada $x_0 \in \Omega$, el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta h(x, x_0) = 0 & \text{en } \Omega \\ h(x, x_0) = -\frac{k}{|x-x_0|^{n-2}} & , x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución $h(x, x_0)$. La función $G(x, x_0) = \frac{k}{|x-x_0|^{n-2}} + h(x, x_0)$ es llamada **función de Green.**

Se observa que si Ω tiene una función de Green $G(x, x_0)$, entonces (2.4) es

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial N}G(x, x_0)u(x)d\sigma; \tag{2.5}$$

esta fórmula representa a una función armónica $u(x)$ en función de sus valores en el contorno $\partial\Omega$. Se remarca, [6], que para obtener esta fórmula se dio la hipótesis adicional de que $u(x)$ está en $C^1(\bar{\Omega})$. Pero, dado el problema de Dirichlet $u = 0$ en Ω; $u = f$ en $\partial\Omega$, donde Ω tiene una función de Green $G(x, y)$, **no es verdad** que la solución $u(x)$ esté en $C^1(\bar{\Omega})$ y de esta manera (viendo (2.5)) la fórmula $u(y) = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial N}G(x, y)f(x)d\sigma$, **no** es necesariamente solución del mencionado problema de Dirichlet! De esta manera el método de la función de Green para resolver el problema de Dirichlet presenta dificultades,como encontrar la función de Green de Ω.

(ii) Como los métodos del Principio de Dirichlet y de Green tuvieron dificultades para llegar en forma óptima a la solución del problema de Dirichlet se buscaron otros métodos, como son: el método de Perron, el método de Poincaré, el método alterno de Schwarz, ... Estos métodos contienen ideas matemáticas interesantes, pero por razón de espacio solo damos las siguientes referencias donde se exponen explícitamente tales métodos, [6], [8], [15]. Para el método de las ecuaciones integrales ver [8].

2.6. El Renacer del Principio de Dirichlet. Luego del mencionado ejemplo de Weierstrass el Principio de Dirchlet entró en una etapa de casi olvido , aun cuando el método contenía buenas ideas matemáticas. Pasaron los años del siglo XIX y llegamos a 1899 cuando David Hilbert presentó un corto artículo en donde rescata algunas ideas del Principio, introduce nuevas ideas como usar en método variacional para resolver al problema, y asi van surgiendo métodos que condujeron a la creación del análisis funcional. La ecuación de Laplace es reemplazada por ecuaciones más generales y surge la teoría de las ecuaciones lineales elípticas de orden superior; y así estamos entrando al siglo XX. En el bonito artículo [17] D.Figueiredo describe la historia del Principio de Dirichlet.

3. El Problema de Cauchy. Problemas de Valor Inicial.. En los cursos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene la siguiente cuestión: sea la ecuación $y' = f(x,y)$, donde $y' = \frac{dy}{dx}$. Un problema de valor inicial para esta ecuación consiste en encontrar una solución Φ de la ecuación tal que $\Phi(x_0) = y_0$, donde y_0 es un valor inicial dado, respecto a x_0.
Como se sabe el problema es bien puesto si existe solución y ella es única. Los problemas que provienen de la física son deseables que sean bien puestos. Por ejemplo, la ecuación $y' = -ky$, $k > 0$, describe el decaimiento del material radioactivo donde y es la masa del material, que depende del tiempo. La idea es que si una masa inicial y_0 es dada en el tiempo inicial t_0, se desea, física y matemáticamente, que la masa $y(t)$ en un tiempo futuro, sea unívocamente determinada. Así, de esta manera tenemos un problema de valor inicial o un problema de Cauchy

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

Este problema tiene solución: “ Sea el rectángulo $\Omega : |x - x_0 \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^1$ una función continua tal que $|f(x,y)| \leq M$ y satisface la condición de Lipschitz, $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$. Entonces la sucesión $\Phi_0(x) = y_0$, $\Phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Phi_k(t))dt$, $k = 0, 1, ...$, converge sobre el intervalo $|x - x_0| \leq \text{mín}(a, \frac{b}{M})$ a la solución $\Phi(x)$ el problema de Cauchy (3.1). Para mayores detalles del problema de Cauchy en este contexto ver, por ejemplo, [18], pag.200.

Veamos ahora el problema de Cauchy para ecuaciones en derivadas parciales. Como motivación usaremos las clásicas ecuaciones de la onda y del calor.

3.1. El Problema de Cauchy para la Ecuación de la Onda. . En $\mathbb{R}^2$ sea la ecuación de la onda

$$u_{x_2x_2} - u_{x_1x_1} = 0, \tag{3.2}$$

la cual mediante el cambio de variables $x_1 + x_2 = \xi$, $x_1 - x_2 = \eta$ toma la foma $u_{\xi\eta} = 0$. Integrando dos veces esta ecuación se obtiene $u = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$. Si f y g tuvieran derivadas segundas continuas, entonces u sería la solución de la ecuación (3.2). Si $x_2 = 0$ sea el problema de Cauchy: encontrar una función u, solución de (3.2) tal que $u(x_1, 0) = \alpha(x_1)$ y $u_{x_2}(x_1, 0) = \beta(x_1)$, donde α y β son adecuadas funciones. De donde, vía argumentos analíticos (ver [7]) se obtiene que

$$u(x_1, x_2) = \frac{\alpha(x_1 + x_2) + \alpha(x_1 - x_2)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} \beta(\xi)d\xi \tag{3.3}$$

es solución del problema de Cauchy siempre que α tenga derivadas segundas continuas y β tenga derivadas primeras continuas. (3.3) es conocida como la **fórmula de D'Alembert** y representa la única solución del problema de Cauchy y depende continuamente de α y β. Esta fórmula nos dice, además, que la solución u en el punto (x_1, x_2) depende solamente de los valores de α en los puntos extremos del intervalo $[x_1 - x_2, x_1 + x_2]$, y de los valores de β en este intervalo, el cual es llamado **“dominio de dependencia”** de (x_1, x_2). Por otro lado, dado un punto P sobre la recta $x_2 = 0$, ¿qué puntos (x_1, x_2) son influenciados por el punto P? ...; por esta pregunta entendemos los puntos (x_1, x_2) donde la solución del problema de Cauchy varía si cambiamos los dados iniciales en P. La zona influenciada es el conjunto de los puntos (x_1, x_2) limitado por dos rectas partiendo de P y que forman un ángulo de 45 con el eje $x_2 = 0$. Estas rectas son llamadas **“rectas características”** de la ecuación de la onda. Tal zona que se forma se llama **“dominio de influencia”** o **“cono característico”**. Para mayores detalles ver [7].

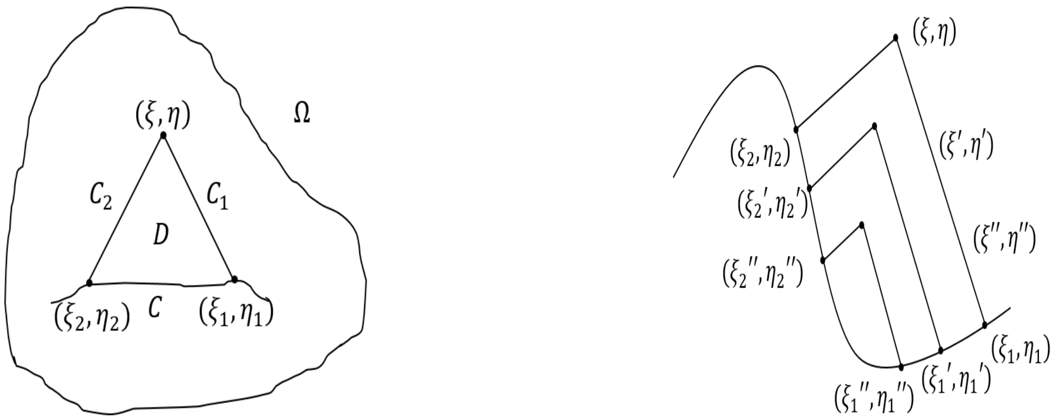
3.2. La Ecuación de Onda No -homogénea. . Sea la ecuación de la onda no-homogénea

$$u_{x_1x_2} - u_{x_2x_1} = f(x_1, x_2) \tag{3.4}$$

y supongamos que ella tiene solución u en algún dominio del plano, entonces u tiene la siguiente representación:

$$u(\xi,\eta) = \frac{u(\xi_1,\eta_1) + u(\xi_2,\eta_2)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(u_{x_1}dx_2 + u_{x_2}dx_1) + \frac{1}{2}\int_{\Omega} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \tag{3.5}$$

donde $\partial\Omega$ es el contorno de Ω, D es la región triangular formada por dos características C_1 y C_2 partiendo de (ξ,η) y una curva arbitraria C_3 que las une ,tal como se muestra en la Figura a.



(a) Figura a.

(b) Figura b.

Este triángulo está contenido en Ω.

Ahora consideramos el problema de encontrar una función u, solución de (3.4), tal que

$$\begin{cases} u(x,y) = \varphi(x,y) & \text{en } C \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial N} = \Psi(x,y) & \text{en } C \end{cases}$$

Para que (3.5) sea solución del problema planteado es necesario que cuando $(\xi,\eta) \to C$ se tenga entonces $(\xi_1,\eta_1) \to (\xi_2,\eta_2)$ (ver figura b). En estas condiciones se ve que $u(\xi,\eta)$ toma los valores dados sobre C. Se observa que no siempre es el caso que cuando $(\xi,\eta) \to C$ se tiene $(\xi_1,\eta_1) \to (\xi_2,\eta_2)$, esto es, D se contrae a un punto, como sucede en el caso de una curva C cuya inclinatión en algún punto es mayor que 1 (ver figura b). Entonces solo se tomará curvas iniciales C teniendo inclinación con valor absoluto menór que 1. Estas curvas son llamadas "space-like" ; en tanto que aquellas curvas cuyas inclinaciones sean de valor absoluto mayores que 1 son llamadas "time-like".

3.3. El Problema de Cauchy para la Ecuación del calor. Veamos los siguientes argumentos en $\mathbb{R}^3$. Sea el espacio $\{(x,t)/x = (x_1,x_2,x_3)$, t es el tiempo$\}$. Sea Ω un dominio limitado por la superficie $\partial\Omega$ en $\mathbb{R}^3$. El objetivo es estudiar la conducción del calor en Ω. Con tal fin $u = u(x,t)$ representará la temperatura, $f = f(x,t)$ es la densidad de calor producido por una corriente eléctrica (por ejemplo) en Ω por unidad de tiempo; c es la capacidad de calor, esto es, el calor ganado es igual al calor perdido, lo que se expresa con $K_g = K_p$. Si ΔK representa el calor ganado o perdido y Δt es el cambio de temperatura, entonces la capacidad calorífica del objeto es definido siendo $c = \frac{\Delta K}{\Delta t}$. Por otro lado, ρ representa la densidad de masa y k es la conductividad de calor. Veamos el argumento: sean dos objetos iguales que tienen temperaturas t_1 y t_2, con $t_2 > t_1$. El espacio entre ellos es llenado con una sustancia material; cuestión: ¿ cómo se conduce el calor? ... Se experimenta que la rapidez del flujo de calor $\frac{dK}{dt}$ es proporcional a la diferencia de temperaturas, es directamente proporcional al área A e inversamente proporcional al espesor de la plancha Δx. Entonces, formalizando se tiene $\frac{dK}{dt} = kA\frac{\Delta t}{\Delta x}$, donde k es llamado el coeficiente de conductividad calorífica.

Por otro lado, en este contexto sea f una variable conocida y u es la variable por conocer; c, ρ y k son asumidos como constantes. Sea Ω_i un subconjunto arbitrario de Ω. Se determina que el calor contenido en Ω_i en un tiempo dado es igual a $\int_{\Omega_i} c\rho u dx$; y el cambio del calor contenido en Ω_i es $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_i} c\rho u dx = \int_{\Omega_i} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx$. Se sabe que el flujo de calor, por unidad de tiempo, en Ω_i a través de $\partial\Omega_i$ es $-\int_{\partial\Omega_i} k\frac{\partial u}{\partial N}$. Así mismo, el calor producido, por unidad de tiempo, en Ω_i, es dado por $\int_{\Omega_i} f dx$. Ahora se aplica el principio de la conservación del calor para tener

$$\int_{\Omega_i} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx = -\int_{\partial\Omega_i} k\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma + \int_{\Omega_i} f dx \quad \text{ó}$$

$$\int_{\Omega_i} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_{\partial\Omega_i} k\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma = \int_{\Omega_i} f dx \tag{3.6}$$

Esta igualdad es conocida como **la ecuación del calor en forma integral**. En particular, en el caso estacionario se tendrá $\int_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial t}d\sigma = \int_{\Omega_i} f dx$. Si $f = 0$ se obtiene, nuevamente, el teorema de Gauss. Ahora vamos a obtener la ecuación del calor en forma diferencial; para ello se utilizará al teorema de la divergencia. Así, sea el campo vectorial $H = -k\nabla u$; entonces,

$$< H, N >=< -k\nabla u, N >= -k\frac{\partial u}{\partial N} \quad \text{y} \quad divH = -div(k\nabla u) = -k\Delta u.$$

(teorema de la divergencia: $\int_{\Omega_i} divH dx = -\int_{\partial\Omega_i} < H, N > d\sigma$.)
Por lo tanto (3.6) toma la forma $\int_{\Omega_i} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_{\Omega_i} k\Delta u dx = \int_{\Omega_i} f dx$, de donde se obtiene $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f$. Esta igualdad es ia ecuación del calor en forma diferencial. En el caso estacionario (no depende del tiempo) se obtiene $-k\Delta u = f$.

La ecuación (diferencial) del calor es del tipo parabólico. Como ilustración tomemos el caso simple $\mathbb{R}^3$. Veamos, sea una varilla de longitud L que se asume suficientemente delgada para admitir que el calor se distribuya en forma homogénea en cualquier sección de ella; también se asume que no hay pérdida de cajor a través del contorno. El problema de valor inicial - contorno que tratamos es:
"encontrar un función $u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & , 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = 0 & , u(L, t) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Para garantizar la existencia del problema (3.7) se asume que $f(x)$ sea continua en $[0, L]$, que $f(0) = 0 = f(L)$ y que $f(x)$ sea seccionalmente continua en $[0, L]$; se usará el método de separación de variables. Bien, sea $u(x, t)$ solución de (3.7); tarea ¿que forma tiene $u(x, t)$? Como se sabe, sea $u(x, t) = X(x)T(t)$; de esta manera $u_t - ku_{xx} = 0$ se cambia a $X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$ de donde
$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\theta^2$, donde θ es una constante positiva. Estas igualdades y las hipótesis implica el problema:

$$\begin{cases} X''(x) + \theta^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0; X(L) = 0; \\ T'(t) + \theta^2 kT(t) = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

Ahora se sabe que la solución del problema (3.8), (ver [7], [8], [10], [15]), tiene la forma $X(x) = Acos\theta x + Bsen\theta x$. Usemos las condiciones de contorno para obtener, $0 = X(0) = A$ y $0 = X(L) = Bsen\theta L$; de donde aún, $sen\theta L = 0$ ó $\frac{n\pi}{L} = \theta, n = 1, 2, ...$ Ahora escribamos la solución en forma más conveniente: $X_n(x) = B_n sen\frac{n\pi}{L}x$, que es la solución de (3.8).

Por otro lado, la ecuación $T'(t) + \theta^2 kT(t) = 0$ tiene solución general de la forma

$$T(t) = Ce^{-\theta^2 kt} \quad \text{ó} \quad T_n(t) = Ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

En conclusión, la solución (no trivial) de la ecuación del calor satisfaciendo las condiciones de contorno es

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = B_nC_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

Luego, el candidato a ser la solución global del problema en discusión es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} sen\frac{n\pi}{L}x, \text{ donde } a_n = B_nC_n.$$

Ahora bien, para que $u(x,t)$ sea solución de (3.7) debemos tener que $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\frac{n\pi}{L}x$, esto es, $f(x)$ debe ser factible de desarrollarse en una serie seno de Fourier, donde $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi}{L}x dx$, lo que es factible tenerse por las condiciones impuestas a f. Así, la función $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} sen\frac{n\pi}{L}x$ es la solución del problema planteado (3.7).
Para mayores detalles sobre lo expuesto ver, por ejemplo, [7], [12], [8], [9], [11],[19], ...

4. Problemas "Mal Puestos". . Históricamente, desde sus orígenes los problemas en EDP corresponden a situaciones que ocurren en la realidad del mundo físico y por ello es natural que tales problemas satisfagan las siguientes condiciones:

(i) la solución del problema debe existir;

(ii) la solución debe ser única, y

(iii) la solución debe depender continuamente de los dados iniciales- contorno dados, esto es la condición de estabilidad.

Cuando un problema satisface estas tres condiciones se dice que el **"problema es bien puesto"**. Veamos algunos comentarios al respecto. La cuestión de la existencia de la solución es una tarea compleja, difícil. Muchas veces se tienen resultados generales sobre la existencia de la solución del problema. En la relativo a la unicidad de la solución la tarea es más posible pues se tienen recursos útiles para ello, como por ejemplo la integral de la energía. En cuanto a la condición de la estabilidad, en el sentido de Hadamard, se entiende que cuando variamos los dados iniciales: Cauchy o de contorno, en una pequeña proporción entonces la solución no debe cambiar mucho también. Esto es importante tener pues las condiciones iniciales o de contorno son encontrados experimentalmente y por tanto no son determinadas con una precisión absoluta. De esta manera es deseable que a pequeñas variaciones de los dados, las soluciones también varíen poco!

4.1. Conclusión:. cuando una de las condiciones (i), (ii) ó (iii) falla, el problema es llamado ' **"mal puesto"**. Digamos algo respecto a este tipo de problemas.

(i) **Violación de la Existencia.** Vamos a presentar un problema de Cauchy, debido a Hadamard, cuya solución no existe. Para ello veamos algunos resultados del análisis armónico.
Schwarz: "sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región cuyo contorno $\partial\Omega$ contenga una parte plana P (supongamos, por ejemplo, que $\partial\Omega$ contenga una parte P del hiperplano $x_1 = 0$ y que Ω esté contenida en $x_1 > 0$). Sea $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$ en Ω, $u = 0$ sobre P. Sea, además, Ω' la región reflexión de Ω respecto a $x_1 = 0$. Entonces, existe una función armónica w en $\Omega \cup P \cup \Omega'$ tal que $w = u$ en $\bar{\Omega}$".
Este resultado es conocido como: **"el principio de la reflexión de Schwarz"**, el que es análogo al principio del prolongamiento analítico, en la tería de las funciones analíticas.

Ejemplo de Hadamard Problema: "Sea P un subconjunto cerrado y limitado de $x_1 = 0$. Determinar una función armónica $u(x)$ en una vecindad N de P, tal que $u(x) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x_1} = f$ en P, donde f no es una función analítica".
Este problema de Cauchy **no tiene solución!**. En efecto: supongamos que el problema tenga solución, es decir, que existiera una función armónica $u(x)$ en $\Omega = \bar{N} \cap \{x_1 > 0\}$, $u \in C^0(\bar{\Omega})$ y tal que $u(x) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x_1} = f$ en P. En este caso, por el principio de reflexión, $u(x)$ es prolongada para la región simétrica obteniéndose así una función armónica w en una región que contiene a P. Por otro lado, w armónica implica que w es analítica, así como también sus derivadas parciales. Como $\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = f$, se tendría que f es analítica, una contradicción!

Creemos conveniente mencionar que se creía que toda ecuación lineal en derivadas parciales tenía siempre una solución , al menos localmente . Sin embargo, Hans Lewy [3] probó mediante un contraejemplo que tal afirmación es, en general, falsa! Así, existen ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes en C^∞, las cuales **no tienen** solución en ningún conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Con tal objetivo se usa el

Teorema 4.1. *(H.Lewy). "Sea $(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3$ y $u(x_1, x_2, t)$ es un número complejo. Sea $\Psi(x_2)$ una función de valor real de clase C^1. Sea la ecuación diferencial lineal*

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + 2i(t + ix_1)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \right] u = \Psi'(x_2) \tag{4.1}$$

Bien, si se asume que existe una solución $u(x_1, x_2, t)$ de (4.1) en una vecindad de N del punto $x = (0, x_2, 0)$, con $u \in C^1$, entonces $\Psi(x_2)$ es analítica en $x_2 = x_2^0$".
Veamos el contraejemplo. La idea es tomar una ecuación (4.1) en la cual $\Psi(x_1)$ es real, esté en C^∞ pero que no sea analítica en $x_2 = x_2^0$. Entonces la ecuación (4.1) no puede tener una solución $u \in C^1$ en cualquier vecindad $N(0, x_2, 0)$.

(ii) **No Unicidad de la Solución.** Por razones de completitud vamos a considerar algunas ideas previas. Sea la ecuación en derivadas parciales lineal de orden m:

$$Pu = \sum_{|\alpha| \le m} a^\alpha D^\alpha u = f$$

donde $D_j = i\frac{\partial}{\partial x_j}$; $D = (D_1, ..., D_n)$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, α_1 es un entero no negativo, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. El escenario es $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$ En este contexto, un **operador diferencial lineal** P en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es la aplicación lineal $u \to Pu = \sum_{|\alpha| \le m} a^\alpha D^\alpha u$. El orden de P es definido como el mayor de los $|\alpha|$ para los cuales $a^\alpha \neq 0$. Sea ahora el siguiente problema de Cauchy:
"encontrar una solución u de $Pu = \sum_{|\alpha| \le m} a^\alpha D^\alpha u = f$ tal que sobre una hipersuperficie (en el caso de la ecuación de la onda $x_2 = 0$ una hipersuperficie no característica) $S \subset \mathbb{R}^n$ se tenga $u = \varphi_0$, $\frac{\partial u}{\partial N} = \varphi_1$, ..., $\frac{\partial^{m-1} u}{\partial N^{m-1}} = \varphi_{m-1}$, donde φ_0, ..., φ_{m-1} son funciones dadas que se llaman **dados iniciales**.

Si los dados iniciales φ_i, los coeficientes a^α y f fueran funciones analíticas, el problema de Cauchy es llamado problema de Cauchy analítico. En este escenario la unicidad de la solución del problema de Cauchy analítico está garantizado por el

Teorema 4.2 (Teorema de Cauchy - Kowalevsky). *El problema de Cauchy analítico para*

$$\sum_{|\alpha| \le m} a^\alpha D^\alpha u = f$$

tiene una única solución analítica".

Se observa que este teorema es de carácter local pues la unicidad de la solución es probada en una vecindad de un punto; el espíritu de la prueba es verificar que en esa vecindad los coeficientes de la serie, en que la solución es expandida, son unívocamente determinadas por las condiciones iniciales y por la ecuación diferencial. De esta manera si tuviéramos dos soluciones analíticas para el problema, con las mismas condiciones iniciales, ellas necesariamente coinciden en tal vecindad, lo que probaría la unicidad de la solución!
Además, debemos enfatizar que el teorema de Cauchy-Kowalevsky solo nos da la unicidad en la clase de las funciones analíticas y deja abierta la posibilidad de la existencia de otras soluciones no-analíticas. En esta dirección un teorema importante fue dado por Holmgren en el año 1901 en su trabajo con ecuaciones diferenciales lineales analíticas con un número arbitrario de variables independientes. Así, se tiene el

Teorema 4.3. Teorema de Holmgren. *"Si Pu es un operador diferencial lineal con coeficientes analíticos y si los dados iniciales de Cauchy se anulan sobre una hipersuperficie regular no característica S_0, entonces cualquier solución u (no necesariamente analítica) de $Pu = 0$, con esos dados iniciales, se anulan idénticamente en una vecindad pequeña de cualquier subconjunto cerrado de S_0".*

Nota 4.1. *Dado el anterior operador lineal P, su parte principal o forma característica de P se define como el polinomio en ξ, $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a^{\alpha}(x)\xi^{\alpha}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. El vector ξ es llamado característico si satisface la ecuación $P_m(\xi) = 0$. Una superficie en $\mathbb{R}^n$ es llamada superficie característica (no-característica) si su vector normal es, en todo punto, característico (no característico).*

Observemos que el teorema de Holmgren nos asegura la unicidad de la solución para dados iniciales arbitrarios, no necesariamente analíticos sobre S_0; esto sigue del hecho que si tuviéramos dos soluciones u_1 y u_2, entonces $u = u_1 - u_2$ tiene dados de Cauchy cero, luego por el teorema de Holmgren u debe anularse idénticamente. Para mayores detalles sobre estos dos últimos teoremas, y otros temas relacionados, ver [10], [11], [9], [16], [8].

Resumamos las ideas. Acabamos de ver que el problema de Cauchy para EDP con coeficientes analíticos tienen por lo menos una solución regular siempre que los dados sean asumidos sobre una superficie no-característica. Holmgren probó que el problema de Cauchy tiene, en lo máximo, una solución continua con derivadas parciales contínuas siempre que la ecuación sea lineal y tenga coeficientes analíticos. En esta dirección, T. Carleman, en 1939, dio la primera contribución en el sentido de retirar la hipótesis de la analiticidad de los coeficientes en el argumento del teorema de Holmgren y probó el resultado en el caso de dos variables independientes y asumió que las características de la ecuación no sean múltiples. Por otro lado, E. Giorgi mostró un ejemplo donde las características son múltiples y el problema de Cauchy respectivo tiene más de una solución, y de esta manera mostró que la condición sobre la característica en el resultado de Carleman no era artificial, como parecía.

El caso de más de dos variables, en el problema de Cauchy, no tuvo ningún progreso esencial hasta que C. Muller, en 1954, estudió una ecuación especial de segundo orden; en tanto que Hartman-Wintner y E. Heins propusieron el caso de ecuaciones de segundo orden cuasi-lineales con el laplaciano como parte principal. Luego Aronssajn extendió este resultado al caso elíptico general de segundo orden. Como veremos después, L.Nirenberg, en 1957, estudia el problema de la unicidad de la solución del problema de Cauchy para operadores con coeficientes principales constantes. Ver [1]. También, en 1957, A.P.Calderón generaliza el teorema de Carleman a funciones de cualquier número de variables, con excepción del caso de ecuaciones de 3 variables y de sistemas de 3 ó 4 variables. Calderón trabaja con ecuaciones cuyos coeficientes son Hölder continuamente diferenciables bajo la condición adicional de que las características no sean múltiples. Posteriormente, Calderón obtuvo mejoras de su trabajo citado mostrando que las condiciones sobre el número de variables pueden ser retiradas.

Veamos ahora la **no unicidad** de la solución del problema de Cauchy; A. Plis, en 1960, dio un ejemplo donde muestra que la multiplicidad de características reales puede causar la no unicidad de la solución, siempre en el caso de coeficientes en C^∞. Surgió entonces la cuestión: en los teoremas de unicidad, ¿ podemos admitir la multiplicidad de características esencialmente complejas? ... Hörmander, en 1959, ver [20], (pag.120 y siguientes) demostró un teorema de unicidad para ecuaciones con coeficientes principales constantes con un máximo de 2-multiplicidad de las características esencialmente complejas (números complejos). Plis, en 1960, dio una respuesta a la anterior pregunta: "ella es, en general negativa para coeficientes en C^m, siendo m un número finito"; esta respuesta está contenida en el:

Teorema 4.4. Teorema de Plis. *"Existe un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico para el cual el problema de Cauchy tiene dos soluciones diferentes de clase C^∞. Los coeficientes principales son constantes y las restantes son de clase C^m en las variables t, x, y son analíticas en x, siendo $0 \leq m < \infty$. Las características imaginarias son de multiplicidad $m+3$ y el sistema consiste en $2(m+3)$ ecuaciones complejas en dos variables independientes reales, Las soluciones son analíticas en x". (Ver [4] para mayores detalles).*

Ahora veamos la equivalencia existente entre la unicidad de la solución del problema de Cauchy y la propiedad de la continuación única. Así tenemos las expresiones:

(A) **Propiedad de la continuación única:** "Una solución de una ecuación elíptica $P(D)u = 0$ en un dominio Ω, la cual anúlase en un subconjunto abierto, se anula identicamente".

(B) **Unicidad de la solución del problema de Cauchy:** "Para un polinomio diferencial $P(D)$ de orden m, $u = 0$ es la única solución de $P(D)u = 0$ en una vecindad de un punto, tal que u, junto con sus derivadas hasta la orden $m-1$ anularse sobre una superficie $(n-1)$-dimensional S conteniendo el punto".

Teorema 4.5. *(A) si y solo si (B).*

Demostración:

- (A) implica (B). En efecto, tenemos

$$P(D)u = Pu = \sum_{|\alpha|\leq m} a^\alpha D^\alpha u = a^m D^m u + \sum_{|\alpha|\leq m-1} a^\alpha D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n} u = 0$$

además, por la hipótesis, $\sum_{|\alpha|\leq m-1} a^\alpha D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n} u = 0$; luego $D^m u = 0$ sobre S. Sea $x \in S$ llamemos Ω^+ y Ω^- las subregiones que S determina en Ω y definamos

$$u_1 = \begin{cases} u & \text{en } \bar{\Omega}^+ \\ 0 & \text{en } \Omega^- \end{cases} \text{ y } u_2 = \begin{cases} 0 & \text{en } \Omega^+ \\ u & \text{en } \bar{\Omega}^- \end{cases}$$

Tenemos que $u = u_1 + u_2$, $Pu_1 = 0$, $Pu_2 = 0$; luego, $u_1 = 0$ en Ω^- (abierto) implica $u_1 = 0$ en una vecindad $V(x)$ de x, esto por la hipótesis. Análogamente, $u_2 = 0$ en Ω^+ lo que implica $u_2 = 0$ en $V(x)$. Por lo tanto $u = 0$ en $V(x)$.

- (B) implica (A). Sea G un subconjunto abierto maximal donde u (solución de $Pu = 0$) se anula y supongamos que $G \neq \Omega$. Se probará que existe una bola $B \subset G$ tal que existe $x \in \partial B$ y que $x \in \Omega - G$. Para ello, sea $P = \{r > 0 / B_r(z) \subset G\}$ y $Q = \{r > 0 / B_r(z) \neq G\}$, donde $z \in G$ es un elemento muy próximo del contorno ∂G, conteniendo elementos de Ω. Sea r_0 el elemento separador de P y Q; entonces diremos que $B_{r_0}(z)$ es la bola deseada!

  En efecto, $B_{r_0}(z) \subset G$ pues si $B_{r_0} \not\subset G$ ello implicaría que existe $x \in B_{r_0}(z)$ y $x \notin G$; tomemos $|z - x| < r < r_0$ y sea la bola $B_r(z)$. Luego se tendrá

$x \in B_r(z)$ y $x \notin G$, por lo tanto $r \in Q$, lo que es absurdo pues r_0 es el ínfimo de Q. Ahora! se probará la existencia de x tal que $x \in \partial B$ y $x \in \Omega - G$. Para ello se procederá por el absurdo. Supongamos que $\overline{B_{r_0}(z)} \cap (\Omega - G) = \emptyset$ (intersección de dos cerrados); luego existiría una bola abierta B tal que $\overline{B_{r_0}(z)} \subset B$ y $B \cap (\Omega - G) = \emptyset$, lo que es absurdo ya que r_0 es maximal. Ahora, sea $x \in \overline{B_{r_0}(z)} \cap (\Omega - G)$ y considerando el problema de Cauchy se ha encontrado una vecindad $V(x) \not\subset G$ donde $u(x) = 0$ (hipótesis); pero esto es una contradicción por ser G el máximo abierto donde $u = 0$.

□

Así el panorama, Plis de acuerdo al teorema 4.1 construyó ecuaciones de tipo elíptico sin la propiedad de la continuación única, con coeficientes siendo de clase C^m, $0 \leq m < \infty$. Asi mismo, Plis, [5], dio ejemplos similares y relacionados a lo expuesto, pero ahora los coeficientes son de clase C^∞. Enunciemos los resultados de Plis.

Teorema 4.6. *"Existen dos funciones f y g, en las variables independientes t, x, y, de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^3$ tal que la ecuación*

$$Pu = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 + t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] u = f u_x + g u$$

tiene una solución u, de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ que se anula para $t \leq 0$ pero no es nula idénticamente en cualquier vecindad de $t = 0$".

En el plano Plis construyó una ecuación diferencial elíptica lineal compleja en la cual la solución del problema de Cauchy es **no única**, esto es, la solución no tiene la propiedad de la continuación única. Esta situación está contenida en el

Teorema 4.7. *"Para cualquier tres números enteros positivos p, q y k, que satisfacen las desigualdades $\frac{1}{2}(p+3) < q \leq p$, $k > \frac{p-1}{2q-p-3}$, existe una función compleja $f(t,x)$ de clase C^∞ sobre todo el plano tal que la ecuación en derivadas parciales compleja*

$$Pu = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial}{\partial x} \right)^p + t^k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^q - \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{q-1} \right] u = f(t,x) u$$

tiene una solución de clase C^∞ sobre todo el plano que se anula para $t \leq 0$, pero no nula idénticamente en cualquier vecindad de $t = 0$".

En particular, se tienen los siguientes resultados.

Corolario 4.1. *Existe una función compleja $f_1(t,x)$ de clase C^∞ sobre el plano tal que la ecuación de cuarto orden de tipo elíptico $\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 + t^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left(i \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \right] u = f_1(t,x) u$ tiene una solución de clase C^∞, que se anula para $t \leq 0$, pero no es nula en cualquier vecindad de de $t = 0$".*

Corolario 4.2. *"Existe una función compleja $f_2(t,x)$ de clase C^∞ sobre el plano tal que la ecuacion elíptica de sexto orden, con coeficiente principales constantes*

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial}{\partial x} \right)^6 + i t^6 \frac{\partial^5}{\partial x^5} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] u = f_2(t,x) u$$

tiene una solución de clase C^∞, no nula para $t \leq 0$, pero no se anula idénticamente en cualquier vecindad de $t = 0$".

Nota 4.2. *Para las demostraciones de estos teoremas y corolarios, ver [5].*

(iii) **Violación de la Estabilidad.** En el siguiente problema, debido a Hadamard, se da un ejemplo de un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, problema que

no es estable, o bien puesto en el sentido de Hadamard.
Problema .Determinar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ u(x,0) = 0 & ;\, u_t(x,0) = \frac{1}{n^k} sennx, \end{cases}$$

donde n y k son enteros positivos.
Se sabe que $u(x,t) = \frac{1}{n^{k+1}} sen(nx) \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2}$ es una solución del problema dado. Además, se observa que $|u_t(x,0)| \leq \frac{1}{n^k}$; luego, si $n \to \infty$, $u_t(x,0) \to 0$, para todo x. Por otro lado, la solución, para t arbitrariamente pequeño, asume valores muy grandes para $n \to \infty$. □

Así, este problema no es estable. Veamos, aún, la siguíente situación. Admitamos que se tiene una solución $u_0(x,t)$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ u(x,0) = g_0(x) \\ u_t(x,0) = g_1(x). \end{cases}$$

Entonces la función $u_0(x,t) + \frac{1}{n^{k+1}} sen(nx) \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2}$ es una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = g_0(x) \\ u_t(x,0) = g_1(x) + \frac{1}{n^k} sen(nx). \end{cases}$$

Se observa que este problema también **no es estable**.

Nota 4.3. *Se observa que la solución del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace $u_{tt} + u_{xx} = 0$ está garantizada por el teorema de Cauchy-Kowalevska ya que sus coeficientes son analíticos, además se tiene la unicidad de la solución. De esta manera, existen problemas no estables pero que admiten solución única, al menos localmente!*

5. Unicidad de la Solución del Problema de Cauchy para EDP con Coeficientes Principales Constantes. En esta sección vamos a estudiar el trabajo de Louis Nirenberg, [1], sobre el problema de la unicidad del problema de Cauchy para ecuaciones donde los coeficientes principales son constantes, y de esta manera tendremos un panorama más amplio sobre este tema. Además, será la oportunidad de ver algunos resultados sobre los operadores diferenciales parciales según L. Hörmander quien estableció una teoría general sobre tales operadores en 1955; ver [2]. Ya en las secciones anteriores hemos tenido la oportunidad de ver este problema para las EDP clásicas y también la cuestión de la unicidad de la solución. En esta ocasión se estudiará, según Nirenberg, ecuaciones de la forma $Pu + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) P_j u = f(x)$, donde P y P_j son polinomios diferenciales, esto es, operadores lineales con coeficientes constantes, y los coeficientes $a_j(x)$ son funciones limitadas; la idea de Nirenberg fue establecer condiciones para que se tenga la unicidad del problema de Cauchy, condiciones que están relacionadas con las propiedades que los polinomios P_j deben tener en relación al polinomio P; así mismo la unicidad depende del tipo de dominio particular Ω en donde se busca la solución del problema. Con tal propósito Nirenberg introduce el concepto de polinomio admisible relativo al polinomio P. Esta sección consta de 5 subsecciones: 5.1 Conceptos preliminares; 5.2 Se establece el teorema de unicidad (teorema 5.1; **??** La desigualdad de Hörmander; **??** Extensión de la desigualdad de Hörmander según Nirenberg; **??** Demostración del teorema 5.1.

5.1. Conceptos preliminares. A cada polinomio $P(\xi)$ asociamos el polinomio diferencial $P(D)$ y un polinomio diferencial aplicado a u será denotado por $P(D)u \equiv Pu$; u es una función de n variables $x = (x_1, ..., x_n)$. Designamos por $P^{(\alpha)}(\xi)$ a la expresión: $P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \xi_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial \xi_n^{\alpha_n}} P(\xi)$; y la orden de esa derivada es $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = |\alpha|$. $\bar{\Omega}$ es la cerradura de Ω. B_ξ es la esfera abierta de centro en el origen y radio ξ.

Definición 5.1. *" Sea η un vector real arbitrario. Un polinomio diferencial $M(D)$ es η-* **relativamente admisible** *al polinomio diferencial $P(D)$ si el cociente $\frac{|M(\xi+i\lambda\eta)|^2}{\sum_{|\alpha|\geq 1}|P^{(\alpha)}(\xi+i\lambda\eta)|^2}$ es uniformemente limitado para todos los vectores reales ξ y todos los números reales λ".*

Definición 5.2. *" $M(D)$ es llamado* **relativamente admisible** *a $P(D)$ si*

$$\frac{|M(\xi)|^2}{\sum_{|\alpha|\geq 1}|P^{(\alpha)}|^2}$$

es uniformemente limitado para todos los complejos $\xi \in C^n$".

Se observa que la admisibilidad implica la η - admisibilidad, pues en la definición 5.1. tenemos vectores complejos de la forma $\xi + i\lambda\eta$, los que son un subconjunto del conjunto C^n.

Definición 5.3. *"Un dominio Ω es llamado* **estrictamente convexo** *en un punto x del contorno si existe un hiperplano H que intersecta $\bar{\Omega}$ solamente en aquel punto x".*

Así, un cubo es estrictamente convexo en sus vértices pero no en sus restantes puntos.

Para el objetivo del tema a desarrollar se considera que Ω es estrictamente convexo en el origen 0, y que el eje x_1 es perpendicular al hiperplano H en 0. Se designa con Ω_c el conjunto de puntos de Ω donde $x_1 = c$.

5.2. El teorema de unicidad. (Nirenberg, [1]). Ahora se formulará el teorema central del mencionado artículo, del cual se obtienen otros resultados. Este teorema implicará la unicidad de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones ya mencionada en 5.1.

Teorema 5.1. *"Sea Ω estrictamente convexo en el origen. $P(D)$ un polinomio diferencial de orden m y sean $P_1(D), ..., P_q(D)$ polinomios diferenciales de órdenes inferiores, los cuales son $\xi^1 = (1, 0, ..., 0)$ - admisibles relativos a $P(D)$, esto es, satisfacen la desigualdad*

$$\sum_{j=1}^{q}|P_j(\xi+i\lambda\xi^1)|^2 \leq K\sum_{|\alpha|\geq 1}|P^{(\alpha)}(\xi+i\lambda\xi^1)|^2 \tag{5.1}$$

para todo vector real ξ y todo número complejo λ y para alguna constante K, independiente de ξ y de λ. Sea u una función de clase C^{m-1} en $\bar{\Omega}$ y que tiene derivadas continuas por partes de orden m en Ω, tales que u junto con sus derivadas hasta la orden $m-1$, se anulan sobre $\partial\Omega \cap S_{\epsilon_0}$ donde $S_{\epsilon_0} = \{x/|x| \leq \epsilon_0\}$ para algún $\epsilon_0 > 0$ (esto es u tiene dados de Cauchy cero sobre Ω, cerca del origen). Además, se admite que para todo $c > 0$, suficientemente pequeño, u satisface la desigualdad:

$$\int_{\Omega_c}|Pu|^2 dx_2...dx_n \leq K_1\int_{\Omega_c}\sum_{i=1}^{q}|P_j u|^2 dx_2...dx_n, \tag{5.2}$$

con una constante K_1 independiente de c. **Entonces** *existe $\epsilon > 0$ tal que $u = 0$ en $\Omega \cap S_\epsilon$".*

Demostración: **Teorema 5.1 implica la unicidad de la solución del problema de Cauchy.** En efecto, se probará que el citado teorema implica la unicidad de la solución del problema de Cauchy cerca del origen, donde Ω es estrictamente convexo, de las ecuaciones de la forma

$$Pu + \sum_{j=1}^{q} a_j(x)P_j u = f(x) \tag{5.3}$$

donde los P_j son ξ^1 - relativamente admisibles a P, son de órdenes inferiores a P, y los coeficientes $a_j(x)$ son funciones limitadas. Entonces, dado el problema de Cauchy para las ecuaciones (5.3), **solo resta verificar** (5.2), pues las otras condiciones son satisfechas por hipótesis. Veamos, sean u_1 y u_2 dos soluciones el problema considerado y pongamos $u = u_1 - u_2$. Se observa que u satisface $Pu + \sum_{j=1}^{q} a_j(x)P_j u = 0$, lo que implica $Pu = -\sum_{j=1}^{q} a_j(x)P_j(x)u$, de donde se tiene aún que $|Pu|^2 \leq K_1\sum_{j=1}^{q}|P_j u|^2$, luego integrando se obtiene (5.2). Por lo tanto, existe entonces $\xi > 0$ tal que $u = u_1 - u_2 = 0$ en $\Omega \cap S_\xi$. □

Observación. Debemos notar que no hay nada de especial con el origen en·el teorema 5.1. En efecto, supongamos que Ω es estrictamente convexo en $x \in \partial\Omega$: sea η la normal unitaria en el hiperplano H que intersecta $\bar{\Omega}$ apenas en el punto x, y supongamos que la desigualdad (5.1) vale con ϵ^1 sustituyendo por η y que una desigualdad análoga a (5.2) se verifica con Ω_c, que es la intersección de Ω con hiperplanos ortogonales a η. Entonces por medio de una translación seguida de una rotación se lleva el punto x al origen y el vector η al vector $(1, 0, ..., 0)$, y así el problema se reduce al caso del teorema 5.1.

Por otro lado, las ecuaciones (5.3) constituyen una amplia clase de ecuaciones pues ninguna restricción es hecha con respecto a su tipo; así el polinomio diferencial puede ser hiperbólico, elíptico, ...; tampoco se exige que el contorno de Ω sea no-carácterística en el origen. Pero,lo que limita al citado teorema es el hecho de que se trabaja en dominios bastantes especiales (se exige que Ω sea estrictamente convexo). Ahora es de interés saber cuando los polinomios P_j, $j = 1, ..., q$ son ξ^1 - relativamente admisibles a P. La respuesta está en la siguiente proposición para el caso en que P es homogéneo.

Proposición 5.1. *Si P es homogéneo, entonces: todos los polinomios P_j, $j = 1, ..., q$ hasta la orden $r < m$ son ξ^1- relativamente admisibles a P* **si y solo si** *toda las derivadas $P^{(m-r)}(\xi + \lambda\xi^1)$ no tienen ninguna raíz real común (ξ, η) sobre $|\xi|^2 + \lambda^2 = 1$.*
Demostración: **Condición necesaria.** Pongamos $\xi + \lambda\xi^1 = \eta$, entonces por la hipótesis se tiene

$$\frac{|P_j(\eta)|^2}{|P^{(1)}(\eta)|^2 + ... + |P^{(m-r-1)}(\eta)|^2 + |P^{(m-r)}(\eta)|^2 + ... + |P^{(m)}(\eta)|^2} \leq K.$$

Por el absurdo supongamos que las derivadas $p^{(m-r)}(\eta)$ tuvieran una raiz real común η^0 sobre la esfera unitaria. Tomemos $\eta = t\eta^0$ (η es aún raíz pues P es homogéneo); tenemos entonces

$$\frac{|P_j(\eta^0)t^r|^2}{|P^{(1)}(\eta^0)t^{m-1}|^2 + ... + |P^{(m-r-1)}(\eta^0)t^{r+1}|^2 + |P^{(m-r)}(\eta^0)t^r|^2 + \text{ términos de orden menor a } 2r} \leq K.$$

Ahora se necesita del

Lema 5.1. *"$p^{(m-r)}(\eta^0) = 0$ implica $p^{(m-r-1)}(\eta^0) = 0$".* *Demostración:* **del Lema 5.1** Se tiene que $\frac{\partial P^{(m-r-1)(\eta^0)}}{\partial\eta_j^0} = 0$, pues se tiene $\frac{\partial P^{(m-r-1)(\eta^0)}}{\partial\eta_j^0} = p^{(m-r)}(\eta_j^0) = 0$. Ahora se aplica el-teorema de Euler sobre funciones homogeneas [Caso simple: $f = (x, y, z)$ es homogénea de grado k si para cualquier constante λ se tiene $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z)$. [T. de Euler:"si f es homogénea de grado k, entonces se tiene $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = kf$".] para obtener $(r+1)p^{(m-r-1)}(\eta^0) = \sum \eta_j^0 \frac{\partial P^{(m-r-1)(\eta^0)}}{\partial\eta_j^0} = 0$, lo que implica $p^{(m-r-1)}(\eta^0) = 0$.
□

Sigamos con la condición necesaria. De acuerdo al lema 5.1 se concluye que $P^{(m-r-2)}(\eta^0) = ... = P^{(2)}(\eta^0) = P^{(1)}(\eta^0) = 0$. Luego, si $t \to \infty$, el cociente tiende al infinito,lo que contradice a la hipótesis.

Condición suficiente. Por hipótesis $p^{(m-r)}(\eta)$ no tiene ninguna raíz real común sobre la esfera unitaria, lo que garantiza que $\sum_{|\alpha|\geq 1} |P^{(\alpha)}(\eta)|^2 \neq 0$. Pero el cociente $\frac{|P_j(\eta)|^2}{\sum_{|\alpha|\geq 1} |P^{(\alpha)}(\eta)|^2}$ es continua tomando valores sobre la esfera unitaria, la que es compacta, luego ella es limitada. □

Observación 5.1. *No hay restricción en que debemos tomar η apenas sobre la esfera unitaria pues si tuviéramos dos polinomios homogéneos del mismo grado m, $P(\eta)$ y $Q(\eta)$, entonces se tiene $\frac{P(\eta)}{Q(\eta)} = \frac{|\eta|^{-m}P(\eta)}{|\eta|^{-m}Q(\eta)} = \frac{P\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right)}{Q\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right)}$.*

Proposición 5.2. *"Si P es homogéneo, todos los polinomios hasta la orden $r < m$ son relativamente admisibles a P* **si y solo si** *las raices complejas de $P(\xi)$ sobre $|\xi| = 1$ tienen multiplicidades menor que $m - r + 1$".*

Demostración: Para hacer la prueba de esta proposición basta establecer una equivalencia, en la proposición 5.1, de la nueva condición de esta proposición con la afirmación "todas las derivadas $p^{(m-r)}(\xi)$ no tienen una raíz (real) común ξ_0 sobre $|\xi| = 1$".

En efecto, supongamos que las derivadas $P^{(m-r)}(\xi)$ tuvieran una raíz común sobre $|\xi| = 1$, esto es, $P^{(m-r)}(\xi_0) = 0$; de esta manera ξ_0 raíz simple implica $P^{(m-r-1)}(\xi_0) = 0$, ..., y así, continuando, si ξ_0 es raíz de multiplicidad $m - r + 1$ se tiene $P(\xi_0) = 0$, lo que contradice a la hipótesis de que $P(\xi)$ tiene (solo) raíces de multiplicidad menor que $m-r+1$.

Recíprocamente, si las raíces de $P(\xi)$ sobre $|\xi_0|=1$ tuvieran multiplicidad $\geq m-r+1$, esto implicaría que las derivadas $P^{(m-r)}(\xi)$ tendrían una raíz común sobre $|\xi_0|=1$, lo que es falso. □

Usando la proposición 5.2 se verifica la

Proposición 5.3. *"Si P (de orden m) es una combinación lineal de los polinomios D_j^2, $j=1,...,n$ [remarcamos que, en general, la notación que se usa es $iD=(iD_1,...,iD_n)$, donde $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$) con coeficientes no nulos, entonces cualquier polinomio de orden inferior es relativamente admisible a P".*

La utilidad de la proposición 5.2 está en el hecho que si tuviéramos ecuaciones del tipo (5.3) y si P es de orden m, entonces para garantizar la unicidad de la solución del problema de Cauchy para tales ecuaciones, se debe tomar los polinomios P_j tales que sus raíces tengan en lo máximo multiplicidad $(m-r)$. Bien, ahora se presenta una formulación débil del teorema 5.1 donde los P_j son relativamente admisibles a P y donde la función u, en lugar de (5.2), satisface

$$|Pu|^2 \leq K_1 \sum_{j=1}^{q} |P_j u|^2 \text{ en } \Omega \tag{5.4}$$

Se tiene también el siguiente teorema, cuya prueba omitimos.

Teorema 5.2. *"Sea Ω estrictamente convexo en el origen; P es un polinomio diferenciable y P_1, ..., P_q son polinomios diferenciables relativamente admisibles a P. Si u satisface (5.4) en Ω y tiene dados de Cauchy cero sobre $\partial\Omega$ cerca del origen, esto es, u y sus derivadas hasta la orden $m-1$ se anulan ahí,* **entonces** *se tiene $u=0$ en $\Omega\cap S_\epsilon$ para algún $\epsilon>0$".*

Es consecuencia del teorema 5.1 el siguiente resultado,

Teorema 5.3. *"Sea Ω un dominio limitado con contorno regular por partes; P_1, ..., P_q son polinomios diferenciables relativamente admisibles al polinomio diferencial P de orden m. Sea u de clase $C^{(m-1)}$ con derivadas continuas por partes, de orden m en $\bar{\Omega}$ y que satisface (5.4)".*

Si u tiene dados de Cauchy cero sobre $\partial\Omega$, **entonces** *$u=0$ en Ω". Demostración:* Sea B una esfera que contiene a Ω. Se define

$$u^* = \begin{cases} u & \text{en } \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en } B-\bar{\Omega} \end{cases}$$ Entonces tenemos:

(i) $u^* \in C^{m-1}$ y $D^m u^*$ es continua por partes, lo que sigue por la construcción de u^*.

(ii) u^* satisface (5.4) para todo $x\in B-\partial\Omega$ ya que si $x\in\Omega$ se tiene el resultado pues $u^*(x)=u(x)$ y si $x\in B-\bar{\Omega}$, $u^*(x)=0$, y entonces se tiene la desigualdad (5.4). Así, la desigualdad (5.4) se verifica en casi todas partes. Luego, integrando, (5.2) se verifica.

Ahora se prueba que la función u^* es idénticamente cero en B. Supongamos, por el absurdo, que no lo sea, esto es, existen puntos x donde $u^*(x)\neq 0$.

Sea R el radio de la esfera B y tomemos $x_0\in\partial B$. Con centro x_0 consideremos las esferas $B_r(x_0)$ cuyos contornos se designarán por S_r, donde $0<r<2R$. Entonces existe r^*, $0<r^*<2R$ tal que sobre S_{r^*} existe un punto donde los dados de Cauchy no son cero. Sea, $A=\{r\in(0,2R$ tal que sobre S_r existe un punto donde los dados de Cauchy no son cero$\}$.

Entonces se tiene,

(iii) $A\neq\emptyset$, pues $r^*\in A$;

(iv) A es un conjunto abierto, y sea $r\in A$, luego existe un punto $P\in S_r$ donde los dados de Cauchy no son cero, esto es, donde por lo menos uno de los valores $u^*(P)$, $\frac{\partial u^*(P)}{\partial N}$, $\frac{\partial^2 u^*(P)}{\partial N^2}$, ..., $\frac{\partial^{m-1} u^*(P)}{\partial N^{m-1}}$ es diferente de cero, digamos por ejemplo que $\frac{\partial^2 u^*(P)}{\partial N^2}\neq 0$.

Pero $u^* \in C^{(m-1)}$, luego existe una esfera $B_\epsilon(P)$ tal que los dados de Cauchy no son cero en todo punto $Q \in B_\epsilon(P)$. Por otro lado se observa que el intervalo $(r-\epsilon, r+\epsilon)$ está contenido en A, pues si r' está en tal intervalo se tiene que $S_{r'} \cap B_\epsilon(P) \neq \emptyset$, esto es, sobre $S_{r'}$ existe un punto donde donde los dados de Cauchy no son cero. Luego $r' \in A$.

Ahora, sea $\sigma = supA$. Tenemos que $\sigma \notin A$, pues A es abierto. Ahora, sobre S_σ los dados de Cauchy son ceros (sino lo fuera, $\sigma \in A$, la que es falso). Pongamos $I = S_\sigma \cap B_R$; I es estrictamente convexo en todos sus puntos. Aplicando el teorema 5.1 y que I es compacto, existe un número finito de esferas B_{r_1}, B_{r_2}, ..., B_{r_n} tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^n B_{r_j}$ y $u = 0$ en $B_\sigma \cap B_{r_j}$,
$j = 1, .., , n$. Sea $\delta = dist(I, B_\sigma - \bigcup_{j=1}^n B_{r_j})$. Entonces en S_r para
$\sigma - \delta < r < \sigma$, los dados de Cauchy son cero, lo que es contradicción con el hecho de ser $\sigma = supA$. Luego $u^* = 0$ en B, y por tanto $u = 0$ en Ω. □

5.3. Desigualdades según Hörmander. En 1955 Lars Hörmander, en su tesis doctoral, publicó un fundamental articulo sobre las EDP, [2], pues introdujo la teoría general de los operadores diferenciales parciales. A partir de entonces muchos trabajos sobre el tema fueron publicados y se produjo un gran desarrollo de las EDP, de los operadores diferenciales parciales y sus aplicaciones a problemas como los de Dirichlet y Cauchy. En particular, Nirenberg usa una desigualdad de Hörmander en la demostración del teorema 5.1. Con tal motìvación vamos a presentar en esta sección algunos resultados conocidos sobre la transformada de Fourier para comprender a la desigualdad mencionada.

Sea u una función en $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ (con soporte compacto); la transformada de Fourier de u es definida vía $\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(x)dx$, donde
$x\xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$. Se verifica que

$$[P(D)u(x)]\hat{} = P(\xi)\hat{u}(\xi). \; (\int_{\mathbb{R}^n} \equiv \int). \tag{5.5}$$

En efecto; $[P(D)u(x)]\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} P(D)u(x)dx$, donde
$P(D)u(x) = \sum_{|\alpha| \le m} a^\alpha D_x^\alpha u$.
Consíderemos $\int e^{ix\xi} i \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$; ìntegrando por partes se tiene
$\int e^{ix\xi} i \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = i \int_{\partial\Omega} u e^{ix\xi} d\sigma + \xi_j \int e^{ix\xi} u(x)dx$, donde Ω es un dominio que contiene al soporte de u. Ahora, observemos que el primer término del segundo miembro es igual cero pues $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego se tiene
$\int e^{ix\xi} i \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \xi_j \int e^{ix\xi} u(x)dx$. Un proceso de iteración nos lleva a (5.5). También se tiene

$$\int |Q(D)u(x)|^2 dx = \int |Q(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{5.6}$$

En efecto, por la igualdad de Parseval $[\int |u|^2 dx = \int |\hat{u}|^2 d\xi]$ se tiene

$$\int |Q(D)u(x)|^2 dx = \int |[Q(D)u(\xi)]\hat{}|^2 d\xi = \int |Q(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Definición 5.4. *"Sea $P(D)$ un polinomio diferencial. Se dice que un polinomio diferencial $Q(D)$* **es más débil** *que $P(D)$ si existe una constante C tal que se tiene*

$$\int |Q(D)u|^2 dx \le C \int |P(D)u|^2 dx, \text{ donde } u \in C_0^\infty(\Omega)\text{", ó}$$

equivalentemente,

$$||Q(D)u||^2 \le C||P(D)u||^2, \tag{5.7}$$

donde $||\,||$ es la norma en L^2.

Pongamos $\hat{P}(\xi) = \left[\sum_{|\alpha| \ge 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Se tiene la siguiente caracterización de un operador más débil que otro.

Teorema 5.4. *(Hörmander)* $||Q(D)u||^2 \leq C||P(D)u||^2$ **si y solo si** $\hat{Q}(\xi) \leq K\hat{P}(\xi)$.

Demostración: Condición necesaria. Sea la función $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \neq 0$ y pongamos $u(x) = \psi(x)e^{ix\xi}$, donde ξ es un vector real. Entonces se tienen las siguientes consecuencias:

(i) $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

(ii) $P(D)u(x) = e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\geq 0} P^{(\alpha)}(\xi)\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}$. En efecto, usando la fórmula de Leibniz $P(D)(vw) = \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{D^{(\alpha)}v}{|\alpha|!}P^{(\alpha)}(D)w$, se tiene

$$\begin{aligned} P(D)u(x) &= P(D)(\psi(x)e^{ix\xi}) \\ &= \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}P^{(\alpha)}(D)e^{ix\xi} \\ &= e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\geq 0}P^{(\alpha)}(\xi)\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}. \end{aligned}$$

(iii) En forma análoga, se tiene $Q(D)u(x) = e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\geq 0} Q^{(\alpha)}(\xi)\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}$. Ahora la idea es tomar conjugados y se tiene,

(iv) $\overline{Q(D)u(x)} = e^{-ix\xi}\sum_{|\beta|\geq 0}\overline{Q^{(\beta)}(\xi)}\frac{\overline{D^{(\beta)}\psi(x)}}{|\beta|!}$; multiplicando (iii) con (iv) e integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int |Q(D)u(x)|^2 dx &= \int\left[\sum_{|\alpha|\geq 0}Q^{(\alpha)}(\xi)\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}\right]\left[\sum_{|\beta|\geq 0}\overline{Q^{(\beta)}(\xi)}\frac{\overline{D^{(\beta)}\psi(x)}}{|\beta|!}\right] \\ &= \sum_{|\alpha|\geq 0,|\beta|\geq 0}Q^{(\alpha)}(\xi)\overline{Q^{(\beta)}(\xi)}\int\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)\overline{D^{(\beta)}\psi(x)}}{|\alpha|!|\beta|!}dx. \end{aligned}$$

Ahora, poniendo $\psi_{\alpha,\beta} = \int\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)\overline{D^{(\beta)}\psi(x)}}{|\alpha|!|\beta|!}dx$, se tiene

$$\int |Q(D)u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha|\geq 0,|\beta|\geq 0}Q^{(\alpha)}(\xi)\overline{Q^{(\beta)}(\xi)}\psi_{\alpha,\beta}$$

En forma análoga se tiene: $\int |P(D)u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha|\geq 0,|\beta|\geq 0}P^{(\alpha)}(\xi)\overline{P^{(\beta)}(\xi)}\psi_{\alpha,\beta}$. Luego por la hipótesis , se obtiene que

$$\sum_{|\alpha|\geq 0,|\beta|\geq 0}Q^{(\alpha)}(\xi)\overline{Q^{(\beta)}(\xi)}\psi_{\alpha,\beta} \leq C\sum_{|\alpha|\geq 0,|\beta|\geq 0}P^{(\alpha)}(\xi)\overline{P^{(\beta)}(\xi)}\psi_{\alpha,\beta} \tag{5.8}$$

Ahora, sea m la más alta de las órdenes de P y Q; y sea t_α, $0 \leq |\alpha| \leq m$, números complejos tales que $t_\alpha = t_{\alpha'}$, cuando α' es una permutación de α.
Consideremos la forma cuadrática definida vía

$$\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq m}t_\alpha\overline{t_\beta}\psi_{\alpha,\beta} = \int\left|\sum_{|\alpha|\leq m}t_\alpha\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}\right|^2 dx.$$

Desde que $\int\left|\sum_{|\alpha|\leq m}t_\alpha\frac{D^{(\alpha)}\psi(x)}{|\alpha|!}\right|^2 dx = \int\left|\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{t_\alpha\xi^\alpha}{|\alpha|!}\right|^2|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$, lo que sigue de (5.6), se tiene que la forma cuadrática considerada es positiva, a no ser que el polinomio $\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{t_\alpha\xi^\alpha}{|\alpha|!}$

se anule idénticamente, esto es, $t_\alpha = 0$ para cualquier α. Así, ella es una forma cuadrática positiva definida; luego, de acuerdo a una propiedad de las formas cuadráticas positivas definidas, existe una constante C' tal que

$$\sum_{|\alpha|\le m} |t_\alpha|^2 \le C' \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{|\beta|\le m} t_\alpha \overline{t_\beta} \psi_{\alpha\beta} \tag{5.9}$$

Poniendo $t_\alpha = Q^{(\alpha)}(\xi)$, de (5.9) se obtiene que

$$\sum_{|\alpha|\le m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 \le C' \sum_{|\alpha|\le m} Q^{(\alpha)}(\xi)\overline{Q^{(\beta)}(\xi)}\psi_{\alpha\beta} \tag{5.10}$$

Además, se observa que existe $C'' > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|\le m} P^{(\alpha)}(\xi)\overline{P^{(\beta)}(\xi)}\psi_{\alpha\beta} \le C'' \sum_{|\alpha|\le m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \tag{5.11}$$

Luego, de (5.8), (5.10) y (5.11) se obtiene

$$\sum_{|\alpha|\le m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 \le C''' \sum_{|\alpha|\le m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2,$$

esto es,

$$\hat{Q}(\xi) \le K\hat{P}(\xi)$$

lo que prueba la condición necesaria. □

Nota 5.1. *La condición suficiente será demostrada después de probarse la primera parte del siguiente*

Teorema 5.5. *(Hörmander)" Sea $P(D)$ un polinomio diferencial de orden m. Entonces, para cualquier función $u(x) \in C_0^\infty([-1,1])$ se tiene*

$$\int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx \le C \int |P(D)u(x)|^2 dx \tag{5.12}$$

cualquiera que sea α, donde C es una constante que depende solamente de m y de la dimensión n. Más generamente, para cualquier polinomio diferencial $M(D)$ se tiene que existe una constante C' tal que

$$\int |M(D)u(x)|^2 dx \le C' \int |P(D)u(x)|^2 dx \tag{5.13}$$

se verifica para todo $u \in C_0^\infty([-1,1])$ **si y solo si**

$$|M(\xi)|^2 \le C'' \sum_{|\alpha|\ge 0} |P^{(\alpha)}(\xi)| \tag{5.14}$$

para todo vector real ξ".

Demostración: Probemos (5.12). Se procede por inducción en $|\alpha|$. Supongamos que para $|\alpha| = 1$ se verifica (5.12), esto es,
$\int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx \le C \int |P(D)u(x)|^2 dx$, donde $\alpha = (0,...,1,...,0)$ (esto probaremos después de finalizar el razonamiento por inducción). Supongamos que para cualquier vector α, tal que $|\alpha| = n$, se tenga
$\int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx \le C \int |P(D)u(x)|^2 dx$.
Sea β un vector tal que $|\beta| = n+1$; luego $\beta = \alpha + (0,...,0,1,0,...,0)$. Luego, aplicando el resultado supuesto válido para vectores de longitud 1, se tiene
$\int |P^{(\beta)}(D)u(x)|^2 dx \le K \int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx$ que a su vez es menor que $C \int |P(D)u(x)|^2 dx$ (usando la hipótesis de inducción). Ahora probemos (5.12) para $|\alpha| = 1$. En efecto, por (5.6) se tiene que

$$\int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx = \int |P^{(\alpha)}(\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \text{ y } \int |P(D)u(x)|^2 dx = \int |P(\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Bien, por comodidad consideremos $\alpha = (1, 0, ..., 0)$*; luego* $P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} P(\xi)$*. Entonces, tomando transformada de Fourier con relación a* x_2*, ...,* x_n *se tiene*

$$\int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx = \int \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} P(D_1, \xi_2, ..., \xi_n) \hat{u}(x_1, \xi_2, ..., \xi_n) \right|^2 dx_1 d\xi_2 ... d\xi_n$$

donde $\frac{\partial}{\partial \xi_1} P(D_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *es un operador obtenido sustituyendo* ξ_1 *por* D_1 *en* $P^{(\alpha)}(\xi)$*. Analogamente se tiene,*

$$\int |P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx = \int |P(D_1, \xi_2, ..., \xi_n) \hat{u}(x_1, \xi_2, ..., \xi_n|^2 dx_1 d\xi_2 ... d\xi_n.$$

Luego (5.12) se verifica si para todo $(\xi_2, ..., \xi_n)$ *se tiene*

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} P(D_1, \xi_2, ..., \xi_n) \hat{u}(x_1, \xi_2, ..., \xi_n) \right|^2 dx_1 \leq C \int |P(D_1, \xi_2, ..., \xi_n) \hat{u}(x_1, \xi_2, ..., \xi_n|^2 dx_1$$

Pero esta desigualdad se sigue de la desigualdad general

$$\int \left| P' \left(i \frac{d}{dx} \right) v \right|^2 dx \leq C_1 \int \left| P \left(i \frac{d}{dx} \right) v \right|^2 dx, \text{ para } v \in C_0^\infty([-1, 1]) \tag{5.15}$$

Remarcamos que $P(\xi)$ *es un polinomio en una variable,* $P'(\xi)$ *es su derivada y la constante* C_1 *depende solamente del grado de* $P(\xi)$*; ahora, sea la factorización* $P(\xi) = \Pi_j(\xi - \lambda_j)$ *observando que* $\frac{d}{d\xi} P(\xi)$ *es una combinación lineal de los productos* $\Pi'_j(\xi - \lambda_j) = \frac{\Pi_j(\xi - \lambda_j)}{(\xi - \lambda_j)}$ *la desigualdad (5.15) se obtiene de la siguiente desigualdad*

$$\int \left| \Pi'_j \left(i \frac{d}{dx} - \lambda_j \right) v \right|^2 dx \leq C_2 \int \left| \Pi_j \left(i \frac{d}{dx} - \lambda_j \right) v \right|^2 dx.$$

Bien, ahora pongamos $\Pi'_j \left(i \frac{d}{dx} - \lambda_j \right) v = w$*;* **entonces todo quedará mostrado** *si mostramos que se tiene*

$$\int |w|^2 dx \leq C_2 \int \left| \left(i \frac{d}{dx} - \lambda \right) w \right|^2 dx. \tag{5.16}$$

para todo complejo λ *y* $w(x) \in C_0^\infty([-1, 1])$*, donde* C_2 *es una constante independiente de* λ *y de* $w(x)$*.*

Demostración de (5.16). *Se observa que la desigualdad (5.16) es equìvalente a la desigualdad* $\int |w|^2 dx \leq C_2 \int |w' + i\lambda w|^2 dx$*. Bien, pongamos* $i\lambda = \mu$*,* $(\mu = \mu_1 + i\mu_2)$ *entonces se tiene* $\int |w|^2 dx \leq C_2 \int |w' + \mu w|^2 dx$*. Sea la descomposición polar de* w*:* $w = \overline{w} e^{i\theta}$*; entonces* $w' = (\overline{w'} + i\theta' \overline{w}) e^{i\theta}$*; y se tiene*

$$\begin{aligned}
|w' + \mu w|^2 &= |\overline{w'} + i\theta' \overline{w} + \mu_1 \overline{w} + i \overline{w} \mu_2|^2 \\
&= |\overline{w'} + \mu_1 \overline{w} + i(\theta' \overline{w} + \overline{w} \mu_2)|^2 \\
&= |\overline{w'} + \mu_1 \overline{w}|^2 + |\theta' \overline{w} + \overline{w} \mu_2)|^2 \\
&\geq |\overline{w'} + \mu_1 \overline{w}|^2 \\
&= |\overline{w'}|^2 + |\mu_1 \overline{w}|^2 + 2 \overline{w} \overline{w'} \mu_1 \\
&\geq |\overline{w'}|^2 + 2 \overline{w} \overline{w'}.
\end{aligned}$$

Pero $\int \overline{w} \overline{w'} dx \geq \frac{1}{2} \int (\overline{w}^2)' dx = \frac{1}{2} [\overline{w}^2]_{-1}^1 = 0$*. Luego se tiene*
$\int |w' + \mu w|^2 dx \geq \int |\overline{w'}|^2 dx$*. Ahora se usa la desigualdad* $\int |\overline{w}|^2 dx \leq \int |\overline{w'}|^2 dx$*, la que es válida para toda función* $\overline{w} \in C_0^\infty([-1, 1])$*, para obtener finalmente*

$$\int |w' + \mu w|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int |\overline{w}|^2 dx = \frac{1}{2} \int |w|^2 dx.$$

Así queda demostrado la condición necesaria del teorema 5.5. □

Demostración: [De la condición suficiente del teorema 5.5] Veamos. De la hipótesis $\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}|Q^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *se obtiene*

$$|Q(\xi)|^2 \leq C_2\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \tag{5.17}$$

Por otro lado, hacienda uso de (5.6) y de (5.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\int|Q(D)u(x)|^2dx &= \int|Q(\xi)|^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\\ &\leq C_2\sum_{|\alpha|\geq 0}\int|P^{(\alpha)}(\xi)|^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\\ &= C_2\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2.\end{aligned}$$

Aplicando (5.12) se tiene $\int|Q(D)u(x)|^2dx \leq C'\int|P(D)u(x)|^2dx.$
Esto prueba la condición suficiente. □

Demostración: [De la Segunda Parte del Teorema 5.5] Veamos que (5.13) implica (5.14).
En efecto (5.13)=(5.7), que implica $\hat{Q}(\xi)\leq K\hat{P}(\xi)$*, y esto implica (5.14).*
Veamos que (5.14) implica (5.13). En efecto, $|M(\xi)|^2 \leq C''\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2$ *para todo vector real* ξ *lo cual conduce a*

$$\int|M(D)u(x)|^2dx \leq C''\sum_{|\alpha|\geq 0}\int|P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2dx.$$

Ahora se aplica (5.12) para obtener $\int|M(D)u(x)|^2dx \leq C'\int|P(D)u(x)|^2dx.$

Así queda demostrado el teorema 5.5. □

5.4. Extensión de la desigualdad de Hörmander. L. Nirenberg, [1], extendió la desigualdad de Hörmander, la cual será utilizada en la demostracíón del teorema 5.1. Esta extensión está contenida en el siguiente resultado.

Proposición 5.4. *"Sea* $P(D)$ *un polinomio diferencial de orden* m*. Para cualquier* $u(x)\in C_0^\infty(B)$*, donde* $B=\{x/|x|\leq 1\}$ *y para cualquier vector real* η *se tiene*

$$\int e^{\eta x}|P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2dx \leq C\int e^{\eta x}|P(D)u(x)|^2dx \tag{5.18}$$

donde C *es la constante de (5.12). Mas generalmente, dado* $M(D)$ *y un vector real, se tiene que*

$$\int e^{\eta x}|M(D)u(x)|^2dx \leq C'\int e^{\eta x}|P(D)u(x)|^2dx \tag{5.19}$$

sigue para cualquier constante fija C' *y cualquier* $u\in C_0^\infty(B)$ **si y solo si**

$$|M(\xi-\frac{1}{2}i\eta)|^2 \leq K\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi-\frac{1}{2}i\eta)|^2 \tag{5.20}$$

para todo vector real ξ*".*

Demostración: Para probar tal extensión, en primer lugar se verifica que si $e^{\frac{1}{2}\eta x}u(x)=v(x)$, entonces $e^{\frac{1}{2}\eta x}M(D)u(x)=M(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)$. En efecto, tomando una derivada $\frac{\partial}{\partial x_j}$

en el segundo miembro, esto es,

$$\begin{aligned}(i\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{1}{2}i\eta_j)v(x) &= i\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{\frac{1}{2}\eta x}u(x)-\frac{i}{2}e^{\frac{1}{2}\eta x}u(x)\eta_j)\\ &= \frac{i}{2}\eta_j e^{\frac{1}{2}\eta x}u(x)+ie^{\frac{1}{2}\eta x}\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)-\frac{i}{2}\eta_j e^{\frac{1}{2}\eta x}u(x)\\ &= ie^{\frac{1}{2}\eta x}\frac{\partial u}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Ahora,se procede por iteración para obtener la igualdad deseada (igual a $e^{\frac{1}{2}\eta x}M(D)u(x)$).
Demostración de (5.18). Observamos que (5.18) es equivalente a

$$\int |P^{(\alpha)}(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)|^2dx \le C\int |P(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)|^2dx.$$

Ahora al polinomio diferencial $P(D-\frac{1}{2}i\eta)$ le está asociado el polinomio $P(\xi-\frac{1}{2}i\eta)$, que lo podemos escribir en la forma

$$P(\xi-\frac{1}{2}i\eta)=\sum_{|\alpha|\le m}a^{(\alpha)}(\xi-\frac{1}{2}i\eta)^{(\alpha)}=\sum_{|\alpha|\le m}D^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}=\hat{P}(\xi).$$

Asociamos al polinomio $\hat{P}(\xi)$ el polinomio diferencial $\hat{P}(D)$. Observemos que el operador $\hat{P}^{(\alpha)}(\xi)$ coincide con la derivada $P^{(\alpha)}(D-\frac{1}{2}i\eta)$. Entonces se tiene $\int|\hat{P}^{(\alpha)}(D)v(x)|^2dx \le C\int|\hat{P}(D)v(x)|^2dx$; desigualdad que ya fue probada; es la fórmula (5.12).
Probemos ahora la segunda parte, esto es, (5.19) es equivalente a (5.20). En efecto, (5.19) si y solo si $\int|M(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)|^2dx \le C'\int|P(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)|^2dx$ si y solo si $\int|\hat{M}(D)v(x)|^2dx \le C'\int|\hat{P}(D)v(x)|^2dx$ si y solo si $\frac{|\hat{M}(\xi)|^2}{\sum_{|\alpha|\ge 0}|\hat{P}^{(\alpha)}(\xi)|^2}\le K$ si y solo si $\int|M(\xi-\frac{1}{2}i\eta)|^2dx \le K\sum_{|\alpha|\ge 0}|P^{(\alpha)}(\xi-\frac{1}{2}i\eta)|^2$ que es (5.20). □

Proposición 5.5. *Se tiene la siguiente equivalencia*

$$|M(\xi-\frac{1}{2}i\eta)|^2 \le C''\sum_{|\alpha|\ge 1}|P^{(\alpha)}(\xi-\frac{1}{2}i\eta)|^2 \tag{5.21}$$

si y solo si

$$\int e^{\eta x}|M(D)u(x)|^2dx \le C''\sum_{|\alpha|\ge 1}\int e^{\eta x}|P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2dx,\ u\in C_0^\infty(B) \tag{5.22}$$

Demostración: (5.22) si y solo si
$\int|M(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)|^2dx \le C''\int\sum_{|\alpha|\ge 1}|P^{(\alpha)}(D-\frac{1}{2}i\eta)v(x)|^2dx$; tomando transformada de Fourier se obtiene

$$\int|M(\xi-\frac{1}{2}i\eta)\hat{v}(\xi)|^2d\xi \le C''\int\sum_{|\alpha|\ge 1}|P^{(\alpha)}(\xi-\frac{1}{2}i\eta)\hat{v}(\xi)|^2d\xi$$

si y solo si (5.21). □

Proposición 5.6. *" Sea $P(D)$ un polinomio diferencial de orden m. Para cualquier $u(x)\in C^\infty$ que se anula fuera de un dominio cuyos diámetros en las direcciones x_1, ..., x_n son l_1, ..., l_n se tiene*

$$\int e^{\eta x}|P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2dx \le C|l^{(\alpha)}|^2\int e^{\eta x}|P(D)u(x)|^2dx \tag{5.23}$$

Demostración: Supongamos que en (5.18) en lugar de u se pone v, y en lugar de la variable x se pone la variable y: $y_1 \to l_1y_1 = x_1$, ...,

$y_n \to l_n y_n = x_n$. Ahora a $P(D)u(x) = \sum_{|\beta|\leq m} a^\beta D_x^{(\beta)} u(x)$ le asociamos $P(\xi) = \sum_{|\beta|\leq m} a^\beta \xi^{(\beta)}$; y a $P^{(\alpha)}(D)u(x) = \sum_{|\beta|\leq m, \beta_j-\alpha_j\geq 0} a^\beta \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} D_x^{(\beta-\alpha)} u(x)$ le asociamos $P^{(\alpha)}(\xi) = \sum_{|\beta|\leq m, \beta_j-\alpha_j\geq 0} a^\beta \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\xi^{(\beta-\alpha)}$. Entonces se tendrá:

$$\begin{aligned}
\int e^{\eta x}|P^{(\alpha)}(D)u(x)|^2 dx &= \int e^{\eta x}\left|\sum_{|\beta|\leq m,\beta_j-\alpha_j\geq 0} a^\beta \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} D^{(\beta-\alpha)} u(x)\right|^2 dx \\
&= \int e^{\eta l y}\left|\sum_{|\beta|\leq m,\beta_j-\alpha_j\geq 0} a^\beta \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\frac{1}{l^{\beta-\alpha}} D_y^{(\beta-\alpha)} v(x)\right|^2 |J|dy \\
&= |l^{(\alpha)}|^2 \int e^{\eta l y}\left|\sum_{|\beta|\leq m,\beta_j-\alpha_j\geq 0} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\frac{a^\beta}{l^\beta} D_y^{(\beta-\alpha)} v(x)\right|^2 |J|dy \\
&\leq C|l^{(\alpha)}|^2 \int e^{\eta l y}\left|\sum_{|\beta|\leq m,\beta_j-\alpha_j\geq 0} \frac{a^\beta}{l^\beta} D_y^{(\beta)} v(x)\right|^2 |J|dy \\
&\quad \text{(esta desigualdad se sigue por (5.18))} \\
&= C|l^{(\alpha)}|^2 \int e^{\eta x}\left|\sum_{|\beta|\leq m,\beta_j-\alpha_j\geq 0} a^\beta D_x^{(\beta)} u(x)\right|^2 dx \\
&= C|l^{(\alpha)}|^2 \int e^{\eta x}|P(D)u(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

□

Proposición 5.7. *Si*

$$|M(\xi+i\lambda\xi^1)|^2 \leq K\sum_{|\alpha|\geq 1}\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial\xi_1^{(\alpha)}} P(\xi+i\lambda\xi^1)\right|^2 \tag{5.24}$$

donde $\xi^1 = (1,0,...,0)$, ξ es cualquier vector real y λ es un real arbitrario, entonces se tiene

$$\int e^{\lambda x_1}|Mu(x)|^2 dx \leq CKl_1^2 \int e^{\lambda x_1}|Pu(x)|^2 dx, \tag{5.25}$$

donde u es una función que se anula en un dominio cuyo diámetro en la dirección x_1 es $l_1 < 1$; C es una constante que depende solo de m y n".

Demostración: De (5.24) se obtiene

$$\int |M(\xi+i\lambda\xi^1)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq K\int\sum_{|\alpha|\geq 1}\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial\xi_1^{(\alpha)}} P(\xi+i\lambda\xi^1)\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi,$$

lo que ímplica (tomando $\eta = \lambda\xi^1$):

$$\int e^{\lambda x_1}|M(D)u(x)|^2 dx \leq K\sum_{|\alpha|\geq 1}\int e^{\lambda x_1}\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial\xi_1^{(\alpha)}} P(D)u(\xi)\right|^2 dx.$$

Ahora, por (5.23) y considerando que si derivamos en la dirección ξ_1, se obtïene

$$\begin{aligned}
\int e^{\lambda x_1}|M(D)u(x)|^2 dx &\leq K\sum_{|\alpha|\geq 1} C|l_1^{(\alpha)}|^2 \int e^{\lambda x_1}|P(D)u(x)|^2 dx \\
&= KC\int e^{\lambda x_1}|P(D)u(x)|^2 dx \sum_{|\alpha|\geq 1}|l_1^{(\alpha)}|^2.
\end{aligned}$$

Pero $\sum_{|\alpha|\geq 1} |l_1^{(\alpha)}|^2 = l_1^2 + l_1^4 + ... + l_1^{2m} = \frac{l_1^2}{1-l_1^2}(1-l_1^{2m}) \leq l_1^2 2m$; luego se tiene (5.25).
$\square$

Proposición 5.8. *" Sea $P(D)$ un polinomio difereneial de orden m y $P_1(D)$, ..., $P_q(D)$ polinomios diferenciales de órdenes inferiores los cuales son ξ^1 - relativamente admisibles a $P(D)$. Entonces se tiene*

$$\sum_{j=1}^{q} \int e^{\lambda x_1} |P_j v(x)|^2 dx \leq K C_3 l^2 \int e^{\lambda x_1} |P v(x)|^2 dx \tag{5.26}$$

para toda función $v \in C^\infty$, que se anula fuera de la esfera de radio $l < 1$; K es la constante de (5.2), λ es cualquier número real y C_3 depende solo de m y n".

Demostración: Se aplica la desigualdad de Hörmander en forma extendida a P_j y a P con $\eta = \lambda\xi^1$; por hipótesis
$\sum_{j=1}^{q} |P_j(\xi - \frac{1}{2}i\lambda\xi^1)|^2 \leq K \sum_{|\alpha|\geq 1} |P^{(\alpha)}(\xi - \frac{1}{2}i\lambda\xi^1)|^2$. Bien, por un proceso análogo al usado en la proposición 5.7 se tiene

$$\sum_{j=1}^{q} \int e^{\lambda x_1} |P_j(D)v(x)|^2 dx \leq K \sum_{|\alpha|\geq 1} \int e^{\lambda x_1} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx,$$

donde se usó el hecho que $\lambda\xi^1 x = \lambda x_1$. Ahora observamos que (5.26) quedará demostrado si verificamos que
$\sum_{|\alpha|\geq 1} \int e^{\lambda x_1} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx \leq C_3 l^2 \int e^{\lambda x_1} |P(D)v(x)|^2 dx$.
En efecto, por (5.23) se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\geq 1} \int e^{\lambda x_1} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx &\leq \sum_{|\alpha|\geq 1} C|l^{(\alpha)}|^2 \int e^{\lambda x_1} |P(D)v(x)|^2 dx \\
&= C \int e^{\lambda x_1} |P(D)v(x)|^2 dx \sum_{|\alpha|\geq 1} |l^{(\alpha)}|^2 \\
&\leq C \int e^{\lambda x_1} |P(D)v(x)|^2 dx \; C' l^2 \\
&= C_3 l^2 \int e^{\lambda x_1} |P(D)v(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 5.2. *Entre los polinomios P_j de la proposición 5.8 se supone sin pérdida de generalidad que uno de los polinomios P_j es la* **identidad***, esto es, $P_j(D) = 1$, pues si P_j no fuera 1, entonces se introduce $P_{q+1} = 1$, el cual es admisible con relación a $P(D)$.*

5.5. Demostración del teorema 5.1. *Demostración:* Por comodidad de lectura enunciemos aún el teorema. " Sea Ω estrictamente convexo en el origen; $P(D)$ es un polinomio diferencial de orden m y sean $P_1(D)$, ..., $P_q(D)$ polinomios diferenciales de órdenes inferiores, los cuales son $\xi^1 = (1, 0, ..., 0)$ relativamente admisibles a $P(D)$, esto es, satisfacen

$$\sum_{j=1}^{q} |P_j(\xi + i\lambda\xi^1)|^2 \leq K \sum_{|\alpha|\geq 1} |P^{(\alpha)}(\xi + i\lambda\xi^1)|^2 \tag{5.27}$$

para todo vector real ξ y todo número complejo λ, K es alguna constante independiente de ξ y λ.

Sea u una función de clase C^{m-1} en $\overline{\Omega}$, con derivadas continuas por partes de orden m en Ω, tales que u y sus derivadas hasta la orden $m-1$ se anulan sobre $\partial\Omega \cap S_{\epsilon_0}$, donde $S_{\epsilon_0} = \{x/|x| \leq \epsilon_0\}$ para algún $\epsilon_0 > 0$; esto es, u tiene dados de Cauchy cero sobre Ω

cerca del origen. Además de eso se admite que para todo $c > 0$, suficientemente pequeño, u satisface

$$\int_{\Omega_c} |Pu(x)|^2 dx_2 ... dx_n \leq K_1 \int_{\Omega_c} \sum_{j=1}^{q} |P_j u(x)|^2 dx_2 ... dx_n \tag{5.28}$$

con una constante K_1 independiente de c. **Entonces** existe $\epsilon > 0$ tal pue $u = 0$ en $\Omega \cap S_\epsilon$".

Bien, admitamos que (5.28) se verifica para $c < c_0$ y sea $l < \epsilon_0$ un número positivo tal que para $KC_3K_1l^2 \leq \frac{1}{2}$. Existe $\epsilon < \frac{1}{3}c_0$ y tal que $\Omega_c \subset B_l$ para $0 < c < 3\epsilon$, pues Ω es estrictamente convexo en 0.

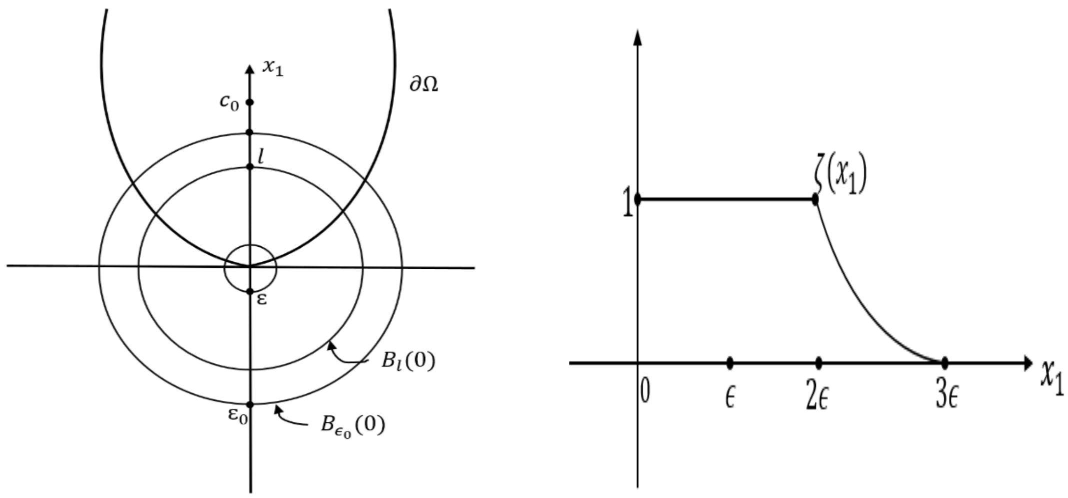


Figura 5.1: Demostración del teorema 5.1.

Sea $\zeta(x_1) \in C^\infty$ no negativa en $0 \leq x_1 \leq 3\epsilon$, idénticamente 1 en $0 \leq x_1 \leq 2\epsilon$ decrece monotónicamente a cero en $(2\epsilon, 3\epsilon)$ y es cero para $x_1 \geq 3\epsilon$. Pongamos $v(x) = \zeta(x_1)u(x)$; bien, desde que $u(x)$ junto con sus derivadas hasta la orden $m-1$ se anulan sobre $\partial\Omega \cap B_{\epsilon_0}$ y como $B_l \subset B_{\epsilon_0}$ se tiene que $v(x)$ y sus derivadas hasta la orden $m-1$ se anulan sobre $\partial\Omega \cap B_l$ (lo que se prueba usando la fórmula de Leibniz aplicada a $v(x)$). Ahora se extiende la función $v(x)$ a todo B_l poniendo $v(x) = 0$ donde $V(x)$ no está definida; ahora se aplica (5.26) a $v(x)$ y considerando que $v = u$ para $x_1 \leq 2\epsilon$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{q} \int e^{\lambda x_1} |P_j v(x)|^2 dx \leq KC_3 l^2 \left[\int_{x_1 \leq 2\epsilon} e^{\lambda x_1} |Pv(x)|^2 dx + \int_{x_1 > 2\epsilon} e^{\lambda x_1} |Pv(x)|^2 dx \right].$$

Ahora se aplica (5.28) (se obtiene una integral de volumen) a la primera integral del segundo miembro y se obtiene

$$\sum_{j=1}^{q} \int e^{\lambda x_1} |P_j v(x)|^2 dx \leq KC_3 l^2 \left[K_1 \sum_{j=1}^{q} \int_{x_1 \leq 2\epsilon} e^{\lambda x_1} |P_j v(x)|^2 dx + \int_{x_1 > 2\epsilon} e^{\lambda x_1} |Pv(x)|^2 dx \right],$$

de donde considerando que $KC_3 l^2 K_1 \leq \frac{1}{2}$, y mediante una transposición de términos se tìene

$$\sum_{j=1}^{q} \int_{x_1 \leq 2\epsilon} e^{\lambda x_1} |P_j v(x)|^2 dx \leq 2KC_3 l^2 \int_{x_1 > 2\epsilon} e^{\lambda x_1} |Pv(x)|^2 dx.$$

Bien, ahora nos restringimos a la región de integración del miembro de la izquierda y escogemos $\lambda < 0$ y se obtiene

$$e^{\lambda\epsilon} \int_{x_1 \leq \epsilon} |P_j v(x)|^2 dx \leq \int_{x_1 \leq \epsilon} |P_j v(x)|^2 dx \leq \int_{x_1 \leq 2\epsilon} |P_j v(x)|^2 dx;$$

luego

$$\sum_{j=1}^{q}\int_{x_1\leq\epsilon}|P_jv(x)|^2dx \leq 2e^{-\lambda\epsilon}KC_3l^2\int_{x_1>2\epsilon}e^{\lambda x_1}|Pv(x)|^2dx.$$

Entonces, si $\lambda \to -\infty$, el segundo miembro tiende a cero, pues es mayorado por $2e^{-\lambda\epsilon}KC_3l^2e^{2\epsilon\lambda}\int_{x_1>2\epsilon}e^{\lambda x_1}|Pv(x)|^2dx$. Pero, esto significa que los P_jv se anulan para $x_1 \leq \epsilon$; pero aún, para $x_1 \leq \epsilon$ se tiene $v = u$. Luego $u = 0$ para $x_1 < \epsilon$, y en particular $u = 0$ en $\Omega \cap B_\epsilon$. Esto termina el teorema 5.1. □

Por un argumento semejante al usado en el teorema 5.1 se puede demostrar un teorema de unicidad para el problema de Cauchy para ciertos casos sin suponer la convexidad estricta en Ω en el origen, pero si con la hipótesis de que los dados de Cauchy son cero en todo el plano $x_1 = 0$.

Teorema 5.6. *“ Sea $P(D)$ un polinomio diferencial de orden m y P_1, ..., P_q polinomios diferenciales que satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{q}|P_j(\xi+i\lambda\xi^1)|^2 \leq K\sum_{\alpha\geq 1}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi_1^\alpha}P(\xi+i\lambda\xi^1)\right|^2, \text{ donde } \xi^1=(1,0,...,0)$$

para todo vector real ξ y real λ. Las funciones u, P_ju y $\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi_1^\alpha}\right)P(D)u$, $\alpha \geq 0$, son asumidas cuadrado integrables sobre cada plano $x_1 = c$, $0 < c < c_0$; ademas, se admite que

$$\int_{x_1=c}|Pu(x)|^2dx_2...dx_n \leq K_1\int_{x_1=c}\sum_{j=1}^{q}|P_ju(x)|^2dx_2...dx_n,\ 0<c<c_0.$$

Si u tiene dados de Cauchy cero sobre el plano $x_1 = 0$, es de clase C^{m-1} en $0 < x_1 < c_0$, y tiene derivadas continuas por partes de orden m en $0 < x_1 < c_0$, **entonces** *$u = 0$”.*

Demostración: Por la hipótesis, y de acuerdo a la proposición 5.7, en lugar de trabajar con (5.26), se usa (5.25) para probar que $u = 0$ para $x_1 < \xi$ siguiendo un proceso completamente análogo a la prueba del teorema 5.1. La función $\zeta(x_1)$ es construida como anteriormente lo fue. El arguments es repetido para demostrar que $u = 0$ para $x_1 < 2\epsilon$; y así sucesîvamente ... Este argumento es justificado por el hecho de que P y P_1, ..., P_q son polinomios diferenciables con coeficientes constantes! En el caso de coeficientes variables, los ϵ pueden tender a cero. □

Nota 5.2. *El contenido de la sección 5, sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy para ED con coeficientes principales constantes, es basado en un articulo que teníamos escrito desde años atrás y creímos conveniente sacarlo a luz por si pudiera interesar a alguien en mayores detalles del problema en cuestión.*

Un lector interesado en mayor información sobre las EDP en el contexto que hemos tratado en este artículo puede consultar:
[21] en donde se exponen algunos aspectos históricos sobre problemas clásicos de las EDP, dando énfasis a sus relaciones con el análisis funcional. Es un libro que requiere cierta familiaridad con el análisis avanzado. [22] es un excelente texto para quien desee entrar a aspectos más actualizados de las EDP donde se usa el lenguaje del análisis funcional y de los espacios de Sobolev. Tiene abundantes ejercicios. [2] es un articulo histórico pues Hörmander introduce la teoría general de los operadores diferenciales parciales; es de nivel avanzado y requiere de una buena familiaridad con el análisis funcional y de la teoria de distribuciones; su libro [20] de l963 expone sus ideas en forma más organizada. [23] es un libro de lectura complementario que contiene dos largas partes; una dedicada a las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas, y la otra a las ecuaciones elípticas; la primera escrita por F.John y la segunda por L. Bers y M.Schechter, tres especialistas en estos temas. El lector interesado en las ecuaciones elípticas es sugerido a consultar esta obra. El libro [24] contiene 9 interesantes capítulos; el segundo trata sobre la teoría de distribuciones relacionadas con las EDP; los capítulos 4 y 5 dan unos fundamentos del análisis funcional y el resto sobre EDP, donde el último trata sobre los problemas no lineales; recomendamos su consulta. Los libros [25] y [26] son excelentes referencias que nos ayudan en nuestra formación sobre temas de las EDP a nivel universitario. En las referencias

damos otras fuentes bibliográficas que pueden interesar a los interesados en esta bella rama de las matemáticas, como son las EDP's.

Este articulo nos motiva a, posiblemente, tratar otros temas más actualizados sobre las EDP con el objetivo de motivar mayores estudios e investigaciones en las distintas universidades de nuestro país y de otros.

Se recomienda también las siguientes referencias que podrían ser útiles a los interesados: en [27] el autor expone sobre algunos selectos problemas sobre las EDP dando énfasis a las ecuaciones elípticas y al cálculo de variaciones; resalta también algunos libros escritos años atrás de 1962. Contiene una amplia referencias bibliográficas. En [28], Brezis - Browder exponen en 25 secciones un panorama sobre la evolución de las EDP en el siglo XX; luego de una introducción donde dan algunos aspectos históricos nos dan la situación de las EDP en los siglos XVIII y XIX para ya entrar a lo producido en el siglo XX en donde con mucha autoridad exponen sobre las contribuciones centrales creadas en tal siglo. Hormander, en [29], investiga resultados obtenidos por L.Garding sobre una teoría general para los operadores diferenciales parciales lineales. Es un artículo donde el autor exponti! algunos temas de investigación de esa época; requiere de buenos pre-requisitos del interesado. En [30], Treves investiga el problema de saber cuándo una ecuación diferencial parcial $Pu = f$ tiene o no solución, bajo ciertas condiciones. [31] es el inicio de la teoría de los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund, teoría que permitió una relación entre tales operadores con los operadores diferenciales parciales, y donde Calderón obtuvo profundos resultados. La referencia [32] es un libro dedicado a tratar, vía el análisis funcional, más concretamente los espacios de Hilbert, diferentes temas, entre ellos la teoría general de los operadores diferenciales de Hörmander. Las referencias [33], [34], [35] y [36] son trabajos dedicados a la unicidad de la solución del problema de Cauchy; son de nivel avanzado. El trabajo [37] es una serie de lecturas dadas por L.Nirenberg sobre tópicos en la teoría de ecuaciones diferenciales elípticas. Son 8 lecturas, la 1 trata sobre la solución fundamental y la 8 sobre el problema de contorno en un semi-espacio. Es un artículo aparente para hacer un seminario, incluyendo [38], con interesados en el tema. La teoría del potencial está relacionada con las EDP; así, [39] trata sobre motivaciones físicas y aspectos básicos de la teoría. En [40] L.Schwartz expone la teoría de las distribuciones dando énfasis a las ecuaciones fundamentales de las EDP y relacionadas con la física-matemática. Libro muy útil para estudiantes de física e ingeniería teórica. Finalmente, el libro [41] contiene seis capítulos en donde luego de ver temas fundamentales presenta la integral de Lebesgue y algunos problemas del análisis funcional y de los espacios de funciones. Luego desarrolla las tres ecuaciones clásicas, elípticas, hiperbólicas y parabólicas, usando la idea de solución generalizada.

ORCID and License

Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] Nirenberg L. Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1957;X.

[2] Hörmander L. On the theory of general partial differential operators. 1955;94.

[3] Lewy H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Annals of Mathematics. 1957;66(1):155-8.

[4] Plis A. Non-uniqueness in Cauchy's problem for differential equations of elliptic type. Journal of Mathematics and Mechanics. 1960;9(4):557-62.

[5] Plis A. A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1961;14(3):599-617.

[6] Figueiredo D. Teoría clássica do potencial. Brasilia: Universidade de Brasília; 1963.

[7] Greenspan D. Introduction to partial differential equations. New York: McGraw-Hill; 1961.

[8] Epstei B. Partial differential equations, An introduction. New York: McGraw-Hill; 1962.

[9] Hellwig G. Partial differential equations. An introduction. New York: Blaisdell Pub.Com; 1964.

[10] Myint-U T. Partial differential equations of mathematical physics. New York: American Elsevier Publi. Comp.; 1973.

[11] Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics. vol. II. New York: Interscience Publishers; 1962.

[12] Figueiredo D. Analise de Fourier e equaçoes diferenciais parciais. Rio de Janeiro: IMPA. CNPq; 1977.

[13] Aleksandrov AD, et al ANK. La matemática: su contenido, métodos y significado. vol. 2. Madrid: Alíanza Editorial; 1974.

[14] Kline M. El Pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Madrid: Alianza Editorial; 2012.

[15] Ortiz A. Aspectos básicos en ecuaciones en derivadas parciales. Notas de Matemática No 3 Universidad Nacional de Trujillo. 1988.

[16] Ortiz A. Tópicos sobre ecuaciones en derivadas parciales. Dpto Matemática Universidad Nacional de Trujillo. 2004.

[17] Figueiredo D. O Princípio de Dirichlet. Matemática Universitaria SBM. 1985;1.

[18] Coddington EA. An introduction to ordinary differential equations. New York: Prentice- Hall, INC; 1961.

[19] Evans LC. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. American Mathematical Society; 2010.

[20] Hörmander L. Linear partial differential operators. 1963.

[21] Dieudonné J. History of functional analysis. North-Holland Math Studìes. 1983;77.

[22] Brézis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer Science & Business Media; 2010.

[23] Bers L, John F, Schechter M. Partial differential equations. New York: Interscience Publishers. John Wiley Sons, Inc; 1964.

[24] Stakgold I. Green's functions and boundary value problems. New York: John Wiley -Sons; 1979.

[25] Egorov YV, Shubin MA. Partial differential equations I. Foundations of the classical theory. New York: Springer-Verlag; 1992.

[26] Jost J. Partial differential equations. Graduate Texts in Mathematics. Springer - Verlag; 2002.

[27] Jr CM. Some recent developments in the theory of partial differential equations. Bulletin of AMS. 1962;68(4).

[28] Brezis H, Browder F. Partial differential equations in the 20th Century. 1998;Advances in Mathematics 135.

[29] Hörmander L. Linear differential operators. Actes, Congres Intern Math. 1970;1.

[30] Treves F. On local solvability of linear partial differential equations. Indiana: Purdue University, Lafayette; 1969.

[31] Calderón AP, Zygmund A. On the existence of certain singular integrals. Acta Mathematica. 1952;88.

[32] Maurin K. Methods of Hilbert spaces. Polish Scientific Publishers; 1967.

[33] Pedersorn RN. Uniqueness in Cauchy's problem for elliptic equations with double characteristics. Arkiv för Matematik. 1966;6(27):535-49.

[34] Chung SY. Uniqueness of the Cauchy problem for certain quasi-linear partial differential equations. Journal of the Korea Society of Mathematical Education. 1986;25(1):33-7.

[35] Zeman M. Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for linear partial differential equation with characteristics of variable multiplicity. Journal of Differential Equations. 1978;27(1):1-18.

[36] Calderón AP. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. American Journal Mathematics. 1958;80(1):16-36.

[37] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations. vol. 13. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa; 1959.

[38] Vásquez JM. El Problema de Dirichlet. Universidad de Panamá; 1989.

[39] Ponce AC. II Escola de E.D. Rio de Janeiro 2006. In: Métodos Clássicos em Teoria do Potencial; 2009. p. 1-156.

[40] Schwartz L. Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Hermann S G Paris. 1961;VI(115).

[41] Mijailov VP. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Moscú: Editorial MIR; 1978.