



## A non-parametric dynamic model for measuring efficiency

## Un modelo dinámico no paramétrico para medir eficiencia

Kelly Patricia Murillo 

Received, Set. 22, 2023;

Accepted, Nov. 23, 2023;

Published, Dec. 27, 2023



### How to cite this article:

Murillo KP. A non-parametric dynamic model for measuring efficiency. *Selecciones Matemáticas*. 2023;10(2):324–332. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.08>

### Abstract

Conventional efficiency evaluation systems present little diversity in the type of variables considered. This aspect generally leads to errors in the application of the models and in the corresponding interpretation of results. This study proposes a dynamic model to measure the efficiency of decision-making units, based on non-parametric Multidirectional Efficiency Analysis (MEA). The model presented here considers a complete structure, which includes intertemporal variables (desirable/undesirable intermediate inputs and outputs), discretionary/non-discretionary inputs; desirable/undesirable inputs and outputs. Dynamic score is defined first in a particular version and then in a more general version, considering two optimization problems. The directional contribution of each variable is examined, showing excess inputs and deficit outputs. In addition, a dynamic inefficiency index to measure the number of times each input was used inefficiently, is presented for both desirable and undesirable cases.

**Keywords** . Dynamic model, Multidirectional efficiency analysis, Optimization in data analysis.

### Resumen

Los sistemas convencionales de evaluación de eficiencia presentan poca diversidad en el tipo de variables consideradas. Este aspecto generalmente conduce a errores en la aplicación de los modelos y en la correspondiente interpretación de resultados. Este estudio propone un modelo dinámico para medir la eficiencia de la toma de unidades de decisión, basado en el Análisis de Eficiencia Multidireccional (MEA) no paramétrico. El modelo aquí presentado, considera una estructura completa, que incluye variables intertemporales (entradas y salidas intermediarias deseables/indeseables), insumos discrecionales/no discrecionales; entradas y salidas deseables/indeseables. La puntuación dinámica es definida en primer lugar en una versión particular y a seguir una versión más general, considerando dos problemas de optimización. Se examina la contribución direccional de cada variable, mostrando el exceso de entradas y el déficit de salidas. Además, un índice de ineficiencia dinámica para medir el número de veces que cada entrada se uso de manera ineficiente, se presenta tanto en los casos deseables como en los casos indeseables.

**Palabras clave**. Modelo dinámico, Análisis de eficiencia multidireccional, Optimización en el análisis de datos.

**1. Introducción.** En las últimas décadas, la medición de la eficiencia se ha convertido en un indicador importante para examinar el desempeño de unidades en todas las áreas y sectores de producción. Por esta razón, es importante mejorar los modelos existentes o incorporar nuevas técnicas y herramientas que permitan lograr un control más riguroso de las unidades. En este sentido, es cada vez más evidente la necesidad de introducir modelos en una versión dinámica que conduzca a una caracterización más precisa de la realidad a lo largo del tiempo.

\*Departamento de Matemáticas, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.  
(kellymurillo@ua.pt).

**Autor para correspondencia:**

El principal método para medir la eficiencia de las unidades de toma de decisiones (DMU- Decision Making Unit) ha sido impulsado especialmente por el desarrollo del Análisis Envolvente de Datos (DEA-Data Envelopment Analysis), que utiliza modelos de programación lineal, [1]. DEA se ha aplicado popularmente a una amplia variedad de industrias, como la ingeniería de software [2], banca y seguros [3], deportes [4] y comercio electrónico [5]. En los últimos años, el modelo DEA ha estimulado aún más el interés de los investigadores en un intento de mejorar su modelado para incluir nuevos criterios de análisis y representar la complejidad de los sistemas actuales [6].

Muchos estudios con aplicaciones en análisis de eficiencia en diferentes contextos se han conocido, a lo largo de los años. Sin embargo, los estudios de eficiencia en una versión dinámica todavía son limitados en la literatura. En particular, los estudios de DEA dinámica trabajan para refinar el modelo con el objetivo de medir la eficiencia de las DMU en el tiempo. Entre los promotores del desarrollo teórico en una versión dinámica, están los modelos de Fare-Grosskopf en [7] (modelo FG), Nemoto-Goto en [8] (modelo NG) y Tone-Tsutsui en [9] (modelo TT). Estos modelos presentan diferentes características y enfoques para la evaluación de la eficiencia dinámica, que es importante puntualizar:

(1) En el modelo FG propuesto en 1996, las variables dependen del enfoque de optimización. El número de restricciones es proporcional al número de períodos analizados, con al menos ocho restricciones. Los pesos son relacionados con la unidad y el período. No diferencia el tipo de variables intermediarias y estas pueden ser computadas como parámetro o variable. Las variables intermediarias funcionan como un porcentaje del producto que queda para el próximo período. El modelo considera las condiciones iniciales y finales del intermedio, [10].

(2) El modelo de TT propuesto en 1999, utiliza diez restricciones y los pesos son relacionados con la unidad y período. Muestra la medida de eficiencia general y del período. Tiene cuatro tipos de variables intermediarias (buenas, malas, libres o fijas). Permite compartir la variable intermediaria con la salida (cuando ambos son del mismo tipo). Considera las condiciones finales del intermedio y también puede incluir restricciones para las condiciones iniciales, [10].

(3) El modelo de GN propuesto en 2010, utiliza seis restricciones y los pesos solo están relacionados con el período. Muestra la medida de ineficiencia del período. No distingue entre tipos de rendimiento. Muestra el intermedio como un elemento con poca variación en el tiempo (casi-fijo). Es simultáneamente un modelo de parámetro y variable. No considera las condiciones finales de la variable intermediaria y utiliza un valor fijo inicial calculado para todas las DMU, [10].

El modelo DyMEA, propuesto en este artículo, se basa en el Análisis de Eficiencia Multidireccional no paramétrica (MEA), introducido por Bogetoft-Hougaard en [11]. El análisis de la eficiencia a través del modelo MEA tiene algunas ventajas conocidas sobre el modelo tradicional de DEA. La evaluación de los modelos DEA incluye la expansión deseable de la producción y la contracción de los insumos al mismo tiempo. Por esta razón, es posible medir el potencial de mejora para cada variable por separado. Por lo tanto, MEA ha sido una mejor alternativa para medir la eficiencia en los últimos años con diferentes aplicaciones. Por ejemplo, Gongbing et al. in [12] presentan un modelo de eficiencia con un enfoque multidireccional para el estudio de la industria china del transporte. Wang et al. in [13] utilizan el enfoque MEA para una evaluación del sector industrial chino. Murillo y Rocha in [14] estudian el impacto de las medidas de austeridad (troika) en las empresas manufactureras de Portugal, utilizando un modelo basado en MEA.

Una de las grandes ventajas del modelo DyMEA, es que considera una estructura completa, que incluye variables inter temporales (entradas y salidas intermediarias que pueden ser deseables o indeseables), entradas discretas y no discretas; entradas y salidas deseables e indeseables. La puntuación MEA se introduce teniendo en cuenta dos clases de problemas de optimización y su definición es presentada en dos versiones (específica y general). Considerando la contribución direccional de cada variable, se calculan el exceso de entradas y el déficit de salidas. Los índices de ineficiencia en versión dinámica se presentan para medir el número de veces que cada entrada fue utilizada ineficientemente en el modelo.

El resto de este documento se presenta de la siguiente manera. En la siguiente sección se ofrece una visión general de los modelos dinámicos de DEA. En la sección 3 se presenta el enfoque dinámico del modelo y se examinan los aspectos más importantes de las técnicas matemáticas en las versiones estática y dinámica. En la sección 4 figuran las observaciones finales.

**2. Caracterización de los modelos dinámicos de DEA.** La estructura más básica del rendimiento para un DMU<sub>j</sub> (en versión estática versus versión dinámica), está presente en la Fig. 2.1, para los períodos  $t - 1, t, t + 1$  con entradas  $x_{ij}$ , salidas  $y_{sj}$  y variables intertemporales  $z_{fj}$ . La principal diferencia y especificidad de la estructura de los modelos dinámicos es la inclusión de elementos de transición entre observaciones posteriores de actividades, que establecen la interdependencia entre períodos, [9].

Los modelos FG en [7], NG en [8] y TT en [9] son los principales promotores de DEA en versión dinámica. Para entender mejor las diferencias entre los tres modelos y la razón de su importancia en la

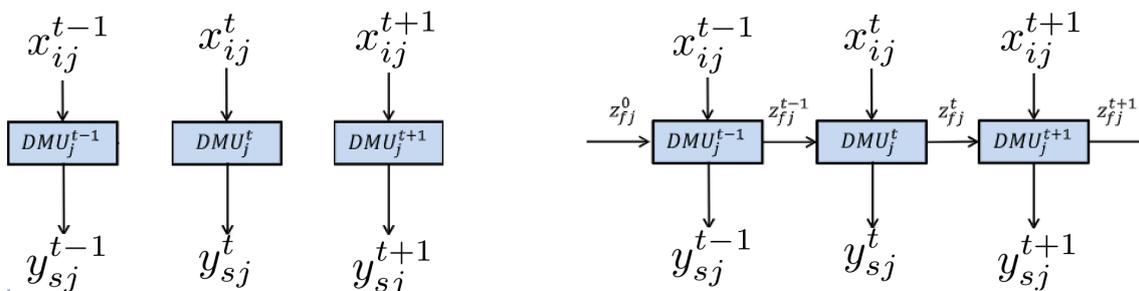


Figura 2.1: Comparación del rendimiento del DMU en tres períodos: Modelo estático (lado izquierdo) vs Modelo dinámico (lado derecho)

literatura, destacamos de manera reducida las principales características:

La estructura dinámica del modelo FG para un DMU específico envuelve variables intermedias y considera entradas almacenables, que pueden reservarse para su uso en un momento posterior. En este caso, el sistema permite el uso de insumos y la elaboración de productos en cada período, la deducción (reserva) de insumos del período de almacenamiento y uso futuro, y el uso de inventarios de períodos anteriores. Los autores establecen un conjunto de posibilidades de producción para tres períodos de análisis en el contexto dinámico, según los recursos de entrada, y el intermedio inicial. Al definir la estructura básica, el modelo permite diferentes funciones objetivas, incluyendo maximización de ingresos, maximización de ganancias, minimización de costos y medición de distancia de salida o entrada, entre otras. La función objetiva debe ajustarse a cada situación de análisis prevista y a las variables que deben optimizarse, [10].

La ineficiencia dinámica de las entradas, los insumos casi fijos (intermediarios) y las inversiones casi fijas se miden mediante el modelo GN. Con este modelo, se busca minimizar los costos de una empresa proponiendo un enfoque econométrico para evaluar su eficiencia dinámica. Nemoto-Goto no consideran la existencia de una entrada intermediaria en el último período de análisis. Solo la producción de salidas, el uso de entradas casi fijas antecedentes y variables de entrada, se producen en el último período. Las variables de entrada y casi fijas están relacionadas con la ruta óptima de ajuste en el modelo y se evalúan como la respuesta del modelo de optimización. Simultáneamente, se informa los valores previos de esas variables para cada DMU y período, a fin de comparar y medir la ineficiencia. El peso en el modelo de GN solo está relacionado con el período de evaluación y es el mismo para todas las DMU, [10].

El modelo de estructuración del TT es la versión dinámica del modelo de medición basado en holguras, que no es radial y, por lo tanto, puede calcular entradas/salidas individualmente y permite cambios no proporcionales en los niveles de entrada/salida. Este modelo estructura la continuidad de las prórrogas y la transición entre períodos utilizando una única restricción, que relaciona el período intermedio  $t$ , con los pesos de los períodos actuales y siguientes simultáneamente. Los autores establecen cuatro clases de traspasos y dos tipos de entradas y salidas: variable y fija. Las entradas y salidas fijas no tienen holguras radiales. El modelo tiene una restricción para cada rendimiento en el período  $t$ , dadas las diversas posibilidades de rendimiento de variables y parámetros. En el modelo TT no se produce optimización de entradas o intermediarios. En este caso, las siguientes restricciones sobre las condiciones iniciales deben añadirse al modelo al analizar el uso de la transferencia inicial como entrada en el primer período. El modelo para un DMU específico añade la posibilidad de considerar las condiciones iniciales de las prórrogas resultantes del período anterior a la primera vez del análisis. La segunda posible ampliación del modelo, se refiere al reparto de productos, es decir, en situaciones en las que el beneficio del período se transforma en productos e insumos intermedios. Este modelo es uno de los pocos que muestra el cálculo de la eficiencia general y los períodos simultáneamente, [10].

Siguiendo los tres modelos anteriores, se han realizado varios estudios sobre modelos dinámicos de DEA en varias áreas, principalmente en energía y transporte. La mayoría de estos modelos dinámicos, existentes en la literatura incluyen elementos de transición entre sus variables para representar la dependencia de las DMU entre períodos de tiempo.

**3. Modelo MEA dinámico.** El análisis de eficiencia multidireccional (MEA) fue inicialmente propuesto por Bogetoft-Hougaard (1999) en [11] y mas adelante profundizado en los trabajos de Bogetoft-Hougaard (2004) en [15] y Asmild-Pastor (2010) en [16]. A continuación una breve descripción del modelo MEA en versión estática, es presentada (sección 3.1) y luego se presenta la versión dinamica (sección 3.2).

**3.1. Modelo MEA versión estática.** Considere  $u = (n, t)$  una tupla que identifica una unidad  $n \in \mathbb{N}$  en el año  $t \in T$ . El término  $[m]$  denota el conjunto  $\{1, \dots, m\}$ , para algún  $m \in \mathbb{N}$ .

Consideramos que cualquier tupla dada  $u \in \mathbb{N} \times T$  produce  $J \in \mathbb{N}$  salidas  $y_j(n)$ ,  $j \in [J]$ , usando  $I \in \mathbb{N}$  entradas  $x_i(n)$ ,  $i \in [I]$ , donde la primeras entradas  $1 < D \leq I$  son las llamadas entradas discretas, es decir, variables que entran en el proceso de optimización (las entradas no discretas son variables que no se pueden cambiar). Por tanto,  $x(n) \in \mathbb{R}^I$  is the vector of all the inputs and  $y(n) \in \mathbb{R}^J$  es el vector de todas las salidas, para una tupla dada  $u \in \mathbb{N} \times T$ . De esta manera, la base de datos  $Z = \{z(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el conjunto de valores  $z(n) = (x(n), y(n))$  para todos  $n \in \mathbb{N}$  sobre  $t \in T$ .

La puntuación MEA para una observación específica  $z(\bar{n}) = (x(\bar{n}), y(\bar{n}))$  es calculada mediante la solución de los siguientes programas lineales de optimización:

Problem  $P_m^\alpha(z, \bar{n})$  :

$\min \alpha_m(\bar{n})$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n^t x_m(n) &\leq \alpha_m(\bar{n}), \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n x_i(n) &\leq x_i(\bar{n}), i \in [I], i \neq m, \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n y_l(n) &\leq y_l(\bar{n}), l \in [J], \end{aligned} \quad (3.1)$$

Problem  $P_j^\beta(z, \bar{n})$  :

$\max \beta_j(\bar{n})$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n x_i(n) &\leq x_i(\bar{n}), i \in [I] \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n y_s(n) &\leq \beta_j(\bar{n}), s \in [J] \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n y_l(n) &\leq y_l(\bar{n}), l \in [J], l \neq j, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Problem  $P^\gamma(\alpha, \beta, z, \bar{n})$  :

$\max \gamma(\bar{n})$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n x_i(n) &\leq x_i(\bar{n}) - \gamma(\bar{n})(x_i(\bar{n}) - \alpha_i^*(\bar{n})), i \in [M], \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n x_i(n) &\leq x_i(\bar{n}), i \in [I] \setminus \{m\}, \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n y_l(n) &\geq y_l(\bar{n}) + \gamma(\bar{n})(\beta_l^*(\bar{n}) - y_l(\bar{n})), l \in [L], \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $\alpha_m^*(\bar{n})$  y  $\beta_j^*(\bar{n})$  son las soluciones óptimas de los problemas  $P_m^\alpha(z, \bar{n})$  y  $P_j^\beta(z, \bar{n})$  respectivamente;  $\lambda \in \Lambda^n$ ,

$$\Lambda^n = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{n=1}^N \lambda_n = 1 \right\}. \quad (3.4)$$

El punto ideal  $(x(\bar{n}), y(\bar{n}))$  está dado por el vector de salida MEA

$$\zeta(n) \doteq (\alpha_1^*(n), \dots, \alpha_d^*(n), \dots, x_I(n), \beta_1^*(n), \dots, \beta_J^*(n)). \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la puntuación MEA para una observación específica  $z(\bar{n}) = (x(\bar{n}), y(\bar{n}))$  consiste de  $(|D| + |J| + 1) \times N$  programas lineales, que incluye un problema  $P_d^\alpha(z, \bar{n})$  por cada entrada discrecional  $d \in [D]$ , un problema  $P_j^\beta(z, \bar{n})$  para cada una de las dimensiones de salida  $j \in [J]$  y un problema  $P^\gamma(\alpha, \beta, z, \bar{n})$ .

Para un conjunto de datos  $z = \{z(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  la puntuación MEA de cada  $n \in \mathbb{N}$  es dada por

$$MEA_z(n) = \frac{\frac{1}{\gamma^*(n)} - \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \frac{x_i(n) - \alpha_i^*(n)}{x_i(n)}}{\frac{1}{\gamma^*(n)} + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{\beta_j^*(n) - y_j(n)}{y_j(n)}}, \quad (3.6)$$

donde  $\alpha_i^*(n)$ ,  $\beta_j^*(n)$  y  $\gamma^*(n)$  representan las soluciones óptimas correspondientes a los problemas de optimización lineal  $P_i^\alpha(z, n)$ ,  $P_j^\beta(z, n)$  y  $P^\gamma(z, n, \alpha^*, \beta^*)$ .

**3.2. Estructuración del modelo MEA en versión dinámica (DyMEA).** Los sistemas convencionales de evaluación de eficiencia presentan poca diversidad en el tipo de entradas/salidas que conducen a errores en la aplicación de los modelos y la interpretación de los resultados. El modelo DyMEA propuesto aquí, considera una estructura completa, que incluye variables intertemporales (entradas y salidas intermediarias deseables/indeseables), entradas discretionales/no discretionales; entradas y salidas deseables/indeseables.

La categorización de las variables depende del rendimiento en el modelo. A continuación explicamos cada categoría establecida. Las variables intermediarias son elementos producidos en un período y utilizados como insumos en el período siguiente. Las variables discretionales son libres de cambiar. Por lo tanto, su valor puede ser mayor o menor que el observado. De esta manera, los elementos libres afectan indirectamente la eficiencia. Las variables no discretionales representan un intermediario que no está bajo el control del DMU cuyo valor se fija a lo observado. La presencia de elementos fijos en el modelo afecta indirectamente la efectividad a través de su continuidad entre períodos. Las variables deseables se refieren cuando el elemento es bueno y, por lo tanto, puede considerarse una salida, y su valor no debe ser inferior al observado. Las variables indeseables se refieren, cuando el elemento se considera malo. Por lo general, esta categoría asume orientación a la entrada. Por lo tanto, su valor no debe ser superior a la observada [10].

Damos una descripción general del modelo dinámico propuesto (DyMEA) y la notación utilizada.

Sea  $[N] = \{n : 1 \leq n \leq N\}$  un conjunto de unidades de toma de decisiones, en el momento  $t \in T$ . Consideramos que cualquier unidad dada  $n$  produce salidas  $y_j(n, t) = (y_j^d(n, t), y_j^{nd}(n, t))$ ,  $j \in [S]$ , y productos intermedios  $z_r(n, t) = (z_r^d(n, t), z_r^{nd}(n, t))$ ,  $r \in [R]$ ; usando entradas  $x_i(n, t) = (x_i^d(n, t), x_i^{nd}(n, t))$ ,  $i \in [M]$ , y entradas intermediarias  $z_l(n, t) = (z_l^d(n, t), z_l^{nd}(n, t))$ ,  $l \in [L]$ .

Notación	Índice	Tipo de variable
$x_i^d(n, t)$	$i = 1, \dots, m_1$	entradas deseables
$x_i^{nd}(n, t)$	$i = m_1 + 1, \dots, m_2$	entradas indeseables
$z_l^d(n, t - 1)$	$l = 1, \dots, l_1$	entradas deseables intermediarias
$z_l^{nd}(n, t - 1)$	$l = l_1 + 1, \dots, l_2$	entradas indeseables intermediarias
$y_j^d(n, t)$	$j = 1, \dots, s_1$	salidas deseables
$y_j^{nd}(n, t)$	$j = s_1 + 1, \dots, s_2$	salidas indeseables
$z_r^d(n, t)$	$r = 1, \dots, r_1$	salidas deseables intermediarias
$z_r^{nd}(n, t)$	$r = r_1 + 1, \dots, r_2$	salidas indeseables intermediarias

Tabla 3.1: Variables del modelo

La Tabla 3.1 muestra la notación del sistema de evaluación de la eficiencia propuesto. Por tanto, el conjunto de datos  $V = \{v(n, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el conjunto de valores:

$$(x_i^d(n, t), x_i^{nd}(n, t), z_l^d(n, t - 1), z_l^{nd}(n, t - 1), y_j^d(n, t), y_j^{nd}(n, t), z_r^d(n, t), z_r^{nd}(n, t)). \tag{3.7}$$

Considere que todas las entradas  $x_i(n, s)$  pueden ser escritas en la forma

$$x_i = \delta_i x_i + (1 - \delta_i) x_i \tag{3.8}$$

donde  $\delta \in (0, 1]$ ,  $\delta_i x_i$  representa la parte discrecional (que entran en el proceso de optimización) y  $(1 - \delta_i) x_i$  representa la parte no discrecional (que no se pueden cambiar).

La puntuación DyMEA para una observación  $v(\bar{n}, s)$  where  $\bar{n}$  es una unidad específica y  $s \in \{t - 1, t, t + 1\}$  se encuentra resolviendo dos clases de problemas de optimización:  $P_\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)(\bar{n}, s)$  y  $P_{\alpha^*}(\gamma)(\bar{n}, s)$ .

La primera clase de problemas

$$\begin{aligned} P_\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)(\bar{n}, s) &\equiv \{P_{\alpha\gamma_1}, P_{\alpha\gamma_2}, P_{\alpha\gamma_3}, P_{\alpha\gamma_4}\} \\ &\equiv \{P_\alpha(1, 0, 0, 0), P_\alpha(0, 1, 0, 0), P_\alpha(0, 0, 1, 0), P_\alpha(0, 0, 0, 1)\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

es dada por

**Problem  $P_\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)(\bar{n}, s)$  :**

$\min \{ \gamma_1 \alpha_{1\tilde{i}}^s(\bar{n}, s) - \gamma_2 \alpha_{2\tilde{i}}^s(\bar{n}, s) - \gamma_3 \alpha_{3\tilde{j}}^s(\bar{n}, s) + \gamma_4 \alpha_{4\tilde{j}}^s(\bar{n}, s) \}$  tal que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \delta_i \lambda_n^s x_i^d(n, s) &\leq \delta_i (1 - \gamma_1) x_i^d(\bar{n}, s) + \gamma_1 \alpha_{1\tilde{i}}^s(\bar{n}, s), \quad i \in [m_1]; \\
 \sum_{n=1}^N \delta_i \lambda_n^s x_i^{nd}(n, s) &\geq \delta_i (1 - \gamma_2) x_i^{nd}(\bar{n}, s) + \gamma_2 \alpha_{2\tilde{i}}^s(\bar{n}, s), \quad i \in [m_2] \setminus [m_1]; \\
 \sum_{n=1}^N \lambda_n^s y_j^d(n, s) &\geq (1 - \gamma_3) y_j^d(\bar{n}, s) + \gamma_3 \alpha_{3\tilde{j}}^s(\bar{n}, s), \quad j \in [s_1]; \\
 \sum_{n=1}^N \lambda_n^s y_j^{nd}(n, s) &\leq (1 - \gamma_4) y_j^{nd}(\bar{n}, s) + \gamma_4 \alpha_{4\tilde{j}}^s(\bar{n}, s), \quad j \in [s_2] \setminus [s_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^s (y_j^d(n, s) + z_r^d(n, s)) &\geq y_j^d(\bar{n}, s) + z_r^d(\bar{n}, s), \quad j \in [s_1], r \in [r_1]; \\
 \sum_{n=1}^N \lambda_n^s (y_j^{nd}(n, s) + z_r^{nd}(n, s)) &\leq y_j^{nd}(\bar{n}, s) + z_r^{nd}(\bar{n}, s), \quad j \in [s_2] \setminus [s_1], r \in [r_2] \setminus [r_1]; \\
 \sum_{n=1}^N \lambda_n^{s-1} z_l^d(n, s-1) &\geq z_l^d(\bar{n}, s-1), \quad l \in [l_1]; \\
 \sum_{n=1}^N \lambda_n^{s-1} z_l^{nd}(n, s-1) &\geq z_l^{nd}(\bar{n}, s-1), \quad l \in [l_2] \setminus [l_1], \quad \lambda_n^s, \lambda_n^{s-1} \in \Lambda.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \{0, 1\}$ .

Específicamente, para  $\gamma_1 = 1, i = \tilde{i} \in [m_1]$  y para  $\gamma_1 = 0, i \in [m_1] \setminus \{\tilde{i}\}$ ; para  $\gamma_2 = 1, i = \tilde{i} \in [m_2] \setminus \{[m_1]\}$  y para  $\gamma_2 = 0, i \in [m_2] \setminus \{[m_1], \tilde{i}\}$ ; para  $\gamma_3 = 1, i = \tilde{i} \in [s_1]$  y para  $\gamma_3 = 0, i \in [s_1] \setminus \{\tilde{i}\}$  y para  $\gamma_4 = 1, i = \tilde{i} \in [s_2] \setminus \{[s_1]\}$  y para  $\gamma_4 = 0, i \in [s_2] \setminus \{[s_1], \tilde{i}\}$ .

El conjunto  $\Lambda$  corresponde al modelo de rendimientos variables a escala (VRS-Variable returns to scale) para la medición de la eficiencia de las unidades de toma de decisiones [17], definido como

$$\Lambda^{N^s} = \left\{ \lambda_n^s \in \mathbb{R}^N : \sum_{n=1}^N \lambda_n^s = 1 \right\}. \tag{3.11}$$

Considere  $\alpha_{1\tilde{i}}^*, \alpha_{2\tilde{i}}^*, \alpha_{3\tilde{j}}^*$  y  $\alpha_{4\tilde{j}}^*$  las soluciones óptimas del problema  $P_\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)(\bar{n}, s)$ . La segunda clase de problemas  $P_{\alpha^*}(\gamma)(\bar{n}, s)$  es dado por

**Problem  $P_{\alpha^*}(\gamma)(\bar{n}, s)$  :**

$\max \gamma(\bar{n})$  such that

$$\begin{aligned}
 \sum_n \delta_i \lambda_n^s x_i^d(n, s) &\leq \delta_i (1 - \gamma_1) x_i^d(\bar{n}, s) - \gamma(\bar{n}, s) \left( \delta_i (1 - \gamma_1) x_i^d(\bar{n}, s) - \alpha_{1\tilde{i}}^*(\bar{n}, s) \right), \quad i \in [m_1]; \\
 \sum_n \delta_i \lambda_n^s x_i^{nd}(n, s) &\geq \delta_i (1 - \gamma_2) x_i^{nd}(\bar{n}, s) + \gamma(\bar{n}, s) \left( \alpha_{2\tilde{i}}^*(\bar{n}, s) - \delta_i (1 - \gamma_2) x_i^{nd}(\bar{n}, s) \right), \quad i \in [m_2] \setminus [m_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^s y_j^d(n, s) &\geq (1 - \gamma_3) y_j^d(\bar{n}, s) + \gamma(\bar{n}, s) \left( \alpha_{3\tilde{j}}^*(\bar{n}, s) - (1 - \gamma_3) y_j^d(\bar{n}, s) \right), \quad j \in [s_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^s y_j^{nd}(n, s) &\leq (1 - \gamma_4) y_j^{nd}(\bar{n}, s) - \gamma(\bar{n}, s) \left( (1 - \gamma_4) y_j^{nd}(\bar{n}, s) - \alpha_{4\tilde{j}}^*(\bar{n}, s) \right), \quad j \in [s_2] \setminus [s_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^s (y_j^d(n, s) + z_r^d(n, s)) &\geq y_j^d(\bar{n}, s) + z_r^d(\bar{n}, s), \quad j \in [s_1], r \in [r_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^s (y_j^{nd}(n, s) + z_r^{nd}(n, s)) &\leq y_j^{nd}(\bar{n}, s) + z_r^{nd}(\bar{n}, s), \quad j \in [s_2] \setminus [s_1], r \in [r_2] \setminus [r_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^{s-1} z_l^d(n, s-1) &\geq z_l^d(\bar{n}, s-1), \quad l \in [l_1]; \\
 \sum_n \lambda_n^{s-1} z_l^{nd}(n, s-1) &\geq z_l^{nd}(\bar{n}, s-1), \quad l \in [l_2] \setminus [l_1]; \quad \lambda_n^s, \lambda_n^{s-1} \in \Lambda.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde los parametros  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  siguen la misma estructura mencionada anteriormente.

Por tanto el punto ideal de  $V = \{v(\bar{n}, s)\}_{\bar{n} \in \mathbb{N}}$  es dado por el vector de salida DyMEA

$$\zeta(\bar{n}, s) \doteq (\alpha_{1\bar{i}}^*(\bar{n}, s), \alpha_{2\bar{i}}^*(\bar{n}, s), z_{\bar{i}}^d(\bar{n}, s - 1), z_{\bar{i}}^{nd}(\bar{n}, s - 1), \alpha_{3\bar{j}}^*(\bar{n}, s), \alpha_{4\bar{j}}^*(\bar{n}, s), z_r^d(\bar{n}, s), z_r^{nd}(\bar{n}, s)) \quad (3.13)$$

para todo  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  y  $s \in \{t - 1, t, t + 1\}$ .

La puntuación dinámica de MEA para una observación específica  $v(\bar{n}, s)$  consiste de  $(|m_1| + |m_2 - m_1| + |s_1| + |s_2 - s_1| + 1) \times N$  programas lineales. Esto incluye  $|m_1|$  problemas  $P_{\alpha_{\gamma_1}}(\bar{n}, s)$  (i.e., un problema  $P_{\alpha}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)(\bar{n}, s)$  para cada entrada deseable),  $|m_2 - m_1|$  problema  $P_{\alpha_{\gamma_2}}(\bar{n}, s)$  (un problema para cada entrada indeseable),  $|s_1|$  problema  $P_{\alpha_{\gamma_3}}(\bar{n}, s)$  (un problema para cada salida deseable),  $|s_2 - s_1|$  problema  $P_{\alpha_{\gamma_4}}(\bar{n}, s)$  (un problema para cada salida indeseable) y un problema  $P_{\alpha^*}(\gamma)(\bar{n}, s)$  con las soluciones optimas del problema  $P_{\alpha}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)(\bar{n}, s)$ .

Según las ecuaciones en el problema  $P_{\alpha^*}(\gamma)(\bar{n}, s)$ , la contribución direccional dinámica de cada entrada deseable  $x_i^d, i \in [m_1]$  y cada entrada indeseable  $x_i^{nd}, i \in [m_2] \setminus [m_1]$  en la observación  $v(\bar{n}, s)$  son dadas por

$$\text{dymeff}_{x_i^d}(\bar{n}) \doteq \frac{\delta_i(1 - \gamma_1)x_i^d(\bar{n}, s) - \gamma(\bar{n}, s) (\delta_i(1 - \gamma_1)x_i^d(\bar{n}, s) - \alpha_{1\bar{i}}^*(\bar{n}, s))}{\delta_i x_i^d(\bar{n}, s)} \quad (3.14)$$

y

$$\text{dymeff}_{x_i^{nd}}(\bar{n}) \doteq \frac{\delta_i x_i^{nd}(\bar{n}, s)}{(1 - \gamma_2)x_i^{nd}(\bar{n}, s) + \gamma(\bar{n}, s) (\alpha_{2\bar{i}}^*(\bar{n}, s) - \delta_i(1 - \gamma_2)x_i^{nd}(\bar{n}, s))} \quad (3.15)$$

respectivamente. Para cada salida deseable  $y_j^d, j \in [s_1]$  y cada salida indeseable  $y_j^{nd}, j \in [s_2] \setminus [s_1]$  la contribución direccional es dada por

$$\text{dymeff}_{y_j^d}(\bar{n}) \doteq \frac{y_j^d(\bar{n}, s)}{(1 - \gamma_3)y_j^d(\bar{n}, s) + \gamma(\bar{n}, s) (\alpha_{3\bar{j}}^*(\bar{n}, s) - (1 - \gamma_3)y_j^d(\bar{n}, s))} \quad (3.16)$$

y

$$\text{dymeff}_{y_j^{nd}}(\bar{n}) \doteq \frac{(1 - \gamma_4)y_j^{nd}(\bar{n}, s) - \gamma(\bar{n}, s) ((1 - \gamma_4)y_j^{nd}(\bar{n}, s) - \alpha_{4\bar{j}}^*(\bar{n}, s))}{y_j^{nd}(\bar{n}, s)} \quad (3.17)$$

respectivamente.

El término  $\delta_i(1 - \gamma_1)x_i^d(\bar{n}, s) - \alpha_{1\bar{i}}^*(\bar{n}, s)$  representa el exceso de insumos para todas las entradas deseables  $i \in [m_1]$ ,  $\alpha_{2\bar{i}}^*(\bar{n}, s) - \delta_i(1 - \gamma_2)x_i^{nd}(\bar{n}, s)$  representa el déficit de insumos para todas las entradas no deseadas  $i \in [m_2] \setminus [m_1]$ ,  $\alpha_{3\bar{j}}^*(\bar{n}, s) - (1 - \gamma_3)y_j^d(\bar{n}, s)$  representa el exceso de productos para todas las salidas deseables  $i \in [s_1]$  y el término  $(1 - \gamma_4)y_j^{nd}(\bar{n}, s) - \alpha_{4\bar{j}}^*(\bar{n}, s)$  el déficit de producción para todas las salidas indeseables  $i \in [s_2] \setminus [s_1]$ .

La puntuación DyMEA es obtenida por la contribución direccional de cada entrada y cada dimensión de salida. En este sentido, para un conjunto de datos  $V = \{v(\bar{n}, t)\}_{\bar{n} \in \mathbb{N}}$  la Puntuación DyMEA Específica de cada  $n \in \mathbb{N}$  es dado por

$$\begin{aligned} & DyMEA_v(\bar{n}, s) \\ &= \frac{\frac{1}{\gamma^*(n)} - \frac{1}{|m_2|} \left( \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\delta_i(1 - \gamma_1)x_i^d(\bar{n}, s) - \alpha_{1\bar{i}}^*(\bar{n}, s)}{\delta_i x_i^d(\bar{n}, s)} + \sum_{i=1}^{m_2 - m_1} \frac{\alpha_{2\bar{i}}^*(\bar{n}, s) - \delta_i(1 - \gamma_2)x_i^{nd}(\bar{n}, s)}{\delta_i x_i^{nd}(\bar{n}, s)} \right)}{\frac{1}{\gamma^*(n)} + \frac{1}{|s_2|} \left( \sum_{j=1}^{s_1} \frac{\alpha_{3\bar{j}}^*(\bar{n}, s) - (1 - \gamma_3)y_j^d(\bar{n}, s)}{y_j^d(\bar{n}, s)} + \sum_{j=1}^{s_2 - s_1} \frac{(1 - \gamma_4)y_j^{nd}(\bar{n}, s) - \alpha_{4\bar{j}}^*(\bar{n}, s)}{y_j^{nd}(\bar{n}, s)} \right)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\alpha_{1\bar{i}}^*, \alpha_{2\bar{i}}^*, \alpha_{3\bar{j}}^*$  and  $\alpha_{4\bar{j}}^*$  representan las soluciones óptimas al problema de optimización lineal  $P_{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)}(\bar{n}, s)$ , and  $\gamma^*$  es la solución optima a  $P_{\gamma}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*)(\bar{n}, s)$ .

Note que las variables  $z_r^d(n, s), z_r^{nd}(n, s), z_l^d(n, s - 1)$  y  $z_l^{nd}(n, s - 1)$ , no son incluidas explícitamente en la ecuación (3.18). Esto debido a que son insumos y productos intermedios en el proceso de optimización y no tienen un efecto diferente en la evaluación de la eficiencia.

La expresión (3.18) se puede reescribir de forma general como en (3.19).

Para un conjunto de datos dado  $V = \{v(n, s)\}_{n \in \mathbb{N}}$  la Puntuación DyMEA General de de cada  $n \in \mathbb{N}$  es dado por

$$\begin{aligned} DyMEA_{v(n,s)} &= \frac{\frac{1}{\gamma^*(n,s)} - \frac{1}{|m_2|} \sum_{v \in V_i} \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{k=1}^2 \frac{x_i(n, s) - \gamma(n, s) (x_i(n, s) - \langle v, \alpha_{k, \{i,j\}}^*(n, s) \rangle)}{x_i(n, s)}}{\frac{1}{\gamma^*(n,s)} + \frac{1}{|s_2|} \sum_{v \in V_j} \sum_{j=1}^{s_2} \sum_{k=3}^4 \frac{y_j(n, s) - \gamma(n, s) (\langle v, \alpha_{k, \{i,j\}}^*(n, s) \rangle - y_j(n, s))}{y_j(n, s)}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\alpha_{k, \{i,j\}}^* = \{\alpha_{1\bar{i}}^*, \alpha_{2\bar{i}}^*, \alpha_{3\bar{j}}^*, \alpha_{4\bar{j}}^*\}, V_i = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\} \text{ and } V_j = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Las puntuaciones DyMEA (3.18) y (3.19) representan la puntuación DyMEA de cada  $n \in \mathbb{N}$ , considerando un tiempo  $s \in \{t - 1, t, t + 1\}$ , en forma específica y general, respectivamente.

**3.2.1. Las medidas de ineficiencia.** En esta subsección consideraremos un modelo DyMEA con modo orientado a la entrada. Es decir, el modelo minimiza las entradas mientras satisface al menos los niveles de salida dados con rendimientos variables a escala.

Una de las ventajas significativas de DyMEA es que permite estimar el nivel de influencia de cada variable individualmente en el modelo. Las entradas utilizadas para obtener la puntuación DyMEA se identifican con un índice de ineficiencia. En este sentido, es posible saber si utilizamos las entradas adecuadamente.

Para un conjunto de datos dado  $V = \{v(\bar{n}, s)\}_{\bar{n} \in \mathbb{N}}$  el índice de ineficiencia de DyMEA para cada entrada deseable  $i \in [m_1]$  está dado por

$$dR_i(\bar{n}, s) \doteq \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \gamma(\bar{n}, s) (\delta_i(1 - \gamma_1)x_i^d(\bar{n}, s) - \alpha_{1i}^*(\bar{n}, s))}{\sum_{i=1}^{m_1} \delta_i x_i^d(\bar{n}, s)}, \quad (3.20)$$

y por cada entrada indeseable  $i \in [m_2] \setminus [m_1]$  es dado por

$$dR_i(\bar{n}, s) \doteq \frac{\sum_{i=1}^{m_2 - m_1} \delta_i x_i^{nd}(\bar{n}, s)}{\sum_{i=1}^{m_2 - m_1} \gamma(\bar{n}, s) (\alpha_{2i}^*(\bar{n}, s) - \delta_i(1 - \gamma_2)x_i^{nd}(\bar{n}, s))}. \quad (3.21)$$

Nos referimos al índice de ineficiencia DyMEA (3.20) y (3.21) para determinar el número de veces que cada entrada fue utilizada ineficientemente. Siguiendo la misma idea, podemos calcular la ineficiencia para las entradas intermedias. Esta es la característica más significativa de MEA: la capacidad para examinar el mal uso de los insumos (cuando el análisis implica un modelo orientado a los insumos) o para identificar el producto desperdiciado (cuando el análisis implica un modelo orientado a los resultados).

**4. Conclusiones.** Este estudio propone el modelo dinámico no paramétrico DyMEA, para medir la eficiencia de las unidades de toma de decisiones, basado en el Análisis de Eficiencia Multidireccional (MEA). La mayoría de los modelos dinámicos, se aplican sin observar las peculiaridades de las condiciones analíticas. El modelo DyMEA, considere una estructura completa, que incluye variables intertemporales (entradas y salidas intermedias deseables/indeseables), entradas discretionales/no discretionales; entradas y salidas deseables/indeseables.

Entre las principales ventajas de DyMEA se encuentran:

(DyMEA1) Muchos modelos dinámicos no están estructurados para discriminar entre los tipos de variables considerados, dando lugar a errores en la aplicación de los modelos y posterior interpretación de los resultados. Dado que la caracterización de la variable depende directamente de su desempeño en el modelo, en DyMEA se introducen diferentes categorías de variables en DyMEA, con el objetivo de que el modelo propuesto se acerque más a la realidad. En este sentido, el modelo DyMEA respeta correctamente la estructura y naturaleza de la variable. Es de esta manera que los resultados obtenidos, realmente representan las unidades a evaluar.

(DyMEA2) La puntuación dinámica de DyMEA se presenta de dos maneras en una versión específica y luego en una forma más general, considerando los problemas de la clase de optimización.

(DyMEA3) Se muestra la contribución direccional de cada variable, mostrando información importante para el análisis como el exceso de entradas y salidas, lo que permite mejorar el rendimiento con el paso del tiempo.

(DyMEA4) Aunque es un modelo con varias categorías de variables, El número de veces que cada entrada se utiliza ineficientemente en el modelo, se puede medir con un índice de ineficiencia dinámica. Se presenta para insumos deseables e indeseables.

(DyMEA5) Debido a las limitaciones de los modelos de eficiencia existentes en la evaluación del rendimiento Inter temporal, es necesario diseñar nuevos modelos que combinen modelos DEA más robustos para evaluar sistemas más complejos. El modelo dinámico DyMEA propuesto aquí, trata de responder a esta necesidad, presentando una estructura sólida y completa, que la convierte en un modelo dinámico capaz de adaptarse más a situaciones reales.

**Contribución del autor.** El artículo a sido desarrolla en su integridad por la autora: KM.

**Conflicto de interés.** El autor declara no tener conflicto de interes.

**Agradecimientos.** Murillo contó con el apoyor del Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) a través de la Fundación Portuguesa de Ciencia y Tecnología (FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia), referencias UIDB/04106/2020 y UIDP/04106/2020. Murillo también contó con el apoyo de Fondos Nacionales (OE), a través de FCT, I.P., en el ámbito del contrato marco previsto en los números 4, 5 y 6 del artículo 23, del Decreto-Ley 57/2016, de 29 de agosto, modificado por la Ley 57/2017, del 19 de julio.

#### ORCID and License

Kelly Patricia Murillo <https://orcid.org/0000-0003-1479-8757>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Charnes A, Cooper W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. *Eur. J. of Operational Research*. 1978; 2(6):429-444.
- [2] Asmild M, Paradi JC, Kulkarni A. Using Data Envelopment Analysis in Software Development Productivity Measurement. *Software Process Improvement and Practice*. 2006; 11(6): 561-72.
- [3] Kaffash S, Marra M. Data Envelopment Analysis in Financial Services: A Citations Network Analysis of Banks, Insurance Companies and Money Market Funds. *Annals of Operations Research*. 2017; 253(1): 307-344.
- [4] Bhat ZUH, Sultana D, Dar QF. A Comprehensive Review of Data Envelopment Analysis (DEA) in Sports. *J. of Sports Economics and Management*. 2019; 9(2): 82-109.
- [5] Wen H, Lim B, Lisa H. Measuring E-commerce Efficiency: A Data Envelopment Analysis (DEA) Approach. *Industrial Management and Data Systems*. 2003; 103(9): 703-710.
- [6] Liu J, Lu L, Lu W, Lin B. A survey of DEA applications. *Omega (United Kingdom)*. 2013; 41(5): 893-902.
- [7] Fare R, Grosskopf S. *Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA*. Kluwer Academic Publishers, Boston; 1996.
- [8] Nemoto J, Goto M. Dynamic data envelopment analysis: modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies. *Economics Letters*. 1999; 64(1): 51-56.
- [9] Tone K, Tsutsui M. Dynamic DEA: a slacks-based measure approach. *Omega*. 2010; 38(3-4): 145-156.
- [10] Mariz F, Almeida M, Aloise D. A review of dynamic data envelopment analysis: State of the art and applications, *Int. Transactions in Operational Research*. 2018; 25(2): 469-505.
- [11] Bogetoft P, Hougaard J. Efficiency Evaluations Based on Potential (Non-proportional) Improvements. *J. of Productivity Analysis*. 1999; 12(3): 233-247.
- [12] Gongbing B, Pingchun W, Feng Y, Liang L. Energy and Environmental Efficiency of China's Transportation Sector: A Multidirectional Analysis Approach. *Mathematical Problems in Engineering*. 2014; 1-12.
- [13] Wang K, Wei Y, Zhang X. Energy and Emissions Efficiency Patterns of Chinese Regions: A Multi-directional Efficiency Analysis. *Applied Energy*. 2013; 104: 105-116
- [14] Murillo K, Rocha E. The Portuguese Manufacturing Sector During 2013- 2016 After the Troika Austerity Measures. *World J. of Applied Economics*. 2018; 4(1): 21-38.
- [15] Bogetoft P, Hougaard J. Super efficiency evaluations based on potential slack, *Eur. J. of Operational Research*. 2004; 152(1): 14-21.
- [16] Asmild M, Pastor J. Slack free MEA and RDM with comprehensive efficiency measures, *Omega*. 2010; 38(6): 475-483.
- [17] Banker R, Charnes A, Cooper W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*. 1984; 30(9): 1078-92.