Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2023; Vol. 10(2): 436-443.

MATHEMATICS EDUCATION

A characterization of the natural isomorphism of bifunctors

Una caracterización del isomorfismo natural de bifuntores

Carlos Mejía Alemán, Milton Milciades Cortez Gutiérrez and Emerson Lech Taipe Huamaní

Received, Nov. 25, 2023; Accepted, Dec. 18, 2023; Published, Dec. 27, 2023

How to cite this article:
Mejía Alemán C, et al. *A characterization of the natural isomorphism of bifunctors*. Selecciones Matemáticas. 2023;10(2):436–443. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.15

Abstract

We are going to characterize the natural isomorphism between the bifunctors of the examples 2.13 and 2.14, for that it is enough to show that η and ζ of the lemma 3.1 are natural isomorphisms.

Keywords . Categories, functor, natural transformation, natural isomorphism, bifunctor.

Resumen

Vamos a caracterizar el isomorfismo natural entre los bifuntores de los ejemplos 2.13 y 2.14, para esto basta con demostrar que η y ζ del lema 3.1 son isomorfismos naturales.

Palabras clave. Categoría, funtor, transformación natural, isomorfismo natural, bifuntor.

1. Introducción. En este trabajo veremos algunos conceptos sobre teoría de categorías. En preliminares veremos las siguientes definiciones: categorías, funtores, bifuntores, transformaciones naturales e isomorfismos naturales. Las observaciones 2.2 y 2.3 son esenciales para el resultado central, así como también los bifuntores de los ejemplos 2.13 y 2.14.

En la última sección probaremos el resultado central cuyo enunciado es el siguiente:

Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores.

$\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es isomorfismo natural si y solo si para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$, $D \in \mathfrak{D}$ se tiene que

$$\eta_{(C,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\zeta_{(-,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son isomorfismos naturales.

Para la prueba de este resultado utilizaremos 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y las definiciones mencionadas anteriormente.

*Universidad de Lima, Lima-Perú. **Correspondence author:** (camejia@ulima.edu.pe).
†Universidad Nacional del Santa, Chimbote-Perú. (mcortez@unitru.edu.pe).
‡Universidad Científica del Sur, Lima-Perú. (etaipeh@cientifica.edu.pe).

2. Preliminares.

Definición 2.1. *Una **categoría** $\mathfrak{C}$ consta de una colección, denotada por $Ob(\mathfrak{C})$ y un conjunto $Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ para cada $A,B \in Ob(\mathfrak{C})$. Los elementos de $Ob(\mathfrak{C})$ son llamados objetos y los elementos de $Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ son llamados morfismos. Si $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ denotamos $f : A \longrightarrow B$.*

Para cada terna $A,B,C \in Ob(\mathfrak{C})$ se define la aplicación

$$\circ : Mor_{\mathfrak{C}}(A,B) \times Mor_{\mathfrak{C}}(B,C) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(A,C) \ \ , \ \ (f,g) \longmapsto g \circ f$$

llamada composición de morfismos, que satisface las siguientes condiciones:

1. *Para cualesquiera $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B,C)$ y $h \in Mor_{\mathfrak{C}}(C,D)$ se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Por lo tanto, la composición de morfismos es asociativa.*
2. *Para cada $A \in Ob(\mathfrak{C})$, existe un morfismo $1_A \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,A)$ llamado morfismo identidad, tal que para cualesquiera $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(B,A)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ tenemos que $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$.*

Ejemplo 2.1. *La categoría de conjuntos **Set** cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones.*

Ejemplo 2.2.

*La categoría de grupos abelianos **Ab** cuyos objetos son los grupos abelianos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupos abelianos.*

Ejemplo 2.3.

*La categoría de anillos conmutativos con unidad **CRing** cuyos objetos son los anillos conmutativos con unidad y cuyos morfismos son los homomorfismos de anillos conmutativos que respetan la unidad.*

Ejemplo 2.4. *Sea R un anillo con unidad. La categoría de módulos a izquierda R-**Mod** cuyos objetos son módulos a izquierda y cuyos morfismos son los homomorfismos de R-módulos a izquierda. También tenemos la categoría de módulos a derecha **Mod**-R cuyos objetos son los R-módulos a derecha y cuyos morfismos son los homomorfismos de R-módulos a derecha.*

Ejemplo 2.5. *La categoría de espacios topológicos **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son aplicaciones continuas entre espacios topológicos.*

Ejemplo 2.6.

*La **categoría opuesta** $\mathfrak{C}^{op}$ de una categoría $\mathfrak{C}$ tiene los mismos objetos que $\mathfrak{C}$ y para cada morfismo $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(B,A)$ se tiene que $f^{op} \in Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A,B)$.*

Para cada terna $A,B,C \in Ob(\mathfrak{C}^{op})$ definimos la composición

$$\begin{array}{rcl} \circ : Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A,B) \times Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(B,C) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A,C) \\ (f^{op}, g^{op}) & \longmapsto & g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op} \end{array}$$

y si suponemos que $1_A^{op} = 1_A$ entonces $\mathfrak{C}^{op}$ es una categoría.

Ejemplo 2.7.

*Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ dos categorías. La **categoría producto*** de $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ denotada por $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tiene como objetos a los pares (A,B) donde $A \in \mathfrak{C}$, $B \in \mathfrak{D}$ y sus morfismos son de la forma $(f,g) : (A,C) \longrightarrow (B,D)$ donde $f : A \longrightarrow B \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ y $g : C \longrightarrow D \in Mor_{\mathfrak{D}}(C,D)$. La composición se define coordenada a coordenada y si suponemos que $1_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}} = (1_{\mathfrak{C}}, 1_{\mathfrak{D}})$ entonces $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ es una categoría.

Para ejemplos más sofisticados se puede revisar [1] y el famoso libro de MacLane [2].

Definición 2.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Decimos que el morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo en $\mathfrak{C}$, si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$.*

Definición 2.3. *Un **funtor covariante*** o simplemente un ***funtor*** $\mathcal{F}$ que va de $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{D}$ se denota $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y por definición cumple que:

1. *Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}A \in \mathfrak{D}$.*
2. *Para cada par de objetos $A,B \in \mathfrak{C}$ y para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{F}f : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}B$ es un morfismo en $\mathfrak{D}$ tal que:*
   i) Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$.
   ii) Para cada $A,B,C \in \mathfrak{C}$ y $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfismos en $\mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f$.

En este caso $\mathfrak{C}$ es llamado dominio y $\mathfrak{D}$ codominio.

Ejemplo 2.8. *Toda categoría $\mathfrak{C}$ define un funtor $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ de la siguiente manera:*

***En objetos**:* Para cada $A \in \mathfrak{C}$ tenemos que $1_{\mathfrak{C}}A := A \in \mathfrak{C}$.

***En morfismos**:* Para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$ tenemos que el morfismo $1_{\mathfrak{C}}f := f$ está en $\mathfrak{C}$.

Así definido $1_{\mathfrak{C}}$ es un funtor llamado funtor identidad.

Ejemplo 2.9. *Dado $X \in \mathfrak{D}$ fijo. Definimos $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ de la siguiente manera:*

***En objetos**: Para cada $A \in \mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{F}A := X \in \mathfrak{D}$.*

***En morfismos**:* Para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$ tenemos que el morfismo $\mathcal{F}f := 1_X$ está en $\mathfrak{D}$.

Así definido $\mathcal{F}$ es un funtor llamado funtor constante.

Ejemplo 2.10. *Definimos $\mathcal{F}$: **Ab** $\longrightarrow$ **Set** de la siguiente manera:*

En objetos: Para cada $G \in$ **Ab** tenemos que $\mathcal{F}G := G \in$ **Set**.

***En morfismos:** Para cada morfismo $h : G_1 \longrightarrow G_2$ en **Ab** tenemos que el morfismo $\mathcal{F}h := h$ está en **Set**. Así definido $\mathcal{F}$ es un funtor, llamado funtor de olvido.*

*El nombre del funtor anterior, se debe a que G pierde la estructura de grupo y el morfismo h pierde las propiedades de homomorfismo. En lugar de colocar la categoría **Ab** podemos colocar cualquier otra categoría como por ejemplo **CRing**, **Top**, **Mod**-R, etc y también serán funtores de olvido.*

Para más ejemplos se puede revisar [3].

Definición 2.4.

*Un **bifuntor** es un funtor cuyo dominio es alguna categoría producto.*

Observación 2.1.

Consideremos el bifuntor $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y el morfismo $(h, j) \circ (f, g) : (B_1, C_1) \xrightarrow{(f,g)} (B_2, C_2) \xrightarrow{(h,j)} (B_3, C_3)$ en $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, entonces $\mathcal{F}((h, j) \circ (f, g)) := \mathcal{F}(h \circ f, j \circ g) = \mathcal{F}(h, j) \circ \mathcal{F}(f, g)$ pues $\mathcal{F}$ es funtor.

Observación 2.2. *Si $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un bifuntor entonces para cada $B \in \mathfrak{B}$ se tiene que*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}(B,-): & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \\ & C & \longmapsto & \mathcal{F}(B,C) \\ & C_1 \xrightarrow{g} C_2 & \longmapsto & \mathcal{F}(1_B, g) \end{array}$$

es un funtor, pues dada el morfismo $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} C_3$ tenemos que $\mathcal{F}(1_B, g) \circ \mathcal{F}(1_B, f) = \mathcal{F}(1_B \circ 1_B, g \circ f) = \mathcal{F}(1_B, g \circ f)$.

Observación 2.3. *Si $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un bifuntor, entonces para cada $C \in \mathfrak{C}$ se tiene que*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}(-,C): & \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \\ & B & \longmapsto & \mathcal{F}(B,C) \\ & B_1 \xrightarrow{h} B_2 & \longmapsto & \mathcal{F}(h, 1_C) \end{array}$$

es un funtor.

Ejemplo 2.11.

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Definimos $\pi_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ de la siguiente manera:

***En objetos:** Para cada $(C, D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tenemos que $\pi_{\mathfrak{C}}(C, D) := C \in \mathfrak{C}$.*

***En morfismos:** Para cada morfismo $(f, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tenemos que el morfismo $\pi_{\mathfrak{C}}(f, g) := f$ está en $\mathfrak{C}$. Así definido $\pi_{\mathfrak{C}}$ es un bifuntor llamado bifuntor proyección en la categoría $\mathfrak{C}$.*

Ejemplo 2.12.

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Definimos $\pi_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ de la siguiente manera:

***En objetos:** Para cada $(C, D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tenemos que $\pi_{\mathfrak{D}}(C, D) := D \in \mathfrak{D}$.*

***En morfismos:** Para cada morfismo $(f, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tenemos que el morfismo $\pi_{\mathfrak{D}}(f, g) := g$ está en $\mathfrak{D}$. Así definido $\pi_{\mathfrak{D}}$ es bifuntor llamado bifuntor proyección en la categoría $\mathfrak{D}$.*

Ejemplo 2.13. *Definimos $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow$ **Set** como sigue:*

***En objetos:** Para cada objeto $(C, D) \in \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \in$ **Set**.*

***En morfismos:** Para cada morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que el morfismo*

$$Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_1) \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g)} Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D_2)$$

$$q \longmapsto Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g)(q) := \mathcal{G}g \circ q \circ f$$

*está en **Set**. Así definido $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-)$ es un bifuntor. Vamor a enumerar la última igualdad.*

$$Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g)(q) := \mathcal{G}g \circ q \circ f \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.14.
*Definimos $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow$ **Set** como sigue:*

***En objetos:** Para cada objeto $(C, D) \in \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \in$ **Set**.*

***En morfismos:** Para cada morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene que el morfismo*

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_1) \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g)} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D_2)$$
$$q \longmapsto Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g)(q) := g \circ q \circ \mathcal{F}f$$

*está en **Set**. Así definido $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es un bifuntor. Vamos a enumerar la última igualdad.*

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g)(q) := g \circ q \circ \mathcal{F}f \tag{2.2}$$

Definición 2.5. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ dos funtores.*
*Una **transformación natural** que va de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ es denotada por $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ y por definición asigna a cada objeto $A \in \mathfrak{C}$ un morfismo $\tau_A : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{G}A$ en $\mathfrak{D}$ tal que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$ el siguiente diagrama* conmuta en $\mathfrak{D}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\tau_B"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.15.
Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un funtor. Definimos $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que asigna a cada $A \in \mathfrak{C}$ el morfismo identidad $\tau_A = 1_{\mathcal{F}A} : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}A$ en $\mathfrak{D}$. Así definida τ es una transformación natural.
Ejemplo 2.16.
Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{J} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ tres funtores. Si $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, $\eta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}$ son transformaciones naturales, entonces definimos $\eta \circ \tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que asigna a cada $A \in \mathfrak{C}$ el morfismo $(\eta \circ \tau)_A := \eta_A \circ \tau_A$. Así definida $\eta \circ \tau$ es una transformación natural.
Ejemplo 2.17. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ tres categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{J} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{E}$ tres funtores.* Si $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una transformación natural, entonces definimos $\mathcal{J}\tau : \mathcal{J} \circ \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J} \circ \mathcal{G}$ tal que para cada $C \in \mathfrak{C}$ se tiene $(\mathcal{J}\tau)_C := \mathcal{J}(\tau_C)$. Así definida $\mathcal{J}\tau$ es una transformación natural.
Ejemplo 2.18. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ tres categorías. Si $\mathcal{J} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$; $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{E}$ son tres funtores y $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ una transformación natural, entonces definimos $\tau\mathcal{J} : \mathcal{F} \circ \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{J}$ tal que para cada $C \in \mathfrak{C}$ se tiene $(\tau\mathcal{J})_C := \tau_{\mathcal{J}C}$. Así definida $\tau\mathcal{J}$ es una transformación natural.*

Definición 2.6. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ funtores. Una transformación natural $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un **isomorfismo natural de funtores*** o simplemente un ***isomorfismo de funtores*** si para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\tau_A : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{G}A$ es un isomorfismo en $\mathfrak{D}$.
En este caso tenemos una transformación natural $\tau^{-1} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ definida por $(\tau^{-1})_A := (\tau_A)^{-1}$ para cada $A \in \mathfrak{C}$. Denotaremos $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ para decir que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son naturalmente isomorfos.

Ejemplo 2.19. *Definimos $\mathcal{F}$: **Grp** $\longrightarrow$ **Set** de la siguiente manera:*

***En objetos**:* Para cada $A \in$ **Grp** se tiene que $\mathcal{F}A := A \in$ **Set**.
***En morfismos**:* Para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en **Grp** se tiene que el morfismo

$$\mathcal{F}f : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}B$$
$$a \longmapsto f(a)$$ *está en **Set**. Así definido $\mathcal{F}$ es un funtor.*

*Y ahora definimos el siguiente funtor $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$: **Grp** $\rightarrow$ **Set** de la siguiente manera:*
***En objetos**: Para cada $U \in$ **Grp** tenemos que $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}U := Mor_{\textbf{Grp}}(\mathbb{Z}, U)$.*

En morfismos*: Para cada morfismo $f : U \to V$ en **Grp** tenemos que*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^{\mathbb{Z}} f : \mathcal{H}^{\mathbb{Z}} U := Mor_{\textbf{Grp}}(\mathbb{Z}, U) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\mathbb{Z}} V := Mor_{\textbf{Grp}}(\mathbb{Z}, V) \\ g & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\mathbb{Z}} f(g) := f \circ g \end{array}$$

*es un morfismo en **Set**.*

Se prueba que los funtores definidos anteriormente son naturalmente isomorfos, es decir $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$.

3. Resultado central. En esta sección probaremos la caracterización que tiene como título este trabajo.

De las observaciones 2.2, 2.3 y de los bifunotres

$$Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \textbf{Set}$$

$$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \textbf{Set}$$

se obtienen los siguientes funtores:

1. Para cada $D \in \mathfrak{D}$, definimos $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow$ **Set** de la siguiente manera:
   En objetos: Para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \in$ **Set**.
   En morfismos: Para cada morfismo $f^{op} : C_1 \longrightarrow C_2$ en $\mathfrak{C}^{op}$ se tiene que el morfismo
   $$\begin{array}{ccc} Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D) & \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)} & Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D) \\ q & \longmapsto & Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q) := q \circ f \end{array}$$
   está en **Set**. Vamos a enumerar a esta última igualdad.
   $$Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q) := q \circ f. \tag{3.1}$$
2. Para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$, definimos $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) : \mathfrak{D} \longrightarrow$ **Set** de la siguiente manera:
   En objetos: Para cada $D \in \mathfrak{D}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \in$ **Set**.
   En morfismos: Para cada morfismo $f : D_1 \longrightarrow D_2$ en $\mathfrak{D}$ se tiene que el morfismo
   $$\begin{array}{ccc} Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_1) & \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)} & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_2) \\ q & \longmapsto & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)(q) := \mathcal{G}f \circ q \end{array}$$
   está en **Set**. Vamos a enumerar a esta última igualdad.
   $$Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}f)(q) := \mathcal{G}f \circ q. \tag{3.2}$$
3. Para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$ definimos $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -) : \mathfrak{D} \longrightarrow$ **Set** de la siguiente manera:
   En objetos: Para cada $D \in \mathfrak{D}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \in$ **Set**.
   En morfismos: Para cada morfismo $f : D_1 \longrightarrow D_2$ en $\mathfrak{D}$ se tiene que el morfismo
   $$\begin{array}{ccc} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_1) & \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D_2) \\ q & \longmapsto & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(q) := f \circ q \end{array}$$
   está en **Set**. Vamos a enumerar a esta última igualdad.
   $$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, f)(q) := f \circ q. \tag{3.3}$$
4. Para cada $D \in \mathfrak{D}$ definimos $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D) : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow$ **Set** de la siguiente manera:
   En objetos: Para cada $C \in \mathfrak{C}$ se tiene $Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D) \in$ **Set**.
   En morfismos: Para cada morfismo $f^{op} : C_1 \longrightarrow C_2$ en $\mathfrak{C}$ se tiene que morfismo
   $$\begin{array}{ccc} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D) & \xrightarrow{Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)} & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D) \\ q & \longmapsto & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(q) := q \circ \mathcal{F}f \end{array}$$
   está en **Set**. Vamos a enumerar la última igualdad.
   $$Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(q) := q \circ \mathcal{F}f. \tag{3.4}$$

Lema 3.1. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores.*

Si $\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es transformación natural entonces para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$, $D \in \mathfrak{D}$ se tiene que

$$\eta_{(C,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\zeta_{(-,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son transformaciones naturales, donde $\eta_{(C,\widetilde{D})} = \tau_{(C,\widetilde{D})}$ y $\zeta_{(\widetilde{C},D)} = \tau_{(\widetilde{C},D)}$, para cada $\widetilde{C} \in \mathfrak{C}^{op}$, $\widetilde{D} \in \mathfrak{D}$.

Demostración: Dado que $\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ es transformación natural se cumple que para cada $(C, D) \in \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene el morfismo $\tau_{(C,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D)$ en **Set** y para cada morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(C_1, D_1) \arrow[d, "(f^{op},g)"] & q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_1) \arrow[r, "\tau_{(C_1,D_1)}"] \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op},\mathcal{G}g)"] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_1) \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op},g)"] \\
(C_2, D_2) & Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D_2) \arrow[r, "\tau_{(C_2,D_2)}"'] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D_2)
\end{tikzcd}$$

es decir

$$\tau_{(C_2,D_2)} \circ Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g) = Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g) \circ \tau_{(C_1,D_1)}$$

luego para cada $q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_1)$ se tiene

$$(\tau_{(C_2,D_2)} \circ Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}g))(q) = (Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, g) \circ \tau_{(C_1,D_1)})(q)$$

se sigue por 2.1 y 2.2 que

$$\tau_{(C_2,D_2)}(\mathcal{G}g \circ q \circ f) = g \circ \tau_{(C_1,D_1)}(q) \circ \mathcal{F}f \tag{3.5}$$

Afirmación 1. $\eta_{(C,-)}$ es transformación natural para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}$. En efecto, dado $C \in \mathfrak{C}^{op}$. Consideremos el morfismo $g : D_1 \longrightarrow D_2$ en $\mathfrak{D}$ y vemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d, "g"] & q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_1) \arrow[r, "\eta_{(C,D_1)}"] \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{C}}(C,\mathcal{G}g)"'] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D_1) \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C,g)"] \\
D_2 & Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_2) \arrow[r, "\eta_{(C,D_2)}"'] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, D_1)
\end{tikzcd}$$

pues para cada $q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}D_1)$

$$\begin{aligned}
(\eta_{(C,D_2)} \circ Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}g))(q) &= \eta_{(C,D_2)}(Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}g)(q)) \\
&\overset{3,2}{=} \tau_{(C,D_2)}(\mathcal{G}g \circ q) \overset{haciendo\ f=1_C\ en\ 3,5}{=} g \circ \tau_{(C,D_1)}(q) \\
&\overset{3,3}{=} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, g)(\tau_{(C,D_1)}(q)) \\
&= (Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, g) \circ \eta_{(C,D_1)})(q).
\end{aligned}$$

Afirmación 2. $\zeta_{(-,D)}$ es transformación natural para cada $D \in \mathfrak{D}$. En efecto, dado $D \in \mathfrak{D}$. Consideremos el morfismo $f^{op} : C_1 \longrightarrow C_2$ en $\mathfrak{C}^{op}$ y vemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, "f^{op}"] \\ C_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D) \arrow[r, "\zeta_{(C_1,D)}"] \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op},\mathcal{G}D)"'] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D) \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op},D)"] \\ Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D) \arrow[r, "\zeta_{(C_2,D)}"'] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D) \end{tikzcd}$$

pues para cada $q \in Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D)$

$$\begin{aligned} (\zeta_{(C_2,D)} \circ Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D))(q) &= \zeta_{(C_2,D)}(Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op}, \mathcal{G}D)(q)) \\ &\overset{3,1}{=} \tau_{(C_2,D)}(q \circ f) \overset{haciendo\ g=1_D\ en\ 3,5}{=} \tau_{(C_1,D)}(q) \circ \mathcal{F}f \\ &\overset{3,4}{=} Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D)(\tau_{(C_1,D)}(q)) \\ &= (Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op}, D) \circ \zeta_{(C_1,D)})(q). \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores.*
Si para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}, D \in \mathfrak{D}$

$$\eta_{(C,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\zeta_{(-,D)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son transformaciones naturales, entonces

$$\tau_{(-,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$$

es transformación natural, donde $\eta_{(C,\widetilde{D})} = \tau_{(C,\widetilde{D})}$ y $\zeta_{(\widetilde{C},D)} = \tau_{(\widetilde{C},D)}$, para cada $\widetilde{C} \in \mathfrak{C}^{op}$, $\widetilde{D} \in \mathfrak{D}$.

Demostración: Veamos que para cada morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ el diagrama I conmuta

$$\begin{tikzcd} (C_1, D_1) \arrow[d, "(f^{op},g)"] \\ (C_2, D_2) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_1) \arrow[r, "\tau_{(C_1,D_1)}"] \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op},\mathcal{G}g)"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_1) \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op},g)"] \\ Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D_2) \arrow[r, "\tau_{(C_2,D_2)}"] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D_2) \end{tikzcd}$$

En efecto, Sea el morfismo $(f^{op}, g) : (C_1, D_1) \longrightarrow (C_2, D_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$.Vemos que los diagramas II y III son conmutativos

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[d, "g"] \\ D_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_1) \arrow[r, "\eta_{(C_1,D_1)}"] \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{C}}(C_1,\mathcal{G}g)"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_1) \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1,g)"] \\ Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}D_2) \arrow[r, "\eta_{(C_1,D_2)}=\zeta_{(C_1,D_2)}"] \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{C}}(f^{op},\mathcal{G}D_2)"'] \arrow[dr, phantom, "III"] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, D_2) \arrow[d, "Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}f^{op},D_2)"] \\ Mor_{\mathfrak{C}}(C_2, \mathcal{G}D_2) \arrow[r, "\zeta_{(C_2,D_2)}"] & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_2, D_2) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, "f^{op}"] \\ C_2 \end{tikzcd}$$

Pues

$$\eta_{(C_1,-)} : Mor_{\mathfrak{C}}(C_1, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C_1, -)$$

$$\zeta_{(-,D_2)} : Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D_2) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D_2)$$

son transformaciones naturales, luego concluimos que el diagrama I es conmutativo.

$\square$

Ahora veremos el resultado central.

Teorema 3.1. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathcal{G}: \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos funtores.* $\tau_{(-,-)}: Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -)$ *es isomorfismo natural si y solo si para cada* $C \in \mathfrak{C}^{op}, D \in \mathfrak{D}$ *se tiene que*

$$\eta_{(C,-)}: Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\zeta_{(-,D)}: Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son isomorfismos naturales.

Demostración:

$[\Longrightarrow]$ Por Lema 3.1 tenemos que para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}, D \in \mathfrak{D}$

$$\eta_{(C,-)}: Mor_{\mathfrak{C}}(C, \mathcal{G}-) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, -)$$

$$\zeta_{(-,D)}: Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}D) \longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, D)$$

son transformaciones naturales pues $\tau_{(-,-)}$ es transformación natural, además $\eta_{(C,-)}$ es isomorfismo natural pues para cada $\widetilde{D} \in \mathfrak{D}$, $\eta_{(C,\widetilde{D})} = \tau_{(C,\widetilde{D})}$ donde $\tau_{(-,-)}$ es isomorfismo natural. De forma similar se obtiene que $\zeta_{(-,D)}$ es isomorfismo natural.

$[\Longleftarrow]$ Por Lema 3.2, $\tau_{(-,-)}$ es transformación natural pues para cada $C \in \mathfrak{C}^{op}, D \in \mathfrak{D}$ $\eta_{(C,-)}$ y $\zeta_{(-,D)}$ son transformaciones naturales. Además $\tau_{(-,-)}$ es isomorfismo natural pues para cada $(C, D) \in \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$, $\tau_{(C,D)}$ es isomorfismo pues basta que $\eta_{(C,-)}$ ó $\zeta_{(-,D)}$ sean isomorfismos naturales.

$\square$

4. Conclusiones. El resultado central se puede generalizar para bifuntores cualesquiera $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow$ **Set** pero se ha preferido trabajar con los bifuntores $Mor_{\mathfrak{C}}(-, \mathcal{G}-), Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}-, -) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \longrightarrow$ **Set** ya que es más útil al momento de demostrar una caracterización de funtores adjuntos.

Por último, este trabajo está bien detallado para que lo pueda entender público que no sea del área y se ha tratado de mejorar las notaciones que a veces son demasiadas sobrecargadas y confusas.

Contribución de los Autores. El coautor Emerson se encargo del resumen, la introducción y los preliminares; el coautor Milton se encargó del resultado central que abarca los lemas y el autor Carlos se encargo de digitar, revisar y terminar el teorema central.

Conflicto de interés. Los autores declaran no tener conflicto de interes.

ORCID and License

Carlos Mejía Alemán https://orcid.org/0000-0002-5081-9175
Milton Milciades Cortez Gutiérrez https://orcid.org/0000-0003-4939-7734
Emerson Lech Taipe Huamaní https://orcid.org/0000-0003-1932-7284

Referencias

[1] Riehl E. Category Theory in Context.Department of Mathematics, Johns Hopkins University, 2016. Recuperado de http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf

[2] MacLane S. Categories for the working mathematician. Second Ed, Departament of Mathematics, University of Chicago. Springer - Verlag, 1998. Recuperado de http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/2016-2/maclanecat.pdf

[3] Adámek J, Herrlich H, Strecker GE. Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats. KatMAT Seminar, University of Bremen, 2004. Recuperado de http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf