Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(1):117-152.

REVIEW

The Integral, a Vision of its Evolution Through Time IV
Harmonic Analysis, Stochastic Processes, Stochastic Integration.

La Integral, una Visión de su Evolución a Través del Tiempo IV
Análisis Armónico, Procesos Estocásticos, Integrales Estocásticas

Alejandro Ortiz Fernández

A la memoria del ilustre matemático Dr. Alberto P. Calderón, por sus geniales contribuciones a la matemática.

Received, Jan. 05, 2024; *Accepted, May. 20, 2024;* *Published, Jul. 29, 2024*

How to cite this article:
Ortíz F. *The Integral, a Vision of its Evolution Through Time IV: Harmonic Analysis, Stochastic Processes, Stochastic Integration.*. Selecciones Matemáticas. 2024;11(1):117–152. **http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.01.09**

Abstract

The objective of this article is to give an overview of the relationship between harmonic analysis and stochastic processes, a relationship that has motivated many investigations and applications to specific problems. We will also emphasize stochastic integration.
Keywords . BMO, Brownian motion, random, martingale, stochastic integral.

Resumen

El objetivo de este artículo es dar un panorama de la relación entre el análisis armónico y los procesos estocásticos, relación que ha motivado muchas investigaciones y aplicaciones a problemas concretos. Daremos énfasis, también, a la integración estocástica.
Palabras clave. BMO, movimiento Browniano, aleatorio, martingala, integral estocástica.

1. Introducción y Motivaciones. En el siglo pasado se introdujeron ideas y teorías fundamentales en el análisis matemático; así, a inicios de tal siglo se introdujo la medida e integral de Lebesgue, los espacios abstractos con Frechet; en 1915, H. Hardy funda la teoría de los espacios H^p, $0 < p < \infty$; en 1961, John-Nirenberg introducen los espacios de oscilación media acotada -BMO. En 1952 A. P. Calderón-A. Zygmund fundan la teoría de la integrales singulares y así se produce una abundante producción de artículos interrelacionados y, esto nos interesa ahora, fueron puestos en el contexto de los espacios de probabilidades y surgieron muchas nuevas ideas con aplicaciones a problemas concretos en el mundo en que vivimos. En este escenario destacamos las contribuciones de, entre otros, F. y M. Riesz, S. Saks, A. Besicovith, S. Bochner, G. Hardy, E. Littlewood,

*Profesor Emérito Vitalicio de la Universidad Nacional de Trujillo. Exprofesor de la PUCP. (jortiz@pucp.edu.pe).

Paley, ...; D. L. Burkholder, R. F. Gundy, D. Strook, A. Garsia, C. Herz, S. Varadhan, K. Petersen, ... ;en 1971, Burkholder, Gundy y Silverstein (B-G-S) dieron un impulso en el estudio de los espacios H^p, $0 < p < \infty$, con argumentos de la teoría de la probabilidad usando el movimiento Browniano en el plano complejo; en este trabajo el espacio H^p puede ser caracterizado con variable real y así puede ser extendido a mayores dimensiones y otros espacios en general, ver K.E.Petersen, [1], para mayores detalles. En 1971, Ch. Fefferman caracteriza a los espacios BMO, [2], vía su famoso resultado de dualidad, idea que fue ampliamente discutida, entre otros aspectos, en un destacado trabajo de C. Fefferman - E. M. Stein, [3], en donde extienden el trabajo de B-G-S a dimensiones mayores.

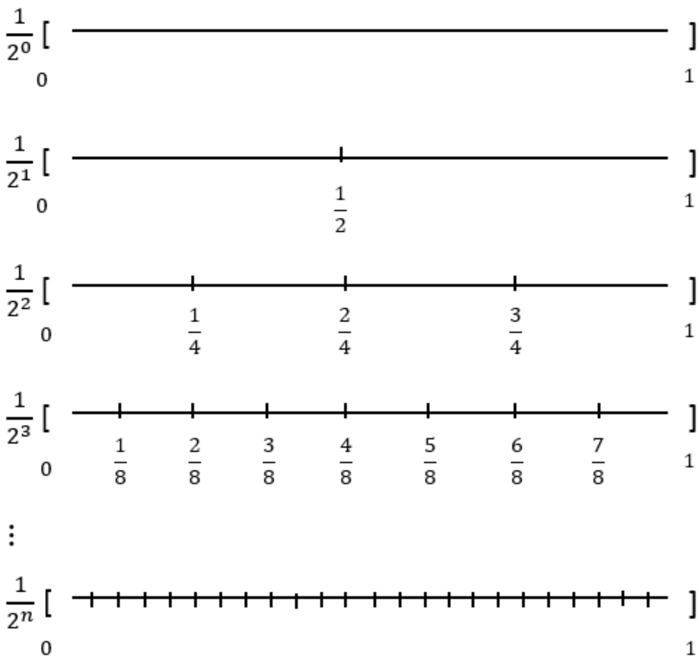
Remarcamos que muchas de las ideas y métodos del análisis armónico fueron puestas en el contexto de las probabilidades, del análisis estocástico. Esto debido a la relación que hay entre la teoría de la probabilidad y la teoría del potencial, cuyos orígenes son de naturaleza física, en este panorama surge el movimiento Browniano. Así los espacios H^p y los BMO fueron puestos en lenguaje probabilístico y se estudiaron a las martingalas, conforme veremos posteriormente. Según Ch. Fefferman, [4], 1976, el desarrollo del análisis armónico y los espacios H^p, y su relación con las probabilidades, es vía las teorías clásicas y las teorías modernas. En la primera parte el autor relaciona las series de Fourier con los espacios H^p, y se habla de cierto "límite no-tangencial", idea que jugaría un rol en posteriores estudios. También, en este escenario, surge la "teoría de Littlewood-Paley" muy relacionada con las series de Fourier y que Fefferman explica con detalles. Se expone una caracterización de los espacios H^p, $0 < p < \infty$, la cual fue usada posteriormente por A. Calderón en sus investigaciones sobre los operadores integrales singulares, trabajo que a su vez motivó nuevas investigaciones, en particular de Coifman-Meyer. Antes de pasar a presentar los detalles análiticos de las ideas expuestas veamos un ejemplo físico que motivó a los estudios probabilísticos.

1.1. Idea de Movimiento Browniano. El biólogo, botánico inglés Robert Brown, en 1827, observó que las partículas en un fluido se mueven en una forma irregular bajo el impacto entre ellas mismas. Esta situación fue explicada en 1905 por A. Einstein cuando se sabía que los átomos y las moléculas ya habían sido teorizadas como componentes de la materia. El movimiento constituye un proceso físico gobernado por leyes probabilísticas las que fueron llamadas "movimiento Browniano" o procesos de N. Wiener ya que él, en 1923, creó la teoría matemática del movimiento Browniano la cual se aplica a la teoría general de los procesos estocásticos y también se aplica a campos como el análisis armónico, a la teoría de información, al análisis complejo y a las ecuaciones en derivadas parciales. El movimiento Browniano es un "proceso de Markov"de tipo particular que describe la trayectoria de una partícula sin ninguna memoria.

1.2. Idea de Martingala. De un modo general, una martingala es una sucesión de funciones que verifican una cierta condición, que involucra una integral probabilística. Seguimos al trabajo de Fefferman, [4]. Dada una función f ella puede ser muy irregular ya que puede tener singularidades o puede oscilar en forma complicada; en estos casos la noción de convolución es útil pues si f es convolucionada con el núcleo de Poisson P_t, por ejemplo, se obtiene una integral (la integral de Poisson) la cual es bien regular y se comporta como una constante sobre pequeños intervalos de longitud t. La convolución de funciones es usada frecuentemente en el análisis armónico. Asumamos que f es definida en el intervalo $[0, 1]$ el cual es descompuesto en forma diádica en la forma siguiente [4],

Consideremos la etapa $n = 3$, por ejemplo, y consideremos el último subintervalo $[\frac{7}{8}, 1)]$ y formemos su promedio $u_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{8}} \int_{\frac{7}{8}}^{1} f(t)dt = 8 \int_{\frac{7}{8}}^{1} f(t)dt$. Luego, de un modo general se induce que se tiene el promedio $u_n(x) = 2^n \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} f(t)dt$. La sucesión $u_n(x)$ es un ejemplo de martingala.

Si los $u_n(x)$ son limitados en todas partes, entonces ellos tienen un límite en casi todas partes. Observemos que los $u_n(x)$ son promedios de una función f, luego por el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene los $u_n(x)$ convergen ctp. a $f(x)$. Al respecto se tiene el **teorema de Calderón** (1950): "Sea $\Gamma(x)$ un cono con vértice en x en $\mathbb{R}^n$ y $u(x, t)$ una función armónica definida en el semi-espacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Sean,

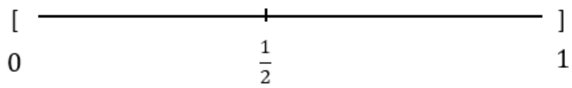


$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / u(x,t) \text{ es limitada en } \Gamma(x)\} \text{ y}$$
$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / \text{ existe} \lim_{t\to 0} u(x,t) \text{ , } (x,t) \in \Gamma(x)\}$$

entonces se tiene que $E_1 = E_2$, a menos de un conjunto de medida nula".

Luego, si $u(x,t)$ es una función armónica sobre R_+^{n+1} y E es un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^n$, tal que para todo punto $x \in E$ existe un cono $\Gamma(x)$ tal que $\sup_{(x,t)\in\Gamma(x)} |u(x,t)| < \infty$, entonces en casi todo punto de E, $u(x,t)$ tiene un límite no-tangencial. Observemos, también, que vía estos argumentos, el teorema de Calderón se relaciona con la idea de martingala.

Un Juego de Azar. [4]. Supongamos que se tiene el siguiente capital inicial $u_0 = \frac{1}{2^0}\int_0^1 f(x)dx$, donde f es una función definida en el intervalo $[0,1]$; esto será el caso inicial $t = 0$, $n = 0$. Estando en el salón de juego tenemos la libertad de decidir si empiezo o no a jugar; si decidimos a jugar, $t = 1$, entonces se pasa a etapa $n = 1$, $\frac{1}{2^1}$; y a fin de determinar en qué intervalo nos ubicamos de



, lanzamos una moneda al aire. Luego el capital ahora será $u_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ o $\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$. Bien, después de esta jugada primera, decidimos nuevamente si continuamos o no jugando. Si continuamos jugando pasamos a la etapa $n = 2$, $\frac{1}{2^2}$ y $t = 2$. Esta vez el capital u_2 será el promedio sobre alguno de los intervalos de longitud $\frac{1}{4}$. De esta manera el capital será el promedio sobre un determinado subintervalo diádico. Entonces, ¿cómo varía el capital en el tiempo t? ... Se observa que si continuamos jugando entonces el capital variará en la forma $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ en el tiempo t, y el tamaño de la apuesta será $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$. Y así podemos seguir jugando ... hasta que paremos y de esta manera se llega a un "límite"(tiempo de "parar") pues se puede ganar o perder y lo "razonable" es ponernos en el promedio y poner un tope al juego, es decir, **parar de jugar** cuando se llega a tal tope. Así surge la expresión **"tiempo de parar"** (**"stopping time"**). Esta idea fue abstraída matemáticamente y es un útil concepto en el análisis de los procesos estocásticos.

Veamos un argumento cotidiano. Si en cada jugada apostamos una elevada cantidad de dinero entonces sentimos que nuestro dinero no va a permanecer limitado; en cambio, si siempre apostamos pequeñas cantidades entonces nuestro capital estaría limitado. Cuando jugamos, al apostar se usan diferentes estrategias; por ejemplo, si apostamos grandes cantidades de dinero y ganamos, podríamos parar de jugar y retirarnos; pero si perdemos podríamos apostar todo lo que nos queda al azar! Así, podríamos decir que cuando apostamos grandes cantidades, el capital tiende a ser divergente; en cambio a pequeñas apuestas, el capital tiende a converger. De esta manera para que tengamos un límite de nuestro capital, es importante que hagamos pequeñas apuestas y por tanto el capital estará limitado. Esto concuerda con el teorema de Calderón.

Ahora bien, expresemos estas ideas en forma analítica: la expresión $\sup_n |u_n(x)| < \infty$ nos dice que nuestros capitales son limitados y esto motiva construir el conjunto $E = \{x/ \sup_n |u_n(x)| < \infty\}$. Se observó que el conjunto E es igual al conjunto $F = \{x/ \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_{n-1}(x)]^2 < \infty\}$ ctp. De esta expresión se destaca que la expresión $\{\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_{n-1}(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}$ es llamada la "función cuadrado martingala" o la función S. Esta función S cuando se la considera desde el punto de vista de las funciones armónicas, se la conoce como la función área de Lusin, la cual es útil en el análisis armónico, en particular en la teoría de Littlewood-Paley. Por otro lado, recordemos que la variación de un capital en un juego de azar es de la forma $u_n(x) - u_{n-1}(x)$ y que el tamaño de la apuesta es dado por $|u_n(x) - u_{n-1}(x)|$, lo cual sugiere tomar el gradiente ∇u en el caso de una función armónica $u(x,t)$ definida sbre el semi-espacio superior $\mathbb{R}^2_+$; la sumatoria es reemplazada por una integral y se tiene como función área de Lusin lo siguiente

$$Su(x,t) = \left\{ \int_{\Gamma(x)} |\nabla u(y,t)|^2 y^{1-n} dydt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

También por analogía se tiene para la función maximal, $u^*(x) = \sup_{\Gamma(a)} |u(x)|$. Se verifica que, en algún sentido, Su y u^* son equivalentes y que se verifica $||u^*||_{L^p} \simeq ||Su||_{L^p}$, $0 < p < \infty$. En este terreno se obtuvieron muchos resultados que contribuyeron al desarrollo del análisis armónico y de la teoría de martingalas.

1.3. Martingalas, Integrales Singulares y la Clase $LlogL$: Una visión. Se remarca que varias teorías que nacieron en el análisis armónico fueron puestas en el lenguaje de las probabilidades, de los procesos estocásticos, en particular de las martingalas. Un ejemplo de lo expresado es la teoría de las integrales singulares de Calderón-Zygmund, iniciada en 1952, [5], la cual es aplicada a las probabilidades relacionadas con las transformadas martingalas que fueron consideradas por D. L. Burkholder en 1966, [6]. Uno de los resultados centrales de la teoría de Calderón-Zygmund es demostrar que el operador integral singular $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$, donde el núcleo $k(x)$ satisface ciertas condiciones, es un operador limitado en L^p, $1 < p < \infty$, esto es, se tiene $||Tf||_{L^p} \leq A_p||f||_{L^p}$. En tal teoría está la idea de descomponer la función en dos funciones: una "buena" y la otra "mala", ideas que fueron estudiadas en el contexto de las martingalas, en donde se han verificado análogas desigualdades para transformadas martingalas; ver [7]. Veamos algunos argumentos al respecto. En 1939 Jean Ville introdujo el nombre de "martingala", teoría que fue desarrollada como un capítulo de los procesos estocásticos (ver el libro J.L.Doob, 1953, [8]) y conectada con la clase $LlogL$:

$$LlogL = \{f/ \int |f(x)| log^+ |f(x)| dx < \infty\} \text{ , donde}$$

$log^+|f| = log|f|$, si $|f| \geq 1$, $= 0$ si $|f| < 1$.
Ahora recordemos que en un juego de azar aparece el supremo de una sucesión de funciones, y también el supremo de una función; el considerar supremos es una estrategia usada con frecuencia en este tipo de análisis, armónico y de martingalas. Por ejemplo un supremo muy usado, y famoso, es la función maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

donde $B(x,r)$ es una bola de centro x y radio r; $|B(x,r)|$ es su medida de Lebesgue. Otro caso es el siguiente, caso discreto, sea f_1, f_2, ... una sucesión de variables aleatorias y pongamos

$$A_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k}{n} \text{ y } A^* = \sup_n |A_n|$$

Se observó que las funciones maximales de Hardy-Littlewood y A^* pueden ser consideradas como casos particulares en un contexto más amplio, en el de las martingalas. Veamos dos de tales resultados.

Teorema 1.1. *Teorema de Burkholder:* $A^* \in L^1$ **si y solo si** $f \in LlogL$.

Teorema 1.2. *Teorema de E.Stein:* $Mf \in L^1$ **si y solo si** $f \in LlogL$. Gundy, [7], verifica que ambos teoremas pueden ser interpretados como resultados especiales de la teoría de martingalas, a donde se llevan resultados generalizados del análisis real. De esta manera ambos teoremas anteriores son casi los mismos bajo la óptica de las martingalas.

2. Algunas Ideas Matemáticas. Sea Ω un conjunto no-vacío; una σ-álgebra en Ω es una familia de subconjuntos F tal que:

(i) $\emptyset \in F$.

(ii) Si $A \in F$, entonces $A_c \in F$.

(iii) Si $A_n \in F$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

(Ω, F) es llamado un espacio medible.

Ejemplo 2.1. *Sea (Ω, F) un espacio medible y $f : \Omega \to Y$ una función donde Y es un cierto conjunto. Entonces $G = \{S \subset Y / f^{-1}(S) \in F\}$ es una σ-álgebra.*

Definición 2.1. (Probabilidad). *Sea F una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. La función $P : F \to [0,1]$ es llamada una probabilidad si:*

- *$P(\Omega) = 1$ y*
- *si $\{A_n\}$ es una familia de conjuntos en F y $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ entonces se tiene $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

La terna (Ω, F, P) se llama **espacio de probabilidad**. *Una* **variable estocástica** *f es una función F-medible y su* **esperanza** *es su integral $E(f)$ con respecto a P; esto es $E(f) = \int f(x)dP(x)$. Sea ahora $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, F-medible y F' una subálgebra de F, entonces* **la esperanza condicional** *de f es definida siendo la función F'-medible g sobre Ω, definida vía: $\int_A f(x)dP(x) = \int_A g(x)dP(x)$, para toda $A \in F'$.*

Nota 2.1. *Tal función g existe unívocamente. (Radon-Nikodyn).*

Notación: $g = E(f/F')$.

Corolario 2.1.

(i) Si $F' = F$, entonces $f = g$.

(ii) Si $f \geq 0$, entonces $\int g(x)dx \geq 0$ o $E(f/F') \geq 0$.

(iii) Si f es F'-medible, entonces $E(f/F') = f$; en particular, $E(1/F') = 1$.

(iv) $E(f_1 + f_2/F') = E(f_1/F') + E(f_2/F')$. Se tiene, también

$$\int_A (f_1 + f_2)(x)dP(x) = \int_A (g_1 + g_2)dP(x) \text{ y } E(\alpha f/F') = \alpha E(f/F').$$

(v) $E(E(f/F')/F') = E(f/F')$. [Si $E(E(f/F')/F') = g_1$ y $E(f/F') = g_2$ se tiene, respectivamente, $\int_A E(f/F')dP = \int_A g_1 dP$ y $\int_A f dP = \int_A g_2 dP$. Luego, $\int_A f dP = \int_A g_1 dP$ y por tanto $g_1 = E(f/F') = g_2$].

(vi) Si h es F' - medible y está en L^∞, entonces $E(hf/F') = hE(f/F')$.

(vii) Si $F'_1 \subset F'$, entonces $E(E(f/F')/F'_1)) = E(f/F'_1)$. [si $g = E(f/F')$ y $g_1 = E(f/F'_1)$ considerando la hipótesis se tiene $\int_A f dP = \int_A g dP$, para todo $A \in F'_1$ y $\int_A f dP = \int_A g_1 dP$, para todo $A \in F'_1$, de donde se obtiene $E(f/F') = E(f/F'_1)$. Pero de (v) se tiene que $E(E(f/F'_1)/F'_1) = E(f/F)$, de donde se obtiene la tesis].

(viii) Si f y g están en $L^2(\Omega)$ entonces $\int_\Omega E(f)gdP = \int_\Omega fE(g)dP$.
$[\int_\Omega E(f)gdP = \int_\Omega E(E(f)g)dP = \int_\Omega E(f)E(g)dP$,
$\int_\Omega fE(g)dP = \int_\Omega E(fE(g))dP = \int_\Omega E(f)E(g)dP]$.

(ix) Si $f \in L^p(\Omega, F, P)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$E(f/F') \in L^p(\Omega, F, P) \text{ y } ||E(f/F')||_{L^p} \leq ||f||_{L^p}.$$

[Sea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $E(f/F')$ es F'-medible; luego,
$||E(f/F')|| = \sup_{g \text{ medible en } F';\ ||g||_{L^q} \leq 1} \{\int_\Omega E(f(x)).g(x)dP\} =$
$\sup_{g \text{ medible en } F';\ ||g||_{L^q} \leq 1} \{\int_\Omega f(x).g(x)dP\} \leq$
$\sup_{g \text{ medible en } F;\ ||g||_{L^q} \leq 1} \{\int_\Omega f(x).g(x)dP\} = ||f||_{L^p}$*].*

Definición 2.2. *(Definición de Martingala) $\{F'_n\}$, $n = 0, 1, ...$, una sucesión creciente de subálgebras de F, esto es $F'_0 \subset F'_1 \subset F'_2 \subset ...$ y sea $f = \{f_n\}$ una sucesión de variables estocásticas adaptada a $\{F'_n\}$, $n = 0, 1, ...$, en el sentido de que cada f_n es F'_n-medible. La sucesión $f = \{f_n\}$, $n = 0, 1, ...$, es una martingala si $E(f_n/F'_{n-1}) = f_{n-1}$.*
Observemos que la definición implica

$$\int_A f_n dP = E(f_n/F'_{n-1})dP = \int_A f_{n-1}, \text{ para todo } A \in F'_{n-1}.$$

Ejemplo 2.2. *Sea $\Omega = [0, 1]$ con la usual medida de Lebesgue y F'_n la σ-subálgebra generada por los intervalos $I_i = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$, $i = 0, 1, ..., n - 1$. Ahora se define*

$$f_n(x) = 2^i \int_{I_i} f(y)dy, \text{ donde } x \in I_i,\ i = 0, 1, ..., n - 1.$$

Entonces $f = \{f_n\}$ es una martingala.

Ejemplo 2.3. *Sea la función área de Lusin: $Sf = \{\sum_{n=1}^{\infty}(f_n - f_{n-1})^2\}^{\frac{1}{2}}$. Si $S_n f = \{\sum_{i=1}^{n}(f_i - f_{i-1})^2\}^{\frac{1}{2}}$, entonces $\{f_n^2 - (S_n f)^2\}$ es una martingala.*

Recordemos nuestra situación de jugador al azar; vimos la conveniencia de parar en determinado momento; es decir, dejar de jugar en un tiempo dado. Esto es el “stopping time”, tiempo de parar; esta idea fue puesta en un contexto abstracto vía la noción: “Un **“tiempo de parar”** es una aplicación $T : \Omega \to Z_+ = \{0, 1, 2, ..., \infty\}$ tal que para todo n, el conjunto $\{x/T(x) \leq n\}$ está en F'_n”.
Esta idea está relacionada con procesos físicos. Así, sea $u(x, t)$ una función armónica definida en el subespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Entonces el movimiento browniano es descrito por (x_t, y_t), $t \geq 0$, que inicia su movimiento en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y termina o “para” en el tiempo $T = \inf\{t/y_t = 0\}$.
Es decir, el movimiento browniano en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ consiste en partir de un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y parar en el primer momento en que la trayectoria “toca” al contorno $\mathbb{R}^n$.

2.1. Procesos Estocásticos. Una definición base es la de proceso estocástico; la idea es: si se tiene determinado sistema, él puede cambiar o evolucionar de acuerdo al tiempo en función de cierta ley. Así, sea X_t el estado del sistema en el tiempo t, el cual podría ser considerado como una variable aleatoria para cada valor de t. El conjunto o colección de estas variables aleatorias es llamado un “proceso estocástico”. Se observa que en un proceso estocástico las variables aleatorias no son independientes entre si. Y, justo por esta dependencia se tienen distintas clases de procesos. Más formalmente: “Sea el espacio de probabilidades (Ω, F, P) y el conjunto T, llamado espacio parametral. Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $\{X_t/t \in T\}$ parametrizada por T, en donde las variables toman valores en un conjunto S, que se llama espacio de estados”.
El espacio parametral puede ser discreto o continuo. Como ejemplo del primer caso sea $T = \{0, 1, 2, ...\}$ y se tiene un proceso a tiempo discreto y, en general, se escribe $\{X_n/n = 0, 1, 2, ...\}$. Por otro lado, si (por ejemplo) $T = [0, \infty]$ se tiene un proceso a

tiempo continuo y se escribe $\{X_t/t > 0\}$.
Ver las excelentes Notas de L. Rincón, [9] para mayores detalles.

El movimiento browniano o proceso de Wiener es un ejemplo de proceso estocástico; otro es el proceso de Poisson, esto es un proceso que registra los sucesos muy pocos probables en tiempo continuo, como sucede en el campo de los seguros; en este proceso el tiempo transcurrido entre los saltos cumple una distribución exponencial. Otros ejemplos de procesos estocásticos son los procesos de Markov, los procesos estacionarios, las martingalas, los procesos de Lévy (el movimiento browniano y los procesos de Poisson son ejemplos de procesos de Lévy), los procesos gausianos, ... Debemos destacar al libro de J. L. Doob (1910-2001), [8], pues es un tratado pionero de los procesos estocásticos que fue publicado en 1953 y es fuente de consulta de posteriores escritos sobre los procesos estocásticos. Según Doob un "proceso estocástico es la abstracción matemática de un proceso empírico cuyo desarrollo es gobernado por leyes probabilísticas". La obra consta de 654 páginas y cubre el universo conocido entonces sobre este tema.

Veamos otras ideas matemáticas en la ruta que nos interesa.

2.2. Variables Aleatorias. Todo evento es caracterizado por una propiedad P, que depende del resultado aleatorio del experimento. A todo evento le está asociado un subconjunto F de puntos de Ω, donde Ω es el conjunto de los resultados posibles y que es llamado "el espacio de muestras". Tal subconjunto, clásicamente, es una σ- álgebra F de Ω y así, el experimento es caracterizado por el par (Ω, F). Recordemos que una probabilidad es una función $P : F \to [0, 1]$ con las propiedades dadas anteriormente y que el trío (Ω, F, P) es llamado un espacio de probabilidades. La función P tiene las propiedades:

$$P(\emptyset) = 0; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Sea $\mathbb{R}^1$ la recta y B^1 es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}^1$; si se pone $\Omega = \mathbb{R}^1$ y μ es una medida (de probabilidad) en $\mathbb{R}^1$ y B^1 , **la función distribución** de μ es definida siendo $\overline{f}(x) = \mu[(-\infty, x]]$, para todo $x \in \mathbb{R}^1$. $\overline{f}$ es una función monótona creciente, continua a la derecha; $\overline{f}(-\infty) = 0$ y $\overline{f}(+\infty) = 1$.
Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidades y sea $\Delta \in P$ (observemos que $\Delta \subset \Omega$). La función $X : \Delta \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^1 \cup (-\infty, \infty)$ es llamada una **variable aleatoria** si para todo conjunto de Borel B, es decir para $B \in B^1$ se tiene $\{w/X(w) \in B\} \in \Delta \cap F$ (es la traza de F en Δ).
Se tiene que "X es una variable aleatoria **si y solo si** $\{w/X(w) < x\} \in F$, para todo $x \in \mathbb{R}^1$".

Nota 2.2. *Este resultado aun es cierto si $<$ es reemplazado por $\leq$, $>$ o $\geq$.* Toda variable aleatoria X induce en $(\mathbb{R}^1, B^1)$ una probabilidad vía: $P_X(B) = P(X^{-1}(B)$, para todo $B \in B^1$. Esta idea induce a la definición.

Definición 2.3. *Dada la variable X, definida en (Ω, F, P), se llama* **la función distribución de probabilidades de** X*, a la función distribución asociada a la medida P_X inducida en $(\overline{R}^1, B^1)$ por X.* Así se tiene:
$\overline{f}(x) = P_X[(-\infty, x]] = P[X^{-1}((-\infty, x])] = P[\{w/X(w) \leq x\}]$.

Se verifica que: si X, Y son variables aleatorias definidas en (Ω, F, P), entonces $X + Y$; XY; $\frac{X}{Y}, Y \neq 0$; $\max(X, Y)$ y $\min(X, Y)$ son variables aleatorias.

Una variable aleatoria es llamada **simple** si ella toma a la máximo un número finito de valores distintos. Se sabe que toda variable aleatoria X es el límite de una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias simples; además, si $X \geq 0$, $\{X_n\}$ puede ser construida siendo monótona creciente. En este caso sean α_1, α_2, ..., α_n los valores asumidos por X y sea $X^{-1}(\{\alpha_i\}) = A_i, i = 1, ..., n$. Entonces se tiene la definición (nuevamente)

Definición 2.4. *"La* **esperanza** *de X es $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i)$".* (Esta es la suma parcial de la integral con respecto a P que vimos antes).
Veamos al respecto; sea X una variable aleatoria cualquiera. Si $X \geq 0$, existe una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias simples tales que $X_n \geq 0$ y $X_n \to X$; $\{E(X_n)\}$ es

monótona creciente y si ella fuera limitada, entonces se define $E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$. Si no fuera limitada, se asume $E(X) = +\infty$. Por otro lado, si X es cualquiera, se tiene $X = X^+ - X^-$, donde $X^+ \geq 0$ y $X^- \geq O$, y también se tienen $E(X^+)$ y $E(X^-)$. Si al menos unos de estos valores es finito, se define

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-).$$

Nota 2.3. *Si ambos X^+ y X^- son infinitos, $E(X)$ no es definida.*
Notación: $E(X) = \int_\Omega X(w)dP(w)$.

Corolario 2.2. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión disjunta, entonces $\int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} X(w)dP(w) = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} X(w)dP(w)$. También se tiene*

- *Si $X_1 \leq X \leq X_2$ entonces*
$$\int_A X_1(w)dP(w) \leq \int_A X(w)dP(w) \leq \int_A X_2(w)dP(w),$$
con $A \in F$.
- $\left|\int_A X(w)dP(w)\right| \leq \int_A |X(w)|dP(w)$.
- *Si $\{X_n\} \to X$ ctp. y si $|X_n| \leq Y$, con $E(Y) < \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$.*

Sea $r > 0$ un número real y X una variable aleatoria; se define el **momento absoluto** de orden r de X vía: $E(|X|^r)$, si esta expresión es finita; en caso contrario el momento es igual a $+\infty$. Si $E(|X|) < \infty$, el **momento absoluto central** de orden r es definido siendo $E(|X - E(X)|^r)$. Si $r = 2$, el momento absoluto central se llama **varianza** de X. Se tiene entonces

$$var(X) = \sigma^2(X) = E\{(X - E(X))^2\} = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Desigualdad de Chebyshev: sea X una variable aleatoria tal que $E(X^2) < \infty$, entonces dado $\epsilon > 0$ se tiene $P[\{w/|X(w) - E(X) \geq \epsilon\}] < \frac{1}{\epsilon^2}\sigma^2(X)$.
Vectores Aleatorios. Sea g una función definida en la variable aleatoria X; se sabe que de un modo general la esperanza de g es
$E(g(x)) = \int g(x)d\overline{f}(x) = \int g(x)f(x)dx$, donde $f(x) = \overline{f}'(x)$.
Si $g(x) = x$, $E(X) = \mu$ y es llamada la **media** de X. Si $g(x) = (x - \mu)^2$,
$E(X - \mu)^2 = \sigma^2$ es llamada la **varianza** de X. Un **vector aleatorio, n-dimensional**, es un vector columna $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)'$, donde X_i es una variable aleatoria,
$i = 1, ..., n$. La función distribución de $\overline{X}$ es definida vía
$\overline{f}(x_1, ..., x_n) = P[X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n]$, para todo x_1, ..., x_n en $\mathbb{R}$. La esperanza del vector aleatorio $\overline{X}$ es: $E(g(\overline{X})) = \int g(x_1, ..., x_n)d\overline{f}(x_1, ..., x_n)$.

Las variables aleatorias $X_1, ..., X_n$ son independientes si

$$P[X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n] = P[X_1 \leq x_1]...P[X_n \leq x_n].$$

Si $E[X_i] < \infty$, $i = 1, ..., n$, la media de $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ es
$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = (E(X_1), ..., E(X_n))$.

Si $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)'$ y $\overline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)'$ son dos vectores aleatorios tales que X_i y Y_j tienen varianza finita, para todo i, j, entonces se define la **matriz covarianza** de $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ siendo la matriz: $cov(\overline{X}, \overline{Y}) = E[(\overline{X} - E(\overline{X}))(\overline{Y} - E(\overline{Y}))']$.

En el contexto n-dimensional un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$ definidas sobre un espacio de probabilidades (Ω, F, P), donde se remarca que para cada $t \in T$ fijo se tiene una función $X_t(\bullet)$ definida sobre Ω. Así mismo, para $w \in \Omega$ fijo, $X_\bullet(w)$ es una función sobre T. Por otro lado, las funciones $\{X_\bullet(w)/w \in \Omega\}$

sobre T son llamadas las **realizaciones o muestras** del proceso $\{X_t\}t \in T$. Así mismo, si $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso tal que la varianza de X_t es finita para cada $t \in T$, entonces

$$E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))], \text{ donde } r, s \in T,$$

es llamada la función **autocovarianza** de $\{X_t\}$; y se denota $cov(X_r, X_s)$.

Nota 2.4. *Cuando $T = Z$ (los enteros), el proceso $\{X_t\}_{t=0,\pm1,\pm2,...}$ se llama una serie de tiempo, la cual es usada frecuentemente en la teoría de probabilidades.*

En los procesos estocásticos se tiene la idea de filtración la que está relacionada con las martingalas. Veamos algunos argumentos, [9]. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, donde F es una σ-álgebra. Se tiene la definición

Definición 2.5. *"Una filtración es una familia de σ-álgebras $\{F_n\}$, $n = 1, 2, ...$ donde $F_n \subseteq F_m$ si $n \leq m$.* Cuando $F_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$, $n \geq 1$, se tiene la llamada filtración cánónica del proceso $\{X_n\}_{n\geq1}$.

En el caso de tiempo continuo se tienen ideas análogas con $\{F_t\}_{t\geq0}$. En este contexto se dice que:

"Un proceso estocástico $\{X_n\}_{n\geq1}$ es adaptado a una filtración $\{F_n\}_{n\geq1}$ si la variable X es F_n-medible, para cada $n \geq 1$". Así mismo se dice que:

"Un proceso $\{X_n\}_{n\geq1}$ es predecible respecto a la filtración $\{F_n\}_{n\geq0}$ si para cada $n \geq 1$, X_n es F_{n-1}-medible". Por otro lado, se tiene también la noción de tiempo de paro (recordemos la sección 3). Una variable aleatoria X_p con valores en $N \cup \{\infty\}$ es llamada un tiempo de paro respecto a la filtración $\{F_n\}_{n\geq1}$ si para cada $n \geq 1$ se tiene $\{X_p \leq n\} \in F_n$". Cuando se tiene el caso tiempo continuo se tiene la definición: "$X_p : \Omega \to [O, \infty) \cup \{\infty\}$ es un tiempo de paro respecto a una filtración $\{F_t\}_{t\geq0}$ si se tiene que para cada $t \geq 0$, $(X_p \leq t) \in F_t$.

En este contexto, y una vez más!, se tiene la noción de martingala: "Un proceso estocástico discreto $\{X_n\}_{n\geq1}$ es llamado martingala, respecto a una filtración $\{F_n\}_{n\geq1}$ si se verifica que:

- $\int_\Omega X_n dP < \infty$.
- El proceso es adaptado a la filtración $\{F_n\}_{n\geq1}$.
- $E(X_m/F_n) = X_n$ ctp. para todo $n \leq m$ (condición de la martingala). (*)

Nota 2.5. *Si en (*) en lugar de tener $=$, se tiene $\geq$, el proceso se llama una submartingala; y si se tiene $\leq$, se llama una supermartingala. Para interpretar esta definición, volver a los ejemplos motivadores dados en la sección 3.*

3. Análisis Armónico-Estocástico. Los Espacios H^p y BMO.

En esta sección continuamos explorando la interrelación entre el clásico análisis armónico y el análisis estocástico, y su relación con los, también, clásicos espacios de Hardy y los espacios de oscilación media acotada, BMO. Todo ello es estimulado porque rescatando resultados centrales de un análisis "puro"se encontraron modelos análogos en un análisis que tiene muchas aplicaciones concretas, al mundo donde vivimos. Y esto es importante, y un objetivo de este escrito es rescatar tal valor como una motivación para un lector interesado en estos temas.

3.1. El Espacio $H^p(\mathbb{R})$.

, $1 < p < \infty$. La evolución de los espacios H^p está relacionado con fundamentales cuestiones del análisis real y del complejo. Veamos; sea $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, esto es, $\int_\mathbb{R} |f(x)|^p dx < \infty$, al cual le asociamos la función analítica $F(x+it) = U(x,t)+iV(x,t)$, donde $U(x,t) = P(x,t)*f$ (convolución), siendo $P(x,t) = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}$ el núcleo de Poisson y $V(x,t) = Q(x,t)*f$, donde $Q(x,t) = \frac{x}{\pi(t^2+x^2)}$ el núcleo conjugado de Poisson. Se verifica que
$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p dx \leq A_p ||f||_{L^p}^p$, para todo $t > 0$, lo que sugiere la definición:

$$H^p(\mathbb{R}) = \{F(x+it) \text{ analíticas}/||F||_{H^p} = \left(\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Se tiene la aplicación bicontinua $L^p \to H^p$, $f(x) \to F(x+it)$ que satisface
$||f||_{L^p} \leq ||F||_{H^p} \leq A_p ||f||_{L^p}$.

Aún más, tal aplicación es sobreyectiva y L^p es isomorfo topológicamente con H^p. Si $p = 1$ se verifica que la aplicación $H^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$,
$F(x,t) \to f(x) = \lim_{t\to 0} U(x,t)$ es inyectiva y continua pero no sobre. La imagen de H^1 es la clase de las funciones $f \in L^1$ tal que $\hat{f} \in L^1$.

Caso n-dimensional. Para definir $H^p(\mathbb{R}^n)$ se exigen condiciones extras; sea $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$ y $F(x,t) = (u_0(x,t), u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$, donde las componentes son funciones armónicas en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y la correspondiente matriz jacobiana J, tiene traza cero. Bien; bajo ciertas condiciones ("las condiciones de Cauchy-Riemann") se define

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \{F(x,t)/||F||_{H^p} = \left(\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, 1 < p < \infty.$$

Nota 3.1. *La definición de $H^p(\mathbb{R}^n)$ tiene sentido para $0 < p < \infty$, pero el rango $0 < p < 1$ es más delicado.*

Los espacios $H^p(\mathbb{R}^n)$ son caracterizados en términos de la función maximal no-tangencial. Veamos. Sea $u(x,t)$ una función armónica definida sobre R^{n+1}_+, a la que se le asocia la función maximal (recordemos al teorema de Calderón! Sec. 1.2) $u^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |u(y,t)|$, llamada la función maximal no-tangencial de $u(x,t)$ (o de f si u es la integral de Poisson de f). En el caso particular $n = 1$ y $F(x+it) = U(x,t) + iV(x,t) \in H^p(\mathbb{R})$, se verifica que la función $F^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |F(y+it)|$ está en L^p y se tiene $||F^*||_{L^p} \simeq ||F||_{H^p}$.
Además se verifica que $||u^*||_{L^p} \simeq ||F||_{H^p}$, esto es $||F^*|| \approx ||u^*||_{L^p}$. Recíprocamente, si u es una función armónica en $\mathbb{R}^2_+$ tal que $u^* \in L^p$, entonces u es la parte real de un elemento en H^p. En conclusión se tiene el fundamental resultado de Burkholder-Gundy-Silverstein de 1971, [10]:

"Los elementos de $H^p(\mathbb{R})$ se identifican con las funciones armónicas cuyas funciones maximales no-tangenciales están en $L^p(\mathbb{R})$". Un argumento similar vale en $\mathbb{R}^n$, lo que permite dar la redefinición
"$H^p(\mathbb{R}^n) = \{u(x,t)$ armónicas $/u^*(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$", donde además se tiene
$||u||_{H^p(\mathbb{R}^n)} \simeq ||u^*||_{L^p}$, $1 < p < \infty$.

3.2. Los Espacios BMO.

. Los espacios de oscilación media acotada, BMO, fueron introducidos por F. John-L. Nirenberg en 1961, [11], espacios que fueron muy investigados en conexión con distintas áreas del análisis armónico y estocástico. Por definición se tiene:

$$BMO = \{f \in L^1(Q_0)/[f]_{BMO} = \sup_{Q\subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq M < \infty\},$$

donde Q_0 es un cubo fijo en $\mathbb{R}^n$, y tanto Q_0 como Q son cubos con lados paralelos a los ejes coordenados; f_Q es el promedio $\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$. Con la norma $||f||_{BMO} = [f]_{BMO} + ||f||_{L^1(Q_0)}$, BMO es un espacio de Banach.

En la segunda mitad del siglo pasado estos espacios fueron investigados, generalizados y aplicados a diversas áreas del análisis, como son las ecuaciones en derivadas parciales, las funciones analíticas, la teoría de la probabilidad, en particular en el análisis estocástico que ahora nos interesa, los espacios de tipo parabólico, en la teoría de interpolación, ... Observemos que el espacio de la funciones acotadas, L^∞, está contenido en BMO; así como $BMO \subset L^p(Q_0)$, para $1 < p < \infty$; esta observación es importante cuando se comprobó que BMO es el adecuado substituto de L^∞ en ciertas situaciones que fallan en el caso límite L^∞. Así mismo, el substituto de L^1 es el espacio de Hardy H^1 ($\subset L^1$), definido (esta vez!) por

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1/R_j f(x) \in L^1, j = 1, 2, ..., n\},$$

donde R_j es la transformada de M. Riesz, definida por $[R_j f]\hat{}(x) = \frac{x_j}{|x|}\hat{f}(x)$. H^1 es un espacio de Banach con la norma $||f||_{H^1} = ||f||_{L^1} + \sum_{j=1}^n ||R_j f||_{L^1}$.

Un fundamental resultado que relaciona H^1 con BMO fue establecido por Ch. Fefferman en 1971, [2], y ampliamente desarrollado por el central trabajo de Fefferman-Stein, [3] en 1972; tal teorema afirma que $(H^1)^* = BMO(* = \text{dualidad})$, donde $< f, g >= \int f(x)g(x)dx$, con $f \in \mathscr{S}_0$, $g \in BMO$. Tal funcional se extiende por continuidad a una forma bilineal continua sobre $H^1 \times BMO$. Se tiene la siguiente caracterización:

"$g \in BMO$ **si y solo si** $g = g_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j g_j$, donde $g_j \in L^\infty$, $j = 0, 1, ..., n$".

3.3. Los Operadores Integrales Singulares. [5]. De un modo general sobre los espacios BMO y H^1, y sus respectivas generalizaciones, se hacen actuar operadores de tipo convolución, como son los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund $Tf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)f(y)dy$, donde el núcleo $h(x)$ es homogéneo de grado $-n$, esto es satisface $h(\lambda x) = \lambda^{-n}h(x)$ ó $h(x) = |x|^{-n}h(\frac{x}{|x|})$; $\int_\Sigma h(x)d\sigma = 0$; además $h(x)$ satisface ciertas condiciones de regularidad, como $h \in C^\infty(\Sigma)$, donde $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n/|x| = 1\}$ (la esfera unitaria). En la teoría clásica se sabe que: "$T : L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$, es un operador continuo", y que los casos críticos son $p = 1$ y $p = \infty$, lo que resalta el papel de los espacios BMO y H^1. De un modo general, en el contexto de los operadores tipo convolución, se tiene el teorema de U. Neri, [12], "si $g \in L^1$, entonces $T : H^1 \to H^1$, $f \to g * f$, es un operador continuo el que se extiende a un operador continuo sobre BMO, con norma $\leq ||g||_{L^1}$".

La extensión de estos espacios, BMO y H^1, a los de tipo Sobolev es vía ($k \in \mathbb{Z}^+$):
$H^1_k = \{f \in H^1/D^\alpha f \in H^1, |\alpha| \leq k\}$, $||f||_{H^1_k} = ||f||_{H^1} + \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{H^1}$,
$BMO_k = \{f \in BMO/D^\alpha f \in BMO, |\alpha| \leq k\}$,
$||f||_{BMO_k} = ||f||_{BMO} + \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{BMO}$, espacios que con sus respectivas normas, son espacios de Banach. Se tiene, [12]:
"si h es un núcleo de Calderón-Zygmund, entonces se tiene $T : H^1_k \to H^1_k$, $f \to h * f$, y $T : BMO_k \to BMO_k$, $f \to h * f$, son operadores continuos".

Por lo expuesto, vamos sintiendo que mucho de lo investigado en el análisis armónico ha encontrado el lenguaje apropiado en el análisis estocástico y así tener teorías que pueden resolver situaciones concretas de nuestra vivencia. En particular, resaltamos la conexión tenida de clásicas teorías con las series de Fourier, una teoría central que surgió a inicios del siglo XIX y que tuvo una gran influencia en el desarrollo de importantes teorías en el siglo XIX, el XX y aún en el presente. Una visión de este progreso lo da el capítulo 2 del libro de Petersen, [1], que nos permitimos reproducir porque nos ayuda a comprender la evolución de las ideas clásicas que se hicieron en el análisis armónico y que algunas fueron reproducidas en relación con el movimiento browniano, los espacios de Hardy H^p y los espacios BMO; así como se encontraron relaciones con los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund e ideas afines, como la teoría de Littlewood-Paley, por ejemplo. Veamos algunas notaciones a ser usadas. D es el disco unitario $\{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ en el plano complejo, $\Gamma = \{e^{i\theta}/0 \leq \theta < 2\pi\}$ es su contorno siendo m su normalización. Sea f una función definida sobre D, $0 < p < \infty$ y $0 \leq r < 1$; entonces se define $M_p(r, f) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p dm(\theta)\right)^{\frac{1}{p}}$. En este contexto, una función analítica f definida sobre D pertenece al espacio H^p si $\sup_{r<1} M_p(r, f) = ||f||_p < \infty$. H^∞ es el espacio de las funciones analíticas acotadas sobre D. $\tilde{u}$ representa la única función conjugada de u, una función armónica de valor real. Sea $0 < \sigma < 1$ fijo; sea un círculo de centro en el origen y radio σ; y sea $e^{i\theta}$ un punto sobre la frontera de D; de este punto se traza las dos tangentes al anterior círculo; esto determina un dominio que se denotará con $\Omega_\sigma(\theta)$ a su interior. ("idea de convergencia no-tangencial"). Entonces:

- la clásica **función maximal** de una función f, definida sobre D es $N_\sigma f(e^{i\theta}) = \sup\{|f(z)|/z \in \Omega_\sigma(\theta)\}$; así mismo se definen:

- la **función cuadrado** $S_\sigma F(e^{i\theta}) = \left[\int\int_{\Omega_\sigma(\theta)} |F'(z)|^2 dxdy\right]^{\frac{1}{2}}$, donde F es una función analítica sobre D;

- la función de **Littlewood-Paley** $g_{_F}(e^{i\theta}) = \left[\int_0^1 (1-r)|F'(re^{i\theta})|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}$, donde F es una función analítica sobre D.

Ahora veamos las contribuciones hechas en el siglo pasado, las que están relacionadas con trabajos hechos en el análisis estocástico (martingalas, ...).

(i) En 1930 G. H. Hardy-J. E. Littlewood, [13], verificaron que "para cada p , $0 < p < \infty$, existe una constante c tal que si $F = u + i\tilde{u}$ es analítica sobre D entonces se tiene

$$|N_\sigma F(e^{i\theta})|^p dm(\theta) \leq c \sup_{0\leq r\leq 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p dm(\theta),$$

esto es $||N_\sigma F||_{L^p(\Gamma)} \leq c_p ||F||_{H^p}$.

(ii) En 1930 N. Lusin, [14], probó que "para todo σ, $0 < \sigma < 1$, existe una constante A_σ tal que si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ está en H^2, entonces se tiene $\int_0^{2\pi} [S_\sigma F(e^{i\theta})]^2 dm(\theta) \leq A_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$". Se observa entonces que se tiene $S_\sigma F(e^{i\theta}) < \infty$, ctp θ.

(iii) Los matemáticos polacos J. Marcinkiewicz y A. Zygmund probaron en 1938, [15], que

- "Para cada σ, $0 < \sigma < 1$, p con $0 < p < \infty$, existe una constante $A_{p,\sigma}$ tal que $||S_\sigma F||_{L^p(\Gamma)} \leq A_{p,\sigma} ||F||_{H^p}$, donde F es una función analítica sobre D".
- "Si F es una función analítica sobre D y tiene un límite no-tangencial en todo punto de un subconjunto E de Γ, el cual tiene medida positiva, entonces se tiene $S_\sigma F(e^{i\theta}) < \infty$, ctp sobre E.

(iv) En 1943 D. Spencer, [16], prueba que: "Si F es una función analítica sobre D, si $E \subset \Gamma$ tiene medida positiva y si para cada $e^{i\theta}$ existe $\sigma(\theta)$, $0 < \sigma < 1$, tal que $S_\sigma F(e^{i\theta}) < \infty$, entonces F tiene un límite no-tangencial en todo punto de E".

(v) En 1931 Littlewood-Paley, [17], probaron que "para cada p, $0 < p < \infty$, existe una constante C_p tal que si F es una función analítica sobre D, entonces se tiene $||g_{_F}||_{L^p(\Gamma)} \leq C_p ||F||_{H^p}$". Recíprocamente, para $1 < p < \infty$, existe una constante B_p tal que para cada F analítica sobre D se tiene $||F||_{H^p} \leq B_p ||g_{_F}||_{L^p(\Gamma)}$".

(vi) Marcínkiewicz-Zygmund en 1938, [2], nos dicen: "para cada σ, $0 < \sigma < 1$, existe una constante A_σ tal que si F es una función analítica sobre D, entonces se tiene

$$g_{_F}(e^{i\theta}) \leq A_\sigma S_\sigma F(e^{i\theta}), \text{ para todo } \theta \in [0, 2\pi]".$$

Nota 3.2. *En 1938 G. Gasper extendió algunos de estos resultados sobre $g_{_F}$ y $S_\sigma F$ a mayores dimensiones; ver [18]. Así mismo, M. Riesz en 1920 hizo notables contribuciones a los espacios H^p, $0 < p < \infty$, donde $H^p = \{u$ armónica de valor real en $D / ||u||_{H^p} = \sup_{0\leq r<1} M_p(r,u) < \infty\}$, y $H^\infty = \{u$ armónica limitada de valor real en D con la norma del supr Entonces Riesz prueba que para p, $1 < p < \infty$, existe una constante C_p tal que se tiene*

$$||\tilde{u}||_{H^p} \leq C_p ||u||_{H^p}, \text{ para todo } u \in H^p.$$

(vii) Le debemos al matemático ruso A. N. Kolmogorov el siguiente resultado, 1925, [19]: "para cada p, $0 < p < 1$, existe una constante C_p tal que si $u \in H^1$ entonces $||\tilde{u}||_{H^p} \leq C_p ||u||_{H^1}$". En 1974 B. Davis, [20] usó el movimiento browniano para dar una demostración de este resultado de Kolmogorov y encontró mejores valores para la constante C_p.

Una Visión del Espacio Dual de H^p, [1]. Recordemos que el dual de H^1 es BMO, donde BMO es el substituto de L^∞ y que H^1 es el substituto de L^1 pues los casos críticos de los espacios L^p son $p = 1$ y $p = \infty$. Es posible que este resultado de Fefferman haya sido motivado por el trabajo de M. Riesz sobre los espacios L^p, $1 \leq p < \infty$. El resultado de Riesz dado en la Nota anterior sugirió que si $g \in L^q(\Gamma)$ para algún $q > 1$ (y entonces existe una expansión $g(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$), entonces esta expansión está en H^q. Esta observación motivó para identificar al espacio dual de H^p, $1 \leq p < \infty$. Se llegó a demostrar que $(H^p)^* = H^q$, donde $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En esta dirección se tienen las contribuciones A. E. Taylor ,1950, [21] y otros trabajos.

El Enfoque Martingala. Ya hemos manifestado que muchas de las ideas del análisis armónico fueron puestas en la teoría de las martingalas. Se han escrito muchos trabajos al respecto; algunos de ellos aparecen en las Referencias. Veamos. Sea la sucesión f_1, f_2, ..., f_n, ... una martingala, donde $E(f_{n+1}/f_1, ..., f_n) = f_n$, entre otros detalles. Entonces se define:

(a) la función maximal de $\{f_n\}$ es $f^* = \sup_n |f_n|$;

(b) la función cuadrado de $\{f_n\}$ vía $Sf = [\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)^2]^{\frac{1}{2}}$.

Entonces, D. L. Burkholder en 1966, [6], probó que para cada p, $1 < p < \infty$, existen las constantes c_p y C_p tal que se tiene: $c_p||Sf||_p \leq ||f^*||_p \leq C_p||Sf||_p$. Este resultado fue extendido por B.Davis en 1970, [22], para el caso $p = 1$. En el caso de las martingalas, el resultado anterior fue extendido a $0 < p < 1$ por Burkholder-Gundy en 1970, [23], siempre que las martingalas satisfagan ciertas condiciones de regularidad. En [10] Burkholder-Gundy-Silverstein (BGS), 1971, verifican el vital resultado: "para cada σ, $0 < \sigma < 1$, y p, $0 < p < \infty$, existen las constantes c_σ y $C_{\sigma,p}$ tal que si u es una función armónica sobre D y $F = u + i\tilde{u}$ es su relacionada función analítica, entonces se tiene

$$c_{\sigma,p}||N_\sigma u||_{L^p(\Gamma)} \leq ||F||_{H^p} \leq C_{\sigma,p}||N_\sigma u||_{L^p(\Gamma)}".$$

Este resultado de (BGS) jugó un rol muy importante en el estudio de los clásicos espacios de Hardy, los cuales fueron llevados al lenguaje de las martingalas donde también contribuyeron B. Davis y otros. En esta ruta el problema de la dualidad, notablemente estudiado por Ch. Fefferman-E.Stein, [3], también fue investigado vía las martingalas. El arriba teorema de (BGS) también implica que "si $0 < p < \infty$, entonces $F \in H^p$ **si y solo si** la función maximal de $Re(F)$ está en L^p".

(viii) Regresamos al trabajo de Fefferman-Stein, [3]; se establece que: "si $F = u + i\tilde{u}$ es una función analítica sobre D y $0 < p < \infty$, entonces
$F \in H^p$ **si y solo si** $N_\sigma F \in L^p$ **si y solo si** $S_\sigma F \in L^p$ **si y solo si** $S_\sigma u \in L^p$ **si y solo si** $N_\sigma u \in L^p$".
En el mismo trabajo Fefferman-Stein establecen que:
"para una función de valor real $\phi \in L^2(\Gamma)$ con $\int \phi dm = 0$, se tiene
existe una constante C tal que $\left|\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})(\phi(e^{i\theta})dm(\theta)\right| \leq C||F||_{H^1}$ para todo $F \in H^1$ (m medida de Lebesgue) **si y solo si** $\phi = \psi_1 + \tilde{\psi}_2$, donde
$\psi_1, \psi_2 \in L^\infty(\Gamma)$ **si y solo si** $\phi \in BMO$ **si y solo si**
$||\phi||_{BMO} = \sup_I \frac{1}{m(I)} \int_I \left|\phi - \int_I |\phi|\right| < \infty$, I intervalo". Además, se dedujo que toda funcional lineal continua sobre H^1 es determinada por una única función $\phi \in BMO$ y que $(H^1)^* = BMO$.

4. H^p y BMO-Martingalas. Temas Afines. El capítulo 7 del libro de Petersen, [1], está dedicado a las versiones martingalas de los espacios H^p y BMO. Como ya se ha mencionado, las versiones clásicas de estos espacios y otros temas relacionados fueron puestos en el lenguaje de las martingalas. En esta sección pretendemos dar una visión de estos aspectos, donde se ha escrito mucho. Veremos nuevamente las nuevas versiones de los ya mencionados analistas armónicos como Burkholder, Gundy, Garsia, ..., y de otros.

Veamos algunos argumentos; Seguimos a N. Roussanov, [24]. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión decreciente de σ-álgebras tal que $\bigcup_n F_n = F$. Recordemos que una sucesión $f = \{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, es una martingala si cada f_n es integrable, si f_n es F_n-medible para todo $n \in \mathbb{N}$ y si $E(f_m/F_n) = f_n$ para todo $n \leq m$. Si $\{f_n\}$ es una martingala se usará la siguiente notación: $d_0 f = 0$, $d_n f = f_n - f_{n-1}$;

la función maximal $f^* = \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_m|$; $f_n^* = \sup_{m\leq n} |f_m|$;
la función cuadrática $S_m(f) = \left(\sum_{n\leq m} |d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $S(f) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
la variación cuadrática condicional $s_m(f) = \left(\sum_{n\leq m} E_{n-1}/|d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
$s(f) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_{n-1}/|d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

4.1. Espacio de Hardy Martingala. Sea $0 < p \leq \infty$; por definición:
$mH^{p,s} = \{$ espacio de martingalas $/||f||_{H^{p,s}} = ||s(f)||_p < \infty\}$,
$mH^{p,S} = \{$ espacio de martingalas $/||f||_{H^{p,S}} = ||S(f)||_p < \infty\}$,
$mH^{p,*} = \{$ espacio de martingalas $/||f||_{H^{p,*}} = ||f^*||_p < \infty\}$,

Nota 4.1. *Se usa la notación* $mH^p \equiv mH^{p,S}$.

Nota 4.2. *Si* $f \in L^1$ *se observa que la sucesión* $\underline{f} = (E_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una martingala.* *(*$E_n f = E(f/F_n)$*).*
Si $q \geq 2$ *y* $f \in L^2$*, para una martingala* $\underline{f}$ *sean las funciones* $\tilde{y}$ *tal que*
$E_n(|f - E_{n-1}f|^2) \leq E_n(\tilde{y}^2)$, $n \in \mathbb{N}$ *, entonces se define*
$mH^q = \{f \in L^2/||f||_{H^q} = \inf_{\tilde{y}}[E(\tilde{y}^q)]^{\frac{1}{q}} \leq \infty\}$.

4.2. Espacio BMO-Martingala. Sea $1 < q < \infty$, entonces

$$mBMO = \{f \in L^p/||f||_{BMO_f} = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||(E_n|f - E_{n-1}f|^q)^{\frac{1}{q}}||_q < \infty.\}$$

Vamos a tratar de "digerir" estas expresiones de un modo más explícito y pensando en el teorema de la dualidad de Fefferman, [25]. Sea la sucesión $\{f_n\}$, $n \geq 1$, donde $f_n = E(f/F_n)$, tal que satisface:

(a) f_n es F_n-medible para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $E(f_{n+1}/F_n) = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c) $f_n \in L^1$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(d) $\sup_n ||f_n||_1 < \infty$.

Si una sucesión $f = \{f_n\}$ satisface (a) a (d), se dice $f \in mL^1$ ("L^1-martingala"). Se tiene el siguiente resultado (Doob, [8], [25]): "si $f = \{f_n\} \in mL^1$, entonces $f_n \to g$ ctp., para alguna función g en L^1".

4.3. Espacios L^p-martingala, $1 < p < \infty$. . Por definición

$$mL^p = \{f = \{f_n\}/f \text{ es una martingala y } ||f||_{mL^p} = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{L^p} < \infty\}.$$

Nota 4.3. mL^p *es un espacio de Banach. Además, se observó que si* $1 < p < \infty$*, entonces* $mL \simeq L^p$*.* Sea ahora $f \in L^1(\Omega, F)$; por definición (el operador maximal de f como una martingala): $Mf = \sup_n E(f/F_n)$. El espacio H^1 martingala se define vía

$$mH^1 = \{f \in L^1(\Omega, F)/||f||_{mH^1} = ||Mf||_{L^1} < \infty\}.$$

Ahora sea $f^\# = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(|f - f_{n-1}|/F_n)$. El espacio BMO - martingala es

$$mBMO = \{f \in L^1(\Omega, F)/||f||_{mBMO} = ||f^\#||_{L^\infty} < \infty\}.$$

4.4. Teorema de la Dualidad Martingala. [3]. "$(mH^1)^* = mBMO$". Este artículo de Ch. Fefferman-E. Stein contiene un gran avance en la teoría de los espacios H^p y contribuyó a mayores investigaciones sobre tales espacios, sobre todo en el caso de varias variables. Ahí se desarrolla más la dualidad H^1-BMO introducida por Fefferman, en el contexto clásico, y luego puesta en el lenguaje de las martingalas. Contiene cinco capítulos:

I. Introducción.

II. Dualidad de H^p y BMO.

III. Aplicaciones a las acotaciones en L^p.

IV. Caracterización de H^p en términos de propiedades de contorno de funciones armónicas.

V. Teoría de variable-real de H^p.

Veamos algunos argumentos de la Introducción pues nos da interesantes mensajes sobre lo que tratará el "paper". La clásica teoría de los espacios H^p tiene una interesante historia desde la época de Hardy; ella está relacionada con la teoría de funciones complejas y con las series de Fourier y su formulación n-dimensional comenzó en 1960 en un trabajo de Stein-G. Weiss. Los autores de [3] mencionan que el objetivo de tal investigación es presentar un nuevo punto de vista de los espacios H^p en el contexto de la variable real. Precisan que tres centrales ideas les motivaron su trabajo:

(a) los resultados sobre la acotación de ciertos operadores integrales singulares (teoría de Calderón-Zygmund) podrían ser extendidos de los espacios L^p, $1 < p < \infty$, a los espacios H^p, $p \leq 1$.

(b) El trabajo de Burkholder-Gundy-Silverstein, [10], ya mencionado arriba, motivó a Fefferman-Stein de cómo su teorema podría ser extendido a n-dimensiones. Veamos la idea. Sea $f = u + iv$ una función analítica; entonces, "$f \in H^p$; $0 < p < \infty$ **si y solo si** la función maximal no-tangencial de u está en L^p". Este resultado fue probado usando el movimiento browniano y así surgen puentes entre el análisis armónico y el análisis estocástico.

(c) La tercera idea fue la identificación del espacio dual de H^1 con el espacio BMO, el espacio de las funciones de oscilación media acotada, resultado establecido por Fefferman en [2] y que es el substituto de L^∞. Mencionamos que la versión martingala del teorema de dualidad fue establecido por A. Garsia-C. Herz. Además, Fefferman-Stein exploran nuevos caminos sobre el espacio H^1 y posibles extensiones a H^p, $p < 1$. El lector interesado en estos temas es sugerido ver el trabajo de Fefferman-Stein, [3].

Veamos algunos otros aspectos sobre el teorema de dualidad en relación con las martingalas y temas afines. El punto de partida es el artículo de Ch. Fefferman [2], en donde se anuncian cuatro teoremas, que son:

Teorema 4.1. *"BMO es el espacio dual del espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$, donde el producto interno es dado por $< f, g >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$ con $f \in BMO$ y g pertenece al subespacio denso C^∞ de las funciones rápidamente decrecientes en H^1".* Recordamos que H^1 es el espacio de las funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ cuyas transformadas de Riesz $R_j(f)$ están todas en L^1.

Teorema 4.2. *"$f \in BMO$ **si y solo si** $f = g_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j(g_j)$, donde g_0, g_1, ..., g_n están en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$".*

Nota 4.4. *Ver [26] para mayores detalles sobre la transformada de Riesz.* Fefferman dice que la idea central de las pruebas de T_1 y T_2 es el estudio de la integral de Poisson de una función en BMO.

Teorema 4.3. *"$f \in BMO$ **si y solo si** $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(|x|+1)^{n+1}}dx < \infty$ (*) y $\int_{|x-x_0|<\delta,\ 0<t<\delta} t|\nabla u(x,t)|^2 dxdt \leq C\delta^n$ para todo $x_0 \in R^n$ y $\delta > 0$, donde si f satisface (*), ella tiene una integral de Poisson $u(x,t)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+1}_+$".* Fefferman afirma que los teoremas (4.1) a (4.3) pueden ser usados para estudiar al espacio H^1.

Teorema 4.4. *"Sea $F = (u_0(x,t); u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ una función armónica sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfaciendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ver [26]. Si la función maximal no-tangencial $u_0^*(x) = \sup_{|x'|<t,\ t>0} |u_0(x-x',t)|$ está en L^1, entonces F está en H^1".* Este resultado, dice Fefferman, generaliza al resultado 1-dimensional de D. Burkholder-R. Gundy-M. Silverstein, [10]. Estos teoremas, y otros temas, fueron desarrollados en el artículo de Fefferman-Stein, [3] en donde se establece (en el lenguaje de las martingalas;

ver [27]) que
"existe una constante universal C tal que para dos martingalas $f_n = E(f/F_n)$ y $g_n = E(g/F_n)$, donde $f_0 = 0$, se tiene

$$\left| \int_{\Omega} f_n g_n dP \right| \leq C ||f||_{H^1} ||g||_{BMO}. \tag{4.1}$$

Por otro lado, Burguess Davis, en 1970, [22], estableció las desigualdades

$$\frac{1}{C_1} E(f^*) \leq E(S(f)) \leq C_2 E(f^*), \text{ para todo } f \text{ tal que } E(f/F_0) = 0 \tag{4.2}$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes universales".

Garsia, en [27], prueba que ambos lados de 4.2 siguen de 4.1, y de esta manera un resultado en el análisis armónico sirve para establecer uno en el análisis estocástico. Por razones de completitud veamos las notaciones usadas en 4.1 y 4.2, [27]; sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidades y sea $F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n \subset ...$ una sucesión de σ-álgebras tal que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Si f es una variable aleatoria en $L^1(\Omega, F, P)$ se pone: $f_n = E(f/F_n)$, $\Delta f_n = f_n - f_{n-1}$; $f_n^* = \max_{m \leq n} |f_m|$, $f^* = \sup_n |f_n|$; $S_n(f) = (\sum_{m=1}^{n} \Delta f_m^2)^{\frac{1}{2}}$, $S(f) = \sup S_n(f)$.
Se tienen los espacios: $H^p = \{f/E([S(f)]^p) < \infty\}$, con la norma $||f||_{H^p} = [E([S(f)]^p]^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$; y $BMO = \{f/\sup_{n \geq 1} ||E(|f - f_{n-1}|^2/F_n)||_\infty < \infty$ con la norma
$||f||_{BMO} = \sup_{n \geq 1} ||[E(|f - f_{n-1}|^2/F_n)]^{\frac{1}{2}}||_\infty$.

El análogo martingala del teorema de la dualidad de Fefferman fue probado por Garsia y C. Herz, con contribuciones de R. Gundy. Recordamos que los espacios BMO fueron introducidos por John-Nirenberg (JN) y fueron puestos en el contexto BMO_p con $1 < p < \infty$, y su contexto martingala exige algunas condiciones complementarias. En [28], C. Herz introduce el espacio BMO_p, $1 \leq p < \infty$, los H^1-martingalas, y diversas otras ideas al respecto (es un artículo un tanto técnico). En [29], Herz estudia el dual del espacio H^p-martingala, $0 < p \leq 1$, y que el dual puede ser caracterizado como un espacio de Lipschitz $\bigwedge_\alpha$, $\alpha = \frac{1}{p} - 1$; observa que cuando $p = 1$ y $\alpha = 0$ se obtiene el clásico teorema de Fefferman. También considera la teoría martingala de la transformada de Hilbert al estilo de los operadores de Calderón-Zygmund. Este artículo es más "digerible" y puede ser de interés estudiarlo en relación con los espacios H^p-martingala, $0 < p \leq 1$.

5. Donald Burkholder. (1927 - 2013). Esta sección la dedicamos al Professor D. Burkholder por sus contribuciones a la teoría de la probabilidad, en particular a la teoría de las martingalas, y su conexión con el análisis armónico. Burkholder recibió su PhD en estadística en 1955 por la U. North Carolina. Fue invitado a dar diversas conferencias, lecturas en diversos congresos; en particular en el Congreso en honor a A. Zygmund en Chicago, 1988. Fue electo miembro de la Academia de Ciencias de los EEUU en 1992. Fue reconocido por distintas instituciones académicas por sus contribuciones a la teoría de la probabilidad, a los procesos estocásticos, al análisis funcional y al análisis de Fourier.

Demos una visión de algunos de sus trabajos:

(i) **"Integral Inequalities for Convex Functions of Operators on Martingales"** ,con B. J. Davis y R. F. Gundy, [30]. Sea M una familia de martingalas sobre un espacio de probabilidades (Ω, F, P) y sea ϕ una función no-negativa sobre $[0, \infty]$. Cuestión; si U y V son operadores sobre M con valores en el conjunto de las funciones F-medibles, no-negativas, sobre Ω, ¿bajo que condiciones adicionales se tendrá que $\lambda^{p_0} P(Vf > \lambda) \leq c||Uf||_{p_0}^{p_0}$, $\lambda > 0$, $f \in M$, implicará que $E\phi(Vf) \leq cE\phi(Uf)$, $f \in M$? ... E es la esperanza, la integral es sobre Ω con respecto a P y c denota un real positivo, no necesariamente la misma.

(ii) **Inequalities for Operators on Martingales**, [31]. En este artículo de 1970, Burkholder informa sobre recientes desarrollos en la teoría de extrapolación de operadores; así, una aplicación a las funciones armónicas conjugadas conduce a una caracterización de la función maximal de la clase de Hardy H^p, lo que es descrito en

el trabajo [10]. Nos dice que un operador definido en el espacio L^p, $p \geq 1$, de un espacio de probabilidad, puede ser visto como un operador sobre una familia de martingalas, lo que es más conveniente en dicho trabajo. El resultado central dice, ver (i):
"Sea M una familia de martingalas sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y U y V son operadores sobre M, con valores en el conjunto de las funciones F-medibles, no-negativas. Si ϕ es una función no-negativa sobre $[0, \infty]$, ¿ bajo qué condiciones se tiene $E\phi(Vf) < cE\phi(Uf)$, $f \in M$?, ..., ¿capaz de la desigualdad $||Vf||_1 \leq c||Uf||_2$, $f \in M$?, que es más facil de probar!

(iii) **Boundary Behaviour of Harmonic Functions in a Half-Space and Brownian Motion**, [32]. A. Calderón en 1950, [33], estudia un problema propuesto por A. Zygmund que trata sobre el comportamiento de las funciones armónicas en la frontera de un determinado dominio, cuestión que tuvo como antecedentes aportes de Priwaloff, 1923, y de Plessner, 1928; aportes que tuvieron como punto de partida al teorema de Fatou, 1906 : "sea $u(z)$ una función armónica y limitada sobre $|z| < 1$; entonces u tiene límite no-tangencial sobre todo punto $e^{i\theta}$ ctp. de la frontera".
Este argumento está relacionado con el famoso problema de Dirichlet en las EDP's. Calderón prueba para el caso de n-variables el resultado de Priwaloff y aunció: "Sea $F(P)$ una función armónica para $x_n > 0$, $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$, tal que para todo punto Q de un conjunto E de medida positiva del hiperplano $x_n = 0$ existe una región Γ_Q limitada por el cono con vértice en Q y un hiperplano $x_n =$ constante, en donde $F(P)$ es acotada. Entonces, c.t.p. en E, la función tiene un límite conforme P converja a $Q \in E$ no-tangencialmente a $x_n = 0$".

Este artículo de Calderón motivó la evolución de diversas ideas, sobre todo en la teoría del potencial; así, se tienen contribuciones de L. Carleson, 1962, [34], de R. Hunt-R. Wheeden, 1968, B. Dahlberg, 1976, D. Jerison-C. Kenig, 1980, ... En el mismo año, 1950, Calderón publicó otro artículo, [35], sobre las funciones armónicas, el cual extiende un resultado de Marcinkiewicz-Zygmund, 1938. Calderón resuelve el problema: "sea $F(P)$, $P = (x_1, ..., x_n)$, una función armónica para $x_n > 0$, y tal que para todo Q de un conjunto E, $|E| > 0$, sobre el hiperplano $x_n = 0$, existe una región contenida en $x_n > 0$, limitada por un cono con vértice en Q y un hiperplano $x_n =$ constante, donde la función es acotada, entonces ctp., la integral $\int \frac{1}{x_n^{n-2}} grad^2 F dw$ extendida sobre cualquier región limitada por un cono con vértice en $Q \in E$, un hiperplano $x_n =$constante, y contenido en $x_n > 0$, **es finita**". Si $n = 2$ se obtiene el resultado de Marcinkiewicz-Zygmund donde la tesis es $\int grad^2 F dw < \infty$. Se observa también que en 1943 Spencer probó el recíproco del resultado de Calderón, resultado que se puede expresar en la forma (E. M. Stein): "sea F una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Entonces ctp. $Q \in \mathbb{R}^n$, se tiene, F tiene un límite no-tangencial en Q **si y solo si** $A(F)(Q) < \infty$, donde

$$A(F)(Q) = \left[\int_{\Gamma(Q)} |\nabla F|^2 y^{1-n} dx dy \right]^{\frac{1}{2}}, |\nabla F|^2 = \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|^2 \text{''}.$$

Ahora vamos al artículo [32] de Burkholder-Gundy. En relación con el artículo de Calderón y de Marcinkiewicz - Zygmund, Spencer, Privalov y Stein, los autores opinan que el comportamiento de las funciones armónicas en el semi-espacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ fue discutido desde dos puntos de vista: el geométrico y el probabilístico y en el presente artículo ellos van a comparar esos dos puntos de vista con respecto a: (i) la convergencia local en el contorno y (ii) a los espacios H^p, obteniendo las observaciones:(i') la existencia de un límite no-tangencial para ctp. en un conjunto E de medida de Lebesgue positiva en $\mathbb{R}^n \equiv \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$, es más restricta que la existencia de un límite probabilístico ctp. en E, cuando $n \geq 2$; cuando $n = 1$, la existencia de un límite no-tangencial ctp. en E, **implica** la existencia de un límite probabilístico ctp. en E, y recíprocamente. (ii') Para todo $n \geq 1$, la función maximal no-tangencial de u está en L^p, $0 < p < \infty$ **si y solo si** la función maximal-movimiento Browniano está en L^p. De esta manera, según Fefferman-Stein, [3], prueban en $\mathbb{R}^n$: "el espacio H^p definido probabilísticamente coincide con el espacio H^p definido geométricamente". Pero, Burkholder-Gundy observan que los argumentos usados en $\mathbb{R}^2_+$ no pueden ser extendidos a $\mathbb{R}^3_+$.

Se observó que las contribuciones sobre la convergencia local, desde el punto de vista geométrico, se deben a Marcinkiewicz-Zygmund, [15], a Spencer, [36], a Privalov, [37] para $n = 1$, a Calderón, [33] y [35] y a Stein [38] para $n > 1$. Veamos la notación a ser empleada en el siguiente resultado. $\Gamma(x; a, k) = \{(s, y)/|x-s| < ay, 0 < y < k\}$ representa el cono en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con vértice en $x \in \mathbb{R}^n$, altura k, y ángulo a. La función maximal no-tangencial de una función u definida sobre $\mathbb{R}^{n+1}_+$ es definida vía:

$$N(u; a, k) = \sup_{(s,y)\in\Gamma(x;a,k)} |u(s, y)|;$$

y la función área vía: $A(u; a, k)(x) = \left[\int\int_{\Gamma(x;a,k)} |\nabla u(s, y)|^2 y^{1-n} dxdy\right]^{\frac{1}{2}}.$

Se observa que las funciones N y A son funciones monótonas crecientes en los parámetros a y k. Burkholder-Gundy establecen el siguiente resultado que sintetiza los resultados de los mencionados analistas anteriores:

Teorema 5.1. *" Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$, entonces los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ son iguales ctp.*

$$\{x/N(u; a, k)(x) < \infty\}; \{x/A(u; a, k)(x) < \infty\};$$
$$\{x/ \lim_{(s,y)\to x,\ (s,y)\in\Gamma(x;a,k)} u(s, y) \text{ existe y es finito } \}".$$

Ahora, los autores establecen el resultado similar al teorema 5.1 pero en el lenguaje de las probabilidades. Veamos. Sea u una función armónica definida en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y sea $z_t = (x_t, y_t), t > 0$, un movimiento browniano $n+1$-dimensional que se inicia en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ y se frena o para en el tiempo $\tau = \inf\{t/y_t = 0\}$. Esto se llamará "movimiento browniano en $\mathbb{R}^{n+1}_+$", [32]. Se afirma que $u(x_t, y_t)$ es una integral estocástica de la forma:

$$u(x_t, y_t) = u(x_0, y_0) + \int_0^t < \nabla u(z_s), dz_s > .$$

Con P_{x_0,y_0} denotan la medida sobre el espacio de las trayectorias de (x_0, y_0) a $\mathbb{R}^n$ correspondiente al proceso (x_t, y_t), $t > 0$. También mencionan a la medida condicional $P^x_{x_0,y_0}$ correspondiente a un proceso browniano que se inicia en (x_0, y_0) y termina en un punto $x \in \mathbb{R}^n$. [Por definición de la medida condicional se asume: $P^x_{x_0,y_0}(\lim_{t\to\tau} u(x_t, y_t)$ existe y es finito$) = 1$ para todo $x \in Q$ (Q es el cubo unitario en $\mathbb{R}^n$) con la medida Lebesgue].

La función maximal browniano de u es definida vía $u* = \sup_{t<\tau} |u(x_t, y_t)|$. La función área $A(u)$ en su versión browniana es definida vía

$$S(u) = \left[u^2(x_0, y_0) + \int_0^\tau |\nabla u(x_t, y_t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora establecen el análogo al teorema 5.1:

Teorema 5.2. *Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Entonces los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ son iguales ctp. para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$;*
$\{x/P^x_{x_0,y_0}(u^* < \infty) > 0\}$; $\{x/P^x_{x_0,y_0}(S(u) < \infty) > 0\}$ *y*
$\{x/P^x_{x_0,y_0}(\lim_{t\to\tau} u(x_t, y_t)$ *existe y es finito* $) > 0\}$.

Alrededor de las ideas dadas en los citados teoremas 5.1 y 5.2, Burkholder-Gundy presentan diversos resultados usando el lenguaje de las probabilidades.

(iv) **Teoría Martingala y Análisis Armónico en Espacios Euclidianos**, [39]. El siglo XX fue escenario de muchos progresos del análisis real y funcional, así como del análisis estocástico como podemos ver en lo escrito hasta ahora; de un modo general la teoría de la probabilidad fue investigada en su relación con el análisis armónico con aportes de matemáticos vistos en las secciones anteriores y de otros como B. Davis, P. Lévy, N. Wiener, A. N. Kolmogorov, ... La probabilidad tiene desde los años treinta su propia autonomía y es objeto de diversas investigaciones por la utilidad en nuestra vida cotidiana de solución de diversos problemas. En esta ruta está el estudio de las martingalas por su utilidad en el análisis armónico, las integrales singulares, en la teoría ergódica, en las ecuaciones diferenciales estocásticas, ...
Un problema que tuvo en este desarrollo fue el “movimiento browniano”; veamos algunas ideas al respecto. En 1828 (ver sección 2) se observó, en el microscopio, el movimiento caótico de partículas de polen en un depósito de agua las que chocaban con partículas vecinas causando cierto “desorden”. Einstein elaboró una teoría que explicaba tal situación, trabajo que fue muy importante en la física y en la matemática aplicada, así como en la biología, en la economía (bolsa de valores), ingeniería; la teoría de probabilidades se aplicó en los mercados financieros. El estudio matemático riguroso del movimiento browniano fue iniciado por N. Wiener en 1923, quien hizo una construcción matemática del modelo de Einstein del movimiento browniano, introduciendo la llamada “medida de Wiener” en el espacio de las trayectoria. Remarquemos que un “movimiento browniano” es un proceso continuo, con trayectorias continuas, es adaptado con $B = \{B_t, F_t / 0 \leq t < \infty\}$ definido en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) tal que satisface ciertas propiedades, (ver [40] para otros detalles).

Veamos ahora el trabajo de Burkholder, [39]. En este trabajo, el autor estudia la utilidad de las martingalas en el análisis armónico. Es un trabajo que trata la relación de las martingalas con el análisis armónico en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Consta de 6 secciones que por el interés de nuestro escrito pasamos a describir someramente. En la sección 1 da una introducción en donde describe el contenido del artículo. Así, presenta a las martingalas y la relación con el comportamiento de las funciones armónicas en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. También se estudia el caso complejo con énfasis en altas dimensiones. Nos recuerda que la función maximal f^* de una martingala f ($f^*(x) = \sup_n |f_n(x)|$), poniendo $||f||_p = \sup_n ||f_n||$, satisface,

$$||f||_p \leq ||f^*||_p \leq q||f||_p$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$; desigualdades similares a las de Hardy-Littlewood.

La sección 4 está dedicada a las funciones armónicas u en $\mathbb{R}^{n+1}_+$; sea $N_a = N_a(u)$ la función maximal no-tangencial de u definida sobre $\mathbb{R}^n$ vía
$N_a(x) = \sup\{|u(s,y)| / (s,y) \in \Gamma_a(x)\}$, donde (cono) $\Gamma_a(x) = \{(s,y)/|x-s| < ay\}$, $a > 0$.
Así mismo se define la integral área de u siendo la función no-negativa $A_a = A_a(u)$ vía,

$$A_a^2(x) = \int\int_{\Gamma_a(x)} |\nabla u(s,y)|^2 y^{1-n} ds dy.$$

Sea la aplicación $\phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, con $\phi(0) = 0$, no-decreciente, continua que satisface la condición de crecimiento $\phi(2\lambda) \leq c\phi(\lambda)$, $\lambda > 0$, c una constante positiva. Entonces se establece el resultado:
“Si u es una función armónica $\mathbb{R}^{n+1}_+$, entonces se tiene

$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(A_a(u))dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(N_a(u))dx$; además, si $\lim_{y\to\infty} u(0,y) = 0$,

se tiene $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(N_a(u))dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(A_a(u))dx$”.

Las secciones 5 y 6 están dedicadas a algunas aplicaciones de lo tratado en el trabajo citado; así, considera desigualdades con peso w, a la teoría ergódica, al trabajo de Calderón-Torchinsky sobre las funciones maximales parabólicas, ... Se sugiere leer este artículo, [39], pues hay ideas que se podrían desarrollar en un seminario con la ayuda de la bibliografía dada, (32 trabajos).

Otros trabajos de Burkholder que citamos, son: One-side maximal functions and H^p, [41]; Distribution Function lnequalities for Martingales, [42]; H^p spaces and Exit Times of Brownian Motion, [43], donde se puede encontrar valiosa información sobre el tema que hemos tratado.

6. Integrales Estocásticas. El punto de partida de toda esta historia es la integral de Riemann, su célebre sumatoria, el tipo de funciones a integrar, los dominios de integración; el surgimiento de espacios de funciones; en particular los espacios de Lebesgue L^p, $1 \le p \le \infty$, y sus generalizaciones. En fin, el camino seguido para superar las dificultades analíticas habidas con la integral de Riemann las hemos expuesto en los artículos I, II y III, [44]. Ahora estamos en el mundo de probabilidades, las variables son aleatorias y por tanto es difícil usar este tipo de variables en una suma de Riemann pues las funciones a integrar tienen rutas donde las variaciones pueden ser no-acotadas, las funciones tienen oscilaciones muy altas. Hubo que sortear algunas dificultades analíticas para introducir la “integral estocástica”; se presentaron algunos modelos. En esta dirección fue útil el modelo de Henstock-Kurzweil (ver [44], II) para obtener una alternativa de integral estocástica, en el sentido de Itô; otra alternativa fue el modelo de Stratonovich ya que ambas integrales estocásticas fueron útiles en el cálculo y en las ecuaciones diferenciales estocásticas. Se observó que ambas integrales podían ser expresadas como límites de sumas del tipo “Riemann-Stieltjesz son modeladas usando la teoría de martingalas. Veamos algunas ideas. (Seguimos a Jingwei Liu , 2018, [45]). Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad; (F_t), $t \in [0, T]$, es una filtración (ver final de la sección 5) continua, completa a la derecha generada por un movimiento browniano 1-dimensional (B_t), $t \in [0, T]$. (Cada F_t contiene los conjuntos P-nulos de F_0). Un proceso estocástico $\phi(w, t)$, $w \in \Omega$, es llamado “ previsible ”si $\phi(w, t) \in (F_t)$ para cada t. (Un proceso estocástico previsible es llamado también un proceso estocástico “adaptado”). Veamos la notación usada en el citado trabajo. $X(t) = X_t \triangleq X(w, t)$ denota un proceso estocástico $X(\bullet, t)$; $\phi_t \triangleq \phi(w, t)$. lim denota el límite 2-promedio. Se tienen las definiciones de integral:

Definición 6.1. *Sea $\phi(\bullet, t)$ un proceso estocástico previsible con respecto al movimiento browniano B_t. Sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ la partición $0 = t_0 < ... < t_n = T$ del intervalo $[0, T]$; sean $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i)$, $||\Delta_n|| = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta t_i$. La* **integral estocástica de Itô** *del proceso estocástico $\phi(\bullet, t)$ es definida vía*

$$\int_0^T \phi_t dW_t = \lim_{||\Delta_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(B_i, t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Definición 6.2. *Sea $X(\bullet, t)$ un proceso estocástico (de segundo orden) definido sobre $\Omega \times [0, T]$, el cual verifica $E[X^2(\bullet, t)] < +\infty$; sean la partición $0 = t_0 < ... < t_n = T$; $||\Delta_n|| = \max(t_{i+1} - t_i)$ y $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$. La* **integral cuadrado-promedio** *es definida como un límite cuadrado-promedio vía*

$$\int_0^T X(t) dt = \lim_{||\Delta_n \to 0||} \sum_{i=0}^{n-1} X(u_i)(t_{i+1} - t_i)$$

siempre que el límite exista para cualquier partición y puntos u_i. La función $X(t)$ es llamada “cuadrable-promedio integrable”sobre $[O, T]$.

Se observó que si en vez de $\phi(B_i, t_i)$ se considera $\phi\left(\frac{B_{t_i} + B_{t_{i+1}}}{2}, t_i\right)$ en la integral estocástica de Itô, entonces se obtiene la integral estocástica de Stratonovich. Así se tiene la

Definición 6.3. *(Integral de Stratonovich). Sea $\phi(\bullet, t)$ un proceso estocástico previsible con respecto al movimiento browniano B_t. Sean $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ la partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, de $[0, T]$, $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i)$; $||\Delta_n|| = \max \Delta t_i$. Entonces,* **la integral de Stratonovich** *del proceso estocástico $\phi(\bullet, t)$ es :*

$$\int_0^T \phi_t \circ dW_t = \lim_{||\Delta_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(\frac{B_{t_i} + B_{t_{i+1}}}{2}, t_i\right)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Debe observarse que el definir a las integrales estocásticas fue una tarea complicada pues si en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) se desea definir a la integral estocástica según el modelo Riemann-Stieltjes
$I_t(w) = \text{lím}_{||P||\to 0}\sum_{t_i\in P} X_{S_i}(w)[B_{t_i}(w) - B_{t_{i-1}}(w)]$, donde $X = (X_t)$, $t > O$, es un proceso estocástico y $B = (B_t)$, $t \geq 0$, es un movimiento browniano sobre el espacio de probabilidad, y se escribiría para la integral estocástica: $I_t(w) = \int_0^t X_s(w)dB_s(w)$, para todo $w \in \Omega$, todo $t \geq 0$; además, P es una partición
$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ del intervalo $[0, T]$ y $t_{i-1} < s_i < t_i$, tal metodología tiene el inconveniente de que las trayectorias del movimiento browniano tienen una variación total infinita; pueden haber variaciones "bruscas", no acotadas, que hacen peligrar la existencia de la integral, definida de esta forma; por ello se puso diversas condiciones extras en el proceso $X = (X)$ en las definiciones 6.1, 6.2 y 6.3.

Es oportuno remarcar el uso de algunas ideas del análisis funcional (6.2) en el desarrollo del análisis estocástico; por ejemplo los espacios de Lebesgue L^p, $1 \leq p < \infty$, sirvieron para introducir integrales estocásticas. Veamos. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y sea $L^1(\Omega, F, P)$ el espacio vectorial de las clases de equivalencia de variables aleatorias reales (en análisis real, estas son las funciones medibles) definidas sobre el espacio de probabilidad dado. Se observó que el espacio $L^1(\Omega, F, P)$ contiene al espacio clásico $L^1(\Omega, F, P) = L$ de las variables aleatorias reales que son **integrables**. Este espacio es un espacio de Banach con la norma $||f||_1 = \int_\Omega |f|dP$, donde $f \in L^1$. Por otro lado, el espacio $L^1(\Omega, F, P)$ contiene, a su vez, al espacio $L^2(\Omega, F, P) = L^2$ de las variables aleatoria reales que son cuadrados integrables (que es un espacio de Hilbert) que está provisto del producto interno $< f, g >= \int_\Omega fgdP$, donde f y $g \in L^2$. Se sabe que L^2. es completo con la norma

$$||f||_2 = [< f, f >]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_\Omega f^2 dP\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Se observa que $||f||_1 \leq ||f||_2$ (por la desigualdad de Schwartz), y desde que P es una probabilidad se tiene $||1||_2 = 1$.
En general se tienen los espacios de Banach L^p, $1 \leq p < \infty$, definidos sobre (Ω, F, P) como el espacio de las funciones p-ésima integrables, con la norma
$||f||_p = \left[\int_\Omega |f|^p dP\right]^{\frac{1}{p}}$, donde $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$.

¿Y si $p = \infty$? ... Veamos; una variable aleatoria real es llamada acotada si existe una constante c tal que $|f| > c$ es "despreciable", es decir se tiene $|f| \leq c$. Se tiene L^∞ como la clase de equivalencia de las variables aleatorias reales que son acotadas. Se tiene $||f||_\infty = \sup |f(X)|$. Veamos ahora las martingalas relacionadas con L^1. Recordemos que una sucesión (X_n), $n \in \mathbb{N}$, de variables aleatorias reales integrables definidas sobre (Ω, F, P) se llama una martingala si ella satisface $E(X_{i+1}) = X_i$, $i = 0, 1, ..., n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Una martingala se llama **cuadrado integrable** si $X_n \in L^1$, para todo n. Se verifica que

- Sea (Y_n), $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de variables aleatorias reales (independientes centradas) en L^1. Entonces la sucesión $X_n = \sum_{m=1}^n Y_m$, $n \in \mathbb{N}$, es una martingala; ver ejemplo 2 de la sección 5).
- Sea (X_n), $n \in \mathbb{N}$, una martingala de cuadrado integrable adaptada a la sucesión creciente (B_n), $n \in \mathbb{N}$, de subálgebras de F, entonces la sucesión $Y_0 = X_0$, $Y_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$, de las diferencias sucesivas de variables aleatorias X_n, es una sucesión ortogonal y se tiene

$$E(X_n^2) = \sum_{m=0}^{n} E(Y_m^2), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(Recordemos que en un espacio de Hilbert una serie ortogonal $\sum_n f_n$ es convergente **si y solo si** $||f_n||^2 < \infty$).

Veamos ahora algunos usos de la teoría de la medida en el análisis estocástico. Seguimos a Memo Garro, [46]. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad con filtración (F_t), $t \geq 0$. Se dice que "un proceso estocástico $X = (X_t)$, $t \geq 0$ sobre (Ω, F, P) es **medible** si la aplicación $X : [0, \infty] \times \Omega \to \mathbb{R}$ definida vía $X(t, w) = X_t(w)$, $(t, w) \in [0, \infty) \times \Omega$, es (Borel) $B(R_t) \times F$-medible.(X es una función de dos variables)".
También se dice que: "el proceso $X = (X_t)$, $t \geq 0$, es llamado **progresivamente medible**, relativo a la filtración (F_t), si para cada $t \geq 0$ la aplicación (en dos variables) $X : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$, definida por $X(s, w) = X_s(w)$, para todo $(s, w) \in [0, t] \times \Omega$, es $B([0, t]) \times F$-medible".
En este contexto, se dice que $X = (X_t)$, $t \geq 0$, es adaptado, relativo a la filtración (F_t), $t \geq 0$, si para cada t, la variable aleatoria X_t es F_t-medible. Se observó que si $X = (X_t)$, $t \geq 0$, es un proceso adaptado, con trayectorias continuas, entonces X es progresivamente medible. Así mismo, un movimiento browniano, adaptado a alguna filtración, es progresivamente medible.

6.1. Procesos Elementales. La idea ahora es clarificar la definición de "integral estocástica"; en esta ruta se usan los llamados procesos elementales. Como siempre, sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad filtrado con (F_t), $t \geq 0$; T es un número real.
"Un proceso estocástico $H = (H_t)$, $0 \leq t \leq T$ es llamado elemental (función simple en la teoría de la medida), relativo a la filtración (F_t), $t \geq 0$, si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ y si existen algunas variables aleatorias A_i, que son $F_{t_{i-1}}$-medibles y cuadrado integrables, donde $1 \leq i \leq n$, tales que $H_t = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathcal{X}_{(t_{i-1}, t_i)}(t)$, para todo $t \in [0, T]$. ($\mathcal{X} =$ función característica). Se verifica que todo proceso elemental es progresivamente medible relativo a la misma filtración (F_i), $t \geq 0$; y la variable aleatoria H_t, $0 \leq t \leq T$, es cuadrado integrable".

Nota 6.1. *El autor, [46], considera (F_t), $t \geq 0$, como la filtración generada por un movimiento browniano $B = (B_t)$, $t \geq 0$, definida sobre (Ω, F, P).*

6.2. Integral Estocástica. Sea $H = (H_t)$, $t \in [0, T]$ un proceso elemental, entonces por definición la integral estocástica de H, respecto a B, es

$$\int_0^T H_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} A_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Observemos que esta es una integral de Riemann-Stieltjes para funciones elementales y sus propiedades son análogas a las del análisis real. Se observó que el valor de la integral es independiente de la representación del proceso H, y la integral $\int_0^T H_s dB_s$ es una variable aleatoria que es F_T - medible. Se tiene, además "Sea $H = (H_t)$, $0 \leq t \leq T$, y $\tilde{H} = (\tilde{H}_t)$, $0 \leq t \leq T$ dos procesos elementales y a un número real; entonces $(H_t + a\tilde{H}_t)$, $0 \leq t \leq T$, es también elemental y se tiene $\int_0^T (H_t + a\tilde{H}_t) dB_t = \int_0^T H_t dB_t + a \int_0^T \tilde{H}_t dB_t$".

Teorema 6.1. *(Itô) "Si $H = (H_t)$, $0 \leq t \leq T$, es un proceso elemental, entonces se tiene*

$$E\left[\int_0^T H_t dB_t\right]^2 = E\left[\int_0^T H_t^2 dB_t\right]".$$

Como consecuencia de esta relación se verifica que: "el espacio $H^2_{0,T}(\Omega, F, P)$, (F_t), $t \geq 0$, de todos los procesos elementales $H = (H_t)$, $0 \leq t \leq T$, es un subespacio vectorial de $L^2(\Omega, F, P)$, y la aplicación $I : H^2_{0,T} \to L^2$, definida vía $I(H) = \int_0^T H_t dB_t$, para todo $(H_t) \in H^2_{0,T}$, es una isometría (continua) lineal".

6.3. El Espacio L^2. Por definición, $L^2_{0,T} = \{$procesos $X = (X_t)$, $t \geq 0$, medibles y adaptados $/ E\left[\int_0^T x_t^2 dt\right] < \infty\}$.

Nota 6.2. *$L^2_{0,T}$ es un espacio vectorial.*

El objetivo, ahora, es extender la definición de integral estocástica a procesos en $L^2_{a,T}$. Para ello se da la definición,

Definición 6.4. *"Un proceso $X = (X_t)$, $t \geq 0$, es continuo en media cuadrática sobre $[0, T]$ si es cuadrado integrable y para todo $t_0 \in [0, T]$ se tiene*

$$\lim_{t \to t_0,\ t \in [0,T]} E(X_t - X_{t_0})^2 = 0\text{''}.$$

La idea es que todo proceso en $L^2_{a,T}$, continuo en media cuadrática, es **aproximado** por procesos elementales, en media cuadrática. Así, se tiene "Sea $H = (H_t)$, $t \leq 0$, un proceso en el espacio $L^2_{a,T}$ que es continuo en media cuadrática sobre $[0, T]$. Entonces, existe una sucesión de procesos elementales $H^{(n)} = (H^{(n)}_t)$, $t \in [0, T]$, $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\int_0^T (H_t - H^{(n)}_T)^2 dt\right] = 0\text{''}.$$

Se observó que el subespacio de los procesos elementales es denso en el espacio $L^2_{a,T}$. En efecto, se tiene: "Sea $H = (H_t)$, $t \geq 0$, un proceso en $L^2_{a,T}$; entonces existe una sucesión de procesos elementales $H^{(n)} = (H^{(n)}_t)$, $t \in [0, T]$, tal que se tiene $\lim_{n \to 0} E\left[\int_0^T (H_t - H^{(n)}_t) dt\right] = 0$".

Ahora, Garro considera la integral estocástica para un proceso estocástico en $L^2_{a,T}$, esto con respecto a un movimiento browniano. Previamente se considera el resultado: "Sean $H^{(n)} = (H^{(n)}_t)$ y $\tilde{H}^{(n)} = (\tilde{H}^{(n)}_t)$, $t \in [0, T]$, dos procesos elementales tal que $E\left[\int_0^T (H^{(n)}_t - \tilde{H}^{(m)}_t)^2 dt\right] \to 0$, $m, n \to \infty$, entonces se tiene

$$E\left[\left(\int_0^T (H^{(n)}_t - H^{(m)}_T) dB_t\right)^2\right] \to 0,\ m, n \to \infty\text{''}.$$

Aún veamos el resultado: "Sea $H = (H_t)$, $t \in [0, T]$, un proceso en $L^2_{a,T}$; si existe una variable aleatoria I_t, F_T-medible, cuadrado íntegrable, tal que si $H^{(n)} = (H^{(n)}_t)$, $t \in [0, T]$, es una sucesión de procesos elementales tal que
$\lim_{n \to \infty} E\left[\int_0^T (H^{(n)}_t - H_t)^2 dt\right] = 0$, entonces se tiene

$$\int_0^T H^{(n)}_t dB_t \to I_t, \text{ si } n \to \infty, \text{ en el espacio } L^2(\Omega, F, P)\text{''}.$$

Se da, ahora, la definición de integral estocástica

Definición 6.5. *"Sea $H = (H_t)$, $t \in [0, T]$, un proceso en $L^2_{a,T}$, entonces* **la integral estocástica** *de H respecto al movimiento browniano B sobre $[0, T]$ es*

$$\int_0^T H_t dB_t = \lim_{n \to \infty} \int_0^T H^{(n)}_t dB_t,$$

donde el límite es en $L^2(\Omega, F, P)$ y $H^{(n)} = (H^{(n)}_t)$, $t \in [0, T]$, es una sucesión de procesos elementales que verifican

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\int_0^T (H^{(n)}_t - H_t)^2 dt\right] = 0.$$

De esta definición se verifica que :

1. "Si $H = (H_t)$, $t \in [0, T]$ es un proceso en $L^2_{a,T}$, entonces se tiene

$$E\left[\int_0^T H_t dB_t\right]^2 = E\left[\int_0^T H^2_t dB_t\right]\text{''}.$$

2. "Si $H = (H_t)$ y $\tilde{H} = (\tilde{H}_t)$, $0 \in [0, T]$, son procesos en $L^2_{a,T}$ y a, b son constantes, entonces se tiene:

$$\int_0^T (aH_t + b\tilde{H}_t)dB_t = a\int_0^T H_t dB_t + b\int_0^T \tilde{H}_t dB_t".$$

El lector interesado en esta presentación de la integral estocástica puede consultar el artículo de Garro, [46].

Hagamos algunos comentarios sobre lo que estamos dando en forma panorámica. Desarrollado el análisis armónico con teoremas centrales mucho de ello fue aplicado para construir un cálculo estocástico en donde se obtuvieron resultados análogos pero con la ventaja de sus aplicaciones en varias áreas de la ciencia, como son la física, las matemáticas financieras, la biología, la medicina, ..., y en el mismo desarrollo de tal cálculo. En las aplicaciones surgieron funciones X, que dependen del tiempo, y que satisfacen ciertas ecuaciones diferenciables o integrables cuyas soluciones explican la evolución en el tiempo de algún hecho físico. Esta situación condujo, de algún modo, a los problemas clásicos de las ecuaciones en derivadas parciales, como son el problema de Dirichlet y de Cauchy, que en el caso de las probabilidades es necesario hacer algunos ajustes dado que la información extra puede ser muy 'variable". Y acá el movimiento browniano B_t (también llamado proceso de Wiener) entró en juego por sus propiedades adecuadas (son derivables en el sentido generalizado). Este concepto, surgido en el siglo XIX, fue muy importante en el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos, en particular en la teoría de la integral estocástica, y así surgieron nuevas teorías de integración, como hemos visualizado anteriormente. Es oportuno remarcar que fue N. Wiener quién demostró la existencia de un modelo matemático que explicó al movimiento browniano.

En la evolución de la integral estocástica vimos que primero se la define para procesos elementales o simples, usando B como si fuera de variación acotada en la teoría clásica; luego, en el caso general se usa aproximaciones con integrales de procesos elementales. Esta idea fue generalizada usando otros integradores (B es un integrador; dx en la integral de Riemann), como fueron las semi-martingalas. De ser el caso, cuando se introduce una integral, luego se la generaliza o extiende; así la integral de Itô (1944), que vimos anteriormente, fue generalizada con la integral de Skorohod en 1975. La integral de Itô fue un gran avance en la evolución de la integral estocástica, una de las más influyentes teorías en el siglo XX debido a sus aplicaciones, tanto en la matemática como en aplicaciones en otras áreas, en particular en las ecuaciones diferenciales estocásticas. El descubrimiento de Itô fue muy importante, tanto en la matemática pura como en la aplicada, pero, esta integral tuvo algunos defectos en relación a la teoría de la medida y surgieron otras propuestas, más generales, como la integral de Ayed-Kuo. En la sección siguiente daremos un panorama de la integral estocástica a través de las integrales introducidas, como las que ya estamos mencionando. En esta dirección sugerimos ver las referencias [47], [48], [49], entre otras, las que hemos consultado.

6.4. La Integral de Itô. Remarcamos que el cálculo estocástico funciona en los procesos estocásticos y la integral es coherente que generaliza a la integral de Stieltjes-Lebesgue. La idea es definir, con rigor, integrales de procesos estocásticos con respecto a otros procesos estocásticos (el movimiento browniano). En esta ruta se tiene el cálculo de Itô que extiende los métodos del cálculo clásico a procesos estocásticos; este cálculo tuvo éxito en aplicaciones a problemas concretos, como por ejemplo, en las finanzas. En análisis nos es familiar la integral de Riemann-Stieltjes; ésta, fue modelo para la integral introducida por Itô pues es una generalización estocástica de aquella. En este escenario los integrandos y los integradores son procesos estocásticos. Así, si H es un proceso estocástico adaptado a la filtración generada por el proceso W (integrador), que en un inicio fue el movimiento browniano B_i, $t \geq 0$, y después se usó una semimartingala pues ella es un proceso estocástico que son buenas integradoras y la integral de Itô se construye con ellas; el movimiento browniano es una semimartingala. Veamos algunos detalles analíticos. [49]. Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico y (B_t), $t \geq 0$ un movimiento browniano sobre tal espacio. Sea la filtración (F_t), $t \geq 0$, tal que B_t es F_t-medible para todo $t \geq 0$; y $B_t - B_s$ es independiente de F_s, para todo $0 \leq s \leq t$.

Definición 6.6. *"Un proceso estocástico $X_t : [0,T](T > 0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ es llamado (F_t)-adaptado (ad) (o "non-anticipating") si para todo $t \in [0,T]$, la función $w \to X_t(w)$ es F_t-medible".*

Definición 6.7. *" $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)[\equiv L^2_{ad}] = \{$procesos estocásticos $X/$*

- *$(t,w) \to X(t,w)$ es $B([0,T]) \times F$ - medible, $(B =$ Borel);*
- *X es adaptado a la filtración (F_t), $t \in [0,T]$,*
- *$\int_0^T E(X_t^2)dt < \infty\}$".*

Definición 6.8. *"Un proceso estocástico $X \in L^2_{ad}$ es un proceso elemental ("step process") si tiene la forma $X_t(w) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(w)\mathcal{X}_{i-1}(t)$, donde $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$".*

Definición 6.9. La Integral de Itô *(para procesos elementales).*
"Sea $X \in L^2_{ad}$ un proceso elemental, entonces por definición:

$$\int_0^T X_t(w)dB_t(w) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(w)\left[B_{t_i}(w) - B_{t_{i-1}}\right]".$$

Entre las propiedades de esta integral, se tiene, donde $a, b \in \mathbb{R}$; X y $Y \in L^2_{ad}$:

P.1. (linealidad) $\int_0^T (aX_t + bY_t)dB = a\int_0^T X_t dB_t + b\int_0^T Y_t dB_t$.

P.2. $E(\int_0^T X_t dB_t) = 0$.

P.3. (isometría de Itô) "$E\left[\left(\int_0^T X_t dB_t\right)^2\right] = \int_0^T E(X_t^2)dt$".

Nota 6.3. *Como en el análisis clásico, la clase de los procesos elementales, dado arriba, es denso en el espacio L^2_{ad}. Este resultado es usado para definir a la integral de Itô en L^2_{ad}. Así tenemos:*

Definición 6.10. *Integral de Itô (en L^2_{ad}). Sea el proceso $X \in L^2_{ad}$; por definición*

$$\int_0^T X_t dB_t = L^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_t^{(n)} dB_t,$$

donde $\{X_t^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de procesos elementales en L^2_{ad} que tienden a X, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T E\left[(X_t - X_t^{(n)})^2\right] dt = 0.$$

Nota 6.4. *Se verifica que el límite mencionado existe. Además, esta integral satisface también las propiedades P.1., P.2. y P.3. Por otra parte, la integral de Itô es vista como un proceso estocástico y si $X \in L^2_{ad}$, entonces el proceso estocástico $I_t = \int_0^t X_s dB_s$, $t \in [0,T]$, es una martingala con respecto a la filtración (F_T), $t \geq 0$. Para los detalles de lo expuesto, ver [49].*

6.5. La Integral de Skorohod. Hemos visto en la integral de Itô que el proceso X debe ser adaptado; pues bien, es esta dirección, una extensión de la integral de Itô fue obtenido por A. V. Skorokhod al introducir una integral para procesos estocásticos que no son adaptados al movimiento browniano, integral que es también conocida como "integral de Hitsuda-Skorohod", e introducida en los años 1970's. Skorohod siguió el camino de Wiener-Itô de la expansión de caos, mientras que Hitsuda el del ruido. (Ver [49]). Veamos algunos argumentos analíticos. Sea (X_t), $t \in [0,T]$, un proceso estocástico (t,w)-medible y sea (F_t), $t \in [0,T]$ una filtración browniana; además, se asume que X_t es F_T-medible para cada $t \in [0,T]$, ..., (*); y que se tiene $E(X_t^2) < \infty$, para todo $t \in [0,T]$ ... (**). Entonces se tiene, por definición de la integral de Skorohod:
"Sea (X_t), $t \in [0,T]$, un proceso estocástico que satisface (*), (**) y la expansión

$X(t,w)=\sum_{n=0}^{\infty} I_n[f_n(\bullet,t)]$, [expansión de Wiener-Itô: sea $f\in L^2([0,T])$, una función simétrica, entonces, por definición $I_n(f)=\int_{[0,T]^n} f(t_1,...,t_n)dB_{t_1}...dB_{t_n}$], entonces

$$\delta(X)=\int_0^T X(t,w)\delta B(t) \text{ integral de Skorohod.}$$

($\delta(X)$ es una variable aleatoria de valor real en $L^2(\Omega)$). En este caso la variable aleatoria X es dicha Skorohod-integrable.

En otras palabras se tiene: sea $B=(B_t)$, $t\in[0,1]$ un movimiento browniano y $H=(H_t)$, $t\in[0,1]$, un proceso estocástico medible con respecto a B, el cual no es necesariamente adaptado, y que satisface $E\int_0^1 H_t^2 dt<\infty$. Además, este proceso H_t puede ser desarrollado en una serie ortogonal (n-dimensional) de integrales estocásticas: $H_t=\sum_{n=0}^{\infty} I_n[f_n(\bullet,t)]$, donde $f_n\in L^2([0,1]^{n+1})$ es simétrica en las primeras n variables. Entonces, por definición, la integral de Skorokhod es $\delta(h)=\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}f_n$. Notación: $\delta(H)=\int_0^1 H_t dB_t$, siempre que la serie converja en $L^2(\Omega)$; f_n es la simetrización de f en todas sus variables .

Nota 6.5. *Si el proceso X es Skorohod-integrable, ello es representable por $X\in Dom(\delta)$.*

Se observó que la integral de Skorohod es una extensión de la integral de It$\hat{o}$, es decir, si ellas coinciden para integrandos adaptados. La respuesta es sí. En efecto, se tiene:
"Sea $X=(X_t)$, $t\in[0,T]$, un proceso estocástico en $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Entonces, X es Skorohod-integrable, $X\in Dom(\delta)$, y se tiene $\int_0^T X(t)\delta B_t=\int_0^T X(t)dB_t$".

Nota 6.6. *Para mayores detalles sobre la integralde Skorohod ver [49].*

Anatolii Skorohod (1930-2011) fue un excelente cultor del analizar estocástico. Según los especialistas, una de las más importantes nociones del cálculo estocástico moderno es la integral estocástica de Skorohod introducida en 1975, donde expone una generalización de la integral estocástica de la época. La integral es introducida como un operador sobre ciertos funcionales. Ver el artículo [50] donde se exponen sus ideas de cómo se construyó la integral, así como una información sobre su vida y obra.

6.6. La Integral de Stratonovich. Esta es una integral que se define de un modo similar a la integral de Riemann; es una alternativa a la integral de Itô y es usada con frecuencia en el campo de la física. En algunos casos es más fácil de manipular que la integral de Itô y tiene interesantes propiedades como que se tiene la regla de la cadena. Veamos algunas ideas, a manera de recuerdo. El llamado proceso de Wiener (W) es un proceso estocástico en tiempo continuo, y es también llamado movimiento browniano estándar (B) y es importante en la matemática pura como en la aplicada ya que ha contribuido al estudio de las martingalas en tiempo continuo. Así, en la física se usa para modelar el movimiento browniano y de la difusión de pequeñas partículas en un fluido; también es útil en ciertas formulaciones en la mecánica cuántica. Y, también, juegan un rol importante en la formulación matemática de las finanzas. En las aplicaciones a problemas concretos se destaca que las integrales estocásticas son usadas en el contexto de la integral de Stratonovich; la que es una herramienta útil en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas.

En la construcción de las integrales estocásticas es usual considerar martingalas limitadas en L^2, para martingalas locales y las semimartingalas .Veamos. Como siempre, (Ω,F,P) es un espacio de probabilidad. La noción de martingala fue extendida a la noción de martingala "local"por K. Itô y S. Watanabe en 1965; así, "una martingala local, $X=(X_t,F_t)$, es un proceso adaptado tal que es posible hallar una sucesión de tiempos de detención (T_n), $n\geq 1$, la que crece al infinito y tal que los procesos detenidos X^n, $n\geq 1$, son martingalas".
Se remarca que $T:\Omega\to\mathbb{R}^+$ es un tiempo de detención si $\{T\leq t\}$ está en F_t.
Por otro lado, una semimartingala es un proceso estocástico X_t, $t\geq 0$, que se puede expresar como la suma $X_t=V_t+M_t$, donde V_t es una componente con variación relativamente pequeña y M_t es una componente de variación rápida (es el ruido).

Demos ahora una idea rápida de la integral de Stratonovich. “Si X e Y son dos procesos adaptados continuos, sean las sumas de Stratonovich
$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2}(Y_{t_j} + Y_{t_{j+1}})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})$. Entonces la integral de Stratonovich es $\int_0^T Y_t \circ dX_t = \lim_{n\to\infty} S_n$, cuando $||P_n|| = \max_{i=0,...,n-1}(t_{i+1} - t_j) \to 0$, donde
$P_n = \{0 = t_0 < ... < t_n = T\}$ es una partición de $[0, T]$”.
También se da una definición de la integral de Stratonovich relacionándola con la integral de Itô;
Veamos. “Sean X e Y dos procesos estocásticos adaptados y continuos tal que la integral de Itô $\int_0^T Y_t dX_t$ esté definida; entonces por definición, la integral de Stratonovich es

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}[Y, X]_t,$$

donde, en general, “si $X = (X_t), t \geq 0$, es una martingala local, continua, entonces existe un proceso creciente, denotado con $[X, X]_t$, el cual es único tal que $X_t^2 - [X, X]_t$ es una martingala local, continua”.

La integral de Stratonovich tiene propiedades análogas a las del análisis usual. Así, vale la regla de integración por partes (con las anteriores hipótesis):

$$\begin{aligned} X(t)Y(t) &= X(0)Y(0) + \int_0^t X_s \circ dY_s + \int_0^t Y_s \circ dX_s \text{ y} \\ d(X_tY_t) &= X(t) \circ dY_t + Y(t) \circ dX_t. \end{aligned}$$

Para mayor información sobre esta integral el lector puede consultar en Internet; en particular ver [51].

7. La Integral de Ayed - Kuo. El punto de partida es el artículo [52] de W. Ayed-H. Kuo donde los autores dan una extensión de la integral de Itô, (2008). En este trabajo se introduce el concepto de independencia instantánea para ciertos procesos estocásticos anticipados (o no-adaptados)(“anticipating”) y consideran la clase de los procesos estocásticos independientemente instantáneos como una contraparte de los procesos estocásticos adaptados de la teoría de la integración estocástica de Itô. Luego definen su integral, de Ayed-Kuo, de un proceso estocástico como una combinación lineal de productos de procesos estocásticos con independencia instantáneas con procesos adaptados. Afirman que con esta nueva integral se puede verificar la fórmula de Itô.

En un segundo trabajo, [53], de 2010, Ayed-Kuo explican las ideas introducidas en [52] remarcando que la integral de Ayed-Kuo es una extensión de la integral de Itô y que el punto esencial fue el descubrimiento de lo contrario a la teoría de Itô, es decir, se tienen los procesos estocásticos independientes instantáneos versus los procesos estocásticos adaptados. Posteriormente, en el 2014, [54], H. Kuo nos da una breve introducción a la teoría general de la integral estocástica el cual es un artículo muy útil pues nos da un panorama de la nueva teoría introducida por Ayed-Kuo y su contorno. Así, se da una breve visión del cálculo de Itô y de la teoría del “ruido blanco” y con estas ideas se extiende la teoría de Itô. Luego Kuo nos da una breve visión de la teoría de Itô sobre la integración estocástica. En 1942 salió publicado el trabajo de K.Itô, [54], donde introdujo su teoría sobre la integral estocástica. Kuo describe el escenario matemático de aquella época (en plena II G.M.!) en el cual se desarrollaban los progresos en el cálculo estocástico y del análisis funcional. Ver [54], pag.113. Nos dice que la original motivación que tuvo Itô para introducir su integral fue la construcción de un proceso estocástico a partir de un generador infinitesimal. Se enuncia el teorema:

Teorema 7.1. *“Sea $B(t)$ un movimiento browniano y sea*
$\Delta_n = \{a = t_0, t_1, t_2, ..., t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$; entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} [B(t_i) - B(t_{i-1})]^2 \to b - a \text{ en la norma } L^2(\Omega),$$

cuando $||\Delta_n|| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$ converge a cero”. N. Wierner fue el primero en dar una rigurosa construcción del movimiento browniano $B(t)$.

Luego presenta a la integral de Wiener: $\int_a^b f(t)dB(t)$, la que es construida vía las etapas: sea $f(t)$ una función simple, esto es, $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{(t_{i-1},t_i)}$ y se define $I(f) = \sum_{i=1}^n a_i[B(t_i) - B(t_{i-1})]$.
Ahora, para $f \in L^2[a,b]$ se escoge una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tal que $f_n \to f$ en $L^2[a,b]$; se verifica que la sucesión $\{I(f_n)\}$ es de Cauchy en $L^2[a,b]$. Entonces, por definición de la **integral de Wiener**, $\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$, en la norma de $L^2(\Omega)$.

Nota 7.1. *Esta integral es bien definida. Además, la aplicación $f \to \int_a^b f(t)dB(t)$ es una isometría de $L^2[a,b]$ en $L^2[\Omega]$.* Ahora Kuo pasa a discutir la integral de Itô; para ello veamos brevemente lo siguiente. Sea $B(t)$ un movimiento browniano y (F_t), $t \geq 0$, la filtración asociada, esto es, $F_t = \sigma[B(s)]$, $0 \leq s \leq t$; Si $a \geq 0$ sea la ecuación diferencial estocástica $dX_t = X_t dB(t)$, $X_a = \xi$, $t \geq a$, ... [*] donde ξ es F- medible. Se sabe que la solución de este problema es $X_t = \xi e^{B(t)-B(a)-\frac{1}{2}(t-a)}$, $t \geq a$.
Si $a = 0$ y $\xi = x \in \mathbb{R}$, entonces se obtiene la solución $X_t = xe^{B(t)-\frac{1}{2}t}$, $t \geq 0$... [**].

Se observó que X_t en [**] es una martingala y un proceso de Markov (esto es, un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados en el cual la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento anterior). Estas dos propiedades fueron las que guiaron a Itô a desarrollar su integral estocástica en 1942. Relacionado a $B(t)$ y a (F_t) se asume que $B(t)$ es F_t-medible para cada t y que $B(t) - B(s)$ y F_s son independientes para todo $s \leq t$. Además se asume que $F_t = \sigma[B(s)]$, $0 \leq s \leq t$. $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ es el espacio de Hilbert de todos los procesos estocásticos $f(t,w)$ tal que satisfacen $f(t)$ es adaptado a (F_t), esto es, $f(t)$ es F_t - medible para cada $a \leq t \leq b$, y que se tiene $\int_a^b E(|f(t)|^2)dt < \infty$. Itô define su integral, al inicio del desarrollo de la integración estocástica, $\int_a^b f(t)dB(t)$ donde $f(t) \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.

La integral de Itô satisface los iguientes resultados:
"Sea $f \subset L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ y si $E[f(t)f(s)]$ es una función continua de t y s, entonces se tiene

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})[B(t_i) - B(t_{i-1})] \to b - a \text{ en la norma } L^2(\Omega),$$

donde Δ_n's son particiones de $[a,b]$".

Nota 7.2. *Si f fuera un proceso estocástico continuo, entonces se tiene la misma tesis.*
"Sea $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, entonces se tiene: $E\left[\int_a^b f(t)dB(t)\right] = 0$ y

$$E\left[\left|\int_a^b f(t)dB(t)\right|^2\right] = \int_a^b E(|f(t)|^2)dt\text{''}.$$

Nota 7.3. *La última igualdad implica que $f \to \int_a^b f(t)dB(t)$ es una isometría de $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ en $L^2(\Omega)$.* Para ampliar la información que nos permita comprender más lo que estamos tratando, remarquemos la definidón de la integral de Itô. Ver [55], cap. 4. Si f es un proceso estocástico simple en $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ dado vía $f(t,w) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(w)\mathcal{X}_{[t_{i-1},t_i]}(t)$, donde ξ_{i-1} es $F_{t_{i-1}}$-medible y $E(\xi_{i-1}^2) < \infty$; Luego se define $I(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(w)[B(t_i) - B(ti-1)]$. Se verifica que $E[I(f)] = 0$ y $E[|I(f)|^2] = \int_a^b E[|f(t)|^2]dt$. Además se tiene un resultado de aproximación en la ruta para definir la integral estocástica de Itô $\int_a^b f(t)dB(t)$, donde $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.
" Sea $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, entonces existe una sucesión $\{f_n(t)\}$, $n \geq 1$, de procesos estocásticos simples en $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b E[|f(t) - f_n(t)|^2]dt = 0$".

Ahora se pasa a la etapa final para definir a la mencionada integral. Como se verifica que
$E[|I(f_n) - I(f_m)|^2] = \int_a^b E[|f_n(t) - f_m(t)|^2]dt \to 0$, si $n,m \to \infty$, se tiene que $\{I(f_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$.

Definición 7.1. *Por definición $I(f) = \text{lím}_{n\to\infty} I(f_n)$ en $L^2(\Omega)$. $I(f)$ es definida como la* **Integral de Itô**, *la que es denotada vía $\int_a^b f(t)dB(t)$.*

Nota 7.4. *El límite existe. Esta definición satisface las propiedades enunciadas anteriormente.*

7.1. La Fórmula de Itô. Seguimos con [54] y [55]. Los trabajos de Itô fueron la fuente de motivación para que Ayed-Kuo construyeran una nueva integral basada en sumas de Riemann. Por ello, es importante tener, al menos panoramicamente, clara la idea de la teoría de Itô. Entre estas ideas está la "fórmula de Itô". En su libro, Kuo nos da una simple motivación de esta fórmula: en los cursos de cálculo se sabe que $\frac{d}{dt}f[g(t)] = f'[g(t)]g'(t)$ siempre que f y g sean funciones diferenciables; integrando, esta fórmula toma la forma

$$f[g(t)] - f[g(a)] = \int_0^t f'[g(s)]g'(s)ds,$$

fórmula que en el contexto estocástico, y usando el movimiento browniano $B(t)$, toma la forma

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s))ds$$

donde f es continuamente diferenciable dos veces. Kuo aclara que el término $\frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s))ds$ surge como consecuencia de la variación cuadrática, no-cero, del movimiento browniano $B(t)$.

En 1944, [37], Itô probó:

Teorema 7.2. (T. Itô) *"Sea $f \in C^2$, entonces se tiene*

$$f[B(t)] - f[B(a)] = \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s))ds$$

donde la primera integral es una integral de Itô, y la segunda integral es una integral de Riemann para cada ruta de $B(s)$".

Nota 7.5. *El término extra en esta fórmula es la que diferencia la teoría de Itô del cálculo clásico. Ver el capítulo 7 de [55] para muchos otros detalles al respecto.*

7.2. La Integral de Ayed-Kuo. Ver [52], [53], [54], [49]. La integral de Ayed-Kuo es una generalización de la integral de Itô ya que ella se construye en el contexto del cálculo no-adaptado. El concepto de proceso "instantáneamente independiente"(i,i), es útil en la nueva teoría. Así, "Un proceso estocástico (H_t), $t \in [0,T]$, es llamado (i,i) con respecto a la filtración (F_t), $t \in [0,T]$, **si y solo si** H_t es independiente de F_t para cada $t \in [0,T]$".

Definición de Integral de Ayed-Kuo. "Sea $(f(t))$, $t \in [0,T]$, un proceso estocástico F_t-adaptado y sea (H_t), $t \in [0,T]$, un proceso estocástico (i,i) con respecto a F_t. Entonces:

$$\int_0^T f(t)H_t dB_t = \lim_{|P_n|\to 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})H_{t_i}[B(t_i) - B(t_{i-1})]$$

donde el límite existe en probabilidades, (P_n denota particiones del intervalo $[0,T]$). $\int_0^T f(t)H_t dB_t$ es la integral estocástica de Ayed-Kuo de $f(t)H_t$".

Nota 7.6. *La integral de Ayed-Kuo es lineal. Además tiene propiedades semejantes a la integral de Itô; como se sabe esta integral es una martingala, propiedad que no tiene la integral de Ayed-Kuo. Esto fue una motivación para introducir el concepto de casi-martingala ("near martingale"), propiedad que sí satisface la integral de Ayed-Kuo. En [49] se da un ejemplo que muestra que la integral de Ayed-Kuo no es una martingala.*

Definición 7.2. *"Un proceso estocástico (X_t), $t \geq 0$, es llamado casi-martingala con respecto a la filtración (F_t), $t \geq 0$, si verifica:*

(i) para todo $t \geq 0$, $E(X_t) < \infty$,

(ii) para cualquier $s < t$, *se tiene* $E(X_t/F_s) = E(X_s/X_s)$, *c.s. (casi seguramente), o equivalentemente* $E(X_t - X_s/X_s) = 0$, *c.s.*

Nota 7.7. *Se observó que si una casi-martingala* X_t *es adaptada, entonces* X_t *es una martingala.*

Teorema 7.3. *Sean* f *y* ϕ *dos funciones continuas sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $X_t = \int_a^t f(B(s))\phi(B(b) - B(s))dB(s)$, $a \leq t \leq b$, *entonces el proceso* X_t, $t \in [a,b]$, *es una casi-martingala. (Se asume que* $E|X_t| < \infty$ *para todo* $t \in [a,b]$*).* El lector es sugerido a ver los artículos [54] y [56] para ver los detalles de lo expuesto, así como muchos otros resultados sobre la integral de Ayed-Kuo. Así mismo es útil el capítulo 5 del trabajo [49]. Los artículos [57] y [58] nos ayudan a ampliar el universo de lo que se está tratando, las integrales de Itô y de Ayed-Kuo.

7.3. Kiyosi Itô y Hui-Hsiung Kuo. Uno de los personajes más importantes del cálculo estocástico, a decir de los especialistas, es sin duda Koyosi Itô quien es considerado el pionero de la integración estocástica y de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Itô nació en el Japón el 07 de Setiembre de 1915 y falleció el 10 de Noviembre del 2008. Se graduó de Bachiller en Ciencias en 1938 y obtuvo su Doctorado en 1945 por la Universidad de Tokio. Trabajó en la Oficina de Estadística donde inició sus notables trabajos en procesos estocásticos que lo llevarían a su integral estocástica y a elaborar su cálculo, el "cálculo de Itô". Sus trabajos sobre eventos variables fueron aplicados a diversos campos de la matemática aplicada y de preferencia en la investigación de la matemática financiera; también son notables sus trabajos sobre procesos de difusión sobre variedades. Fue profesor en la Universidad de Tokio, así como en diversas instituciones como la de Stanford, en el instituto para Estudios Avanzados en Princeton, ... Fue distinguido con diversos premios académicos, como el Premio Asahi en 1977, el Premio Wolf en 1987, el premio Kyoto en 1998, el Premio Gauss en el 2006.

Fue autor de muchos trabajos cientificos publicados en prestigiosas revistas, así como de diversos libros sobre probabilidades, con énfasis en el cálculo estocástico, destacando sus trabajos pioneros sobre la integral estocástica y por esto es considerado el "padre de la integración estocástica". R. Jarrow-P. Protter en [59] nos da un recorrido histórico de la integración estocástica en el período 1880-1970 tratando, desde luego, la contribución de It$\hat{o}$ y las motivaciones que tuvo para construir su integral, la que fue dada en su primer trabajo de 1944, [60], año en que Kakutani publica dos breves trabajos relacionando el movimiento browniano con las funciones armónicas; en esos años 40's se investigaron relaciones existentes entre las martingalas y el análisis armónico. Así, se desarrollaron las martingalas basado en la teoría del potencial probabilístico. En 1948, E. Hille y K. Yoshida, en forma independiente desarrollaron la estructura de los semi-grupos de operadores fuertemente continuos, lo que contribuyó a clarificar el rol de los generadores infinitesimales en la teoría de los procesos de Markov. En esta dirección, Itô construyó una ecuación diferencial estocástica de la forma $dX_t = \sigma(X_t)dW_t + \mu(X_t)dt$, ($W$ = proceso de Wiener). Un problema que tuvo Itô fue dar sentido a la diferencial estocástica $\sigma(X_t)dW_t$, lo que lo logró dar en su artículo de 1944. Luego de algunos progresos, en 1951, Itô probó la hoy conocida como "fórmula de Itô": $f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d[X,X]_t$, donde $f \in C^2$. Como se sabe, esta fórmula es una extensión de la fórmula de cambio de variables en el cálculo de Riemann-Stieltjes pues nos dice la diferencia entre el cálculo de Itô y el clásico cálculo. En [59] se dan otros logros obtenidos por Itô, así como los obtenidos posteriormente hasta 1970. Sin embargo el artículo de 1944 fue el punto de partida hacia la formalización de diversas ideas que estuvieron alrededor de un cálculo estocástico. En el Prefacio del libro de Kuo, [55], se observa que en la fórmula de Itô aparece un término de corrección, la "corrección de Itô"que resulta de la variación cuadrática no-cero del movimiento browniano. Posteriormente se usaron integrales que envolvían la no-existencia de la derivada del movimiento browniano, algo conocido como "ruido blanco". Así surgió la idea de Itô de considerar el producto de ruido blanco con la diferencial-tiempo, la diferencial movimiento browniano. La integral resultante fue muy utilizada en la matemática aplicada. Esta idea de Itô, usar el producto del ruido blanco y la diferencial tiempo como una diferencial movimiento browniano (usado como un integrador) fue el camino para definir la integral estocástica. Su método fue una combinación de las técnicas Riemann-Stieltjes, respecto al integrador, con las de Lebesgue, respecto al integrando.

7.3.1. Hui-Hsiung Kuo. es un matemático de origen Taiwanés nacido en 1941 y que adquirió la nacionalidad norteamericana. Recibió su grado de Bachiller en Matemáticas en 1965 por la Universidad de Taiwan; su grado de Master en 1968 y su grado de Doctor en 1970 por la Universidad de Cornell. En este mismo año fue profesor visitante en el Instituto Courant en Nueva York y al año siguiente fue profesor asistente en la Universidad de Virginia y, en general, fue profesor visitante en diversas instituciones académicas. El Profesor Kuo es reconocido como investigador en el análisis estocástico con énfasis en la integral estocástica, en la teoría del ruido blanco y en el análisis infinito-dimensional, esto es, la teoría de integración sobre variedades infinito-dimensional; trabajó en las medidas gausianas en espacios de Banach, en la teoría de distribuciones de ruido blanco. En particular, Kuo orientó su investigación a resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, así como ecuaciones de dimensión infinita. Ha escrito muchos trabajos de investigación en las mencionada áreas, así como diversos libros en donde destacamos "Introduction to Stochastic Integration "(2006). Kuo, por su labor científica en pro del análisis estocástico, ha merecido diversos premios y honores.

7.4. La Integral sobre Variedades de Dimensión Infinita. , [61]. Kuo, en 1971, propone desarrollar una teoría de integración sobre una deseada clase de variedades de dimensión infinita, que está relacionada con el espacio abstracto de Wiener. Este tipo de espacio fue primero introducido por Gross en 1965, [62], el cual generaliza a los espacios de Wiener clásicos. Wiener en 1923 introdujo una medida en el espacio de Banach C que consiste de las funciones continuas de valor real sobre $(0, 1]$, que se anulan en el cero y con la norma del supremo. C' es el subespacio de las funciones absolutamente continuas en C, con derivadas cuadrado-integrables, que es un espacio de Hilbert con el producto interno $< x, y >= \int_0^r x'(t)y'(t)dt$. i es la aplicación inclusión de C' en C. Entonces, por definición: (i, C', C) es llamado **el espacio clásico de Wiener**. Por otro lado, luego de algunos argumentos de análisis funcional, se define al triple (i, H, B) como **el espacio abstracto de Wiener**, donde H es un adecuado espacio de Hilbert real y B es la completación de H con respecto a una norma medible fija sobre H. El espacio abstracto de Wiener fue introducido por L.Gross en 1965, [62]. Luego Kuo pasa a usar argumentos del análisis funcional para desarrollar los prerrequisitos hacia su integral. Ver [61] para los detalles de esta integral sobre espacios abstractos.

7.5. Introducción a la Integración Estocástica. Vamos a dar un panorama de este excelente libro sobre la integral estocástica del Profesor H. H. Kuo, [55], dado que es una útil fuente para aprender sobre el tema, hasta el año 2006. El libro está dedicado a Kiyosi Itô. Consta de 11 capítulos. Veamos brevemente.

1. **Introducción**. Integrales. Revisa a la integral de Riemann y a la de Riemann-Stieltjes. Hace algunas reflexiones e interrogantes sobre estas integrales. Concluye enunciando algunas propiedades que debe satisfacer el proceso estocástico $B(t)$, que define como un cierto límite, preparando así la definición del proceso llamado "movimiento browniano".

2. **Movimiento Browniano**. Kuo comienza introduciendo la definición de movimiento browniano, así como de algunas de sus propiedades. Luego define a la integral de Wiener. Da varios ejemplos ilutrativos. Luego comenta a la esperanza condicional; digamos algunas palabras: sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad fijo. $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, es el espacio de todas las variables aleatorias X que satisfacen $E(|X|^p) < \infty$, el cual es un espacio de Banach con la norma $||X||_p = (E(|X|^p)^{\frac{1}{p}}$.
L^2 es un espacio de Hilbert. En $L^1(\Omega)$ se usa la norma $||X||_p = E|X|$. Luego se define a la esperanza condicional: "Sea $X \in L^1(\Omega, F)$; sea G una σ-álgebra tal que $G \subset F$. La esperanza condicional de X, dado G, es la única variable aleatoria Y tal que:

   (i) Y es G-medible ,

(ii) se tiene $\int_A XdP = \int_A YdP$, para toda $A \in G$.

Notación. $Y = E(X/G)$. Ver la sección 5 de nuestro escrito.
Luego estudia a las martingalas.

3. **Construcciones del Movimiento Browniano**. Estudia al espacio de Wiener, ya que a él se le debe la primera construcción, en 1923, de movimiento browniano. Luego pasa a dar una serie de argumentos del análisis funcional.

4. **Integrales Estocásticas**. Es un interesante capítulo pues desarrolla el tema del libro; comienza con los antecedentes y motivaciones; se considera al movimiento browniano $B(t)$ como integrador de la integral; luego de examinar la idea de filtración para un movimiento browniano pasa a definir la integral estocástica siguiendo las ideas de Itô, la que se logra siguiendo diversas etapas. Nos da algunos ejemplos para consolidar la idea de integral en este contexto. En este capítulo se trata también la desigualdad submartingala de Doob, y se termina haciendo un análisis entre las sumas de Riemann y las integrales estocásticas, dándose un teorema donde se expresa la integral estocástica como el límite de una suma de Riemann.

5. **Una Extensión de Integrales Estocásticas**. Se comienza dando una larga clase de integrandos; se discuten varios ejemplos para ilustrar las ideas; luego se estudia integrales estocásticas en general y los tiempos de parada; se termina esta parte con los procesos estocásticos asociados, donde se establece que ciertos procesos son martingalas locales.

6. **Integrales Estocásticas para Martingalas**. En este capítulo se usan las mismas ideas que en los caps. 4 y 5 pero con algunas modificaciones tecnicas para definir a la integral estocástica $\int_a^b f(t)dM(t)$ con respecto a una martingala continua a la derecha, cuadrado-integrable $M(t)$ con límites a la izquierda. Se recalca que el integrando $f(t)$ debe ser predicable para así compensar los saltos de la martingala $M(t)$; las martingalas se usan como integradores. Luego se extienden los integrandos f.

7. **La Fórmula de Itô**. En una forma simple, Kuo nos motiva esta fórmula a partir del cálculo infinitesimal (la regla de la cadena). Se estudia la fórmula de Itô en su forma simple dando su demostración; luego se la generaliza levemente para después estudiarla en su forma general. También se estudia esta fórmula en el caso n-dimensional y el capítulo termina estudiando la fórmula de Itô para martingalas.

8. **Aplicaciones de la Fórmula de Itô**. Sabemos que la regla de la cadena es una fórmula fundamental cuando estudiamos el cálculo infinitesimal; así lo es, también, la fórmula de Itô en el cálculo de Itô. En este capítuto Kuo da varias aplicaciones de la fórmuta de Itô, en particular en la evaluación de las integrales estocásticas. Así, inicia esta parte evaluando integrales estocásticas; estudia la integral de Stratonovich, así como el teorema de descomposición de Lévy. Analiza el movimiento browniano n-dimensional, así como los procesos exponenciales y el teorema de Girsanov en donde se plantea la pregunta: "¿existen procesos estocásticos $\phi(t)$ tal que $B(t) - \phi(t)$ es un movimiento browniano con respecto a alguna medida probabilística?, $B(t)$ es un movimiento browniano. Esta pregunta fue motivada porque se sabe que $B(t) - t$, $t \in [0, 1]$, es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad Q dado por $dQ = e^{B(1)-\frac{1}{2}}dP$.

9. **Integrales Múltiples de Wiener-Itô**. N. Wiener fue un gran matemático que incursionó en el análisis armónico dándonos un legado de fundamentales contribuciones, en particular en la mecánica estadística. Así él definió ciertos polinomios ("caos") como sumas finitas de integrales múltiples con respecto al movimiento browniano. Esto abrió nuevas investigaciones, así, en 1951, K. Itô introdujo nuevas integrales múltiples, las que fueron llamadas "integrales múltiples de Wiener-Itô"; éstas están relacionadas a las integrales estocásticas que Itô introdujo en 1944. Se discute la cuestión: ¿cómo definir la integral doble $\int_a^b \int_a^b f(s,t)dB(t)dB(s)$ para una función determinística $f(t, s)$? Kuo discute esta cuestión. Este capítulo es un tanto técnico.

10. **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas**. Las ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como las en derivadas parciales, juegan un rol vital en el cálculo clásico; es una área central de la matemática pues gracias a ellas el hombre encontró los medios para interpretar y conocer al mundo en que vivimos. En consecuencia, llevar estos modelos al mundo probabilístico, de variables aleatorias, debe ser un capítulo de las matemáticas muy fascinante. Así fue, en efecto, por las importantes aplicaciones que se hicieron. Kuo, como siempre, motivó las ideas centrales de lo que trata, con ejemplos muy simples del cálculo clásico, lo que hace al inicio de esta parte. Expone sobre el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones estocásticas; estudia la propiedad de Markov: "un proceso estocástico X_t, $t \in [a,b]$, satisface la propiedad de Markov si para todo $a \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \leq b$, se tiene la igualdad

$$P(X_t \leq x/X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = P(X_t \leq x/X_{t_n}),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$".
Un proceso de Markov es un proceso estocástico X_t, $t \in [a,b]$, que satisface la propiedad de Markov. Kuo continúa este capítulo estudiando las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas, así como algunas estimativas de tales soluciones. Estudia los procesos de difusión en donde usa los procesos de Markov. Termina el capítulo exponiendo la teoria de semigrupos y las ecuaciones de Kolmogorov para procesos de difusión lo que hace siguiendo el contexto de los semigrupos y luego el de las ecuaciones en derivadas parciales.

11. **Algunas Aplicaciones y Tópicos Adicionales**. Es el último capítulo donde Kuo da varias aplicaciones de la integración estocástica a situaciones concretas, así como da algunos tópicos relacionados a las aplicaciones. En primer lugar discute las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, así también expone ampliamente las aplicaciones al mundo de las finanzas. Aplica, también, las integrales estocásticas a la teoría de la filtración (G. Kallianpur, 1980). Luego trata la fórmula de Feynman-Kac relacionada con el estado de una partícula en el tiempo t representada por una función $u(x,t)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, la que satisface una ecuación de Schrödinger; todo esto dentro de la mecánica cuántica. La sección 5 trata sobre la aproximación de integrales estocásticas donde se describe una relación entre el cálculo de Newton-Leibniz con el cálculo de Itô ,lo que es debido a E.Wong-M. Zakai, 1965, quienes discutieron la convergencia de integrales ordinarias a integrales estocásticas, así como la relación que existe entre las ecuaciones diferenciales del cálculo infinitesimal con las ecuaciones diferenciales estocásticas. Finalmente, en la sección 6, Kuo trata la teoría del ruido blanco y los circuitos eléctricos, en donde usa algunas ecuaciones diferenciales estocásticas. Al final, nos indica que sobre la teoría del ruido blanco podemos consultar, por ejemplo, su libro "White Noise Distribution Theory". 1996.

8. Breves comentarios sobre la Integral a través del Tiempo. I-II-III-IV.

(i) Los cuatro artículos, I, II, III y IV, de "la Integral, una Visión de su Evolución a través del Tiempo"nos dan un panorama de la evolución de la noción de integral, dando énfasis a las ideas, métodos y contribuciones hechas en pro de su desarrollo.

(ii) La idea fue, y es, dar al lector interesado motivaciones para hacer estudios más detallados que podrían conducir a un trabajo de maestría o doctorado, si las condiciones son las adecuadas. Se dan numerosas referencias bibliográficas.

(iii) Contribuir en nuestro país, y otros, con una información sobre temas de relevancia en el universo matemático, como es el análisis matemático en sus diferentes niveles de rigor analítico.

(iv) En particular, difundir el análisis estocástico por sus grandes aplicaciones a problemas concretos, como es el mundo de las finanzas, de la física, la estadística, y otras áreas.

(v) Así mismo motivar estudios sobre aspectos teóricos del análisis, pues donde hay una buena matemática pura, hay una buena matemática aplicada.

(vi) Motivar en nuestras universidades actividades como son hacer seminarios, grupos de estudios, orientación de tesis, sobre temas concretos que existen en estos cuatro artículos.

(vii) Los interesados en esta área matemática pueden complementar su información consultando: [63] donde el autor expone temas del análisis real-armónico relacionado con la teoría de Littlewood-Paley, la que es útil tanto en la matemática pura como en la aplicada, es un libro avanzado y especializado . En [64],, [65] y [66] se exponen los procesos estocásticos (las martingalas) usando resultados del análisis real como son las desigualdad de John-Nirenberg , los espacios H^p y los BMO. Estos trabajos son recomendados como temas para seminarios con estudiantes avanzados. El artículo [67] podría ser útil para interesados en la estadística y así aprender técnicas del cálculo estocástico. El autor pertenecía, entonces, a la PUCP. En [56] los autores proponen la fórmula de Ito para la nueva integral de Kuo y de esta manera se tiene un avance para tal fórmula; es un artículo que podría servir para una tesis de Maestría, dando las demostraciones y análisis del caso. Finalmente, en [68] Ito estudia las ecuaciones diferenciales estocásticas en su relación con los procesos estocásticos. Este tema , las ecuaciones diferenciales estocásticas , es un reto que esperamos algún día escribir algo.

Author contributions. El autor es responsable de la definición, selección y discusión del material.

Funding. Este trabajo no ha recibido fondos externos .

Conflicts of interest. Declaro que no hay conflicto de interés, puesto que soy Editor activo, no participo de ninguna decisión de la revista en cualquier nivel.

ORCID and License

Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] Petersen KE. Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation: Cambridge University Press. Cambridge; 1977.

[2] Fefferman C. Characterizations of bounded mean oscillation, American Mathematical Society.1971; 77(4): 587-588.

[3] Fefferman Ch, Stein EM. H^p spaces of several variables. Acta Math; 1972. 129: 137-192.

[4] Fefferman C. Harmonic analysis and H^p spaces, Studies in Math, Math. Assoc. of Amer. 1976; 13.

[5] Calderón AP, Zygmund A. On the existence of certain singular integrals. Acta Math. 1952; 88: 85-139.

[6] Burkholder DL. Martingale transforms, Ann. Math. Stat. 1966; 37: 1494-1504.

[7] Gundy RF. On the class $LlogL$, martingales and singular integrals, Studia Mathematica. 1969; T. XXXIII.

[8] Doob JL. Stochastic Processes, John Wiley and Sons, Inc; New York. 1953.

[9] Rincón L. Introducción a los procesos estocásticos, Dep. Mat. UNAM; 2012.

[10] Burkholder DL, Gundy RF, Silverstein ML. A maximal function characterization of the class H^p, Trans. Amer. Math. Soc. 1971; 157.

[11] John F, Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure and Applied Math. 1961; 14.

[12] Neri U. Fractional integration on the space H^p and its dual, Studia Math. 1975.

[13] Hardy GH, Littlewood JE. A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math. 1930; 54.

[14] Lusin N. Sur une propriété des fonctions á carré sommable, Bull. Calcutta Math. Soc. 1930; 20.

[15] Marcinkiewicz J, Zygmund A. A theorem of Lusin, Duke math. J. 1938; 4.

[16] Spencer DC. A function-theoretic identity, Amer. J. Math. 1943; 65.

[17] Littlewood JE, Paley RE. Theorems on Fourier series and power series, I. J. London Math. Soc. 1931; 6.

[18] Gasper GJr. On the Littlewood-Paley g-function and the Lusin S-function, Trans. Amer. Math. Soc. 1968; 134.

[19] Kolmogorov AN. Sur les fonctions harmoniques conjugées et les séries de Fourier, Fund. Math. 1925; 7.

[20] Davis B. On the weak type $(1, 1)$ inequality for conjugate functions, Proc. Amer. Math. Soc. 1974; 44.

[21] Taylor AE. Weak convergence in the spaces H^p, Duke math. J. 1950; 17.

[22] Davis B. On the integrability of the martingale square function, Israel J. math. 1970; 8.

[23] Burkholder DL, Gundy RF. Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math. 1970; 124.

[24] Roussanov N. Martingale Hardy spaces and bounded mean oscillation. University of Pennsylvania, Dpt. Math. (Internet).

[25] Milman M. Interpolation of martingale spaces and application, 11 Seminario Brasileiro de Análise. Pre-Public.

[26] Stein EM, Weiss G. Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton University Press. Princeton. N. J. 1971.

[27] Garsia AM. The Burges Davis inequalities via Fefferman's Inequality, Ark. Mat. 1973; 11.

[28] Herz C. Bounded mean oscillation and regulated martingales, Trans. of the American Mathematical Society. 1974; 193.

[29] Herz C. H^p-spaces of martingales, $0 < p < 1$. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Geb. 1974; 28.

[30] Burkholder DL, Davis BJ, Gundy RF. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proceed. 6 Berkeley Sym. Math. Stat. Prob. 1970.

[31] Burkholder DL. Inequalities for operators on martingales, Actes, Congrés Inter. Math. 1970; 2.

[32] Burkholder DL, Gundy RF. Boundary behaviour of harmonic functions in a half-space and brownian motion, Ann. Inst. Fourier. U. Grenoble. 1973; T. XXlll (4).

[33] Calderón A. On the behaviour of harmonic functions at the boundary, Trans. Amer. Math. Soc. 1950; 68.

[34] Carleson L. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables, Arkiv för Mathematik. 1961; 4.

[35] Calderón A. On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund. Trans. Americ. Math. Soc. 1950; 68.

[36] Spencer D. A function-theoretic identity, Amer. J. Math. 1943; 65.

[37] Privalov I. Integral Cauchy, Saratov. 1919.

[38] Stein EM. On the theory of harmonic functions of several variables II, Behaviour near the boundary. Acta Math. 1961; 106.

[39] Burkholder DL. Martingale theory and harmonic analysis in Euclidean spaces, Proceeding of Symp. in Pure Math. 1979; XXXV(2).

[40] León JA. Integración estocástica con respecto al movimiento browniano, Matemáticas: Enseñanza Universitaria. 2006; XIV (2).

[41] Burkholder DL. One-sided maximal functions and H^p, Journal of Functional Analysis. 1975; 18.

[42] Burkholder DL. Distribution function inequalities for martingales, The Annals of Probability. 1973; 1(1).

[43] Burkholder DL. H^p spaces and exit times of brownian motion. Bull, AMS. 1975; 81(3).

[44] Ortiz A. La integral, una visión de su evolución a través del tiempo. I, II, III, UNT. Selecciones Matemáticas. 2023; I, 10(1); II y III, 10(2).

[45] Liu J. Approximative theorem of incomplete Riemann-Stieltjes sum of stochastic integral, arXiv. 2018; 17:1803.05182v2 [MATH.pr].

[46] Garro M. Notas breves de integración estocástica, Internet. Octubre. 2016.

[47] Le Gall J-F. Brownian motion, martingales and stochastic calculus, Graduate Text in Mathematics. Springer. 2013.

[48] Bojdecki T. Teoría general de procesos e integración estocástica, Texto 6. Aportaciones Matemáticas. S. M. Mex. 1995.

[49] Bastons G, Joan C. The Itô integral and anticipating generalizations, Univ. Aut. de Madrid. Madrid. 2017.

[50] Buldygin V, et al. Anatolii Skorohod(1930-2011), Newsletter of the EMS.

[51] López R. Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, Univ. Aut. de Puebla. 2014.

[52] Ayed W, Kuo H-H. An extension of the Itô integral, Communications on Stochastic Analysis. 2008; 2(3).

[53] Ayed W, Kuo H-H. An extension of the Itô integral: toward a general theory of stochastic integration, Theory of Stochastic Processes. 2010; 16(32)(1).

[54] Kuo H-H: The Itô calculus and white noise theory: a brief survey toward general stochastic integration. Communications on Stochastic Analysis. 2014; 8(1).

[55] Kuo H-H. Introduction to stochastic integration, Universitext (UTX). Springer. 2006.

[56] Kuo H, Tang AS, Szozda B. The Itô formula for a new stochastic integral. Thiele Centre. 2012; 4(I).

[57] Hwang Ch, Kuo H, Saito K, Zhai J. A general Itô formula for adapted and instantly independent stochastic processes. Commun. on Stochastic Analysis. 2016; 10(3).

[58] Parczewski P. Extensions of the Hitsuda-Skorokhod integral. Communications on Stochastic Analysis. 2017; 11(4).

[59] Jarrow R, Protter Ph. A short history of Stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880-1970, A Festschrift for Herman Rubin. Inst. of Mathem. Statistics. Lect. Notes. 2004; 4.

[60] Itô K. Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1944; 20 (8).

[61] Kuo H-H. Integration theory on infinite-dimensional manifolds. Transac. of the American Mathem. Society. 1971; 159.

[62] Gross L. Abstract Wiener Spaces, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math.Statist. and Probability. Berkeley. 1965/66.

[63] Stein EM. Topics in harmonic analysis. Related to the Littlewood-Paley theory: Princeton University Press; N. J. 1970.

[64] Lé K. Quantitative John-Nirenberg inequality for stochastic processes of bounded mean oscillation, arXiv. 2022.

[65] Kazamaki N. The martingale version of a theorem of Sarason on the class VMO, Math. Rep. Toyama Univ. 1979; 2.

[66] Kazamaki N. Transformation of H^p-martingales by a change of law. Z, Wahrscheinlichkeistheorie verw. Gebiet. 1979; 46.

[67] Kohatsu A. Cálculo estocástico y una aplicación a la estadística, Pro Mathemática. PUCP. 1988; II (4).

[68] Itô K. Differential equations determining Markov processes, Zenkoku Shijo S. D. 1942; 244(1077). [En japonés].