Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2024; Vol.11(1):42-55.

Extensions in affine spaces of bilinear applications, differentiable actions, and tensors

Extensiones en espacios afines de aplicaciones bilineales, acciones diferenciables y tensores

Benito Leonardo Ostos Cordero

Received, Jan. 31, 2024; Accepted, Jun. 13, 2024; Published, Jul. 29, 2024

How to cite this article:
Benito O. *Extensions in affine spaces of bilinear applications, differentiable actions, and tensors* . Selecciones Matemáticas. 2024;11(1):42–55. **http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2024.01.04**

Abstract

This article studies several generalizations in affine spaces. First, the notion of affine maps is extended to bilinear maps defined in affine spaces, referred to as affine bilinear maps, and symmetric and antisymmetric affine bilinear forms are examined. Next, differentiable actions of a Lie group on affine spaces are defined, analyzing their isotropy group, orbit space, and set of fixed points. Finally, the notion of tensor product between vector spaces is extended to tensor product between affine spaces.

Keywords . Affine bilinear, affine action, affine tensor.

Resumen

En este artículo se estudian varias generalizaciones en espacios afines. Primero, se amplía la noción de aplicaciones afines a aplicaciones bilineales definidas en espacios afines, denominadas aplicaciones bilineales afines, y se examinan las formas bilineales afines simétricas y antisimétricas. Luego, se definen acciones diferenciables de un grupo de Lie sobre espacios afines, analizando su grupo de isotropía, su espacio de órbitas y su conjunto de puntos fijos. Finalmente, se extiende la noción de producto tensorial entre espacios vectoriales a producto tensorial entre espacios afines.

Palabras clave. Bilineal afín, acción afín, tensor afín.

1. Introducción. Los espacios afines son una estructura matemática próxima a la del espacio vectorial en donde no tiene un punto privilegiado como el vector cero en un espacio vectorial. Un espacio afín se refiere a la representación matemática de un conjunto de puntos, donde la característica principal es la existencia de un conjunto de movimientos preferentes conocidos como traslaciones. Estas traslaciones permiten ir de cualquier punto a otro de manera única y se modelizan utilizando el concepto de espacio vectorial. Las propiedades geométricas de un espacio afín se mantienen invariantes por el grupo de las aplicaciones afines biyectivas.

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú.(**Autor de correspondencia** bostosc@uni.edu.pe).

En este artículo, comenzamos definiendo aplicaciones afines entre espacios afines para luego generalizar a aplicaciones bilineales afines entre estos espacios. Estudiamos las propiedades de las formas bilineales afines simétricas, antisimétricas y alternantes, resultando en el Teorema 3.3. Posteriormente, en el contexto de los sistemas dinámicos, extendemos la definición de acción diferenciable de un grupo de Lie sobre espacios afines, analizando su grupo de isotropía, su espacio de órbitas y el conjunto de sus puntos fijos, presentados en los Teoremas 4.2, 4.3 y 4.4.

Utilizando el Teorema 5.1, proporcionamos la Definición 5.1, que extiende la definición de 2-tensor contravariante en un espacio afín. Para esta extensión, consideramos espacios afines con una forma bilineal afín cuya forma bilineal asociada sea un producto interno. En general, la Definición 5.2 nos provee de un espacio tensorial entre espacios afines, y en el Teorema 5.3 se establecen las condiciones para que un tensor afín posea la propiedad universal, similar a la de los tensores en espacios vectoriales. Como consecuencia, se obtiene la relación entre los tensores afines y los tensores en espacios vectoriales.

2. Preliminares.

Iniciamos con algunas definiciones y teoremas referentes a espacio afín y aplicaciones afines. Para mayor información puede consultar:[1], [2],[3], [4], [5], [6].

Definición 2.1. *Sea A un conjunto no vacío y $E = (E, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Se dice que A es un espacio afín asociado a E si existe una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A \times E & \to & A \\ & (p, v) & \mapsto & \varphi(p, v) \end{array}$$

que satisface las propiedades:

1. *Para cada $p \in A$, la aplicación $\varphi_p : V \to A$, definida por $\varphi_p(v) = \varphi(p, v)$, es biyectiva.*
2. *Para cada $p \in A$ y para cada par de vectores $u, v \in V$, $\varphi(p, u+v) = \varphi(\varphi(p, u), v)$.*

En lo que sigue denotaremos $\varphi(p, v) := p \dagger_A v$ o por $\varphi(p, v) := p \dagger v$ cuando no hay lugar de confusión con respecto a A.

Observación 2.1.

- *Los elementos de A son llamados puntos y los elementos de V son llamados vectores.*
- *Del primer apartado de la definición: dado $q \in A$, existe un único vector $v \in V$ tal que $p \dagger v = q$.*
- *Del segundo apartado de la definición: $p \dagger (u + v) = (p \dagger u) \dagger v$, para todo $p \in A$ y para todo $u, v \in E$.*

La estructura de espacio afín lo denotaremos por (A, E, φ) o por $(A, E, \dagger)$. La dimensión de un espacio afín A es la dimensión del espacio vectorial E.
Un modo equivalente a la definición de espacio afín es tomar dos puntos en A y asignarle un vector mediante una función.

Teorema 2.1. *Sea A un conjunto no vacío y $E = (E, +, \cdot)$ un espacio vectorial. A es un espacio afín asociado a E si y sólo si existe una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & A \times A & \to & E \\ & (p, q) & \mapsto & \psi(p, q) \end{array}$$

que satisface las propiedades:

1. *Para cada $p \in A$, la aplicación $\psi_p : A \to E$, definida por $\psi_p(q) = \psi(p, q)$, es biyectiva.*
2. *Para cada $p, q, s \in A$, $\psi(p, q) + \psi(q, s) = \psi(p, s)$.*

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\psi"'] & A' \times A' \arrow[d, "\psi'"] \\ V \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & V' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (p,q) \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\psi"'] & (f(p), f(q)) \arrow[d, "\psi'"] \\ \overrightarrow{pq} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \widetilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} \end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Aplicación afín $\psi' \circ (f \times f) = \widetilde{f} \circ \psi$.

En lo que sigue denotaremos $\psi(p,q) := \overrightarrow{pq}$. *Haciendo uso de esta notación los apartados del teorema quedarían: dado* $v \in E$*, existe un único* $q \in A$ *tal que* $\overrightarrow{pq} = v$*, y para cada* $p, q, s \in A$, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs} = \overrightarrow{ps}$.

Observación 2.2. *La relación entre* (A, E, φ) *dada por la definición 2.1, y* (A, E, ψ) *dada por el teorema anterior, es que para cada* $p \in A$, $\varphi_p : V \to A$ *es una función biyectiva con inversa* $\psi_p : A \to V$*. Así,*

$$\varphi_p^{-1}(q) = \overrightarrow{pq}, \quad \varphi_p(\overrightarrow{pq}) = p \dagger \overrightarrow{pq} \quad y \quad q = p \dagger \overrightarrow{pq}.$$

Teorema 2.2. *Sean* p, q, s, t *puntos en un espacio afín* A*. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\overrightarrow{pp} = 0$.
2. $\overrightarrow{pq} = 0$ *entonces* $p = q$.
3. $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$.
4. $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{st} \Leftrightarrow \overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qt}$.
5. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs} + \overrightarrow{sp} = 0$.

Definición 2.2. *Sea* A *un espacio afín asociado al espacio vectorial* V*. Sea* $p \in A$ *y* F *un subespacio vectorial de* V*. Decimos que el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{x \in A; \overrightarrow{px} \in F\} = \{p + v \in A; v \in F\} := p + F$$

es una variedad lineal afín (o subespacio afín) que pasa por p *y asociado al subespacio vectorial* F*.*

Las aplicaciones lineales se definen como funciones cuyo dominio y contradominio son espacios vectoriales, y tienen la propiedad de preservar las operaciones definidas en dichos espacios. En el contexto de aplicaciones entre espacios afines, las aplicaciones afines son importantes. Tienen el papel de preservar subespacios afines.

Definición 2.3. *Una aplicación* $f : (A, V, \psi) \to (A', V', \psi')$ *entre espacios afines se dice que es una aplicación afín si existe una aplicación lineal* $\widetilde{f} : V \to V'$ *tal que, para cada par de puntos* $p, q \in A$*:*

$$\widetilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

A la aplicación lineal $\widetilde{f}$ *se le llama aplicación lineal asociada a* f*.* Fijando $p \in A$ y puesto que $\widetilde{f}(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{f(p)f(x)}$, entonces $f(x) = f(p) \dagger_{A'} \widetilde{f}(\overrightarrow{px})$, $\forall x \in A$. Algunas propiedades de aplicaciones afines se enumeran en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea* $f : (A, V, \psi) \to (A', V', \psi')$ *una aplicación afín entre espacios afines. Entonces*

1. f *es inyectiva si y solo si* $\widetilde{f}$ *lo es;*
2. f *es sobreyectiva si y solo si* $\widetilde{f}$ *lo es;*
3. f *preserva subespacios afines.*

La geometría afín se puede extender al espacio proyectivo; para ello, se puede consultar con [7],[8], [9], [10], y otras definiciones usando coordenadas baricéntricas pueden encontrarse en [11].

3. Aplicaciones bilineales afines. Sean (A, E, ψ_A), (B, F, ψ_B), (C, G, ψ_C) espacios afines, donde E, F, G son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 3.1. *Una aplicación $b : A \times B \to C$ se llama aplicación bilineal afín, si existe una aplicación bilineal $\widetilde{b} : E \times F \to G$ tal que: $\widetilde{b}(\psi_A(p, q), \psi_B(r, s)) = \psi_C(b(p, r), b(q, s))$, para todo $p, q \in A$ y para todo $r, s \in B$.*

Haciendo uso de las notaciones de la sección anterior, tenemos $\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) = \overrightarrow{b(p, r)b(q, s)}, \quad \forall\ p, q \in A,\ \forall\ r, s \in B$.
Sea $\Theta_b : (A \times A) \times (B \times B) \to C \times C$ definido por $\Theta_b((p, q), (r, s)) = (b(p, r), b(q, s))$ para todo $p, q \in A$ y para todo $r, s \in B$. Así se tiene la conmutatividad de los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
(A \times A) \times (B \times B) \arrow[r, "\Theta_b"] \arrow[d, "\psi_A \times \psi_B"'] & C \times C \arrow[d, "\psi_C"] \\
E \times F \arrow[r, "\widetilde{b}"'] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
((p, q), (r, s)) \arrow[r, "\Theta_b"] \arrow[d, "\psi_A \times \psi_B"'] & (b(p, r), b(q, s)) \arrow[d, "\psi_C"] \\
(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) \arrow[r, "\widetilde{b}"'] & \widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) = \overrightarrow{b(p, r)b(q, s)}
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.1: Bilineal afín $\psi_C \circ \Theta_b = \widetilde{b} \circ (\psi_A \times \psi_B)$.

Además para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p, q, p', q', r, s, r', s' \in A$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{b}(\alpha\overrightarrow{pq} + \beta\overrightarrow{p'q'}, \beta\overrightarrow{rs}) &= \alpha\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) + \beta\widetilde{b}(\overrightarrow{p'q'}, \overrightarrow{rs}) \\
&= \alpha\overrightarrow{b(p, r)b(q, s)} + \beta\overrightarrow{b(p', r)b(q', s)} \\
\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \alpha\overrightarrow{rs} + \beta\overrightarrow{r's'}) &= \alpha\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) + \beta\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{r's'}) \\
&= \alpha\overrightarrow{b(p, r)b(q, s)} + \beta\overrightarrow{b(p, r')b(q, s')}.
\end{aligned}
$$

Teorema 3.1. *En la definición anterior, si $r = s$ o $p = q$, entonces $\overrightarrow{b(p, r)b(q, r)} = 0$ o $\overrightarrow{b(p, r)b(p, s)} = 0$.*
Demostración: Si $r = s$, en la definición

$$\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rr}) = \overrightarrow{b(p, r)b(q, r)} \Rightarrow 0 = \widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, 0) = \overrightarrow{b(p, r)b(q, r)} \Rightarrow \overrightarrow{b(p, r)b(q, r)} = 0.$$

De modo similar se prueba el caso $p = q$. □

Teorema 3.2. *Fijando $(p, r) \in A \times B$, se tiene $b(x, y) = b(p, r) \dagger_C \widetilde{b}(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{ry}), \quad \forall\ (x, y) \in A \times B$. Demostración:*

$$
\begin{aligned}
b(p, r) \dagger_C \widetilde{b}(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{ry}) &= \varphi_C(b(p, r), \widetilde{b}(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{ry})) \\
&= \varphi_C(b(p, r), \psi_C(b(p, r), b(x, y))) \\
&= (\varphi_C)_{b(p,r)}(\psi_C)_{b(p,r)}(b(x, y)) \\
&= b(x, y).
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 3.1. *Sean $A = B = C = E = F = G = \mathbb{R}^n$ y $\psi_A, \psi_B, \psi_C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido como $\psi_A(p, q) = \psi_B(p, q) = \psi_C(p, q) = q - p$, para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$.*
Si $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es afín bilineal, entonces su bilineal asociada $\widetilde{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de la forma

$$\widetilde{b}(q - p, r - s) = b(q, s) - b(p, r).$$

Y en términos del teorema anterior para $(p, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fijo, se tiene

$$
\begin{aligned}
b(x, y) &= b(p, r) + \widetilde{b}(x - p, y - r) \\
&= b(p, r) + \widetilde{b}(x, y) - \widetilde{b}(x, r) - \widetilde{b}(p, y) + \widetilde{b}(p, r).
\end{aligned}
$$

Definición 3.2. *Sean* $((A, E, \psi_A)$ *y* $(B, \mathbb{R}, \psi_B)$ *espacios afines. Se dice que una aplicación* $b : A \times A \to B$ *es una bilineal afín simétrica o anti-simétrica o alternante, si es una aplicación bilineal afín en donde su bilineal asociado es una forma bilineal simétrica o anti-simétrica o alternante, respectivamente.*

Teorema 3.3. *Sean* (A, E, ψ_A) *y* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \psi_{\mathbb{R}})$ *espacios afines, donde* $\psi_{\mathbb{R}}$ *es la operación usual en* $\mathbb{R}$. *Sea* $b : A \times A \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal afín. Entonces*

1. b *es simétrica si y solo si* $b(x, y) = b(y, x)$, *para todo* $x, y \in A$.
2. b *es anti-simétrica si y solo si* $b(x, y) = b(y, x) = b(x, x)$ *para todo* $x, y \in A$.
3. b *es alternante si y solo si* $b(x, x) = b(x, y)$ *para todo* $x, y \in A$.
4. b *es anti-simetrica si y solo si* b *es alternante.*

Demostración: Si $\widetilde{b} : E \times E \to \mathbb{R}$ es la forma bilineal asociada a b, entonces

1. ($\Rightarrow$) Dados $x, y, p, r \in A$ tenemos

$$b(x, y) = b(p, r) + \widetilde{b}(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{ry}) \quad \text{y} \quad b(y, x) = b(r, p) + \widetilde{b}(\overrightarrow{ry}, \overrightarrow{px}).$$

Tomamos la diferencia de ambas ecuaciones y operamos

$$b(x, y) + b(r, p) = b(y, x) + b(p, r), \quad \forall\, x, y, p, r \in A.$$

En particular tomando $x = r$ e $y = p$ tenemos

$$b(x, y) = b(y, x), \quad \forall\, x, y \in A.$$

($\Leftarrow$) Es claro de la primera parte de la prueba.

2. ($\Rightarrow$) Dados $x, y, p, r \in A$ tenemos

$$b(x, y) = b(p, r) + \widetilde{b}(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{ry}) \quad \text{y} \quad b(r, x) = b(y, p) + \widetilde{b}(\overrightarrow{yr}, \overrightarrow{px}).$$

Tomamos la diferencia de ambas ecuaciones y operamos

$$b(x, y) + b(y, p) = b(p, r) + b(r, x).$$

Para $p = r = y$

$$b(x, y) + b(y, y) = b(y, y) + b(y, x) \Rightarrow b(x, y) = b(y, x)$$

Para $p = r = x$

$$b(x, y) + b(y, x) = 2b(x, x) \Rightarrow b(x, y) = b(x, x), \quad \forall\, x, y \in A.$$

Por lo tanto las afines anti-simétricas son constantes con respecto a una de las variables.
($\Leftarrow$) Es trivial.

3. Si $\widetilde{b}$ es alternante

$$\widetilde{b}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{b(p,p)b(q,q)} = 0 \Leftrightarrow b(p, p) = b(q, q).$$

4. Es claro que las formas bilineales afines alternantes son anti-simétricas y viceversa.

□

Sea (A, E, ψ) un espacio afín con E siendo un espacio vectorial real de dimensión finita. Sea $b : A \times A \to \mathbb{R}$ una forma bilineal afín cuyo bilineal asociado es un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$. Para cada par $(p, q) \in A \times A$, se cumple la siguiente propiedad:

$$b(x, y) \quad = \quad b(p, q) + \langle \overrightarrow{px}, \overrightarrow{qy} \rangle\,, \quad (x, y) \in A \times A.$$

Además, se tiene las siguientes afirmaciones:

1. Si $\overrightarrow{px} = \overrightarrow{qy}$, entonces $b(x,y) = b(p,q) + \|\overrightarrow{px}\|^2$.
2. Si $p = q$ y $x = y$, entonces $b(x,x) = b(p,p) + \|\overrightarrow{px}\|^2$. Es claro que $b(x,x) \geq b(p,p)$, para todo $x \in A$. Además, si $b(x,x) = b(p,p)$ entonces $p = x$.

A partir de lo anterior, se pretende definir una espacie de norma en A. Dado un punto $p \in A$, definimos la aplicación $\|\cdot\|_p : A \to \mathbb{R}$ como $\|x\|_p = \|\overrightarrow{px}\|$. Esta aplicación satisface las siguientes propiedades:

1. $\|x\|_p \geq 0$.
2. Si $\|x\|_p = 0$ si y solo si $p = x$.
3. dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha|\|x\|_p = \|\alpha \cdot \overrightarrow{px}\|$.
4. $\|\overrightarrow{px} + \overrightarrow{py}\| \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
5. $\|\overrightarrow{pq}\| \leq \|x\|_p + \|x\|_q$.

En las condiciones anteriores el espacio afín es un espacio métrico con métrica $d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\|$.

Sea (A, E, ψ) un espacio afín con $E = (E, +, \cdot)$ espacio vectorial real de dimensión finita. Sea $p \in A$ fijo, definimos las operaciones afines $+_p$ y $\cdot_p$:

$$\begin{array}{rccc} +_p: & A \times A & \to & A \\ & (x,y) & \mapsto & +_p(x,y) = x +_p y \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} \cdot_p: & \mathbb{R} \times A & \to & A \\ & (\alpha,x) & \mapsto & \cdot_p(\alpha,x) = \alpha \cdot_p x \end{array}$$

tales que

$$\psi(p, +_p(x,y)) = \overrightarrow{px} + \overrightarrow{py} \quad \text{y} \quad \psi(p, \cdot_p(\alpha,x)) = \alpha\overrightarrow{px}.$$

es decir,

$$\overrightarrow{x +_p y} = \overrightarrow{p +_p (x,y)} = \overrightarrow{px} + \overrightarrow{py} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\alpha \cdot_p x} = \overrightarrow{p \cdot_p (\alpha,x)} = \alpha\overrightarrow{px}.$$

Entonces $(A, +_p, \cdot_p)$ es un espacio vectorial. Más aún,

$$\|\alpha \cdot_p x\|_p = \|\cdot_p (\alpha,x)\|_p = \|\overrightarrow{p \cdot_p (\alpha,x)}\| = \|\alpha\overrightarrow{px}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{px}\| = |\alpha|\|x\|_p$$

$$\|x +_p y\|_p = \|+_p (x,y)\|_p = \|\overrightarrow{p +_p (x,y)}\| = \|\overrightarrow{px} + \overrightarrow{py}\| \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Por lo tanto, $(A, +_p, \cdot_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado. Denotaremos a $(A, +_p, \cdot_p, \|\cdot\|_p)$ por T_pA y es llamado espacio tangente de A en el punto p. Además podemos observar que $\psi_p : T_pA \to E$ es un isomorfismo lineal.

4. Acciones sobre espacios afines. La noción de derivada definido entre conjuntos abiertos euclideanos se extiende a espacios afines, para ello puede consultar [12]. Aquí se presenta una forma distinta de definir derivadas pero solo para acciones definidas en un grupo de Lie sobre espacios afines. Sea (A, E, ψ) un espacio afín de dimensión n sobre un espacio vectorial normado E y sea $G = (G, *)$ un grupo de Lie real con elemento neutro e.

Definición 4.1. *Dada la aplicación $\phi : G \times A \to A$. Decimos que ϕ es una acción continua G sobre A, si ϕ es una aplicación continua $G \times A$ en A tal que:*

1. *$\phi(e,p) = p$ y*
2. *$\phi(g_1 * g_2, p) = \phi(g_1, \phi(g_2, p))$, para todo $g_1, g_2 \in G$ y para todo $p \in A$.*

A partir de la definición 4.1 consideremos $\widetilde{\phi} : G \times E \to E$ definido por $\widetilde{\phi}(g, \overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{p\phi(g,q)}$, para todo $g \in G$ y para todo $p, q \in A$. O de manera equivalente $\phi(g,q) = p \dagger \widetilde{\phi}(g, \overrightarrow{pq})$.

Teorema 4.1. *La aplicación $\widetilde{\phi} : G \times E \to E$, dada por la definición 4.1, es una acción continua de G sobre E.*

Demostración: Dados $p, q \in A$ y $g_1, g_2 \in G$, tenemos

1. $\widetilde{\phi}(e, \overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{p\phi(e,q)} = \overrightarrow{pq}$.

2.
$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(g_1 * g_2, \overrightarrow{pq}) &= \overrightarrow{p\phi(g_1 * g_2, q)} = \overrightarrow{p(\phi(g_1, \phi(g_2, q)))} \\
&= \widetilde{\phi}(g_1, \overrightarrow{p\phi(g_2, q)}) = \widetilde{\phi}(g_1, \widetilde{\phi}(g_2, \overrightarrow{pq})).
\end{aligned}$$

3. Continuidad de $\widetilde{\phi}$.
$$\begin{aligned}
\lim_{(g,\overrightarrow{pq})\to(g_0,\overrightarrow{p_0q_0})} \widetilde{\phi}(g, \overrightarrow{pq}) &= \lim_{(g,\overrightarrow{pq})\to(g_0,\overrightarrow{p_0q_0})} \overrightarrow{p\phi(g,q)} = \lim_{(g,\overrightarrow{pq})\to(g_0,\overrightarrow{p_0q_0})} \psi(p, \phi(g,q)) \\
&= \psi(p_0, \phi(g_0, q_0)) = \overrightarrow{p_0\phi(g_0, q_0)} = \widetilde{\phi}(g_0, \overrightarrow{p_0q_0})
\end{aligned}$$

En la prueba anterior, comenzamos utilizando la definición de $\widetilde{\phi}$ y luego aplicamos el teorema 2,1. Dado que E es un espacio vectorial normado, en la última parte de la sección 3 se muestra que el espacio afín se convierte en un espacio métrico. Con esta métrica, ψ es una función continua.

□

Definición 4.2. *Una acción continua $\phi : G \times A \to A$ de G sobre A es llamado de clase C^k (resp. diferenciable) si $\widetilde{\phi} : G \times E \to E$ es de clase C^k (resp. diferenciable).*

$$\begin{tikzcd}
G \times A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id\times\psi_p"'] & A \arrow[d, "\psi_p"] \\
G \times E \arrow[r, "\widetilde{\phi}"'] & E
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: La relación entre la acción ϕ y $\widetilde{\phi}$.

El grupo de isotropía, conjunto de órbitas y el conjunto de puntos fijos de ϕ, por definición son:

1. $G_q(\phi) = \{g : \phi(g,q) = q\}$
2. $\mathcal{O}_q(\phi) = \{\phi(g,q) : g \in G\}$
3. $\sum(\phi) = \{q \in A : \phi(g,q) = q, \ \forall\, g \in G\}$

Teorema 4.2. *Si $G_q(\phi)$, $\mathcal{O}_q(\phi)$ y $\sum(\phi)$ son el grupo de isotropía, el conjunto de órbitas y el conjunto de puntos fijos de ϕ, entonces*

1. *$g \in G_q(\phi)$ si y solo si $g \in G_{\overrightarrow{pq}}(\widetilde{\phi})$, $\forall\, p \in A$.*
2. *$\overrightarrow{p\mathcal{O}_q(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{pq}}(\widetilde{\phi}), \ \forall\, p, q \in A$.*
3. *$q \in \sum(\phi)$ si y solo si $\overrightarrow{pq} \in \sum(\widetilde{\phi})$, $\forall\, p \in A$.*

Demostración: Si $g \in G_q(\phi)$ tenemos
$$\widetilde{\phi}(g, \overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{p\phi(g,q)} = \overrightarrow{pq}, \forall\, p \in A \iff g \in G_{\overrightarrow{pq}}(\widetilde{\phi}), \forall\, p \in A.$$

Evaluando ψ_p en la órbita $\mathcal{O}_q(\phi)$, tenemos
$$\psi_p(\mathcal{O}_q(\phi)) = \{\psi_p(\phi(g,q)) : g \in G\} = \{\overrightarrow{p\phi(g,q)} : g \in G\} = \{\widetilde{\phi}(g, \overrightarrow{pq}) : g \in G\} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{pq}}(\widetilde{\phi}).$$

Entonces
$$\psi_p(\mathcal{O}_q(\phi)) = \mathcal{O}_{\overrightarrow{pq}}(\widetilde{\phi}), \ \forall\, p, q \in A.$$
Si $q \in \sum(\phi)$ tenemos
$$\widetilde{\phi}(g, \overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{p\phi(g,q)} = \overrightarrow{pq}, \forall\, p \in A \Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} \in \sum(\widetilde{\phi}), \forall\, p \in A.$$

Teorema 4.3. *Dados $q, q' \in A$, $q \neq q'$ y $q' \notin \mathcal{O}_q(\phi)$. Entonces*

1. $\overrightarrow{q\mathcal{O}_q(\phi)} = \overrightarrow{q'\mathcal{O}_{q'}(\phi)} = \mathcal{O}_0(\widetilde{\phi})$.
2. $\overrightarrow{q'\mathcal{O}_q(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{q'q}}(\widetilde{\phi})$ *y* $\overrightarrow{q\mathcal{O}_{q'}(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{qq'}}(\widetilde{\phi})$.

Demostración: Por la parte 2 del teorema 4.2
$$\overrightarrow{p\mathcal{O}_q(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{pq}}(\widetilde{\phi}) \text{ y } \overrightarrow{p'\mathcal{O}_{q'}(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{p'q'}}(\widetilde{\phi}), \ \forall\, p, p' \in A. \tag{4.1}$$
En particular, si en (4.1) $p = q$ y $p' = q'$ tenemos
$$\overrightarrow{q\mathcal{O}_q(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{qq}}(\widetilde{\phi}) = \mathcal{O}_0(\widetilde{\phi}) = \mathcal{O}_{\overrightarrow{q'q'}}(\widetilde{\phi}) = \overrightarrow{q'\mathcal{O}_{q'}(\phi)}.$$
Nuevamente en (4.1) si $p = q'$ y $p' = q$ tenemos
$$\overrightarrow{q'\mathcal{O}_q(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{q'q}}(\widetilde{\phi}) = \mathcal{O}_{-\overrightarrow{qq'}}(\widetilde{\phi}) \text{ y } \overrightarrow{q\mathcal{O}_{q'}(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{qq'}}(\widetilde{\phi}).$$
□

Teorema 4.4. *Sean $p, p' \in A$ fijos. Dado $q \in A$ existe un único $\widetilde{q} \in A$ tal que*
$$\overrightarrow{p'\mathcal{O}_q(\phi)} = \overrightarrow{p\mathcal{O}_{\widetilde{q}}(\phi)}.$$
Demostración: Sea $\widetilde{q} = \psi_p^{-1}(\overrightarrow{p'q})$. Entonces
$$\overrightarrow{p\mathcal{O}_{\widetilde{q}}(\phi)} = \mathcal{O}_{\overrightarrow{p\widetilde{q}}}(\widetilde{\phi}) = \mathcal{O}_{\overrightarrow{p'q}}(\widetilde{\phi}) = \overrightarrow{p'\mathcal{O}_q(\phi)}.$$
□

Esto quiere decir, si $A/G = \{\mathcal{O}_q(\phi) : q \in A\}$ es el espacio de órbitas de ϕ, entonces
$$\psi_p(A/G) = \psi_{p'}(A/G).$$

5. Tensores afines. El estudio de tensores en espacios vectoriales es crucial en matemáticas y física, ya que proporciona un marco formal para describir y manipular magnitudes que tienen direcciones específicas. Algunas referencia de ello puede consultar con [13],[14], [15], [16].
Sea (A, E, φ) un espacio afín con E espacio vectorial real de dimensión finita. Sea A^* definido por
$$A^* = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es aplicación afín}\}.$$
Sea $\varphi^* : A^* \times E \to A^*$ definido por $\varphi^*(f, v)(p) = f(\varphi(p, v))$, para todo $(f, v) \in A^* \times E$, $p \in E$. Es natural pensar que φ^* va a dotar de una estructura afín a A^* pero no es el caso; ya que no satisface la primera propiedad de estructura afín.

Ejemplo 5.1. *Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x, y)\}$ el gráfico de h. Sea también $\psi : A \times A \to \mathbb{R}^2$ definido por $\psi((x, y, z), (x', y', z')) = (x' - x, y - y')$. Es fácil verificar que $(A, \mathbb{R}^2, \psi)$ es una estructura afín.*
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una aplicación afín en A con aplicación lineal asociada $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces para $p = (x, y, z) \in A$ y $q = (x', y', z') \in A$, tenemos
$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} \ &\Rightarrow \ \widetilde{f}(x' - x, y' - y) = f(x', y', z') - f(x, y, z)\\ &\Rightarrow \ f(x', y', z') = f(x, y, z) + \widetilde{f}(x' - x, y' - y)\\ &\Rightarrow \ f(x', y', z') = f(x, y, z) + \widetilde{f}(x', y') - \widetilde{f}(x, y).\end{aligned}$$

Por el teorema de Riez existe un único vector $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\widetilde{f}(x, y) = \langle (x, y), (u, v) \rangle$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Luego*

$$f(x', y', z') = f(x, y, z) + (x' - x)u + (y' - y)v.$$

En particular, si tomamos $p = (0, 0, h(0, 0)) \in A$ *tenemos*

$$f(x', y', z') = f(p) + x'u + y'v, \ \forall \, (x', y', z') \in A.$$

Desarrollando φ_f^**:*

$$\begin{aligned} \varphi_f^*(\alpha, \beta)(x, y, z) &= \varphi^*(f, (\alpha, \beta))(x, y, z) \\ &= f(\varphi((x, y, z), (\alpha, \beta))) \\ &= f(x + \alpha, y + \beta, h(x + \alpha, y + \beta)) \\ &= f(p) + (x + \alpha)u + (y + \beta)v, \end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in A$ *y* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*. Tomando dos vectores* (α, β) *y* (α', β') *en el plano tal que*

$$\varphi^*(f, (\alpha, \beta))(x, y, z) = \varphi^*(f, (\alpha', \beta'))(x, y, z).$$

Luego

$$f(p) + (x + \alpha)u + (y + \beta)v = f(p) + (x + \alpha')u + (y + \beta')v \quad \Rightarrow \quad (\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v = 0.$$

Con esto probamos que $\varphi_f : V \to A^*$ *no es inyectiva.*

Sea $b : A \times A \to \mathbb{R}$ una afín bilineal cuyo bilineal asociado es un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$. Sea $H : A \to A^*$ definido por: para cada $p \in A$, $H(p) : A \to \mathbb{R}$ dado por $H(p)(q) = b(p, q)$.

Teorema 5.1. *Sea* (A, E, ψ) *un espacio afín y* $b : A \times A \to \mathbb{R}$ *forma bilineal afín cuyo bilineal asociado es un producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$*. Dado el conjunto*

$$A_1^* = \{ f \in A^* : \exists \, p \in A \text{ con } b(p, p) = f(p) \},$$

consideremos $H : A \to A_1^*$ *definido por: para cada* $a \in A$*,* $H(a) : A \to \mathbb{R}$ *dado por* $H(a)(c) = b(a, c)$*. Sea la aplicación* $\psi_A^* : A_1^* \times A_1^* \to E^*$ *definido por*

$$\psi_A^*(f, g)(u) = \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u \right\rangle, \ f, g \in A_1^*, \ u \in E.$$

Entonces (A_1^*, E^*, ψ_A^*) *es una estructura de espacio afín.*

Demostración: Verifiquemos que $H : A \to A_1^*$ es una biyección.

H es inyectiva.

Dados $p, q \in A$ tales que $H(p) = H(q)$, entonces evaluando en r cualesquiera de A, se tiene

$$\begin{aligned} H(p)(r) = H(q)(r) &\Rightarrow b(p, r) = b(q, r), \ \forall r \in A \\ &\Rightarrow b(r, s) + \langle \overrightarrow{rp}, \overrightarrow{sr} \rangle = b(r, s) + \langle \overrightarrow{rq}, \overrightarrow{sr} \rangle, \quad \forall r, s \in A \\ &\Rightarrow \langle \overrightarrow{rp}, \overrightarrow{sr} \rangle = \langle \overrightarrow{rq}, \overrightarrow{sr} \rangle, \quad \forall r, s \in A \\ &\Rightarrow \langle \overrightarrow{rp} - \overrightarrow{rq}, \overrightarrow{sr} \rangle = 0, \quad \forall r, s \in A \\ &\Rightarrow \langle \overrightarrow{qp}, \overrightarrow{sr} \rangle = 0, \quad \forall r, s \in A \\ &\Rightarrow \overrightarrow{qp} = 0 \\ &\Rightarrow p = q. \end{aligned}$$

H es sobreyectiva.

Dado $f \in A_1^*$, entonces existe $p \in A$ tal que $b(p, p) = f(p)$. Sea $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ funcional lineal asociado a f, entonces por el teorema de Riez existe un único vector $v \in E$ tal que $\widetilde{f}(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in E$. Para $p \in A$, existe un único $q \in A$ tal que $v = \overrightarrow{pq}$. Entonces $f(x) = f(p) + \langle \overrightarrow{px}, \overrightarrow{pq} \rangle$ para todo $x \in A$.

Luego

$$\begin{aligned} H(q)(x) &= b(q,x) = b(p,p) + \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{px} \rangle \;\; \forall\, x \in A \\ &= f(p) + \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{px} \rangle \;, \;\; \forall\, x \in A \\ &= f(x), \;\; \forall\, x \in A. \end{aligned}$$

Ahora veamos que (A_1^*, E^*, ψ_A^*) es una estructura de espacio afín.
Dado $f \in A_1^*$, definimos $(\psi_A^*)_f : A_1^* \to E^*$ como $(\psi_A^*)_f(g) = \psi_A^*(f,g)$ para todo $g \in A^*$. Vamos a demostrar que $(\psi_A^*)_f$ es biyectiva.

- Inyectiva. Dados $g, \widetilde{g} \in A^*$ tal que $(\psi_A^*)_f(g) = (\psi_A^*)_f(\widetilde{g})$, entonces para cada $u \in E$

$$\begin{aligned} (\psi_A^*)_f(g)(u) = (\psi_A^*)_f(\widetilde{g})(u) &\Rightarrow \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u \right\rangle = \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(\widetilde{g})), u \right\rangle \\ &\Rightarrow \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)) = \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(\widetilde{g})) \\ &\Rightarrow H^{-1}(g) = H^{-1}(\widetilde{g}) \\ &\Rightarrow g = \widetilde{g}. \end{aligned}$$

- Sobreyectiva. Dado $h \in E^*$ debemos hallar $g \in A_1^*$ tal que $(\psi_A^*)_f(g) = h$. Por el Teorema de Riez existe un único vector $\theta \in E$ tal que $h(u) = \langle u, \theta \rangle$, para todo $u \in E$. Luego

$$\begin{aligned} (\psi_A^*)_f(g)(u) = h(u) &\Leftrightarrow \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u \right\rangle = \langle \theta, u \rangle \\ &\Leftrightarrow \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)) = \theta \\ &\Leftrightarrow (\psi_A)_{(H^{-1}(f)}(H^{-1}(g)) = \theta \\ &\Leftrightarrow H^{-1}(g) = (\psi_A)^{-1}_{(H^{-1}(f)}(\theta) \\ &\Leftrightarrow g = H \circ (\psi_A)^{-1}_{(H^{-1}(f)}(\theta). \end{aligned}$$

Dados $f, g, h \in A_1^*$, vamos a probar $\psi_A^*(f,g) + \psi_A^*(g,h) = \psi_A^*(f,h)$. En efecto, evaluando en cualquier $u \in E$ tenemos

$$\begin{aligned} \psi_A^*(f,g)(u) + \psi_A^*(g,h)(u) &= \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u \right\rangle + \left\langle \psi_A(H^{-1}(g), H^{-1}(h)), u \right\rangle \\ &= \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)) + \psi_A(H^{-1}(g), H^{-1}(h)), u \right\rangle \\ &= \left\langle \psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(h)), u \right\rangle \\ &= \psi_A^*(f,h)(u). \end{aligned}$$

□

Cuando E es un espacio vectorial de dimensión finita los espacios vectoriales de las m-formas multilineales (llamadas m-tensores covariantes) es isomorfo al espacio dual de $E^* \otimes E^* \cdots \otimes E^*$. Siguiendo esta última definición se puede extender la noción de tensores covariantes para espacios afines.

Definición 5.1. *Dado (A, E, ψ) un espacio afín con las condiciones del teorema 5.1. El $2-$tensor afín contravariante en A se denota por $A \overline{\otimes} A$ y se define como el conjunto de aplicaciones bilineales afines*

$$A_1^* \times A_1^* \to \mathbb{R}.$$

Teorema 5.2. *Si $\Gamma \in A \overline{\otimes} A$, entonces existe una única $\tau \in (E^* \otimes E^*)^*$ tal que*

$$\Gamma(g,k) = \Gamma(f,h) + \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k)), \forall\, f, g, h, k \in A_1^*.$$

Demostración: Sea $\Gamma : A_1^* \times A_1^* \to \mathbb{R}$ una forma bilineal afín con bilineal asociada $\widetilde{\Gamma} : E^* \times E^* \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\widetilde{\Gamma}(\psi_A^*(f,g), \psi_A^*(h,k)) = \Gamma(g,k) - \Gamma(f,h), \;\; \forall\, f, g, h, k \in A_1^*.$$

Si $(E^* \otimes E^*, \pi)$ es el producto tensorial, entonces por la propiedad universal que tiene el espacio tensorial $E^* \otimes E^*$, existe un único funcional $\tau : E^* \otimes E^* \to \mathbb{R}$ tal que $\tau \circ \pi = \widetilde{\Gamma}$. Luego

$$\Gamma(g,k) - \Gamma(f,h) = \widetilde{\Gamma}(\psi_A^*(f,g), \psi_A^*(h,k)) = \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k)).$$

Así

$$\Gamma(g,k) = \Gamma(f,h) + \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k)), \forall\, f,g,h,k \in A_1^*.$$

□

Consideremos la aplicación $\Theta_\Gamma : (A_1^* \times A_1^*) \times (A_1^* \times A_1^*) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido por $\Theta_\Gamma((f,g),(h,k)) = (\Gamma(f,h), \Gamma(g,k))$. Por el teorema 4.2 el diagrama que sigue conmuta

$$\begin{tikzcd}
(A_1^* \times A_1^*) \times (A_1^* \times A_1^*) \arrow[r, "\Theta_\Gamma"] \arrow[d, "\psi_A^* \times \psi_A^*"'] & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[d, "\psi_{\mathbb{R}}"] \\
E^* \times E^* \arrow[r, "\widetilde{\Gamma}"'] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\
E^* \otimes E^* \arrow[ur, "\exists! \tau"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.1: $\Gamma(g,k) = \Gamma(f,h) + \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k)), \forall\, f,g,h,k \in A_1^*$.

En los tensores entre espacios vectoriales sabemos que:

$$(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w, \quad v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$$

y también

$$\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w).$$

Veamos, para el caso de tensores afines, como recuperar esas propiedades.

$$\begin{aligned}
\Gamma(g,k) &= \Gamma(f,h) + \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k)), \forall\, f,g,h,k \in A_1^*. && (5.1)\\
\Gamma(g',k) &= \Gamma(f',h) + \tau(\psi_A^*(f',g') \otimes \psi_A^*(h,k)), \forall\, f',g',h,k \in A_1^*. && (5.2)\\
\Gamma(g,k') &= \Gamma(f,h') + \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h',k')), \forall\, f,g,h',k' \in A_1^*. && (5.3)
\end{aligned}$$

De (5.1) y (5.2)

$$\Gamma(g,k) + \Gamma(g',k) = \Gamma(f,h) + \Gamma(f',h) + \tau((\psi_A^*(f,g) + \psi_A^*(f',g')) \otimes \psi_A^*(h,k))$$

y de (5.1) y (5.3)

$$\Gamma(g,k) + \Gamma(g,k') = \Gamma(f,h) + \Gamma(f,h') + \tau(\psi_A^*(f,g) \otimes (\psi_A^*(h,k) + \psi_A^*(h',k'))).$$

Para la otra propiedad debemos probar que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha\psi_A)^* = \alpha\psi_A^*$. En efecto

$$\begin{aligned}
(\alpha\psi_A)^*(f,g)(u) &= \widetilde{b}((\alpha\psi_A)(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u)\\
&= \widetilde{b}(\alpha\psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u)\\
&= \alpha\widetilde{b}(\psi_A(H^{-1}(f), H^{-1}(g)), u)\\
&= \alpha\psi_A^*(f,g)(u).
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\alpha\Gamma(g,k) &= \alpha\Gamma(f,h) + \alpha\tau(\psi_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k))\\
&= \alpha\Gamma(f,h) + \tau((\alpha\psi)_A^*(f,g) \otimes \psi_A^*(h,k)).
\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{(\Gamma(f,h)+\Gamma(f',h))(\Gamma(g,k)+\Gamma(g',k))} &= \tau((\psi_A^*(f,g)+\psi_A^*(f',g'))\otimes\psi_A^*(h,k))\\
\overrightarrow{(\Gamma(f,h)+\Gamma(f,h'))(\Gamma(g,k)+\Gamma(g,k'))} &= \tau(\psi_A^*(f,g)\otimes(\psi_A^*(h,k)+\psi_A^*(h',k')))\\
\alpha\overrightarrow{\Gamma(f,h)\Gamma(g,k)} &= \tau((\alpha\psi)_A^*(f,g)\otimes\psi_A^*(h,k)).
\end{aligned}$$

Más tensores afines. Sean (A_1^*, E^*, ψ_A^*) y (B_1^*, F^*, ψ_B^*) espacios afines como en el teorema 5.1. Sea $\Gamma : A_1^*\times B_1^* \to \mathbb{R}$ una forma afín bilineal con bilineal asociada $\widetilde{\Gamma} : E^*\times F^* \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\widetilde{\Gamma}(\psi_A^*(f,g),\psi_B^*(h,k)) = \Gamma(g,k)-\Gamma(f,h),\ \forall\, f,g\in A_1^*,\ \ h,k\in B_1^*.$$

Sean V,W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $(A,V,\psi_A), (B,W,\psi_B)$ dos espacios afines.

Definición 5.2. *El par $(A\overline{\otimes}B,\Pi)$ es llamado producto tensorial afín entre A y B si $A\overline{\otimes}B$ es un $\mathbb{K}$ espacio afín y $\Pi : A\times B\to A\overline{\otimes}B$ es una aplicación bilineal afín tales que satisfacen las siguientes propiedadades:*

1. *$\Pi : A\times B\to A\overline{\otimes}B$ es una bilineal afín asociada la aplicación tensorial $\pi : V\times W\to V\otimes W$.*
2. *$(A\overline{\otimes}B, V\otimes W, \psi_{A\overline{\otimes}B})$ es una estructura de espacio afín.*

Teorema 5.3. *Dado un espacio afín (C,U,ψ_C) y una bilineal afín $\varphi : A\times B\to C$, entonces*

1. *existe una aplicación afín $f : A\overline{\otimes}B\to C$ tal que $\overrightarrow{\varphi(a,b)\varphi(c,d)} = \overrightarrow{(f\circ\Pi)(a,b)(f\circ\Pi)(c,d)}$ para todo $a,c\in A$ y para todo $b,d\in B$.*
2. *Fijando $(a,b)\in A\times B$, existe una única aplicación afín $f : A\overline{\otimes}B\to C$ tal que $f(a\overline{\otimes}b)=\varphi(a,b)$ y $f\circ\Pi=\varphi$.*

Demostración:

1. Como φ,Π son aplicaciones bilineales afines asociado a la bilineal $\widetilde{\varphi}$ y π, respectivamente, entonces

$$\widetilde{\varphi}\circ(\psi_A\times\psi_B)=\psi_C\circ\Theta_\varphi \quad \text{y} \quad \psi_{A\overline{\otimes}B}\circ\Theta_\Pi = \pi\circ(\psi_A\times\psi_B),$$

donde $\Theta_\varphi((a,c),(b,d)) = (\varphi(a,b),\varphi(c,d))$ y $\Theta_\Pi((a,c),(b,d)) = (\Pi(a,b),\Pi(c,d)) = (a\overline{\otimes}b),(c\overline{\otimes}d)$, para todo $a,c\in A$ y para todo $b,d\in B$.

Sea $f : A\overline{\otimes}B\to C$ es un afín con lineal asociado τ, entonces $\psi_C\circ(f\times f) = \tau\circ\psi_{A\overline{\otimes}B}$, donde $\tau : V\otimes W\to U$ es la única aplicación lineal tal que $\tau\circ\pi=\widetilde{\varphi}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\varphi(a,b)\varphi(c,d)} &= \widetilde{\varphi}(\overrightarrow{ac},\overrightarrow{bd}) = (\tau\circ\pi)(\overrightarrow{ac},\overrightarrow{bd}) = (\tau\circ\pi)(\psi_A(a,c),\psi_B(b,d))\\
&= ((\tau\circ\pi)\circ(\psi_A\times\psi_B))((a,c),(b,d)) = (\tau\circ(\psi_{A\overline{\otimes}B}\circ\Theta_\Pi))((a,c),(b,d))\\
&= (\tau\circ\psi_{A\overline{\otimes}B})(\Pi(a,b),\Pi(c,d)) = (\tau\circ\psi_{A\overline{\otimes}B})(a\overline{\otimes}b,c\overline{\otimes}d)\\
&= (\psi_C\circ(f\times f))(a\overline{\otimes}b,c\overline{\otimes}d) = \psi_C(f(a\overline{\otimes}b),f(c\overline{\otimes}d)) = \overrightarrow{f(a\overline{\otimes}b)f(c\overline{\otimes}d)}\\
&= \overrightarrow{(f\circ\Pi)(a,b)(f\circ\Pi)(c,d)}.
\end{aligned}$$

2. Como $a\overline{\otimes}b\in A\overline{\otimes}B$ y $\varphi(a,b)\in C$, existe una única aplicación afín $f : A\overline{\otimes}B\to C$ cuya aplicación lineal asociada es τ y $f(a\overline{\otimes}b)=\varphi(a,b)$. Así continuando con el item (1), tenemos

$$\overrightarrow{\varphi(a,b)\varphi(c,d)} = \overrightarrow{(f\circ\Pi)(a,b)(f\circ\Pi)(c,d)},\ \forall\,(c,d)\in A\times B.$$

Entonces $\varphi(c,d)=(f\circ\Pi)(c,d)$, para todo $(c,d)\in A\times B$.

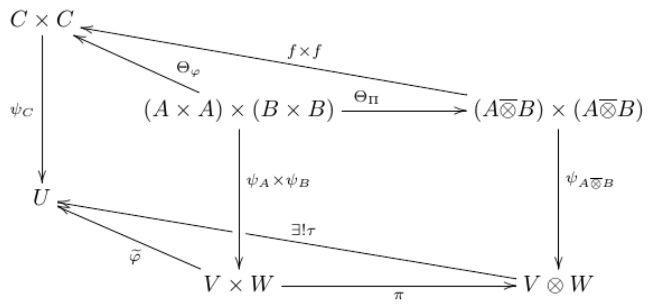

Figura 5.2: El producto tensorial afín y su propiedad universal.

$\square$

En la demostración del teorema anterior, si τ fuera biyectiva, podríamos definir $\psi_{A\overline{\otimes}B}$ siguendo la ruta del diagrama anterior. Así, $\psi_{A\overline{\otimes}B} = \tau^{-1} \circ (\psi_C) \circ (f \times f)$ y $(A\overline{\otimes}B, V \otimes W, \psi_{A\overline{\otimes}B})$ es una estructura de espacio afín. En efecto:

1. Fijo $a\overline{\otimes}b$, sea $(\psi_{A\overline{\otimes}B})_{a\overline{\otimes}b} : A\overline{\otimes}B \to V \otimes W$, definido por $(\psi_{A\overline{\otimes}B})_{a\overline{\otimes}b}(c\overline{\otimes}d) = \psi_{A\overline{\otimes}B}(a\overline{\otimes}b, c\overline{\otimes}d)$ para todo $c\overline{\otimes}d \in A\overline{\otimes}B$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\psi_{A\overline{\otimes}B})_{a\overline{\otimes}b}(c\overline{\otimes}d) &= \psi_{A\overline{\otimes}B}(a\overline{\otimes}b, c\overline{\otimes}d) = (\tau^{-1} \circ \psi_C \circ (f \times f))(a\overline{\otimes}b, c\overline{\otimes}d) \\
&= (\tau^{-1} \circ \psi_C)(f(a\overline{\otimes}b), f(c\overline{\otimes}d)) = \tau^{-1}\, (\psi_C)_{f(a\overline{\otimes}b)}\, (f(c\overline{\otimes}d)) \\
&= \left(\tau^{-1} \circ (\psi_C)_{f(a\overline{\otimes}b)} \circ f\right)(c\overline{\otimes}d).
\end{aligned}$$

Luego, $(\psi_{A\overline{\otimes}B})_{a\overline{\otimes}b} = \left(\tau^{-1} \circ (\psi_C)_{f(a\overline{\otimes}b)} \circ f\right)$ es biyectiva.

2. Sea $a\overline{\otimes}b, c\overline{\otimes}d, e\overline{\otimes}m \in A\overline{\otimes}B$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi_{A\overline{\otimes}B}(a\overline{\otimes}b, c\overline{\otimes}d) + \psi_{A\overline{\otimes}B}(c\overline{\otimes}d, e\overline{\otimes}m) &= \tau^{-1}\left(\overrightarrow{f(a\overline{\otimes}b)f(c\overline{\otimes}d)}\right) + \tau^{-1}\left(\overrightarrow{f(c\overline{\otimes}d)f(e\overline{\otimes}m)}\right) \\
&= \tau^{-1}\left(\overrightarrow{f(a\overline{\otimes}b)f(c\overline{\otimes}d)} + \overrightarrow{f(c\overline{\otimes}d)f(e\overline{\otimes}m)}\right) \\
&= \tau^{-1}\left(\overrightarrow{f(a\overline{\otimes}b)f(e\overline{\otimes}m)}\right) \\
&= \psi_{A\overline{\otimes}B}(a\overline{\otimes}b, e\overline{\otimes}m).
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. *Dadas las transformaciones lineales $g_1, g_2 : V \to W$, sea la aplicación bilineal*

$$\widetilde{\varphi} : V \times W \to V \otimes W$$

definido por $\widetilde{\varphi}(v, w) = g_1(v) \otimes g_2(w)$. Existe una única aplicación lineal $\tau : V \otimes W \to V \otimes W$ tal que $\tau \circ \pi = \widetilde{\varphi}$, es decir, $\tau(v \otimes w) = g_1(v) \otimes g_2(w)$ para todo $v \otimes w \in V \otimes W$. Se $\varphi : A \times B \to A\overline{\otimes}B$ una bilineal afín con bilineal asociado $\widetilde{\varphi}$. Por el teorema anterior,

$$\begin{aligned}
f(c\overline{\otimes}d) &= f(a\overline{\otimes}b) \dagger_{A\overline{\otimes}B} \tau(\overrightarrow{(a\overline{\otimes}b)(c\overline{\otimes}d)}) \\
\varphi(c, d) &= \varphi(a, b) \dagger_{A\overline{\otimes}B} \widetilde{\varphi}(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{bd}) \\
&= f(a\overline{\otimes}b) \dagger_{A\overline{\otimes}B} g_1(\overrightarrow{ac}) \otimes g_2(\overrightarrow{bd}).
\end{aligned}$$

Entonces $\tau(\overrightarrow{(a\overline{\otimes}b)(c\overline{\otimes}d)}) = g_1(\overrightarrow{ac}) \otimes g_2(\overrightarrow{bd}) = \tau((\overrightarrow{ac}) \otimes (\overrightarrow{bd}))$. Si τ es biyectiva entonces

$$(\overrightarrow{ac}) \otimes (\overrightarrow{bd}) = \overrightarrow{(a\overline{\otimes}b)(c\overline{\otimes}d)}.$$

6. Conclusion. Extendemos la noción de bilineal entre espacios afines y esto permite extender a tensores contravariantes en un espacio afín. En general, se logra extender la noción de tensor entre espacios afines. En sistemas dinámicos, extendemos la definición de acción diferenciable de un grupo de Lie sobre un espacios afines, estudiando su grupo de isotropía, su espacio de órbitas y sus puntos fijos.

Author contributions. El autor hizo la concepción y metodología de trabajo, y los resultados.

Funding. Esta investigación no recibió financiación externa.

Conflicts of interest. Declaro que no hay ningún conflicto de interés con otros autores.

ORCID and License

Benito Leonardo Ostos Cordero https://orcid.org/0000-0001-5931-3595

Referencias

[1] Castellenet M, Llerena I. Álgebra lineal y geometría. Universidad Autónoma de Barcelona: Reverté, S. A.; 2020.

[2] Erdman JM. Elements of linear and multilinear algebra. Portlang State University, USA: World Scientific Publishing Company; 2021.

[3] Delgado M. Geometría afín y Euclídea. Geometría afín y Euclídea: Departamento de Matemática Fundamental; 2012.

[4] Lluis-Puebla E. Álgebra lineal, Álgebra Multilineal, y k-Teoría algebraica clásica. 2nd. ed. Universidad Nacional Autónoma de México: Sociedad Matemática Mexicana; 2008.

[5] Tarida AR. Affine maps, Euclidean motions and quadrics. New York: Springer-Verlag London; 2011.

[6] Roman S. Advanced linear algebra. 3rd. ed. USA: Springer-Board; 2008.

[7] Casas-Alvero E. Analitic proyective geometry. Universidad de Barcelona: European Mathematical Society; 2010.

[8] López F. Geometría III. Universidad Granada: Departamento de Geometría y Topología; 2021.

[9] Sancho De Salas J. The Fundamental Theorem of Affine and Projective Geometries. Preprint. 2022.

[10] Sancho De Salas J. The Fundamental Theorem of Affine Geometry. Extracta Mathematicae. 2023;38(2):221-35.

[11] Casimiro A, Rodrigo C. The Fundamental Theorem of Affine and Projective Geometries. Preprint. Mayo 2023.

[12] Duretić, J. From differentiation in affine spaces to connetions. Teaching of Mathematics. 2015;18(2):61-88.

[13] Cooperstein BN. Advanced linear algebra. 2nd. ed. University of Califormia: CRC Press; 2015.

[14] Bischop RL, Goldberg SI. Tensor analysis on manifolds. New York: Curier Corporation INC; 2012.

[15] Lie JM. Introduction to smooth manifolds. 2nd. ed. New York: Springer; 2013.

[16] Greub W. Multilinear algebra. 2nd. ed. New York Heidelberg Berlin: Springer Verlag; 1978.