



REVIEW

Well-Possednes of a predator-prey reaction-diffusion model with functional response dependent on species

Buena colocación de un modelo depredador-presa con reacción-difusión y respuesta funcional dependiente de las especies

Neisser Pino Romero 

Received, Dec. 21, 2023;

Accepted, Jun. 03, 2024;

Published, Jul. 29, 2024



How to cite this article:

Pino Romero, N. *Well-Possednes of a predator-prey reaction-diffusion model with functional response dependent on species*. *Selecciones Matemáticas*. 2024;11(1):88–103. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.01.07>

Abstract

In this work, well-possednes of a predator-prey model with reaction-diffusion will be studied, where the Allee effect in the reproduction of the prey will be included, and predation dynamics through a functional response dependent on the species (prey and predator). In addition, a refuge strategy for the dam will be incorporated. In this way, the existence, uniqueness and positivity of the system's solutions as the main result will be guaranteed.

Keywords . Lotka-Volterra model, well-Possedness of the problem, reaction-Diffusion equation, semigroup Theory.

Resumen

En este trabajo se estudiará la buena colocación de un modelo depredador-presa con reacción-difusión donde se incluirá el efecto Allee en la reproducción de la presa, y una dinámica de depredación mediante una respuesta funcional dependiente de las especies (presa y depredador), además, se incorporará una estrategia de refugio para la presa. De esta manera se garantizará la existencia, unicidad y la positividad de las soluciones del sistema como resultado principal.

Palabras clave. Modelo Lotka-Volterra; buena colocación del problema; ecuación reacción-Difusión; teoría de semigrupos.

1. Introducción. Los ecosistemas siempre se mantienen en un constante dinamismo con respecto a su interacción entre las especies. Una de las ecuaciones más elementales que ayuda a modelar esta dinámica, es la de Lotka-Volterra. Donde existe una interacción interespecífica entre una especie depredadora y una especie presa [1]. Desde un inicio, se comenzó a modelar solamente incluyendo el tiempo [2]; pero comenzó a ser objeto de estudio la difusión de las poblaciones en el espacio. Esta consideración hace que se pase de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) a las ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú. **Autor de Correspondencia:** (neisser.pino@unmsm.edu.pe).

Es importante considerar hipótesis ecológicas para preservar la supervivencia de las especies mediante alguna intervención externa o una actividad interna que ayude a este fin. Por ejemplo, en Lazaar et al. [3] se estudia la incorporación del refugio para la presa, permitiendo un accionar instintivo de supervivencia que logra reducir la depredación por la otra especie [4]. Y con respecto al accionar de la depredación siempre obedecerá a alguna de las respuestas funcionales que permitan considerar algunas características propias de los depredadores hacia las presas, como también una acción de defensa ante de la depredación de las presas por sus depredadores [5].

Por el lado matemático, al proponer un modelo matemático aplicado a la ecología se debe garantizar formalidades necesarias como son la existencia, unicidad de las soluciones del problema, más aún, la positividad de las soluciones debido que el modelo matemático lo requiere como una exigencia justificada. Por consiguiente, cuando se plantea un modelo debe mencionarse las hipótesis consideradas para abordar la problemática ecológica [6].

2. Modelo Matemático sin Difusión. En la presente sección enunciaremos las hipótesis necesarias para la formulación del modelo matemático. El modelo propuesto está basado en el trabajo de Lazaar et al. [3] donde realizó la propuesta de la incorporación del refugio para la presa. Esta consideración está inspirada en la respuesta instintiva de la presa para protegerse ante la caza de su depredador [4].

En el presente modelo se considera una reproducción logística con efecto Allee para la presa donde permitirá obtener una población máxima como también considerar una población mínima ante la ausencia del depredador [4]. Y con respecto a la dinámica de la depredación también se considera la incorporación del refugio en la presa dentro de la respuesta funcional dependiente de ambas especies [7]. Esta consideración pondría una dinámica de control ante la depredación de la presa sino también un acto especializado de parte del depredador para mantener su densidad poblacional sin exponer a la extinción a su presa [8]. Con respecto a la población del depredador se ha considerado su beneficio ante la depredación como también su mortalidad natural; pero se ha añadido una tasa de competencia por la captura de la presa. Esta consideración se aplica en la dinámica misma de competencia tanto la presa por su alimento como la del depredador por su alimento (presa) [3].

Para el modelo consideraremos los siguientes parámetros donde todos son constantes positivas, r como la tasa de reproducción de la presa, B_1, B_2 son la capacidades de carga máxima y mínima respectivamente, y con la condición ($B_1 > B_2$). La tasa de depredación (α), el coeficiente de refugio efectivo (m) donde se encuentra entre los valores $0 < m < 1$, y la constante de saturación (β) en conjunto con la constante de saturación en el depredador (θ). Además, se tiene la constante k como la proporción del beneficio por la depredación. Finalmente, se tiene la tasa de mortalidad natural (c) y la tasa de competencia entre la misma especie depredadora (d). Hay que recordar que las tasas se encontrarán normalizadas, es decir, valores entre cero y uno. Las variables son $u(t)$ y $v(t)$ que representan las poblaciones ecológicas en el tiempo. [3, 6].

Se ha realizado una perturbación del modelo presentado por Lazaar et al. [3], donde se propone la incorporación del efecto Allee para abordar como afecta en la reproducción de la presa, además que en la respuesta funcional considerada se incluye el término del depredador donde inicialmente solo estaba el término de la presa. Por último, se introduce una diferenciación entre la mortalidad natural y la mortalidad por la competencia entre los mismos depredadores [7].

De esta manera, presentamos el modelo matemático:

$$\begin{cases} G_1(u, v) = \frac{du}{dt} = ru(B_1 - u)(u - B_2) - \frac{\alpha(1-m)^2 u^2 v}{\beta^2 + (1-m)^2 u^2 + \theta v^2}, \\ G_2(u, v) = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha k(1-m)^2 u^2 v}{\beta^2 + (1-m)^2 u^2 + \theta v^2} - cv - dv^2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Del sistema (2.1) se puede analizar la existencia, la unicidad y la positividad de sus soluciones mediante diversas metodologías de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Donde enunciaremos dos teoremas correspondientes para obtener estos resultados. ver [6].

Teorema 2.1. *Sea la función $G : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, donde $G(z) = (G_1(z), G_2(z))$ con $z = (u, v)$ son funciones continuas y existen $\frac{\partial G_j}{\partial z_j}$ continuas en $\mathbb{R}_+^2 \forall j = \overline{1; 2}$. Entonces, la función G es localmente Lipschitz continua en \mathbb{R}_+^2 . Ver [6].*

Teorema 2.2. *Sea $G : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ localmente lipschitz continua $\forall j = \overline{1; 2}$ y satisfice $G_j(z) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}_+^2, x_j = 0$. Entonces para cada $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$, existe una única solución de $z' = G(z)$ con $z(0) = z_0$ en \mathbb{R}_+^2 donde está definida en algún intervalo $(0; b]$ con $b \in (0; +\infty]$. Ver [6].*

De esta forma, tenemos los resultados de la existencia, unicidad y positividad de las soluciones del sistema (2.1) mediante los teoremas 2.1 y 2.2. Ahora, comentaremos brevemente el análisis cualitativo del sistema donde obtendremos sus puntos estacionarios para bosquejar su estabilidad [6]. Al igualar a cero cada ecuación del sistema (2.1), se obtiene cuatro puntos de equilibrio. Tres puntos de equilibrio de manera explícita, y un punto de equilibrio (Punto de coexistencia) se expresará de manera arbitraria.

$$\begin{cases} x_1 = (0; 0) & x_2 = (B_1; 0), \\ x_3 = (B_2; 0) & x_4 = (u^*; v^*). \end{cases} \tag{2.2}$$

En la ecuación (2.2), se obtiene cuatros puntos de equilibrio, donde $x_1 = (0; 0)$ es el punto de extinción total, $x_2 = (A; 0)$ es el punto de supervivencia máxima de la presa ante la ausencia del depredador y $x_3 = (B; 0)$ es el punto de supervivencia mínima de la presa ante la ausencia del depredador. Finalmente el $x_4 = (u^*; v^*)$ es el punto de coexistencia de las dos especies (presa y depredador) y es donde se mantiene el equilibrio ecológico (donde se busca conseguir siempre este escenario para conservar el ecosistema propuesto) [4]. De esta manera, presentamos los cuatro posibles escenarios en el estado estacionario asociado al modelo expresado en (2.1).

- Extinción Total (x_1) : Existencia trivial
- Supervivencia de la presa Máxima (x_2) : Existencia trivial
- Supervivencia de la presa Mínima (x_3) : Existencia trivial
- Coexistencia Total (x_4) : Existe si, $u^* > 0, v^* > 0$.

Después de haber presentado los puntos de equilibrio. Procederemos a realizar las simulaciones computacionales para bosquejar su evolución en sus respectivo dominio. Esto ayudará a visualizar la dinámica del del modelo matemático depredador-presa [6]. Presentaremos los valores de las tasas ecológicas basada en [3] y [6], donde algunos de estos parámetros se ha asumido para bosquejar la dinámica de las dos especies en el tiempo.

$r = 0,05$	$B_1 = 4,50$	$B_2 = 1,20$	$\alpha = 0,60$	$m = 0,60$	$\beta = 1$
$\theta = 0,25$	$k = 0,65$	$d = 0,15$	$c = 0,04$	$u(0) = 1,50$	$v(0) = 0,40$

Al realizar el análisis del estado estacionario del modelo matemático se obtiene 6 puntos de equilibrio (reales), y 6 puntos de equilibrio (complejos con sus conjugadas). En este sentido, nos quedaremos con los puntos de equilibrio reales por estar modelando poblaciones ecológicas. Pero de estos 6 puntos, descartaremos un punto por tener una coordenada negativa. Por consiguiente, se ha obtenido 5 puntos de equilibrios asociados a nuestro modelo [3, 8]. Donde la clasificación ecológica sería la siguiente: un punto de extinción total (x_1), dos puntos de supervivencia de la presa (x_2) y (x_3), dos puntos de coexistencia (x_4) y (x_5) [6].

$$x_1 = (0; 0) \quad ; \quad x_2 = (1,20; 0) \quad ; \quad x_3 = (4,50; 0) \quad ; \quad x_4 = (2,94; 1,19) \quad ; \quad x_5 = (1,48; 0,40) .$$

2.1. Simulación Computacional. Con los valores de los parámetros y la condición inicial (Poblaciones iniciales) se puede determinar la evolución temporal de las dos especies. Además, presentaremos el plano fase de la simulación [7, 6]. De esta manera, podremos analizar la evolución temporal de cada población ecológica, y visualizar si tiene un punto umbral de crecimiento, y también corroborar el valor estacionario de ambas especies de acuerdo al análisis cualitativo [6].

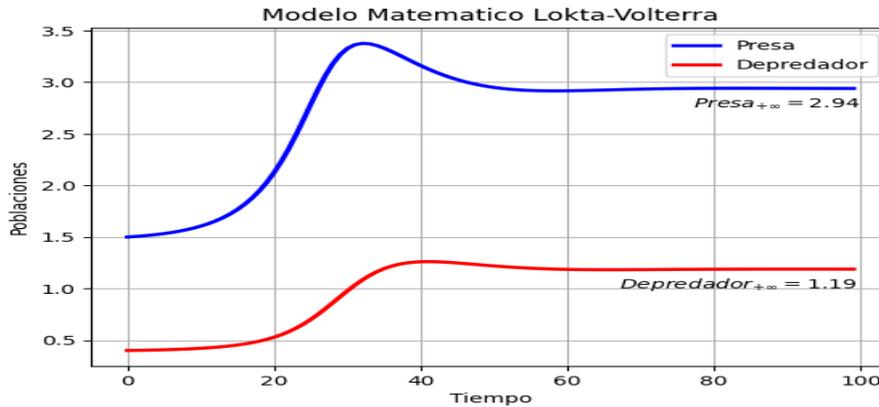


Figura 2.1: Simulación Computacional del Modelo Depredador-Presa en el tiempo.

De la figura 2.1, se puede apreciar un crecimiento de ambas especies hasta llegar un umbral donde después empiezan a decrecer hasta llegar a un estado estacionario en el largo plazo. Del modelo (2.1), se tiene considerado el coeficiente de refugio para la presa que permite mantener una densidad poblacional mayor a la de los depredadores que permite una coexistencia entre ambos sin bajar mucho su población. Ahora, presentaremos la simulación de su plano fase asociado para abordar su relación entre las dos especies. Donde se incluyen los puntos de equilibrio asociados al modelo matemático [4]. La simulación también nos permite abordar escenarios donde los puntos de equilibrios en el estado estacionario (largo plazo) se muestran mediante la simulación en el tiempo considerado.

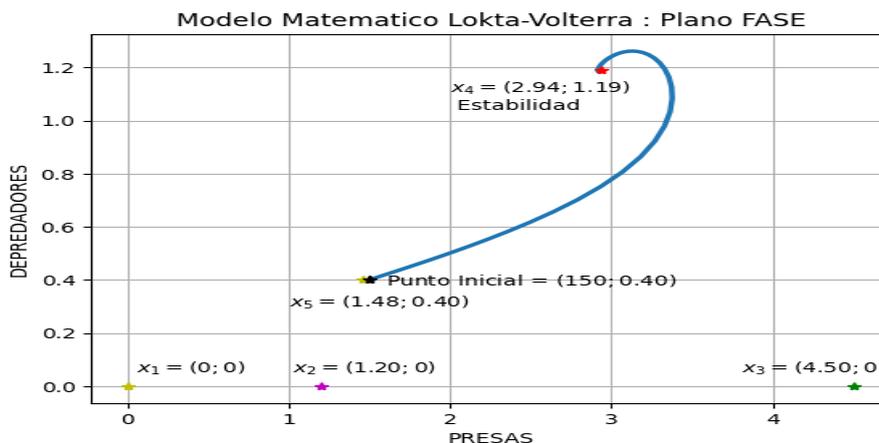


Figura 2.2: Simulación Computacional del Modelo Depredador-Presa: Plano Fase.

En las figuras 2.1 y 2.2 se presentan las simulaciones computacionales del modelo matemático sin difusión. Donde el modelo llega a estabilizarse en el punto de equilibrio de coexistencia (x_4). Pero en el inicio de la evolución ambas especies crecen hasta llegar a

un umbral para luego descender y estabilizarse. Esta consideración se debe al efecto allee donde la presa tiene un intervalo para crecer y tender a estabilizarse en el tiempo, por mientras que el depredador sigue su caza a la presa pero mantiene la densidad para seguir depredando sin extinguir a su presa como tampoco su propia especie ante la competencia por la presa [1, 7, 4]. Además, se ve un comportamiento suave que tiende a estabilizarse en el tiempo donde la coexistencia se obtiene. Esto ayuda a una convivencia entre las dos especies sin considerar alguna alteración de este equilibrio biológico.

3. Modelo Matemático con Difusión-Reacción. En la sección 2 se presentó el modelo matemático sin difusión (EDO) donde solamente las poblaciones ecológicas dependen del tiempo. Además, que se realizó la simulación computacional del modelo para visualizar el comportamiento de las poblaciones ecológicas en el tiempo.

Una natural extensión del modelo (2.1) es la consideración de la variable espacial que significa el movimiento en el espacio a través del tiempo. En este sentido, ahora presentaremos el modelo con difusión (tiempo-espacio) para analizar su buena colocación del sistema (EDP). Recordando que los parámetros utilizados en el sistema (2.1) serán los mismos para nuestro sistema difusión-reacción con la incorporación del término difusivo y la condición de frontera [3].

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - D_1 \Delta u = ru(B_1 - u)(u - B_2) - \frac{\alpha(1-m)^2 u^2 v}{\beta^2 + (1-m)^2 u^2 + \theta v^2} \\ \frac{dv}{dt} - D_2 \Delta v = \frac{\alpha k(1-m)^2 u^2 v}{\beta^2 + (1-m)^2 u^2 + \theta v^2} - cv - dv^2 \end{cases} \quad \text{en } Q_T, \quad (3.1)$$

donde $Q_T = [0, T] \times \Omega$, y con la condición de frontera Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma_T, \quad (3.2)$$

donde $\Gamma_T = [0, T] \times \partial\Omega$, y la condición inicial

$$u(0, x) = u_o(x) \quad , \quad v(0, x) = v_o(x) \quad \text{en } x \in \Omega . \quad (3.3)$$

Las funciones u, v representan las densidades de las poblaciones ecológicas, y están definidas en $[0; T] \times \Omega$ con los valores $u(t, x), v(t, x) \in \mathbb{R}$. Además, Ω es un conjunto abierto, acotado no vacío de \mathbb{R}^2 con la condición de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\sigma}$ ($\sigma > 0$), y $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Además, asumimos que tanto u_o como v_o son funciones suaves no negativas y acotadas. [1]. Por lo cual, demostraremos que el sistema (3.1)-(3.3) posee una solución global fuerte, donde también complementaremos con una simulación numérica mediante diferencias finitas [3]. En el presente trabajo, no se realizará el análisis cualitativo del sistema espacio-temporal donde se estudiaría los puntos de equilibrio.

3.1. Existencia de una Solución Global Fuerte. Para analizar la existencia de la solución del sistema (3.1)-(3.3), consideramos el espacio de Hilbert $H = [L^2(\Omega)]^2$. Procedemos a escribir el problema de Cauchy Abstracto equivalente al sistema (3.1). Y consideramos el operador lineal

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} -D_1 \Delta & 0 \\ 0 & -D_2 \Delta \end{bmatrix},$$

con

$$D(A) = \left\{ (u, v) \in [L^2(\Omega)]^2 \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \right\}$$

y sea $h(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$, con las funciones

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= ru(B_1 - u)(u - B_2) - \frac{\alpha(1-m)^2 u^2 v}{\beta^2 + (1-m)^2 u^2 + \theta v^2}, \\ f_2(u, v) &= \frac{\alpha k(1-m)^2 u^2 v}{\beta^2 + (1-m)^2 u^2 + \theta v^2} - cv - dv^2. \end{aligned}$$

Entonces, el sistema (3.1) puede ser expresado como un problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = h(U(t)) & \text{en } Q_T \\ U(0) = U_o \end{cases} \quad (3.4)$$

Donde $U = (u, v)^T \in H$. En primer lugar, debemos recordar un resultado general sobre la existencia de soluciones débiles y fuertes utilizadas por Lazaar et al. [3] y Pazy [9]. Por lo cual, consideramos el problema semilineal de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = F(t, U(t)) & \text{en } Q_T \\ U(0) = U_o \end{cases} \quad (3.5)$$

Donde $-A$ es un generador infinitesimal de $C_0 - \text{Semigrupo } \{S(t)\}_{t \geq 0}$ en el espacio X de Banach, y $F : [0, T] \times X \rightarrow X$. Ahora, enunciaremos el Teorema 3.1 que contiene los resultados necesarios para el objetivo de este trabajo.

Teorema 3.1. *Asumimos que el operador $-A$ es un generador infinitesimal de $C_0 - \text{Semigrupo } \{S(t)\}_{t \geq 0}$ en el espacio X de Banach. Ver [3, 9].*

(i) Si $F(\cdot, \xi)$ es medible, y $F(t, \cdot)$ es Lipschitz continua, uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$. Entonces, para $U_o \in X$, el problema (3.5) tiene una única solución débil $U \in C([0, T], X)$, y U está dado por

$$U(t) = S(t)U_o + \int_0^t S(t-s)F(s, U(s))ds \quad \text{para } t \in [0; T].$$

(ii) Supongamos que $T = +\infty$. Si $F(\cdot, \xi)$ es continua y $F(t, \cdot)$ es localmente Lipschitz continua, uniformemente en t en intervalos acotados. Entonces para cada $U_o \in X$, el problema (3.5) admite un $t_{\text{máx}} \leq T$ tal que para $[0, T)$, el problema (3.5) tiene una solución débil U definida en $[0, t_{\text{máx}})$. Más aún, si $t_{\text{máx}} < +\infty$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_{\text{máx}}} \|U(t)\| = \infty.$$

(iii) Supongamos que X es un espacio de Banach reflexivo. Si $F(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz continua en $[0, T] \times X$ y $U_o \in D(A)$, entonces la anterior solución débil, U es una solución fuerte de (3.5), y

$$U \in W^{1,2}(0, T, X) \cap L^2(0, T, D(A)).$$

(iv) Ahora, asumimos que $F(t, \cdot)$ es solo localmente continua Lipschitz en X , uniformemente para $0 \leq t \leq T$, entonces para cada $U_o \in D(A)$, el problema (3.5) tiene una solución única y fuerte U definida en un intervalo maximal $[0, t_{\text{máx}})$. Más aún, si $t_{\text{máx}} \leq T$,

$$\lim_{t \rightarrow t_{\text{máx}}} \|U(t)\| = \infty.$$

Como lo indica Lazaar et al. [3], el Teorema 3.1 no se puede aplicar directamente debido al término de la reproducción de la presa (efecto Allee), debido que la función h no es Lipschitz continua. Por consiguiente, se utilizará el método del truncamiento para solucionar nuestro problema y además justificar la positividad de las soluciones [1, 9].

Lema 3.1. *Consideramos $Q_T = [0, T) \times \Omega$ y $\Gamma_T = [0, T) \times \partial\Omega$, donde $T \leq +\infty$ es el tiempo final fijo. Si $z^0 \in H^2(\Omega)$, $z^0 > 0$, y $\frac{\partial z^0}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$, entonces el problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z + z & , (t, x) \in Q_T \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & , (t, x) \in \Gamma_T \\ z(0, x) = z^0(x) & , x \in \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

tiene una solución fuerte

$$z \in W^{1,2} (0, T, L^2 (\Omega)) \cap L^2 (0, T, H^2 (\Omega)) \cap L^\infty (0, T, H^1 (\Omega)) .$$

Más aún, $z > 0$ en Q_T , y $z \in L^\infty (Q_T)$. Ver prueba en [3].

Teorema 3.2. Para $Q_T = [0, T) \times \Omega$ donde $T \leq +\infty$ es un tiempo final fijo. Supongamos $U^0 = (u^0, v^0) \in D(A)$, $u^0, v^0 > 0$ en Ω , y $\frac{\partial u^0}{\partial \nu} = \frac{\partial v^0}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces (3.1)-(3.3) tiene una solución única y fuerte

$$U = (u, v) \in W^{1,2} (0, T, [L^2 (\Omega)]^2) \cap L^2 (0, T, D(A)) ,$$

que es positivo. Además,

$$u, v \in L^\infty (0, T, H^1 (\Omega)) \cap L^\infty (Q_T) .$$

Demostración: La demostración del Teorema, se realizará mediante los resultados de cuatro lemas. La secuencia de la demostración se sigue como en Lazaar et al. [3].

Para un entero fijo $N > 0$, consideramos los problemas de valores iniciales truncados:

$$\begin{cases} U_t^N(t) + AU^N(t) = h^N (U^N(t)) & t \in [0, T] \\ U^N(0) = U^0 \end{cases} \tag{3.7}$$

donde

$$h^N (U^N(t)) = (f_1^N (U^N) , f_2^N (U^N)) ,$$

para cada índice $i \in \{1, 2\}$, y f_i^N está definida de la siguiente manera $f_i^N (U) = f_i ([u], [v])$, para todo $U = (u, v)$, y donde

$$[u] = \begin{cases} N & , u > N \\ u & , |u| \leq N \\ -N & , u < -N, \end{cases} \quad , \quad [v] = \begin{cases} N & , v > N \\ v & , |v| \leq N \\ -N & , v < -N. \end{cases}$$

Donde las funciones h, h^N son autónomas, pero debemos recordar que h no es la lipschitz continua, por mientras h^N es Lipschitz continua. Por consiguiente, debido al Teorema 3.1, el problema (3.7) admite una única solución fuerte.

$$U^N = (u^N, v^N)^T \in W^{1,2} (0, T, [L^2 (\Omega)]^2) \cap L^2 (0, T, D(A)) .$$

□

Lema 3.2. Las funciones u^N, v^N son acotadas en $L^\infty (Q_T)$.

Demostración: Consideramos lo siguiente

$$J_N = \max \left\{ \|f_1^N\|_{L^\infty(Q_T)} , \|f_2^N\|_{L^\infty(Q_T)} , \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} , \|v^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

y

$$\delta^N = u^N - J_N t - \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{en } Q_T .$$

La función δ^N satisface el problema de frontera y valor inicial auxiliar

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta^N}{\partial t} = D_1 \Delta u^N + f_1^N (u^N, v^N) - J_N & , (t, x) \in Q_T \\ \frac{\partial \delta^N}{\partial \nu} = 0 & , (t, x) \in \Gamma_T . \\ \delta^N(0, x) = u^0(x) - \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} & , x \in \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

Por el Teorema 3.1, la solución fuerte de (3.8) se expresa de la siguiente manera:

$$\delta^N(t, x) = D_1 S(t) \left(u^0(x) - \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) + \int_0^t S(t-s) [f_1^N(u^N(s, x), v^N(s, x)) - J_N] ds,$$

con $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0 - semigrupo generado por Δ . Además que el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es positivo, se tiene

$$u^0(x) - \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0 \quad y \quad f_1^N(u^N(s, x), v^N(s, x)) - J_N \leq 0.$$

Entonces, por el Principio de Comparación [3], se obtiene

$$\delta^N(t, x) \leq 0 \quad \forall(t, x) \in Q_T. \tag{3.9}$$

Por lo tanto, se demuestra que $\delta^N(t, x)$ es negativo. De manera similar, definimos

$$\rho^N = u^N + J_N t + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad en \quad Q_T.$$

Notamos que ρ^N satisface el problema de frontera y valor inicial auxiliar de la ecuación (3.8), y por el Teorema 3.1, la solución fuerte de (3.8) se escribe de la siguiente manera:

$$\rho^N(t, x) = S(t) \left(u^0(x) + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) + \int_0^t S(t-s) [f_1^N(u^N(s, x), v^N(s, x)) - J_N] ds,$$

con $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0 - semigrupo generado por Δ . Al notar que el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es positivo, se tiene

$$u^0(x) + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 0 \quad y \quad f_1^N(u^N(s, x), v^N(s, x)) + J_N \geq 0.$$

Entonces, por el Principio de Comparación [3], se obtiene

$$\rho^N(t, x) \geq 0 \quad \forall(t, x) \in Q_T. \tag{3.10}$$

Por lo tanto, se demuestra que $\rho^N(t, x)$ es no negativo. Por consiguiente, de las ecuaciones (3.9) y (3.10) se obtiene el siguiente resultado

$$|u^N(t, x)| \leq J_N t + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall(t, x) \in Q_T. \tag{3.11}$$

Por consiguiente, obtenemos $u^N \in L^\infty(Q_T)$. Luego, de manera similar que se hizo para u^N , se obtiene para $v^N \in L^\infty(Q_T)$. Más aún, se cumple

$$|v^N(t, x)| \leq J_N t + \|v^0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall(t, x) \in Q_T. \tag{3.12}$$

□

Lema 3.3. Las funciones $u^N, v^N \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$.

Demostración: De la primera ecuación del sistema (3.8), tenemos

$$u_t^N - D_1 \Delta u^N = f_1^N(u^N, v^N)$$

Elevamos al cuadrado ambos lados e integrando sobre Ω , y de 0 hasta t . Reduciendo términos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega |u_t^N|^2 dx ds - 2D_1 \int_0^t \int_\Omega |u_t^N \Delta u^N|^2 dx ds + D_1^2 \int_0^t \int_\Omega |\Delta u^N|^2 dx ds \\ &= \int_0^t \int_\Omega |f_1^N(u^N, v^N)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la regularidad de u^N , y la Fórmula de Green. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^N|^2 dx ds + D_1^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta u^N|^2 dx ds + D_1 \int_{\Omega} |\nabla u^N|^2 dx \\ &= D_1 \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |f_1^N(u^N, v^N)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Como f_1^N es Lipschitz, entonces obtenemos

$$D_1 \int_{\Omega} |\nabla u^N|^2 dx \leq D_1 \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx + C_u^N \int_0^t \int_{\Omega} |u^N(t, x)|^2 dx ds,$$

donde C_u^N es una constante que depende de N . Por la regularidad de u^0 , y el hecho que $u^N \in L^\infty(Q_T)$, permite deducir lo siguiente: $u^N \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$. Siguiendo el mismo argumento, formando un sistema auxiliar para v_t^N y la función f_2^N como el sistema (3.8), de esta forma obtenemos el siguiente sistema: $v_t^N - D_2 \Delta v^N = f_2^N(u^N, v^N)$. Luego,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} |v_t^N|^2 dx ds + D_2^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta v^N|^2 dx ds + D_2 \int_{\Omega} |\nabla v^N|^2 dx \\ &= D_2 \int_{\Omega} |\nabla v^0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |f_2^N(u^N, v^N)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Como f_2^N es Lipschitz, entonces obtenemos

$$D_2 \int_{\Omega} |\nabla v^N|^2 dx \leq D_2 \int_{\Omega} |\nabla v^0|^2 dx + C_v^N \int_0^t \int_{\Omega} |v^N(t, x)|^2 dx ds,$$

donde C_v^N es una constante que depende de N . Por la regularidad de v^0 , y el hecho que $v^N \in L^\infty(Q_T)$, permite deducir lo siguiente: $v^N \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$. □

Lema 3.4. Las funciones u^N, v^N son positivas en Q_T .

Demostración: Consideramos el problema con valor en la frontera con respecto a u^N

$$\begin{cases} \frac{\partial u^N}{\partial t} = D_1 \Delta u^N + f_1^N(u^N) & , \text{ en } Q_T \\ \frac{\partial v^N}{\partial t} = D_2 \Delta v^N + f_2^N(v^N) & , \text{ en } Q_T \\ \frac{\partial u^N}{\partial \nu} = 0 \quad \frac{\partial v^N}{\partial \nu} = 0 & , \text{ en } \Gamma_T \\ u^N(0, x) = u^0(x) & , \quad x \in \Omega \\ v^N(0, x) = v^0(x) & , \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

Se puede notar la acotación que posee f_1^N en Q_T . Por lo siguiente definiremos lo siguiente

$$u^N = (u^N)^+ - (u^N)^-$$

donde $(u^N)^+ = \max\{u^N(t, x); 0\}$ es la parte positiva de u^N , y también $(u^N)^- = -\min\{u^N(t, x); 0\}$ es la parte negativa de u^N . Ahora, multiplicando la primera ecuación de (3.13) en ambos lados por $(u^N)^-(t, x)$, se obtiene

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} (u^N)^- = D_1 \Delta u^N (u^N)^- + f_1^N(u^N) (u^N)^-$$

Así, tenemos

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} (u^N)^- = D_1 \Delta u^N (u^N)^- + \left[r u^N (B_1 - u^N) (u^N - B_2) - \frac{\alpha(1-m)^2 (u^N)^2 v^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} \right] (u^N).$$

Luego, integramos, y usando la fórmula de Green con la condición de frontera de Neumann de u^N , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |(u^N)^-|^2 dx &= -D_1 \int_{\Omega} |\nabla (u^N)^-|^2 dx + \int_{\Omega} r |(u^N)^-|^2 (A - u^N) (u^N - B) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} |(u^N)^-|^2 \left(\frac{\alpha(1-m)^2 u^N v^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Ahora, integrando sobre $[0, t]$, y teniendo en consideración la acotación uniforme de u^N, v^N , y observando que $(u^0)^- = 0$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |(u^N)^-|^2 dx + D_1 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla (u^N)^-|^2 dx ds \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} |(u^N)^-|^2 \left(r (B_1 - u^N) (u^N - B_2) - \frac{\alpha(1-m)^2 u^N v^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} \right) dx ds. \end{aligned}$$

Analizando la siguiente función

$$p(u^N) = r \left(- (u^N)^2 + (B_1 + B_2) u^N - B_1 B_2 \right).$$

Donde está definido entre $(0, B_1)$. De esta forma, $p(u^N)$ como es una función cuadrática negativa, posee un coeficiente máximo. Es decir, la función $p(u^N)$ está acotada. Por consiguiente, obtenemos la existencia de una constante $C_1^N > 0$, y depende de N , donde

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |(u^N)^- (t)|^2 dx \leq C_1^N \int_0^t \int_{\Omega} |(u^N)^- (s)|^2 dx ds. \tag{3.14}$$

Según el lema de Gronwall, de la ecuación (3.14) deducimos que

$$\int_{\Omega} |(u^N)^- (t)|^2 dx \leq 0 \quad t \in [0, T].$$

En consecuencia, $(u^N)^- (t) = 0 \quad t \in [0, T]$. De este modo, $u^N \geq 0$ en Q_T ; desde que $u_0 > 0$, podemos asegurar que $u^N > 0$ en Q_T .

De manera similar como se realizó para la primera ecuación (3.13), multiplicamos ambos lados por $(v^N)^- (t, x)$ a la segunda ecuación (3.13), se tiene

$$\frac{\partial v^N}{\partial t} (v^N)^- = D_2 \Delta v^N (v^N)^- + f_2^N (v^N) (v^N).$$

Así, tenemos

$$\frac{\partial v^N}{\partial t} (v^N)^- = D_2 \Delta v^N (v^N)^- + \left(\frac{\alpha k(1-m)^2 (u^N)^2 v^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} - c v^N - d (v^N)^2 \right) (v^N)^-.$$

Luego, integramos, y usando la fórmula de Green con la condición de frontera de Neumann de u^N , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |(v^N)^-|^2 dx &= -D_2 \int_{\Omega} |\nabla (v^N)^-|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} |(v^N)^-|^2 \left(\frac{\alpha k(1-m)^2 u^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} - c - dv^N \right) dx. \end{aligned}$$

Ahora, integrando sobre $[0, t]$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |(v^N)^-|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(v^0)^-|^2 dx + D_2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla (v^N)^-|^2 dx ds \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} |(v^N)^-|^2 \left(\frac{\alpha(1-m)^2 u^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} - c - dv^N \right) dx ds. \end{aligned}$$

Teniendo en consideración la acotación uniforme de u^N, v^N , y observando que $(v^0)^- = 0$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |(v^N)^-|^2 dx + D_2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla (v^N)^-|^2 dx ds \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} |(v^N)^-|^2 \left(\frac{\alpha(1-m)^2 u^N}{\beta^2 + (1-m)^2 (u^N)^2 + \theta (v^N)^2} - c - dv^N \right) dx ds. \end{aligned}$$

Obtenemos la existencia de una constante $C_2^N > 0$, y depende de N , donde

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |(v^N)^-(t)|^2 dx \leq C_2^N \int_0^t \int_{\Omega} |(v^N)^-(s)|^2 dx ds. \quad (3.15)$$

Según el lema de Gronwall, de la ecuación (3.15) deducimos que

$$\int_{\Omega} |(v^N)^-(t)|^2 dx \leq 0 \quad t \in [0, T].$$

En consecuencia, $(v^N)^-(t) = 0 \quad t \in [0, T]$. De este modo, $v^N \geq 0$ en Q_T . Desde que $v_0 > 0$, podemos asegurar que $v^N > 0$ en Q_T . \square

Ahora, escogeremos un N lo suficientemente grande tal que,

$$N > 2 \sup \left\{ \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}.$$

Entonces, existe un $\psi \in (0, T)$ tal que

$$J_N(\psi) + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{N}{2} \quad y \quad J_N(\psi) + \|v^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{N}{2}. \quad (3.16)$$

Asumiendo que ψ sea un maximal con la propiedad (3.15), se puede deducir de (3.11) y (3.12)

$$|u^N(t, x)| \leq N \quad y \quad |v^N(t, x)| \leq N \quad \text{en } (0, \psi) \times \Omega.$$

De acuerdo a la definición de $f_i^N(U^N(t, x))$ se puede seguir de la siguiente manera

$$f_i^N(U^N(t, x)) = f_i(U(t, x)) \quad \text{para } (t, x) \in (0, \psi) \times \Omega.$$

De este hecho, obtenemos como resultado que $U = (u, v)$ es una solución local positiva de (3.1)-(3.3) definido en $(0, \psi) \times \Omega$. Ahora, podemos asegurar que

$$\|u\|_{L^\infty(0,\psi)} \leq M \quad y \quad \|v\|_{L^\infty(0,\psi)} \leq M,$$

para alguna constante $M > 0$, lo que implica que (u, v) es una solución global en Q_T para el problema (3.1)-(3.3). Por la comparación de soluciones, siguiendo los problemas de frontera con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta u + f_1(u, v) & , \quad (t, x) \in (0, \psi) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \quad (t, x) \in (0, \psi) \times \partial \Omega , \\ u(0, x) = u^0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z + z & , \quad (t, x) \in Q_T \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & , \quad (t, x) \in \Gamma_T . \\ z(0, x) = z^0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (3.18)$$

Donde tenemos lo siguiente,

$$0 < u(t, x) \leq z(t, x) \quad (t, x) \in (0, \psi) \times \Omega.$$

Del Lema 3.1, tenemos la existencia de una constante positiva K independiente de N , de tal manera que obtenemos $\|u\|_{L^\infty((0,\rho) \times \Omega)} \leq K_u$. Por consiguiente, se puede deducir lo siguiente $u \in L^\infty(\Omega \times (0, \mu))$. De manera similar que se desarrolló para u , se puede obtener la acotación uniforme de v . Es decir, se obtiene lo siguiente $\|u\|_{L^\infty((0,\rho) \times \Omega)} \leq K_v$. Por consiguiente, se puede deducir lo siguiente $v \in L^\infty(\Omega \times (0, \mu))$. Finalmente, se puede concluir, $U = (u, v)$ es una solución global fuerte del sistema (3.1)-(3.3) definido sobre Q_T . Más aún,

$$u(t, x), v(t, x) \in \mathbb{R}_+ , \quad \forall (t, x) \in Q_T$$

y

$$U \in (L^\infty(Q_T))^2 \cap (L^2(0, T, H^2(\Omega)))^2 \cap W^{1,2}\left(0, T, (L^2(\Omega))^2\right).$$

Analogamente a la prueba del Lema 3.1 [1, 3], se puede obtener que

$$u, v \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega)).$$

Lema 3.5. *El sistema (3.1)-(3.3) tiene solución única.*

Demostración: Para este objetivo, consideramos $U^p = (u^p, v^p)$, que es solución del problema (3.1)-(3.3) con la condición inicial $U_o^p = (u_o^p, v_o^p)$ para $p = 1, 2$. Sea $U = (U^1, U^2)$ con la consideración

$$U^1 = u^1 - u^2 \quad U^2 = v^1 - v^2,$$

que satisface el problema

$$\begin{cases} \frac{dU^1}{dt} = D_1 \Delta U^1 + f_1(u^1, v^1) - f_1(u^2, v^2) & en \quad Q_T \\ \frac{dU^2}{dt} = D_2 \Delta U^2 + f_2(u^1, v^1) - f_2(u^2, v^2) & en \quad Q_T \\ \frac{\partial U^1}{\partial \nu} = \frac{\partial U^2}{\partial \nu} = 0 & en \quad \Gamma_T \\ U^1(0, x) = U_o^1(x) & x \in \Omega \\ U^2(0, x) = U_o^2(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.19)$$

Multiplicando la primera ecuación del sistema (3.19) por U^1

$$\frac{dU^1}{dt}U^1 = D_1\Delta U^1U^1 + f_1(u^1, v^1)U^1 - f_1(u^2, v^2)U^1 .$$

Ahora integramos sobre Q_T , y también de 0 a t . Así obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (U^1)^2 dx ds = - \int_0^t \int_{\Omega} D_1 |\nabla U^1|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} [f_1(u^1, v^1) - f_1(u^2, v^2)] U^1 dx ds .$$

Multiplicando la segunda ecuación del sistema (3.19) por U^2

$$\frac{dU^2}{dt}U^2 = D_2\Delta U^2U^2 + f_2(u^1, v^1)U^2 - f_2(u^2, v^2)U^2 .$$

Ahora integramos sobre Q_T , y también de 0 a t . Así obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (U^2)^2 dx ds = - \int_0^t \int_{\Omega} D_2 |\nabla U^2|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} [f_2(u^1, v^1) - f_2(u^2, v^2)] U^2 dx ds .$$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} [(U^1)^2 + (U^2)^2] dx ds &= - \int_0^t \int_{\Omega} [D_1 |\nabla U^1|^2 + D_2 |\nabla U^2|^2] dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} [f_1(u^1, v^1) - f_1(u^2, v^2)] U^1 dx ds &+ \int_0^t \int_{\Omega} [f_2(u^1, v^1) - f_2(u^2, v^2)] U^2 dx ds . \end{aligned}$$

Además, como se tiene

$$u^1, v^1, u^2, v^2 \in L^\infty(Q_T) .$$

Esto conlleva al resultado que $f_1(u^1, v^1)$ y $f_2(u^2, v^2)$ son Lipschitz continua. Por lo tanto, se puede deducir que para todo $t \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} [(U^1)^2 + (U^2)^2] dx \leq \int_{\Omega} [(U_o^1)^2 + (U_o^2)^2] dx + C_3 \int_0^t \int_{\Omega} [(U^1)^2 + (U^2)^2] dx ds .$$

Donde C_3 es una constante positiva que solo depende de T y Ω . Aplicando la desigualdad de Gronwall, se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (u^1 - u^2)^2(t, x) dx + \int_{\Omega} (v^1 - v^2)^2(t, x) dx \quad (3.20) \\ &\leq \tilde{C} \int_{\Omega} (u_o^1 - u_o^2)^2(x) dx + \bar{C} \int_{\Omega} (v_o^1 - v_o^2)^2(x) dx . \end{aligned}$$

Luego, obtenemos

$$\int_{\Omega} (u^1 - u^2)^2(t, x) dx + \int_{\Omega} (v^1 - v^2)^2(t, x) dx \leq 0 . \quad (3.21)$$

Con lo cual, se consigue $u^1 = u^2$ $v^1 = v^2$. □

La desigualdad (3.21) prueba la unicidad de la solución del problema (3.1)-(3.3) en conjunto con la dependencia continua de la condición inicial. Y así concluimos la demostración del Teorema 3.2 (Resultado Principal) que corresponde a la existencia, unicidad y positividad del problema (3.1)-(3.3) mediante los Lemas 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 donde se consigue el objetivo de nuestro estudio.

3.2. Simulación Numérica. Para realizar la simulación numérica del sistema (3.1)-(3.3), consideraremos el método de las diferencias finitas para construir el algoritmo correspondiente. El dominio del modelo matemático se divide en el tiempo usando una malla $t_0, t_1, t_2, \dots, t_M$, y el espacio utilizando una malla $x_0, x_1, x_2, \dots, x_R$. Utilizaremos una partición uniforme para ambas variables, por lo cual, la diferencia entre dos puntos consecutivos los puntos del tiempo será denominado Δt , y entre dos puntos del espacio consecutivos será denominado Δx . El punto u_j^η será la aproximación de $u(t, x)$ en la posición j y en el tiempo η . De manera similar, abordamos para $v(t, x)$ donde su punto de aproximación es v_j^η . Para desarrollar la aproximación numérica de la solución se ha escogido el método de diferencias finitas porque es un método explícito, y además permite discretizar ecuaciones diferenciales y permite un tratamiento más sencillo para el problema diferencial parcial. Por ende, nos permite determinar las soluciones de nuestro problema tiempo-espacial con condición de frontera de Neumann homogéneo y una condición inicial. Por consiguiente, para estimar los valores de $u_j^{\eta+1}$ y $v_j^{\eta+1}$ debemos calcularlo en función de sus valores respectivos en el paso del tiempo η . Recordaremos, la estimativa del términos que representa la razón de cambio y el término difusivo para ambas poblaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{u_j^{\eta+1} - u_j^\eta}{\Delta t}, & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{j+1}^\eta - 2u_j^\eta + u_{j-1}^\eta}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &\approx \frac{v_j^{\eta+1} - v_j^\eta}{\Delta t}, & \frac{\partial v^2}{\partial x^2} &\approx \frac{v_{j-1}^\eta - 2v_j^\eta + v_{j+1}^\eta}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

De esta forma, escribiremos la primera ecuación del sistema (3.1), de acuerdo a las aproximaciones numéricas establecidas.

$$\begin{aligned} u_{j+1}^\eta &= u_j^\eta + \left(\frac{D_1 \Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (u_{j+1}^\eta - 2u_j^\eta + u_{j-1}^\eta) + r u_j^\eta (B_1 - u_j^\eta) (u_j^\eta - B_2) \Delta t - \frac{\alpha(1-m)^2 \Delta t (u_j^\eta)^2 (v_j^\eta)}{\beta^2 + (1-m)^2 (u_j^\eta)^2 + \theta (v_j^\eta)^2} \\ v_{j+1}^\eta &= v_j^\eta + \left(\frac{D_2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (v_{j+1}^\eta - 2v_j^\eta + v_{j-1}^\eta) + \frac{\alpha k(1-m)^2 \Delta t (u_j^\eta)^2 (v_j^\eta)}{\beta^2 + (1-m)^2 (u_j^\eta)^2 + \theta (v_j^\eta)^2} - (c v_j^\eta - d (v_j^\eta)^2) \Delta t \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para $2 \leq j \leq N_x - 2$. Para los puntos de la frontera del mallado (condición de Neumann homogéneo), usaremos la siguiente consideración

$$u_1^\eta = u_2^\eta, \quad u_{N_x-1}^\eta = u_{N_x-2}^\eta, \quad v_1^\eta = v_2^\eta, \quad v_{N_x-1}^\eta = v_{N_x-2}^\eta.$$

Con relación a las funciones de la condición inicial

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_o(x) = \xi_u \cdot e^{-K_s(x-\sigma_1)} \\ v(0, x) &= v_o(x) = \xi_v \cdot e^{-K_s(x-\sigma_2)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Realizaremos las simulaciones computacionales, programadas en lenguaje Python, donde utilizaremos los mismos parámetros de la tabla en la sección 2. Los valores que consideraremos serán los siguientes: $\xi_u = 0,40$, $\xi_v = 0,08$, $\sigma_1 = 0,20$, $\sigma_2 = 0,50$. Después de definir los valores de los parámetros del sistema ecológico (3.1) y la condición inicial expresada en (3.2). Por lo cual, determinaremos los pasos del tiempo: $t = 0, 300, 1000, 5000, 10000$. Además, se considerará un coeficiente de difusión de $D_1 = 0,50$ y $D_2 = 0,50$. Teniendo una consideración del de la longitud temporal $T = 1$ y la longitud espacial $L = 1$. Y la cantidad de pasos para el espacio $max_X = 100$. La simulación presentará las aproximaciones numéricas del modelo depredador-presa con difusión con una mayor población de presas y una población más pequeña de depredadores en el tiempo.

En la figura 3.1, se puede apreciar diversos tiempos para cada especie (depredador-presa), donde en el largo plazo se llega a la coexistencia. Para la simulación se ha considerado una condición inicial de comportamiento decreciente a través del tiempo, donde se pueda controlar en el largo plazo. De manera similar, la población de las presas es mayor a la población de los depredadores en el espacio unidimensional a través del tiempo. La influencia del coeficiente efectivo de refugio de la presa sigue marcando una consideración

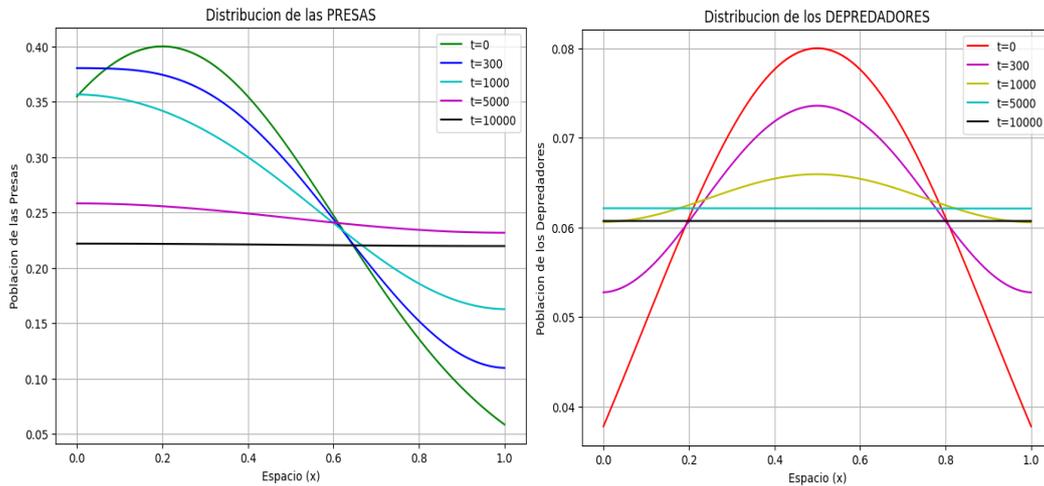


Figura 3.1: Distribución Poblacional del Depredador y la Presa.

ecológica dentro del ecosistema. La respuesta funcional dependiente de ambas especies donde limita la depredación para mantener un equilibrio biológico de coexistencia. [3].

4. Conclusión. El análisis central del estudio ha sido garantizar la existencia, unicidad y positividad del problema (3.1)-(3.3) por la teoría de semigrupos [1]. Además que se ha hecho un bosquejo general del modelo presentado tanto sin difusión (simulación computacional) como con difusión (buena colocación). Las simulaciones son similares para los parámetros considerados, pero podría darse un estudio de bifurcación de Hopf para ciertos valores, lo cual sería para un trabajo futuro del presente sistema [10]. Además de analizar la estabilidad del sistema para garantizar bajo que valores de los parámetros se obtiene los escenarios buscados (coexistencia ecológica) como también los escenarios que no se quiere que sucedan, como la extinción total de las dos especies [3, 8]. De manera complementaria se presenta simulaciones computacionales para corroborar la coherencia de las hipótesis del coeficiente de refugio dentro de una respuesta funcional dependiente de ambas especies donde se ha incluido el efecto Allee para la reproducción de la presa.

Contribución de los Autores. Para la investigación del presente trabajo, el autor ha realizado la revisión bibliográfica, análisis matemático, simulación computacional, redacción, revisión y edición.

Financiamiento. La presente investigación no ha recibido ningún tipo de financiamiento para su realización.

Agradecimientos. Nos gustaría agradecer a cada árbitro anónimo por la cuidadosa lectura del manuscrito, y por brindarnos comentarios constructivos que ayudaron a mejorar el manuscrito.

Conflictos de Intereses. En nombre del autor, declaro que no existe ningún conflicto de intereses en la publicación de este artículo, y que no existe ningún conflicto de intereses con ningún otro autor o institución por la publicación de este artículo.

ORCID and License

Neisser Pino Romero <https://orcid.org/0000-0002-9865-5974>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Apreutesei N, Dimitriu G, et al. On a prey–predator reaction–diffusion system with Holling type III functional response. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010;235(2):366-79.
- [2] Akjouj I, Barbier M, et al. Complex systems in Ecology: A guided tour with large Lotka-Volterra models and random matrices. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2022:1-35.
- [3] Lazaar O, Serhani M, et al. On the Stability Analysis of a Reaction-Diffusion Predator-Prey Model Incorporating Prey Refuge. *International Journal Applied and Computation*. 2022;8(207-230):1895-909.
- [4] Murray JD. In: *Mathematical Biology I: An Introduction*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer; 2013. p. 551 pages.
- [5] Camara BI. *Complexité de dynamiques de modèles proie-prédateur avec diffusion et applications*. Université du Havre; 2009.
- [6] Romero NP, Fernández CUS. Modelo matemático de una cadena alimenticia depredador-presa: plancton-anchoveta. *Revista de Matemática: Teoría Y Aplicaciones*. 2021;29(1):71-104.
- [7] González-Olivares E, Tintinago-Ruiz PC, Rojas-Palma A. A Leslie–Gower-type predator–prey model with sigmoid functional response. *International Journal of Computer Mathematics*. 2015;92(2):1895-909.
- [8] Murray JD. In: *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer; 2013. p. 814 pages.
- [9] Pazy A. In: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer; 1983. p. 282 pages.
- [10] Chakraborty B, Bairagi N. Complexity in a prey-predator model with prey refuge and diffusion. *Ecol Complex Journal*. 2019;37:11-23.