





Mathematical modeling to evaluate potato cultivation in high-andean soils using data analysis and the Runge Kutta method

Modelación matemática para evaluar el cultivo de la papa en suelos altoandinos mediante el análisis de datos y el método de Runge Kutta

Irla Mantilla N.  and Juan Reymundo P. 

Received, Nov. 23, 2023;

Accepted, Jul. 03, 2024;

Published, Jul. 29, 2024



How to cite this article:

Mantilla I, Reymundo J. *Mathematical modeling to evaluate potato cultivation in high-andean soils using data analysis and the Runge Kutta method*. *Selecciones Matemáticas*. 2024;11(1):69–87. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2024.01.06>

Abstract

According to data collected by the International Potato Center (CIP) and the Departmental Federation of Peasant Communities (FEDECH), regarding the Huancavelica region. One of the most devastating diseases in the potato crop is "Rancha"; scientifically known as *Phytophthora infestan*. Frog can be controlled by the application of fungicides, but due to the excessive growth of the population density of this pathogen produced by the frog fungus, it would be necessary to apply more fungicides, which poses a high environmental and human health risk to those who consume this type of tuber in their diet. To measure the population growth of both species, a database will be built related to the percentage of potato crops per hectare that are attacked by this type of fungus. In this sense, a numerical mathematical model will be developed based on the Lotka-Volterra type differential equation system, which is solved with the Runge-Kutta RK2 and RK4 method, in order to contribute, in a non-invasive way, with an alternative for the prevention and control of this disease in potato crops in high Andean soils.

Keywords . Rancho fungus, environmental risk in potato crop, data cleaning, data analysis, Lotka-Volterra model, Runge-Kutta.

Resumen

Según datos recogidos por el Centro Internacional de la Papa (CIP) y la Federación Departamental de Comunidades Campesinas (FEDECH), respecto a la región Huancavelica. Una de las enfermedades más devastadoras en el cultivo de la papa es la Rancho; científicamente conocida como *Phytophthora Infestan*. La Rancho puede ser controlada mediante la aplicación de fungicidas, pero debido al excesivo crecimiento de la densidad poblacional de este patógeno producido por el hongo de la rancho, sería necesario aplicar más fungicidas, lo que supone un alto riesgo medioambiental y para la salud humana de quienes consumen este tipo de tubérculo en su dieta. Para medir el crecimiento poblacional de ambas especies, se construirá una base de datos relacionada con el porcentaje de cultivos de la papa por hectárea

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería. Perú. (irlamn@uni.edu.pe).

†Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería. Perú. **Correspondence author** (jreymundop@uni.pe).

que son atacados por este tipo de hongos. En este sentido, se desarrollará un modelo matemático numérico basado en el sistema de ecuaciones diferenciales tipo Lotka-Volterra, el cual se resuelve con el método de Runge-Kutta RK2 y RK4, con el fin de contribuir, de manera no invasiva, con una alternativa para la prevención y control de esta enfermedad en cultivos de papa en suelos altoandinos.

Palabras clave. Hongo de la Mancha, Riesgo ambiental en el cultivo de la papa, Limpieza de datos, Análisis de datos, Lotka-Volterra, Runge-Kutta.

1. Introducción. Durante los últimos años el cambio climático que trae las heladas, las lluvias torrenciales y el incremento de plagas está golpeando a la agricultura (en particular a la agricultura extensiva de la papa en los suelos altoandinos) [1]. Respecto a las plagas se conocen tres alternativas de control que se pueden aplicar, las cuales son: *control biológico*, *control cultural* y *control químico*, a las que se les denomina *Manejo Integrado de Plagas* (MIP). Este último es aplicado en la mayoría de los cultivos de papa, trayendo consecuencias severas. Si en el Perú aún no se han dado casos de riesgo extremo, como el caso que informó MINSA según el reporte del 2004 [2], que en Nicaragua 1,500 personas sufrieron intoxicación por excesivo uso de sustancias químicas en el cultivo de papa, en el cual 160 de estas personas fallecieron. Uno de los aspectos más complejos para aplicar el MIP es tomar la decisión de iniciar su implementación, debido al alto costo, riesgo para la salud y conservación del medio ambiente. La postergación de esta decisión tiene relación con la escasa información de otras alternativas no invasivas disponibles para el MIP. El restringido apoyo profesional especializado, la incertidumbre que genera dicho cambio en el clima, especialmente en cuanto al éxito de los resultados finales en el cultivo, desarrollo y cosecha de este tubérculo. Es por ello que el proceso agrícola del cultivo de la papa, por su gran valor alimenticio, aún sigue en investigación. En el Perú según MIDAGRI, para la implementación del MIP se exige reconocer a las plagas de este cultivo, como enemigos naturales, y se debe entender su biología de comportamiento con una adaptabilidad a la estación variada por el cambio climático; y recomienda a los grupos de interés, desarrollar técnicas de monitoreo e incorporar nuevas alternativas para evitar la crisis económica que se generan por estas diversas incertidumbres en los lugares altoandino cuyas prioridades de vivencia son este tipo de cultivos [3]. En ese sentido, construimos una base de datos óptima para identificar nuestras variables objetivo y nos centramos en plantear alternativas no invasivas como nuevas técnicas de monitoreo, basadas en modelos matemáticos, tales como el modelo (depredador-presa) del tipo *Lotka Volterra* (LV) [4, Evans & Findley, (1998)], el cual proporcionará predicciones de sobrevivencia entre el cultivo de la papa y la principal enfermedad que ataca a este cultivo como la Mancha (*Phytophthora Infestans*). Nuestro modelo sistema bidimensional de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) del tipo LV. Y [5, May & Iván, (2016)], con el cual se consigue predicciones numéricas basadas en métodos de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden, así como se obtiene el punto de equilibrio para visualizar su estabilidad cualitativa y cuantitativa en el control numérico de la dinámica de sobrevivencia entre la planta de papa y la Mancha respecto al tiempo. Los algoritmos implementados de los modelos numéricos, para ver los resultados se han implementado en la plataforma de MATLAB, cuyos resultados muestran su eficiencia y eficacia de las técnicas aplicadas.

2. Construcción de la base datos para identificación de las variables objetivo.

2.1. Identificación de fortalezas y debilidades en la zona estratégica en el cultivo de la papa de la región altoandina.

2.1.1. Ubicación de la zona estratégica para aplicación de encuesta. Se han considerado ocho de las comunidades, cuya actividad prioritaria es el cultivo de la papa de diversas variedades, específicamente de las papas nativas cuyos agricultores son estas comunidades. Estas comunidades pertenecen a las diferentes provincias del departamento de Huancavelica.

2.1.2. Comunidades Campesinas.



Figura 2.1: Ubicación geográfica. Fuente: Ministerio de Transportes y Comunicaciones(MTC).

- **Huayta Corral:** Se ubica en el distrito de Acostambo, provincia de Tayacaja.
- **Túpac Amaru:** Se ubica en el distrito de Ahuaycha, provincia de Tayacaja.
- **Villa Hermosa:** Se ubica en el distrito de Yauli, provincia de Huancavelica.
- **Pucara:** Se ubica en el distrito de Yauli, provincia de Huancavelica.
- **Dos de Mayo:** Se ubica en el distrito de Yauli, provincia de Huancavelica.
- **Libertadores:** Se ubica en el distrito de Paucará, provincia de Acobamba.
- **Santa Cruz de Pongos Grande(Pongos):** Se ubica en el distrito de Ccochaccasa, provincia de Angaraes.
- **Allato:** Se ubica en el distrito de Lircay, provincia de Angaraes.

2.2. Cultivos relevantes de la región Huancavelica por área cosechada, rendimiento y producción. Luego de la revisión de la información bibliográfica hasta la actualidad solo existen los siguientes datos, respecto a la zona estratégica elegida, se muestran en la siguiente tabla 2.1.

Cultivo	Cosechas HAS	Rendimiento(Kg/HA)	Producción(TM)
Papa	17,448	9,273	161,808
Cebada Grano	15,868	1,414	22,441
Maíz Amiláceo	13,564	1,455	19,735
Arveja g. ¹ verde	3,419	3,555	12,158
Haba g. verde	2,381	3,566	8,490
Trigo	4,021	1,307	5,256
Olluco	2,080	4,680	9,735
Haba g. seco	4,937	1,378	6,804
Arveja g. seco	3,155	1,299	4,098
Maíz choclo	428	7,315	3,131
Frijol grano seco	3,206	1,151	3,692
Quinoa	393	746	293
Avena grano	324	1,281	415
Tuna	1,560	5,766	8,996
Alfalfa	2,998	36,955	110,791

Tabla 2.1: Los 15 cultivos más relevantes de la región. Fuente : Dirección de Información Agraria-Hvca 2009.

2.3. Plagas y enfermedades en el cultivo de papa.

- **El gorgojo de los andes (*Premnotrypes spp*)** Es considerado como una plaga clave para el cultivo de la papa. Los adultos son de color marrón claro a oscuro y pueden llegar a medir entre 6 a 8 mm, no vuelan y se trasladan caminando. Los mayores daños los ocasionan las larvas, las cuales barrenan el tubérculo formando túneles en los que depositan sus excrementos, dejando agujeros cuando abandonan el tubérculo. Los adultos se alimentan de las hojas, en cuyos bordes producen daños en forma de media luna y en su forma adulta se alimentan de hojas de papa y algunas malezas. Las pérdidas en rendimiento ocasionadas por las larvas del gusano blanco oscilan entre 5 % y 50 %.
- **Polilla de la papa (*Phthorimaea operculella*)** Los adultos hembras depositan sus huevos sobre el tubérculo, las larvas al nacer ingresan al tubérculo, al alimentarse producen galerías y llenan de excremento. Esta plaga empieza dañando principalmente tallos y brotes.
- **Mosca minadora (*Liriomyza huidobrensis*)** Las hembras realizan perforaciones en el follaje. Las larvas ocasionan minas o galerías en las hojas, estas pierden su capacidad fotosintética y puede llegar a defoliar la planta, disminuyendo la producción.

Enfermedades

- **Altenaria o tizón temprano:** Es causado por el hongo *Phytophthora infestans* y es la enfermedad más seria en el cultivo. Afecta las hojas produciendo lesiones más o menos circulares con anillos concéntricos de color marrón oscuro. La enfermedad se inicia en las hojas inferiores y cuando hay condiciones favorables avanza a las hojas superiores.
- **Roña:** La severidad de los daños que causa depende de la variedad, grado de infección del suelo y condiciones de humedad y temperatura del suelo. Esta es importante porque es vector del virus mop top de la papa. En Perú está localizada sólo en la sierra y los daños con mayor incidencia se presentan en los cultivos de papa ubicados entre 3200 y 3800 m de altitud. La enfermedad afecta a las raíces y estolones (para más información <https://www.adama.com/peru/es>)
- **Rancha:** Es una de las enfermedades más frecuentes en los cultivos de papa y es causado por el hongo *Phytophthora Infestans*, ésta se manifiesta en los daños perjudiciales a las hojas, tallos, estolones (ver fig. 2.3) y a los tubérculos de la planta de papa.

Después de la cosecha las estructuras de propagación de la racha permanecen en los restos de la planta y tubérculos; cuando se reinicia la campaña agrícola de papa y las condiciones ambientales son favorables para el hongo inicia la infección en nuevos campos del cultivo de la papa.

2.4. Caracteres Agronómicos. La categoría de caracteres agronómicos describe: rendimiento, número de tubérculos por planta, reacción a racha, helada, tiempo de almacenamiento y rango de adaptación. El rendimiento y el número de tubérculos por planta se expresan en un rango de mínimo y máximo en kilogramos, o en número de tubérculos por planta. El rendimiento y el número de tubérculos por planta fueron tomados al momento de la cosecha de entre 5 a 30 plantas en 1 hasta 5 ambientes sin repeticiones.

- **La sub-categoría de racha** se refiere a la resistencia de la variedad descrita a *Phytophthora infestans*. Las claves para la sub-categoría de racha son: susceptible, medianamente susceptible, intermedia, medianamente resistente, resistente.
- **La sub-categoría de helada** se refiere a la tolerancia de la variedad descrita a heladas o temperaturas por debajo de 0°C. Las claves para la sub-categoría de helada son: susceptible, medianamente susceptible, intermedia, medianamente tolerante, tolerante.
- **La sub-categoría de almacenamiento** se refiere al tiempo que se puede almacenar cada variedad bajo condiciones tradicionales aplicadas por los agricultores de Huancaavelica. Se aplicó el método de encuestas estructuradas con agricultores expertos propietarios de la variedad. Las claves para la sub-categoría de almacenamiento son: corto tiempo (menor a 3 meses), intermedio (de 3 - 5 meses), largo tiempo (mayor a 5 meses).
- **La sub-categoría de rango de adaptación** se refiere específicamente al rango de altitud donde comúnmente se cultiva la variedad descrita. El rango de adaptación está expresado en metros sobre nivel del mar(msnm) [6].

2.4.1. Calendario de cultivo de la papa nativa en dicho región. En esta subsección mostraremos la calendarización de cultivo de la papa nativa y partes del tubérculo de la planta.

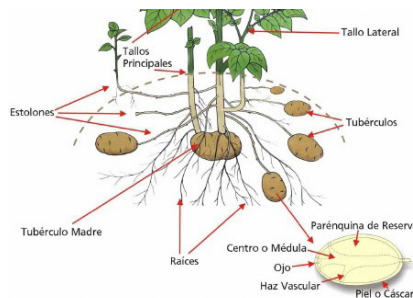
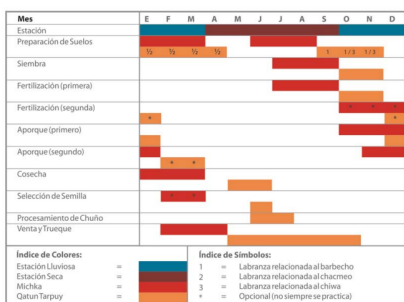


Figura 2.2: Calendario de cultivo. www.cipotato.org
Fuente: (CIP y FEDECH)

Figura 2.3: Partes de una planta de la papa.

2.5. Volumen de producción de papa por cada provincia. En el siguiente cuadro se visualiza el volumen de la producción en las provincias de dicho región.

Provincia	Cosechas(Has)	Rendimiento(Kg/Ha)	Producción(Tm)
Huancavelica	4,314	8,414	36,298.1
Acobamba	2,155	9,518	20,513
Angaraes	1,252.5	8,909	11,158.3
Churcampa	1,629	9,346	15,224.8
Castrovirreyna	510	7,817	3,986.5
Huaytará	675	8,390	5,663.45
Tayacaja	6,913	9,976	68,964.1
Total	17,448.5	9,273	161,808.25

Tabla 2.2: Producción de papa por provincia.
Fuente: Dirección de Información Agraria –DRA-Hvca

3. Conceptos generales.

3.1. Descripciones numéricas. En esta sección se estudian varias fórmulas que tienen como objetivo resumir la información de un conjunto de datos, principalmente numéricos. Las definiciones están tomadas del libro [7].

Definición 3.1. La *media* de un conjunto de valores (datos) x_1, \dots, x_n se denota por \bar{x} (se lee x barra) y se define como el promedio aritmético.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

A diferencia de la media, la moda se puede calcular tanto para valores numéricos como no numéricos. Su definición es la siguiente.

Definición 3.2. La *moda* es el valor que aparece con mayor frecuencia en el conjunto de datos, en caso de que lo hubiera.

3.2. Medidas de dispersión. Para medir el grado de dispersión de un conjunto de datos numéricos, es necesario considerar un valor central de los datos como punto de referencia. Tal valor central puede tomarse a la media, a la mediana o a la moda. En cualquiera de los casos se obtiene una medida de dispersión diferente. En particular consideramos como valor central a la media \bar{x} .

Definición 3.3. La *varianza* de un conjunto de valores (datos) x_1, \dots, x_n se denota por s^2 o σ^2 y se define como sigue [7].

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Tomaremos n para la población y $n-1$ para la muestra.

Definición 3.4. La *desviación estándar* de un conjunto de valores (datos) x_1, \dots, x_n se denota por la letra s o σ y se define como sigue [7].

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{y} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

3.3. Desviación Media. Al promedio de los valores absolutos de las diferencias entre los datos y la media se le llama desviación media.

Definición 3.5. La *desviación media* del conjunto de valores (datos) x_1, \dots, x_n se denota por $dm(x)$ y se calcula de la siguiente forma [7].

$$dm(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|.$$

Definición 3.6. El *rango* de un conjunto de datos (valores) x_1, \dots, x_n ordenado crecientemente, se define como: [7].

$$r = x_{(n)} - x_{(1)}.$$

y se denota por r .

3.4. Modelos de Lotka-Volterra con dos especies. Abordaremos en esta sección el estudio de sistemas dinámicos que describen la interacción de dos especies que coexisten en un ecosistema común. Estos modelos se aproximan mejor que los de una sola especie a las situaciones reales encontradas en biología y ecología.[8] Los principales modelos de interacción interespecie que serán objeto de estudio se relacionan a continuación:

- Interacción **depredador-presa**, en la que la supervivencia de la especie depredadora está condicionada a la existencia de otra especie que le sirve de presa. En nuestro caso: *depredador es la rancha y presa es la papa*.
- Interacción **competitiva**: dos especies compiten por el mismo recurso o recursos, pero no existe depredación directamente entre ellas.
- Interacción **cooperativa**, simbiótica o mutualismo: la supervivencia de cada especie se ve favorecida por la existencia de la otra.

3.4.1. Modelo Depredador-presa de Lotka Volterra. Llamaremos depredador y presa, que coexisten en un ecosistema común. Representamos por x e y el número (o densidad) de individuos de las especies presa y depredadora respectivamente. El modelo propuesto inicialmente por Volterra se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - by), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + dx),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde a, b, c, d son constantes positivas. A lo largo del trabajo utilizaremos indistintamente las notaciones de Leibniz y Newton para la derivada temporal: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, etc.

Para encontrar los puntos críticos, como estamos hablando de poblaciones, por tanto, tienen iniciales positivas, $x_0 > 0, y_0 > 0$, no se puede dar $x(t) \leq 0$ ni $y(t) \leq 0$ en ningún tiempo finito t . Como consecuencia inmediata tenemos que el interior del primer cuadrante, que denotamos por

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\},$$

es decir, es invariante en el sentido de que toda solución que comienza en él, permanece en él. El único punto crítico de (3.1) en C_1 viene dado por:

$$\begin{aligned}x(a - by) = 0 &\Rightarrow y = \frac{a}{b}, \\ y(-c + dx) = 0 &\Rightarrow x = \frac{c}{d},\end{aligned}$$

y lo denotamos por $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Este punto crítico es el centro las trayectorias en el mapa de fases son curvas cerradas alrededor de este punto crítico, lo cual corresponde a soluciones periódicas en el tiempo para $x(t)$ e $y(t)$.

3.5. Ecuaciones de Lotka-Volterra para más de dos especies. En esta sección abordamos el estudio de sistemas con n poblaciones, en el caso que las interacciones entre ellas son lineales. Se trata por tanto de una generalización de las ecuaciones de Lotka-Volterra al caso de dimensión n .

3.5.1. La ecuación general de Lotka-Volterra. La ecuación general de Lotka-Volterra para n poblaciones toma la forma

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right); \quad i = 1, \dots, n.\tag{3.2}$$

Donde x_i representa el número (o densidad) de individuos de cada especie, r_i son las tasas intrínsecas de crecimiento o decrecimiento y los coeficientes a_{ij} describen el efecto que produce la especie j -ésima sobre la i -ésima. Se tiene que $a_{ij} > 0$ si la presencia de la especie j favorece el crecimiento de la especie i , y $a_{ij} < 0$ si lo inhibe. Si $a_{ij} = 0$, significa que la especie j no tiene ningún efecto sobre la i . Esto no implica la afirmación recíproca, es decir, se podría tener $a_{ji} \neq 0$. La matriz

$$A = (a_{ij}),$$

recibe el nombre de **matriz de interacción** [9].

4. Aplicación de la Ciencia de Datos al cultivo. La ciencia de los datos es una reunión de diferentes instrumentos, interfaces de datos y cálculos con estándares de IA (algoritmos) para encontrar patrones ocultos a partir de datos brutos. Estos datos se guardan en grandes almacenes de distribución de datos empresariales y se utilizan en enfoques inventivos para crear valor empresarial [10].

La ciencia de datos reside en la intersección entre: *Habilidades informáticas a nivel de hacker*, *Conocimiento de matemáticas y estadística* y *Experiencia relevante* [11]. La Ciencia de Datos (Data Science) se encarga de analizar grandes volúmenes de información con la ayuda de la inteligencia artificial para mejorar el manejo de la información. Aunque la revisión bibliográfica indica que no hay una definición única, existe consenso en que Ciencia de Datos, descifra volúmenes de datos para tomar decisiones valiosas que generen impacto en el mundo.

4.1. Tratamiento de la base de datos mediante técnicas Data Science. Según datos recogidos en Centro Internacional de la Papa (CIP), y la Federación Departamental de Comunidades Campesinas (FEDECH), respecto a la región Huancavelica. Una de las enfermedades de mayor estrago en el cultivo de papa es la rancha; científicamente conocida como "Phytophthora Infestan"[6].

4.1.1. Análisis exploratorio de datos. Primero identificaremos las variables cuantitativas y cualitativas. Para ello nos guiamos de Bruce-Tukey [10, 12, 13].

4.1.2. Análisis cualitativo del modelo. Clasificaremos en dos:

VARIABLES CUALITATIVAS

- **Variedad:** Variedad de la papa.
- **Rancho:** Es la clase de enfermedad que ataca al tubérculo y corresponde a una característica ordinal categórica con solo 6 valores:
 - 0 = Resistente.
 - 1 = M.² Resistente
 - 2 = Tolerante
 - 3 = Intermedio
 - 4 = M. Susceptible
 - 5 = Susceptible
- **Color de Floración**

- **Forma de la papa**
- **Color de tallo**
- **Grado de floración**

VARIABLES CUANTITATIVAS

- **RENDIMIENTO $m(Kg)$:** Es la producción mínimo por planta del tubérculo en kilogramos.
- **RENDIMIENTO $M(Kg)$:** Es la producción máxima por planta del tubérculo en kilogramos.
- **PAPAS POR PLANTA (m) :** Es el número(unidad) mínimo de papas por planta.
- **PAPAS POR PLANTA (M) :** Es el número(unidad) máximo de papas por planta.

4.1.3. Variable Objetivo. Para encontrar nuestra variable objetivo, debemos buscar la variable que más afecta de forma negativa a nuestra planta objetivo(papa). Qué tipo de papas son resistente a la enfermedad "**Rancho**" y cual es la razón de que sean resistentes. Como influyeron las diversas variables para la resistividad del tubérculo.

El siguiente cuadro muestra la cantidad de variedades de papa que son afectadas según el grado de la Rancho. Y el diagrama circular(pastel o queso) muestra el porcentaje afectado por la rancho a la variedad de papas.

VARIEDAD	
RANCHO	
0	24
1	8
2	1
3	2
4	86
5	23

Figura 4.1: Los más resistentes son: 24 variedades son resistentes frente a la Rancho, y 86 variedades son M. susceptibles.

²Medianamente.

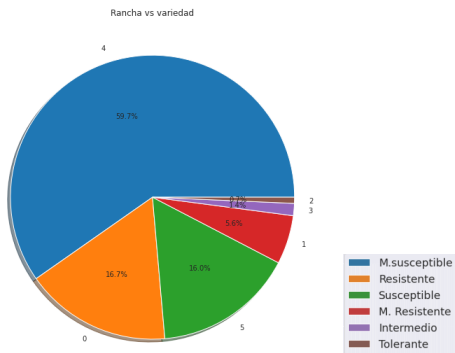


Figura 4.2: Representa el porcentaje de afectación de Ranchar frente a 144 variedades de papas.

De esto podemos decir que, cerca de 60 % de las papas son M. susceptibles(en otras palabras son vulnerables frente a la Ranchar).

La siguiente histograma muestra la variación de la producción mínima y máximo versus al tiempo de almacenamiento respectivamente.

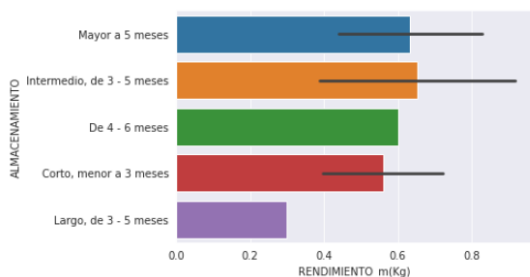


Figura 4.3: Se puede notar que almacenar los tubérculos de papa durante un período de 3 a 5 meses conduce a mejores producciones.

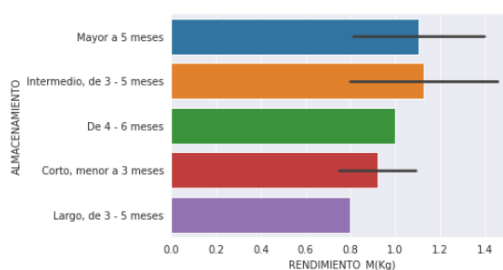


Figura 4.4: Se puede notar que almacenar los tubérculos de papa durante un período de 3 a 5 meses conduce a mejores producciones.

El siguiente diagrama de barras representa el grado promedio de afectación frente a la forma del tubérculo.

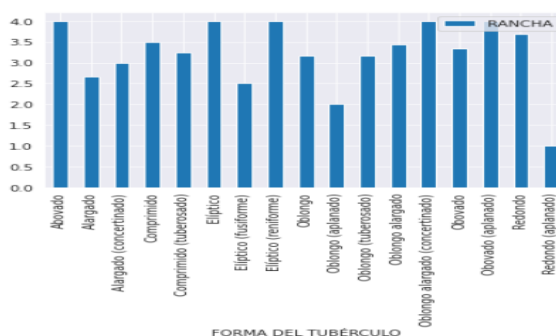


Figura 4.5: Representa la afectación de Ranchar frente a la forma de la papa.

4.2. Análisis Estadístico Descriptivo para obtener las variables objetivo del modelo Lotka-Volterra.

4.2.1. Ranchar versus producción en kilogramos por planta. Las siguientes diagramas muestran la afectación de la Ranchar frente al planta del tubérculo.

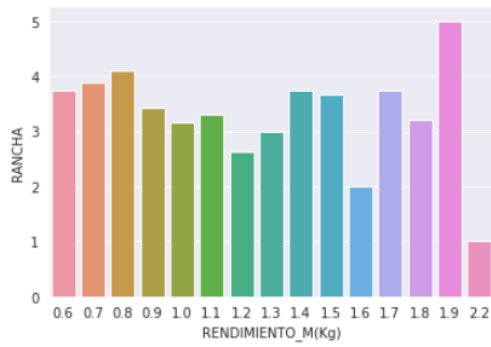


Figura 4.6: Representa en barra la afectación de la enfermedad Rancho frente a la producción máxima por planta.

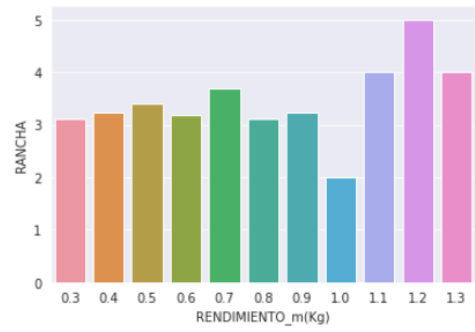


Figura 4.7: Representa en barra la afectación de la enfermedad Rancho frente a la producción mínima por planta.

5. Discusión de resultados y conclusiones. En esta sección mostraremos los resultados numéricos de la producción por kilogramo de tubérculo en cuanto se ve afectado frente a la Rancho.

RANCHA	0	1	2	3	4	5	All
0.3	2	0	1	0	4	2	9
0.4	3	3	0	0	12	4	22
0.5	4	1	0	1	14	5	25
0.6	5	1	0	0	13	4	23
0.7	3	0	0	0	18	4	25
0.8	3	2	0	1	11	2	19
0.9	2	1	0	0	9	1	13
1.0	2	0	0	0	2	0	4
1.1	0	0	0	0	2	0	2
1.2	0	0	0	0	0	1	1
1.3	0	0	0	0	1	0	1
All	24	8	1	2	86	23	144

Figura 5.1: Representa mínimo de kilogramos de papas por planta vs Rancho

RANCHA	0	1	2	3	4	5	All
0.6	0	0	1	0	2	1	4
0.7	1	0	0	0	4	3	8
0.8	0	0	0	0	10	1	11
0.9	4	1	0	1	12	6	24
1.0	7	0	0	0	18	4	29
1.1	3	0	0	0	12	1	16
1.2	5	4	0	0	11	2	22
1.3	2	0	0	0	4	1	7
1.4	0	0	0	1	3	0	4
1.5	0	1	0	0	4	1	6
1.6	1	0	0	0	1	0	2
1.7	0	1	0	0	1	2	4
1.8	1	0	0	0	4	0	5
1.9	0	0	0	0	0	1	1
2.2	0	1	0	0	0	0	1
All	24	8	1	2	86	23	144

Figura 5.3: Representa máximo de kilogramos de papas por planta vs Rancho.

RANCHA	0	1	2	3	4	5	All
Intermedio	0	0	0	2	0	0	2
M. Susceptible	2	1	1	0	4	1	9
M. Tolerante	2	6	0	0	73	6	87
Susceptible	0	0	0	0	2	13	15
Tolerante	20	1	0	0	7	3	31
All	24	8	1	2	86	23	144

Figura 5.2: La matriz de confusión nos muestra la Helada vs Rancho.

La rancho puede acabar con el 100 % del cultivo de papa.

Aparece en las hojas de la planta, en condiciones de humedad, según SEDIR³. La rancho

³Servicio para el Desarrollo Integral Rural



(a) Aquí se muestra la hoja de papa infectada por la Rancha.



(b) Muestra el tallo infectado por la Rancha.



(c) Tubérculo de la papa infectado por la Rancha.

es la enfermedad más mortal que ataca a la papa y en apenas algunos días puede acabar con todo el cultivo, si es que no hay una labor preventiva o no se controla a tiempo, la rancha provoca manchas negras en las hojas(fig. 5.4a), daña el tallo(fig. 5.4b) y los tubérculos(fig. 5.4c). La necrosis de las hojas aparece a los 6 o 7 días de la infestación.

Las condiciones climáticas para la presencia de la rancha es con una temperatura que oscila entre 15° y 18° o cuando durante 7 días la temperatura es de 25° o menos. También cuando hay lluvia constante o cuando la humedad relativa oscila entre 90 % y 100 %.

SÍNTOMASEl proceso de contaminación es el orden siguiente: **Hojas(fig. 5.4a)**: Manchas necróticas de color marrón claro a oscuro. **Tallos(fig. 5.4b)**: Manchas alargadas que los hacen quebradizos. **Tubérculos(fig. 5.4c)**: Manchas irregulares de color marrón rojizo y de apariencia húmeda en la superficie de los tubérculos. Al corte longitudinal se observan estrías necróticas que van de la superficie al centro del tubérculo.

5.1. Nivel de producción de la papa frente a la vivencia climatológica de la Ranca en kilogramos por planta.

	Producción_m(Kg/p) ⁴	Producción_M(Kg/p)
mean	0.631250	1.098611
std	0.204313	0.296598
mín	0.300000	0.600000
25 %	0.500000	0.900000
50 %	0.600000	1.000000
75 %	0.800000	1.200000
máx	1.300000	2.200000

Tabla 5.1: Base de datos de la producción de 144 variedades de Papa en el Perú, con el control de la Ranca utilizando fungicidas.

5.2. Nivel de producción de la papa frente a la vivencia climatológica de la Ranca en unidades por planta.

	Producción_m(u/p) ⁵	Producción_M(u/p)
mean	16.500000	29.125000
std	7.023437	10.689433
mín	5.000000	12.000000
25 %	11.000000	21.000000
50 %	15.000000	28.000000
75 %	20.000000	35.000000
máx	46.000000	65.000000

Tabla 5.2: Base de datos de la producción de 144 variedades de Papa en el Perú, con el control de la Ranca utilizando fungicidas.(u/p)

5.3. Nivel de Susceptibilidad de la papa frente a la vivencia climatológica de la Ranca.

	Susceptibilidad
mean	3.298611
std	1.701829
mín	0.000000
25 %	4.000000
50 %	4.000000
75 %	4.000000
máx	5.000000

Tabla 5.3: Base de datos de la producción de 144 variedades de Papa en el Perú, con el control de la Rancho utilizando fungicidas.

5.4. Nivel de adaptabilidad de la Papa frente a la Rancho.

	Adaptación_m(msnm) ⁶	Adaptación_M(msnm)
mean	3299.305556	4034.722222
std	118.555719	71.271611
mín	3000.00000	4000.00000
25 %	3300.00000	4000.00000
50 %	3300.00000	4000.00000
75 %	3300.00000	4000.00000
máx	4000.00000	4300.00000

Tabla 5.4: Base de datos de la producción de 144 variedades de Papa en el Perú, con el control de la Rancho utilizando fungicidas.

5.5. Modelo Lotka-Volterra para el control biológico de la Rancho (Phytophthora Infestan).

Nuestras condiciones climáticas para la presencia de la rancho es con una temperatura que oscila entre 15° y 18° o cuando durante 7 días la temperatura es de 25° o menos. También cuando hay lluvia constante o cuando la humedad relativa oscila entre 90 % y 100 % y además el área de la planta es 2m² equivalente a 15 a 17 plantas.

La siembra de papa se realiza en surcos a una distancia entre 1m a 1,2m entre surcos, de 0,15 – 0,25m entre plantas (depende del tamaño de la semilla utilizada) y a una profundidad alrededor de 0,20m. Después de colocar los tubérculos (semilla) dentro de los surcos, estos se tienen que tapar con una capa de suelo de aproximadamente entre 7 – 10cm. Y PH entre 5 y 5,4, nivel de adaptabilidad entre 3000 – 4300msnm y altitud ideal 1500 – 2500msnm.



Figura 5.5: Representa la distancia entre papa y papa.



Figura 5.6: Representa la distancia entre surcos en cultivo de papa.

Bajo estas condiciones, ahora podemos aplicar el modelo presa-depredador (ver ecuación 3.1) a los base de datos ya tratados, es necesario conocer a , b , c , d , $x(0)$, $y(0)$. Empezamos tomando como valores iniciales (V.I.) $x_0 = 16,5$ plantas e $y_0 = 3,3$ de rancho, estos valores son las *medias* encontradas con Ciencia de Datos para cada variable. Para encontrar el resto de los parámetros debemos tener en cuenta los valores medios.

$$\bar{x}(t) = \frac{c}{d}, \quad \bar{y}(t) = \frac{a}{b}.$$

Si elegimos los datos comprendidos entre dos valores máximos (o mínimos) y hacemos su media, podemos estimar $\bar{x}(t)$ e $\bar{y}(t)$. Para el tubérculo.

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i = 22,8125,$$

y para la ranca.

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y_i = 3,298611.$$

De esta manera

$$\bar{x}(t) = \frac{c}{d} = 22,8125, \quad \bar{y}(t) = \frac{a}{b} = 3,298611. \quad (5.1)$$

Todavía necesitamos otras dos ecuaciones para poder estimar todos los coeficientes. Para ello razonamos de la siguiente manera: cuando la población de depredadores sea muy baja, es de esperar que las presas estén creciendo de manera exponencial. A partir de esta hipótesis calcularemos a . En efecto, de la base de datos, observamos que una población baja de ranca, y al mismo tiempo un crecimiento rápido del tubérculo, corresponde al año 2006 y 2007. Para estos años los datos son $x(t) = 16$ en 2006 y $x(t+1) = 21,5$ en 2007. Si sustituimos en la fórmula del crecimiento exponencial $x(t) = x(0)e^{at}$, se obtiene

$$21,5 = 16e^a \Rightarrow a = \ln\left(\frac{21,5}{16}\right) = 0,2954642129. \quad (5.2)$$

En el otro caso, una población muy baja del tubérculo que implica un ritmo elevado en el descenso de la población de la ranca, se da en el año 2007. Sean $y(t) = 4$, $y(t+1) = 3,298611$, si sustituimos en $y(t) = y(0)e^{-ct}$,

$$19 = 41,7e^{-c} \Rightarrow c = -\ln\left(\frac{3,298611}{4}\right) = 0,1927928903. \quad (5.3)$$

De las expresiones (5.1), (5.2), (5.3) deducimos

$$\begin{aligned} x(0) &= 16,5, & y(0) &= 3,3 \\ a &= 0,2954642129, & b &= 0,0895723118, \\ c &= 0,1927928903 & y & & d &= 0,0084511952. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estos parámetros nos permiten escribir nuestro modelo depredador-presa. En nuestro caso consideramos como el **depredador al hongo de la ranca** [$y(t)$] y la **presa es el tubérculo de la planta de papa** [$x(t)$].

$$\text{MODELO} := \begin{cases} x'(t) = 0,295x - 0,090xy ; x(0) = 16,5, \\ y'(t) = -0,193y + 0,008xy ; y(0) = 3,3. \end{cases}$$

6. Resolución numérica. Al modelo (5.5) podemos escribir de la siguiente forma con las condiciones mencionadas en la subsección 5.5.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0,295x - 0,090xy = f(t, x, y) ; x_0 = 16,5, \\ y'(t) &= -0,193y + 0,008xy = g(t, x, y) ; y_0 = 3,3. \end{aligned}$$

6.1. RUNGE-KUTTA 2° ORDEN (M. HEUN).

$$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \cdot h,$$

Donde

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_i, \Gamma_i, \Lambda_i), \\ K_2 &= f(t_i + h, \Gamma_i + K_1 \cdot h, \Lambda_i + K_1 \cdot h). \end{aligned}$$

Iteración 1:

$$\begin{aligned} \text{Papa: } K_{1x} &= h \cdot f(t, x, y) = 0,5 \left[0,295(16,5) - 0,090(16,5)(3,3) \right] = 0,5 [-0,033] \\ &= -0,01650. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rancha: } K_{1y} &= h \cdot g(t, x, y) = 0,5 \left[-0,193(3,3) + 0,008(16,5)(3,3) \right] = 0,5 [-0,2013] \\ &= -0,10065. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2y} &= h \cdot g(t + h, x + K_{1x}, y + K_{1y}) = 0,5 \left[-0,193(3,3 - 0,10065) + 0,008(16,5 - 0,0165)(3,3) \right] \\ &= -0,09779 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2y} &= h \cdot g(t + h, x + K_{1x}, y + K_{1y}) = 0,5 \left[-0,193(3,3 - 0,10065) + 0,008(16,5 - 0,0165)(3,3) \right] \\ &= -0,09779 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 + \left(\frac{K_{1x} + K_{2x}}{2} \right)$$

$$x_1 = 16,520885$$

$$y_1 = y_0 + \left(\frac{K_{1y} + K_{2y}}{2} \right) = 3,3 - 0,099220$$

$$y_1 = 3,200779.$$

6.2. RUNGE-KUTTA DE 4° ORDEN (M. Clásico).

$$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \left(\frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \right) \cdot h$$

Donde

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1h\right)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2h\right)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + K_3 \cdot h)$$

Iteración 1:

$$\text{Papa: } K_{1x} = f(t_0, x_0, y_0)$$

$$K_{1x} = 0,295(16,5) - 0,090(16,5)(3,3) = -0,033$$

$$\text{Rancha: } K_{1y} = g(t_0, x_0, y_0)$$

$$K_{1y} = -0,193(3,3) + 0,008(16,5)(3,3) = -0,2018$$

$$K_{2x} = f\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{K_{1x}}{2} \cdot h, y + \frac{K_{1y}}{2} \cdot h\right)$$

$$= \left[0,295 \left(16,5 - \frac{0,033 \cdot (0,5)}{2} \right) - 0,09 \cdot \left(16,5 - \frac{0,033(0,5)}{2} \right) \left(3,3 - \frac{0,2013(0,5)}{2} \right) \right]$$

$$= 0,0417$$

$$K_{2y} = g\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{K_{1x}}{2} \cdot h, y + \frac{K_{1y}}{2} \cdot h\right)$$

$$K_{2y} = \left[-0,193 \left(3,3 - \frac{0,2013(0,5)}{2}\right) + 0,008 \cdot \left(16,5 - \frac{0,033(0,5)}{2}\right) \left(3,3 - \frac{0,2013(0,5)}{2}\right)\right]$$

$$= -0,1984$$

$$K_{3x} = f\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{K_{1x}}{2} \cdot h, y + \frac{K_{1y}}{2} \cdot h\right)$$

$$K_{3x} = \left[0,295 \left(16,5 + \frac{0,0417(0,5)}{2}\right) - 0,09 \left(16,5 + \frac{0,0417(0,5)}{2}\right) \left(3,3 - \frac{0,1984(0,5)}{2}\right)\right]$$

$$= 0,040682$$

$$K_{3y} = g\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{K_{1x}}{2} \cdot h, y + \frac{K_{1y}}{2} \cdot h\right)$$

$$K_{3y} = \left[-0,193 \left(3,3 - \frac{0,1984(0,5)}{2}\right) + 0,008 \left(16,5 + \frac{0,0417(0,5)}{2}\right) \left(3,3 - \frac{0,1984(0,5)}{2}\right)\right]$$

$$= -0,198003$$

$$K_{4x} = f(t + h, x + K_{3x} \cdot h, y + K_{3y} \cdot h)$$

$$K_{4x} = \left[0,295 \left(16,5 + 0,048682(0,5)\right) - 0,09 \left(16,5 + 0,048682(0,5)\right) \left(3,3 - 0,198003(0,5)\right)\right]$$

$$= 0,114185$$

$$K_{4y} = g(t + h, x + K_{3x} \cdot h, y + K_{3y} \cdot h)$$

$$K_{4y} = \left[-0,193 \left(3,3 - 0,198003(0,5)\right) + 0,008 \left(16,5 + 0,048682(0,5)\right) \left(3,3 - 0,198003(0,5)\right)\right]$$

$$= -0,194638$$

$$X_2 = 16,5 + \left(\frac{(-0,033) + 2 \cdot 0,0417 + 2 \cdot 0,040682 + 0,114185}{6}\right) \cdot (0,5)$$

$$= 16,520996$$

$$Y_2 = 3,3 + \left(\frac{(-0,2013) + 2 \cdot (-0,1984) + 2 \cdot (-0,198003) + (-0,194638)}{6}\right) \cdot (0,5)$$

$$Y_2 = 3,2009.$$

7. Resultados Numéricos con MatLab.

7.1. Método de Runge-Kutta de 2° orden. En esta subsección resolveremos la ecuación (5.5) propuesta, por el programa MATLAB, utilizando el **método de Runge-Kutta de orden 2**.

ti	xi	yi]
0	16.5000	3.3000
0.5000	16.5306	3.2144
1.0000	16.6238	3.1319
1.5000	16.7782	3.0531
2.0000	16.9924	2.9786
2.5000	17.2651	2.9089
3.0000	17.5950	2.8446
3.5000	17.9808	2.7858
4.0000	18.4210	2.7331
4.5000	18.9140	2.6867
5.0000	19.4578	2.6470
5.5000	20.0498	2.6141
6.0000	20.6871	2.5884
6.5000	21.3657	2.5701
7.0000	22.0809	2.5595
7.5000	22.8268	2.5570
8.0000	23.5964	2.5627
8.5000	24.3811	2.5769
9.0000	25.1710	2.5999
9.5000	25.9545	2.6319
10.0000	26.7186	2.6732

Tabla 7.1.1: Muestra las 10 primeras iteraciones, con V.I. : $x_0 = 16,5$ de tubérculos & $y_0 = 3,3$ de la ranca.

240.5000	17.2786	2.8894
241.0000	17.6239	2.8257
241.5000	18.0253	2.7678
242.0000	18.4812	2.7160
242.5000	18.9899	2.6707
243.0000	19.5494	2.6321
243.5000	20.1571	2.6005
244.0000	20.8099	2.5762
244.5000	21.5036	2.5594
245.0000	22.2332	2.5505
245.5000	22.9928	2.5496
246.0000	23.7748	2.5572
246.5000	24.5704	2.5734
247.0000	25.3693	2.5985
247.5000	26.1593	2.6328
248.0000	26.9270	2.6764
248.5000	27.6574	2.7295
249.0000	28.3341	2.7920
249.5000	28.9402	2.8637
250.0000	29.4584	2.9444

Tabla 7.1.2: Muestra las iteraciones de 240 a 250 días, con las mismas valores iniciales..

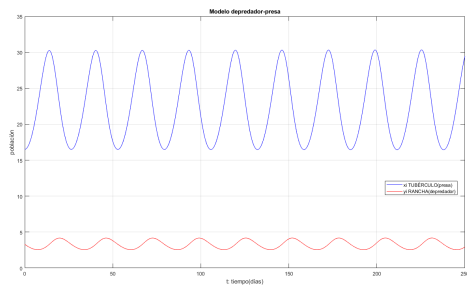


Figura 7.3: Muestra el comportamiento dinámico de la papa frente a la Rancho, respecto al tiempo(días) por método RK2.

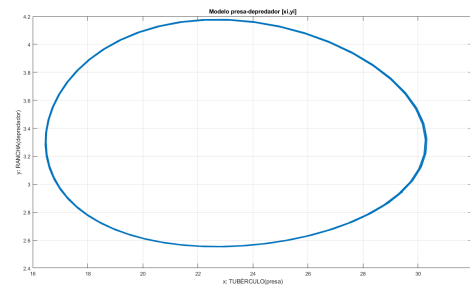


Figura 7.4: Muestra el espacio de fase de la papa frente a la Rancho con $x_0 = 16,5$, $y_0 = 3,3$, respecto al tiempo(días).

Tiempo de ejecución: 7,8710 segundos.

7.2. Método de Runge-Kutta de 4º orden. En esta subsección resolveremos la ecuación (5.5) propuesta, por el programa MATLAB, utilizando el **método de Runge-Kutta de orden 4**.

[ti	xi	yi]
0	16.5000	3.3000
0.5000	16.5303	3.2146
1.0000	16.6231	3.1321
1.5000	16.7768	3.0534
2.0000	16.9902	2.9791
2.5000	17.2619	2.9095
3.0000	17.5907	2.8451
3.5000	17.9752	2.7865
4.0000	18.4140	2.7338
4.5000	18.9055	2.6874
5.0000	19.4477	2.6476
5.5000	20.0379	2.6147
6.0000	20.6733	2.5889
6.5000	21.3500	2.5706
7.0000	22.0631	2.5599
7.5000	22.8070	2.5572
8.0000	23.5744	2.5627
8.5000	24.3571	2.5767
9.0000	25.1451	2.5994
9.5000	25.9269	2.6312
10.0000	26.6895	2.6721

Tabla : Muestra las 10 primeras iteraciones, con C.I: $x_0 = 16,5$ de tubérculo e $y_0 = 3,3$ de la rancho.

240.0000	16.8124	3.0391
240.5000	17.0369	2.9656
241.0000	17.3194	2.8970
241.5000	17.6587	2.8337
242.0000	18.0535	2.7761
242.5000	18.5024	2.7246
243.0000	19.0035	2.6794
243.5000	19.5549	2.6409
244.0000	20.1539	2.6093
244.5000	20.7974	2.5849
245.0000	21.4813	2.5680
245.5000	22.2006	2.5588
246.0000	22.9495	2.5576
246.5000	23.7205	2.5647
247.0000	24.5049	2.5803
247.5000	25.2926	2.6047
248.0000	26.0719	2.6382
248.5000	26.8294	2.6808
249.0000	27.5505	2.7327
249.5000	28.2195	2.7938
250.0000	28.8197	2.8641

Tabla : Muestra las iteraciones de 240 a 250 días, con las mismas valores iniciales.

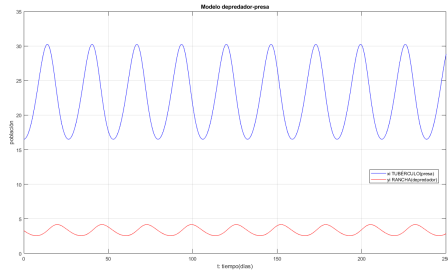


Figura 7.7: Muestra el comportamiento dinámico de la Ranca frente a la papa, respecto al tiempo(días), por método RK4

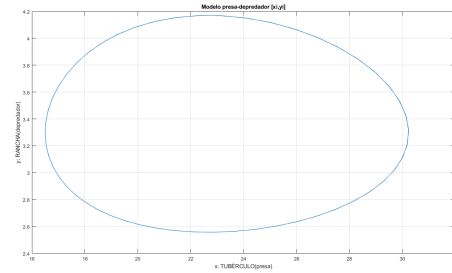


Figura 7.8: Muestra el espacio de fase de la papa frente a la Ranca con $x_0 = 16,5$, $y_0 = 3,3$, respecto al tiempo(días).

Tiempo de ejecución: 11,0522 segundos.

El siguiente gráfico muestra la estabilidad de la supervivencia de la papa frente a la ranca para diferentes valores iniciales de la ranca: $\{1,0, 2,0, 3,0, 4,0, 5,0, 6,0, 7,0\}$.

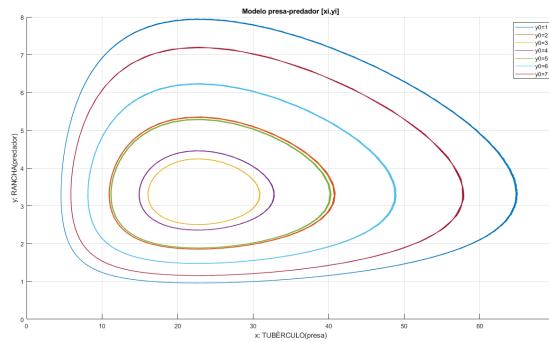


Figura 7.9: Representa la estabilidad de la interacción del tubérculo frente a la ranca, para diferentes valores iniciales de la ranca. (Elaboración propia)

El siguiente gráfico muestra la estabilidad de la supervivencia de la papa frente a la ranca para diferentes valores iniciales de la papa: $\{1,0, 1,5, 2, 2,5, 3,3, 4,0, 5,0\}$.

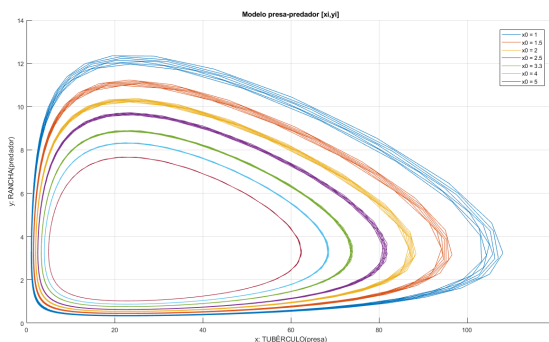


Figura 7.10: Representa la estabilidad de la interacción del tubérculo frente a la ranca, para diferentes valores iniciales de la papa. (Elaboración propia)

7.3. Conclusiones.

- Vemos de las figuras 5.1 y 5.3 que a mayor producción en kilogramos de papa es menor la afectación de la ranca; es decir, las papas más reproductivas en kilogramos son más resistentes a la ranca.

- Como podemos observar de la figura 4.1, 86 variedades de papa son medianamente susceptible a la ranca y solo 8 variedades son resistentes. Y en la figura 4.5 muestra que la Ranca ataca a las papas más harinosas (Alargado, Abovado, Oblongo, etc.).
- Observamos en la figura 5.2 la helada es directamente proporcional a la ranca; es decir, a mayor temporada de helada será afectada mucho más el tubérculo con la ranca.
- Se pudo modelar **al hongo de la ranca** $[y(t)]$ frente al **tubérculo de la planta de papa** $[x(t)]$ (5.5), además se resolvió mediante Métodos Numéricos de RK2 y RK4, así obteniendo el método que más se acerca a la solución teórica (cualitativa) es el RK4, este método tiene mayor precisión que el método RK2.
- De las figuras 7.9 y 7.10 podemos afirmar que la estabilidad se establece como ratifica la teoría.
- Esta investigación quiere recalcar la importancia de la utilización de un software matemático en el desarrollo de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, ya que, estos métodos utilizan una serie de iteraciones que dificultan hacerlos manualmente. Continuación de esta línea de investigación se estudiará incorporando **cultivos asociados**, enriqueciendo nuestro enfoque con múltiples variables para profundizar en la comprensión de los ecosistemas agrícolas y optimizar la producción de alimentos de forma sostenible.

Authors contribution. I.M. planteamiento del problema, metodología de desarrollo y coordinación del trabajo. J. R. Recolección de datos, programación y análisis de resultados

Funding. Esta investigación no recibió fondos de ninguna clase.

Conflicts of interest. Los autores declaran no tener conflicto de interés.

ORCID and License

Irla Mantilla N. <https://orcid.org/0000-0001-9392-404X>

Juan Reymundo P. <https://orcid.org/0000-0003-2530-6818>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Mafra-Neto A, Wright M, Fettig C, Progar R, Munson S, Blackford D, et al. CHAPTER 15 - Repellent semiochemical solutions to mitigate the impacts of global climate change on arthropod pests [Internet]. In: Corona C, Debboun M, Coats J, editors. Advances in Arthropod Repellents. Academic Press; 2022 [accesado julio 2023]. p. 279-322. Available from: <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-85411-5.00010-8>.
- [2] Vargas OR. Crisis alimentaria mundial y sus repercusiones en Nicaragua. Madrid, España Serie Avances de Investigación. 2010;(38):1885-913.
- [3] Ripa R, Larral P, et al. Manejo de plagas en paltos y cítricos. Colección Libros INIA-Instituto de Investigaciones Agropecuarias. 2008:42-56.
- [4] Evans CM, Findley G. Analytic solutions to the Lotka-Volterra model for sustained chemical oscillations. 1998.
- [5] May-Cen IdJ. Modelos de dinámica poblacional en ecología. Revista del Centro de Graduados e Investigación Instituto Tecnológico de Mérida. 2016;32(60):50-5.
- [6] Stef de Haan ARC Ana Taipei Palomino. Catálogo de variedades de papa nativa de Huancavelica-Perú [Internet]. International Potato Center (CIP). 2006. "[accessed 22 abril 2022]". Available from: <https://cipotato.org/wp-content/uploads/PDF/003524.pdf>.
- [7] Luis R. Estadística descriptiva. Las prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, 2017; 2017. Available from: '<https://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/ed2017.pdf>'.
- [8] Baigent S. Lotka-Volterra Dynamics-An Introduction. [Online] Available at: <http://www.ltcc.ac.uk/courses/BioMathematics.LTCC.LV2010> [Accessed 16 5 2022].
- [9] Cano Cancela A. Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional. 2011.
- [10] Bruce P, Bruce A, Gedeck P. Estadística práctica para ciencia de datos con R y Python. Marcombo; 2022.
- [11] VanderPlas J. Python data science handbook: Essential tools for working with data. O'Reilly Media, Inc.; 2016.

- [12] Tukey JW, et al. Exploratory data analysis. vol. 2. Reading, MA; 1977.
- [13] Juan Antonio CV. Introducción al Machine Learning[Internet]. 2022[Consultado agosto 2023]. Available from: <https://github.com/gcoronelc/CTIC-CIENCIA-DE-DATOS-MOD-01-2022A>.