Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2023; Vol. 10(2): 404-435.

REVIEW

The integral, a vision of its evolution through time III

La integral, una visión de su evolución a través del tiempo III

Alejandro Ortiz Fernández

Mi agradecimiento póstumo al Profesor José Tola Pasquel por su generosidad en orientarme y ayudarme cuando yo fui estudiante, gesto que aún recibí cuando fui profesor de la PUCP.

Received, Oct. 22, 2023; *Accepted, Set. 20, 2023;* *Published, Dec. 27, 2023*

How to cite this article:
Ortíz F. *La integral, una visión de su evolución a través del tiempo III*. Selecciones Matemáticas. 2023;10(2):404–435.
http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.14

Abstract

In this opportunity we present some areas of the evolution of the integral, which complement what was deal with in parts I and II. Thus we give a conceptual overview of the McShane integral, of the C-integral, of the Bochner integral, of the L^m HK integral , of the integral on manifolds and on a modern point of view of the Riemann integral .

Keywords . Riemann, Lebesgue, McShane, C-integral, Bochner, HK-integral, manifolds, abstract integration, Banach spaces.

Resumen

En esta oportunidad presentamos algunas áreas de la evolución de la integral, las cuales complementan a lo tratado en las partes I y II. Así damos un panorama conceptual de la integral de McShane, la C-integral, la integral de Bochner, la integral L^m de HK,la integral sobre variedades diferenciales y sobre un punto de vista moderno de la integral de Riemann .

Palabras clave. Riemann, Lebesgue, McShane, C-integral, Bochner, HK-integral ,variedades, integración abstracta, espacios de Banach.

1. Una visión de lo expuesto en I y II. Proyecciones.. En la parte I, [22], vimos como la idea de integral ya existía en la lejana Grecia, sobre todo en los trabajos de Arquímedes, así como un breve panorama de los precursores del cálculo infinitesimal hasta Newton y Leibniz. A inicios del siglo XIX el aporte de Fourier sería fundamental en la evolución de la integral pues en su trabajo sobre la teoría del calor sus series usaban la integral como herramienta fundamental, pero sus ideas tenían defectos de rigor matemático. Desde la época de Leibniz y Newton el teorema fundamental del cálculo fue vital pues era el nexo entre la diferenciación y la integración. De aquel entonces, en el siglo XIX los analistas buscaron como construir una integral que vaya superando los defectos existentes. Así surgió la integral de Cauchy y luego la de Riemann que por mucho tiempo, hasta ahora, se la enseña; pero, como se sabe, ella aún tiene algunas limitaciones sobre todo en el teorema fundamental del cálculo. La teoría de conjuntos de Cantor contribuyó la génesis de una teoría conjuntista de la integral; luego de algunos precursores, a inicios del siglo XX H.Lebesgue introduce la teoría de la medida y de su integral basada en esa teoría. Ella mejora en algunos aspectos a la integral de Riemann pero tiene ciertos defectos, aún en el teorema fundamental de cálculo. En I el lector puede ver una presentación detallada de la teoría de Lebesgue.

*Profesor Emérito Vitalicio de la Universidad Nacional de Trujillo. **Autor para correspondencia:** (jortiz@pucp.edu.pe).

En la parte II [22] se ofrece una visión de las contribuciones de distintos matemáticos que buscaron introducir una nueva integral que superen las dificultades de las integrales de Riemann, de Riemann-Stieltjes y de Lebesgue. Así vimos los aportes de Darboux, de Young, a la integral de Lebesgue-Stieltjes, la integral de Radon, la integral de Denjoy, la integral de Khinchin; a las integrales de Perron y de Daniell, de Perron-Stieltjes. Posteriormente entramos a los dominios más abstractos al considerar a la integral de Haar relacionado con los espacios localmente compactos y así se comienza a estudiar a la integral sobre espacios abstractos, tema de investigación en el siglo XX. Finalmente dimos un buen espacio a la integral de Henstock-Kurzweil por todas las bondades que tiene tal integral y que expusimos en esa oportunidad. Todos esos aportes contribuyeron con nuevas ideas, métodos, todo lo cual constituyó una época (siglo XX) de mucha actividad en esa dirección. Algunas de las integrales introducidas eran equivalentes entre si, unas contenían a otras y se estableció un cuadro de relaciones entre ellas. Lo resaltante de este escenario es que la integral de Riemann fue el tipo de integral que con pequeñas modificaciones surgieron integrales mas generales y que incluían a las clásicas conocidas. Tal fue el caso de la integral de Henstock-Kurzweil la cual es una generalización de la integral de Riemann ("integral de Riemann generalizada"), la cual fue introducida en los años 1950's por J.Kurzweil y R.Henstock en forma independiente pero cuyos resultados fueron equivalentes. Henstock probó que toda función L-integrable es también HK-integrable, y Kurzweil demostró que la HK-integral es equivalente a la integral de Perron y a la de Denjoy. De esta manera la HK-integral resultó una solución de la dificultad que se tenía con las primitivas (teorema fundamental del cálculo); también se resolvió los problemas de convergencia. Ver II [22] para algunos detalles de la HK-integral. Se recalca que la HK-integral se obtuvo haciendo ligeras modificaciones en las sumas de Riemann. En esta dirección está la integral de McShane que veremos después, cuyas funciones toman valores en toda la recta. Esto sugirió considerar funciones definidas en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y que toman valores en un espacio de Banach, integrales que también veremos.

Figura 1.1: Relación entre estas integrales.

La introducción de la integral en diferentes contextos durante el siglo XX, y aún en éste, despertó una gran actividad de investigación en diferentes direcciones con aportes útiles tanto en el campo de la matemática pura como en las aplicaciones. Así, en este artículo expondremos las ideas generales en algunas de tales direcciones como son la contribución de E.J. McShane y su integral, la C-integral, la integral de Bochner la que es definida en el contexto de los espacios de Banach, la integral en espacios abstractos, la integral sobre variedades, una nueva visión de la integral de Riemann, ..., de todas esas rutas la idea es abrir una motivación al lector interesado en caminar por alguno de esos caminos y así contribuir con aportes a la actividad matemática en nuestro país, y otros.

2. La Integral de McShane. En [26] se hace un comentario del libro de E.J.McShane, "Unified Integration", (1983), en donde el autor expone algunas de sus ideas con respecto a la enseñanza de la integral; afirma que los estudiantes (de ciencias) aprenden primero la integral de Riemann y luego la integral de Lebesgue, con toda su maquinaria que ella requiere, y se olvidan las ideas que contiene la integral de Riemann. En su obra McShane presenta una teoría unificada de la integral, teoría que incluye como caso particular a la integral de Riemann,y así rescata las ideas de esta integral. En una parte de su libro, proclama [26]:

"El desarrollo de la teoría de integración en los capítulos precedentes es solamente un camino de los otros existentes para aproximar al tema. Ella fue establecida en la creencia que es especialmente fácil para un iniciado comprenderlo, y es bien adecuado para enseñar a un estudiante de física, química o de ingeniería suficiente integración, para tener un claro beneficio".

El comentarista, E.Saab, opina que "la integral de McShane puede ser entendida por alguien con pocos recursos matemáticos, lo único que necesita conocer es la noción de entorno de un punto, cerradura de un conjunto, etc, ... Es decir, se necesita solamente conocer un poco de topología general". Si bien es cierto que entender la integral de McShane es relativamente fácil, ¿ ello permite al estudiante entender toda la maquinaria analítica que el posterior desarrollo de la teoría de la integral exige?, esto fue otra de las cuestiones pedagógicas que surgieron en el debate. Creemos que esto depende del tipo de estudiantes que tengamos al frente.

Bien, remarcamos que la integral de Henstock-Kurzweil fue construida modificando levemente las sumas de Riemann y se obtuvo una integral mas general, inclusive que la de Lebesgue, que necesita además de toda una teoría de la medida. E.J.McShane hizo otra forma de modificar las sumas de Riemann y obtuvo la llamada "integral de McShane"que se probó ser equivalente a la integral de Lebesgue (años 1960's). Veamos la idea de McShane: " Sea el intervalo $I = [a, b]$ y $P = \{(t_1, [x_0, x_1]), ..., (t_n, [x_{n-1}, x_n])\}$ una etiqueta de I, la que es subordinada a un calibrador δ sobre I. McShane retira la condición de que cada etiqueta $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo i, y se permite que t_i esté en otro intervalo diferente de $[x_{i-1}, x_i]$. Como ella es equivalente a la integral de Lebesgue, ésta podría ser pensada como sumas de tipo Riemann. Veamos mas detalladamente estas ideas. (Ver [6]).

" Sea el intervalo $I = [a, b]$ y δ un calibrador sobre I. Se llama un intervalo libremente etiquetado a un intervalo $(t, [c, d])$ si $[c, d] \subsetneqq [a, b]$ y $t \in [a, b]$. Este intervalo es subordinada a δ si $[c, d] \subsetneqq (t - \delta(t), t + \delta(t))$". Por otra parte se tiene la noción de una partición libremente etiquetada P de $[a, b]$,subordinada a δ, es una familia finita de intervalos libremente etiquetados subordinados a δ, es decir $P = \{(t_1, [x_o, x_1]), ..., (t_n, [x_{n-1}, x_n])\}$, tal que $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$". Este tipo de partición se llama "partición de McShane"(p-Mc). Se tiene que cada partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ es una partición libremente etiquetada a δ; el recíproco no es cierto en general.

Ahora, las sumas para definir a la nueva integral es similar a la de Riemann, veamos: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $P = \{(t_1, [x_o, x_1]), ..., (t_n, [x_{n-1}, x_n])\}$ es una p-Mc, entonces la suma de Riemann relacionada a P se define vía :

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Observemos que se está considerando rectángulos cuyas áreas se determinan multiplicando $x_i - x_{i-1}$ y la longitud de la imagen $f(t_i)$, segmento que está afuera del rectángulo . Esto a diferencia de las sumas de la integral de Riemann.

Definición 2.1 (La Integral de McShane). *La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es McShane integrable (Mc-integrable) sobre $[a.b]$ si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre $[a, b]$ y se tiene $|S(f, P) - M| < \epsilon$, para toda p- Mc de $[a, b]$ subordinada a δ. Si existe tal número M, él es llamado la integral de McShane de f y se denota (MC)$\int_a^b f(x)dx$.*

Se observa que esta integral es una modificación de la integral de Henstock-Kurzweil y se recalca que es equivalente a la integral de Lebesgue. Además se verifica que toda función Mc-integrable es (HK)-integrable y sus integrales coinciden. También, si f es R-integrable entonces es Mc-integrable y sus integrales son iguales. El siguiente resultado garantiza la existencia de particiones (p-Mc):

Lema 2.1. *(Lema de Cousin) " Si $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ es un calibre o calibrador, entonces existe una (p-Mc) de $[a, b]$ subordinada a δ".*

La función de Dirichlet, definida en $[0, 1]$, $f(x) = 1$ si x es racional; $f(x) = 0$ si x es irracional, es Mc-integrable y se tiene $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Algunas propiedades básicas de la Mc-integrales son:

(1) Si f y g son Mc - integrables sobre $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f + \beta g$ es Mc-integrable y se tiene

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

es decir el espacio Mc$[a, b]$ de todas las funciones Mc-integrables sobre $[a, b]$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y la integral puede ser interpretada como una forma lineal sobre este espacio.

(2) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Mc-integrable sobre $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(3) Si f y $g \in Mc[a, b]$ y$f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, entonces

$$(Mc) \int_a^b f(x)dx \leq (Mc) \int_a^b g(x)dx.$$

(4) Si $f \in [a,b]$ entonces $|f| \in Mc[a,b]$. (Esta propiedad no se cumple con la HK-integral); y se tiene

$$(Mc)\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le (Mc)\int_a^b |f(x)|dx.$$

(5) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua sobre $[a,b]$, entonces f es Mc-integrable sobre $[a,b]$.

Veamos ahora la integral de McShane como una función conjunto (ver [17], pag.240) y su relación con la teoría de Lebesgue. Sean $I=[a,b]$, $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función Mc-integrable y $Mc(I)$ el conjunto de todos los subconjuntos medibles de I. Decimos que "f es McShane integrable sobre el conjunto $E\subset I$ si $\mathcal{X}_E f$ es una función McShane integrable sobre I". Se define $\int_E f dx = \int_I \mathcal{X}_E f dx$. Se prueba el siguiente resultado: "si f es McShane integrable sobre I, entonces f es McShane integrable sobre todo conjunto medible que está en Mc(I) y además se tiene que f es enumerablemente aditiva.

Aún más: "Si $f:I\to\mathbb{R}$ es McShane integrable, entonces la función conjunto $\int f dx : Mc(I)\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua y enumerablemente aditiva con respecto a la medida de Lebesgue".

Como consecuencia de este resultado se tiene: "si $f:I\to\mathbb{R}$ es no negativa y McShane integrable entonces la función $\int f dx : Mc(I)\to\mathbb{R}$ es una medida sobre Mc(I)". En esta dirección se tiene: "la función $f:I\to\mathbb{R}$ es Mc-integrable sobre I si y solo si $f\in L(I)$; además se tiene (Mc)$\int f dx =$ (L) $\int f(x)d\mu$. (ver [6] para los detalles).

Con respecto a los teoremas de convergencia , en la teoría de McShane se tiene:

Teorema 2.1. *(teorema de la convergencia monótona) "Si (f_n), $n=1,2,...$, es una sucesión monótona de funciones $f_n : I\to\mathbb{R}$, que son Mc-integrables, que converge puntualmente a $f:I\to\mathbb{R}$ y, además la sucesión numérica $\left(\int_a^b f_n\right)$,*

$n=1,2,...$, es acotada, entonces la función f es Mc-integrable y se tiene
(Mc)$\int_a^b f(x)dx = (L)\int_I$

Este resultado es usado para probar la equivalencia que la integrales de Lebesgue y de McShane son equivalentes. Por otro lado, se verifica que "toda función $f:I\to\mathbb{R}$ medible, es McShane integrable y se tiene $(Mc)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_I f(x)d\mu$".

Así mismo se tiene el vital resultado derivada-integral:

Teorema 2.2. *"si f es Mc-integrable y $F(x)=\int_a^x f_n(y)dy$ para cada $x\in[a,b]$, entonces se tiene:*
(i) $F(x)$ es una función continua sobre $[a,b]$;
(ii) $F(x)$ es derivable en casi todo punto de $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$".

Nota 2.1. *La integral de McShane fue generalizada en [13](1995) por D.H. Fremlin en contextos más abstractos y en el lenguaje de los espacios de Banach.*

3. La C-integral. Uno de los problemas centrales del cálculo infinitesimal, desde la época de Newton, fue el problema de la primitiva (teorema fundamental del cálculo), es decir, que la derivada de una función sea integrable. Resolver este problema estimuló diversas investigaciones, sobre todo en el siglo XX, que condujeron a la introducción de diversas versiones de la integral, como las de Denjoy (1912) y Perron (1923), entre otros, en donde se probó que toda derivada es integrable; además, tales integrales son equivalentes. Ver [22] para otros detalles en donde también expusimos sobre la integral de Henstock - Kurzweil en donde también se tiene que toda derivada es integrable; vimos que esta integral se define haciendo pocas modificaciones en las sumas de Riemann, y que ella generaliza a las integrales de Riemann y de Lebesgue y que coincide con la integral de Denjoy, en donde se tiene resuelto el problema de la primitiva.

Tal problema fue también resuelto con la llamada C-integral construida por B.Bongiorno en 1996 ,ver [3] para algunos detalles. Así se expone que en 1986, ver [38], Bruckner-Fieissner-Foran (BFF) observan que la solución dada por Denjoy, Perron y Henstock-Kurzweil poseen una generalidad que no se necesita para tal propósito, problema de la primitiva; para ello muestran un ejemplo ([3]). BFF se preguntan si existe una integral mas débil que resuelva tal problema. Ellos responden afirmativamente y desarrollan su idea. En [3] se expone el reto de construir una integral que resuelva el problema; es decir, se trata de construir una extensión minimal de la integral de Lebesgue y que resuelva el problema de la primitiva. En [5], 2014, se da respuesta al problema de construir una integral minimal la cual incluye a la integral de Lebesgue y también integra las derivadas de funciones diferenciables. En este trabajo se probó que la integral de Bongiorno, esto es, la C-integral, es la más pequeña que resuelve el problema de la primitiva y que contiene a la integral de Lebesgue. Por otro lado, ya hemos mencionado que el espacio $L([a,b])$ está contenido propiamente en el espacio $HK([a,b])$ y lo que BFF contribuyeron en su trabajo de 1986 fue construir una integral minimal entre los espacios $L([a,b])$ y $HK([a,b])$. Ellos probaron el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *"Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es C-integrable sobre $[a,b]$* **si y solo si** *existe una función derivada g sobre $[a,b]$ tal que $f-g$ es L-integrable sobre $[a,b]$".*

Posteriormente (2000) en [5] se demostró que tal integral minimal se puede tener usando la integral de McShane en donde se impone alguna condición de regularidad en la partición de McShane, de la siguiente manera:

Definición 3.1. *(C-integral) "Dada la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ decimos que f es C-integrable si existe un número real A tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador fino δ sobre $[a,b]$ tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)|I_i| - A \right| < \epsilon$$

para cada partición $P = \{(x_i, I_i)\}$, $i = 1, 2, ..., n$ subordinada a δ y a $\frac{1}{\epsilon}$, esto es, se cumple $\sum_{i=1}^{n} dist(x_i, I_i) < \frac{1}{\epsilon}$". Se remarca que $I_i \subset [a,b]$, $x_i \in [a,b]$ tal que $I_i \subset (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$ y $\sum_{i=1}^{n} I_i = b - a$.

Definición 3.2. *El número A es llamado la C-integral de f sobre $[a,b]$ y escribiremos*

$$A = (C) \int_a^b f(x)dx.$$

Ahora comprendemos mejor el resultado 3.1 de arriba. Además esta integral tiene relaciones con la integral de Lebesgue, con la HK-integral y con la integral impropia de Riemann, ver [3].

Veamos; sea $C_i[a,b]$ el conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son C-integrables sobre $[a,b]$. Se tienen las propiedades, [3], [6]:

(1) $C_i[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
(2) Si $f \in L[a,b]$, entonces $f \in C_i[a,b]$ y las integrales coinciden. Hay funciones C-integrables que no son L-integrables.
(3) Si $f \in C[a,b]$, entonces $f \in HK[a,b]$ y las integrales coinciden. La inclusión es propia.
(4) Toda derivada es C-integrable.
(5) Si f es C-integrable sobre $[a,b]$, entonces f es C-integrable sobre $[a,x]$ para todo $x \in (a,b)$. Además, la función $F(x) = (C) \int_a^x f(y)dy$ es continua sobre $[a,b]$.
(6) Si f es Mc-integrable, entonces f es C-integrable. La inclusión es propia.
(7) La C-integral **no contiene** a la integral impropia de Riemann.

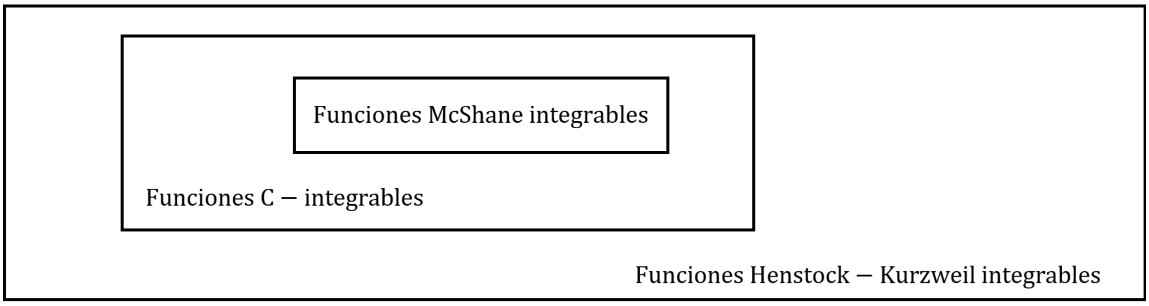

Figura 3.1: Relación entre las McShane, C-integrales y la HK integrables.

Para la C-integral se cumplen los teoremas de la convergencia monótona y la dominada. Veamos.

Teorema 3.2. *(Teorema de la convergencia Monótona)*

Sea $f_1 < f_2 < ... < f_n < ...$ una sucesión de funciones C-integrables sobre $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}(C) \int_a^b f_n(x)dx < +\infty$. Entonces la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es

C -integrable sobre $[a,b]$ y se tiene

$$(C) \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (C) \int_a^b f_n(x)dx".$$

Teorema 3.3 (Teorema de la convergencia Dominanda). *"Sea (f_n), $n = 1, 2, ...$ una sucesión de funciones medibles sobre $[a,b]$ tal que*

(1) $f_n(x) \to f(x)$ ctp. en $[a,b]$;
(2) $g(x) \le f_n(x) \le h(x)$ ctp. en $[a,b]$, donde g y h son funciones C-integrables sobre $[a,b]$, entonces f es C-integrable sobre $[a,b]$ y se tiene

$$(C) \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (C) \int_a^b f_n(x)dx.$$

En [4], (2000), B.Bongiorno remarca la definición de la C-integral, define la medida variacional y en base a esta medida caracteriza cuando F es una C-integral indefinida.

Nota 3.1. *La introducción de la C-integral por B. Bongiorno (1996) fue estudiada e investigada para producir otros resultados en relación con el teorema fundamental del cálculo.*

4. La integral de Bochner. A esta altura, por los distintos caminos recorridos hacia las distintas formas de entender a la integral, en diferentes contextos, ya tenemos un panorama de dicha evolución. Pero, ..., aún hay varios otros caminos por recorrer y lo haremos con las motivaciones necesarias. En efecto, hemos visto en general que las funciones toman valores en $\mathbb{R}$, o más generalmente en $\mathbb{R}^n$, espacios que son vectoriales, o normados o mejor, son espacios de Banach. Así, en 1933, Salomón Bochner investiga la idea de integral para funciones definidas en un espacio medida y con valores en un espacio de Banach .Así surgió la integral llamada "integral de Bochner", la cual es una generalización de la integral de Lebesgue. También surgieron investigaciones de llevar la idea de integral a contextos abstractos. Ver, por ejemplo, [32], [37], [33], [9], [24], [10], [15], [25], [16], [23].

Salomón Bochner (1899-1982) fue un matemático austro-húngaro que con motivo de la persecución nazi emigró a los EEUU en 1933 donde fue profesor en las universidades de Princeton y en la de Rice. Trabajó en análisis complejo, funciones armónicas, teoría de la probabilidad, en la historia y filosofía de las matemáticas. Su integral es aplicada en áreas como el análisis funcional, las EDP's,en los semigrupos.

Veamos la integral de Bochner; previamente damos algunas definiciones básicas para su comprensión. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$). La aplicación $|| \; || : X \to \mathbb{R}$ es una norma si

(i) $||x|| \geq 0$, para todo $x \in X$; $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

$(X, || \; ||)$ ó X es llamado un espacio normado. $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado con la norma euclideana. En un espacio normado X se introduce la estructura de espacio métrico vía la distancia $d(x, y) = ||x - y||$, en donde se introduce la noción de sucesión de Cauchy. Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente. Un espacio normado X es llamado un "espacio de Banach"si X es completo con la métrica inducida por su norma. $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con la norma $||x|| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Veamos ahora algunos aspectos de la teoría de la medida. Sea X un conjunto no vacío. La familia de subconjuntos F de X es una σ-álgebra en X si:

(i) $\emptyset \in F$
(ii) Si $U \in F$, entonces $U_c \in F$, (U_c complemento de U)
(iii) Si $\{U_n\}$ es una sucesión en F, entonces $\bigcup_{n=1}^\infty U_n \in F$.

Entonces, por definición, (X, F) es llamado "espacio medible" y los elementos de F se llaman "conjuntos medibles". Sean (X, F) y (Y, G) dos espacios medibles. Entonces $f : X \to Y$ es una función medible si para todo $V \in G$ se tiene que $f^{-1}(V) \in F$. Por otro lado, si (X, F) es un espacio medible, se llama una "medida positiva" a la aplicación $\mu : F \to [0, \infty]$ que satisface:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.
(b) Si $\{U_n\}$ es una sucesión en F, de conjuntos mutuamente disjuntos, entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty U_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n)$.

Por otro lado, si $U \in F$, diremos que $\mu(U)$ es su medida. La terna (X, F, μ) se llama "espacio medida". Si $\mu : F \to (-\infty, +\infty]$ y satisface (a) y (b) entonces μ es llamado una "medida con signo" y (X, F, μ) se llama un "espacio medida con signo". Así mismo, μ se llama "medida σ-finita"si $\mu(X) < \infty$ y se llama "medida σ-finita"si $X = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ con $\mu(U_n) < \infty$.

Sea ahora (X, F, μ) un espacio medida positiva, σ-finito y sea B un espacio de Banach. Una función $f : X \to B$ es llamada "simple o finitamente valorada"si existe un conjunto $\{U_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$, mutuamente disjunto, con $U_i \in F$ tal que $\mu(U_i) < \infty$, $f(U_i) = \lambda_i$ constante $\neq 0$, y $f = 0$ sobre $(\bigcup_{i=1}^n U_i)_c$. En este caso decimos que $f : X \to B$ es medible si existe $\{f_n\}$ de funciones simples tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ctp. . Esto es, si tenemos $||f_n(x) - f(x)||_B \to 0$, ctp.

En esta situación se dice que f es "fuertemente F- medible". En este contexto se dice que "f es una función simple "si $\lambda_i \in B$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{X}_{U_i}(x)$, donde $\mathcal{X}_{U_i}$ es la función característica de $U_i \in F$.

Definición 4.1. *(Integral de Bochner de f simple) Si f es una función simple, la "integral de Bochner"de f respecto a μ es*

$$(B)\int_X f(x)d\mu \equiv (B)\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(U_i)$$

Se observa que si $j \neq i$ y $U_j \in F$, entonces $(B)\int_{U_i} f d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(U_i \cap U_j)$, y se tiene

$$\int_{U_j} f d\mu = \int_X f \mathcal{X}_{U_j} d\mu$$

Caso General. La función $f : X \to B$ es "integrable Bochner "si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ctp. y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X ||f_n(x) - f(x)||_B d\mu = 0$$

Notación : (B)$\int_X f(x)d\mu$. Por otra parte, se observa que el límite es independiente de la elección de la sucesión $\{f_n\}$.
Bochner, en 1933, prueba el siguiente resultado fundamental en la teoría de la integral en los espacios de Banach:

Teorema 4.1. *(T.B.)"La función medible $f : X \to B$ es B-integrable (integrable según Bochner) si y solo si la función escalar $||f(x)||$ es μ - integrable ".*

Se verifica que: "si f es B-integrable, entonces $||\int f d\mu|| \leq \int ||f||d\mu$". (Desigualdad de Minkowski).
También se tiene: "Sean B_1 y B_2 dos espacios de Banach y $T : B_1 \to B_2$ un operador lineal y acotado.

Si f es una función B-integrable, con valores en B_1, entonces Tof es B-integrable, con valores en B_2. Además se tiene $\int_{U_j} T(f(x))d\mu = T(\int_{U_j} f(x)d\mu)$, donde $U_j \in F$.

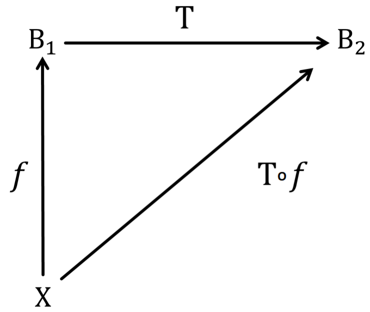

Figura 4.1: Tof es B-integrables.

Para la prueba de este resultado y otros aspectos ver el libro de Yosida [40]. Se tiene también el siguiente concepto: $f : X \to B$ es "debilmente F-medible" si para todo $g \in B^*$ (espacio dual de B), la función numérica (de x) $g(f(x)) \equiv < f(x), g >$ es F-medible.

Veamos unos breves aspectos de los espacios L^p en el contexto de los espacios de Banach. Si $0 < p < \infty$, por definición

$$L^p(X, B) = \{f : X \to B \text{ medible}/ \int_X ||f(X)||_B^P d\mu < \infty\}.$$

Si $1 \leq p < \infty$, se define $||f||_{L^p} = (\int_X ||f(x)||_B^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ es una norma y $(L^p(X, B), || \, ||_{L^p})$ es un espacio de Banach.

Si $p = \infty$, se define

$$L^\infty(X, B) = \{f : X \to B \text{ medible}/\exists C > 0 \text{ tal que } ||f(x)||_B \leq C, \text{ ctp.}\};$$

con la norma $||f||_{L^\infty} = \inf\{C/||f(x)||_B \leq C, \text{ ctp. } x\}$, $(L^\infty(X, B), || \, ||_{L^\infty})$ es un espacio de Banach. Se observa también que

$$L^\infty(X, B) = \{f : X \to B \text{ medible.}/\exists C \text{ tal que } \mu\{x \in X/||f(x)||_B > C\} = 0\}.$$

Nota 4.1. *Si B(espacio de Banach)$=$ R se sabe que si $1 < p \leq \infty$ entonces L^p es isomorfo e isométrico con su dual $(L^{p'})^*$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; (así, si $p' < \infty$, L^1 no es isomorfo con $(L^\infty)^*$ pero si lo es con un subespacio de $(L^\infty)^*$. En el caso general tal resultado de dualidad ya no es cierto; se asegura que $L^p(X, B^*) \subset [L^{p'}(X, B)]^*$.*

Apéndice. Prueba del teorema de Bochner (T.B.). Veamos que si
$f : X \to B$ es B-integrable, entonces la función escalar $||f(x)||$ es μ-integrable. En efecto, por hipótesis existe una sucesión de fum:iones simples $\{f_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ctp. y también $\lim_{n\to\infty} \int_X ||f_n(x) - f(x)||_B d\mu = 0$. Pero,
$||f(x)||_B \leq ||f_n(x)||_B + ||f(x) - f_n(x)||_B$; luego, $|||f(x)||_B - ||f_n(x)||_B| \leq ||f(x) - f_n(x)||_B$. Como la norma es una función continua y se tiene

$\int_X |||f(x)||_B - ||f_n(x)||_B|d\mu = 0$, concluimos la tesis, esto es, que $||f(x)||$ es μ-integrable.

Veamos ahora la condición suficiente, esto es, si la función escalar $||f(x)||$ es μ- integrable, entonces la función medible $f : X \to B$ es B-integrable.En efecto, por hipótesis existe una sucesión de funciones simples $\{f_n(x)\}$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ fuertemente, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)||_B = 0, \tag{4.1}$$

$\lim_{n\to\infty} ||f_n(x)||_B = ||f(x)||_B$ y $\lim_{n\to\infty} \int_X |||f(x)||_B - ||f_n(x)||_B| d\mu = 0$. Bien; ahora definamos a las funciones simples que se requiere:

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } ||f_n(x)|| \leq ||f(x)||(1+\frac{1}{n}) \\ 0 & \text{si } ||f_n(x)|| > ||f(x)||(1+\frac{1}{n}) \end{cases} \tag{4.2}$$

Por la primera parte de esta definición se tiene $||h_n(x)|| \leq ||f(x)||_B(1+\frac{1}{n})$ de donde $\lim_{n\to\infty} ||f(x) - h_n(x)||_B = 0$, ctp. [justifiquemos ctp.: por 4.1, $h_n(x) = O$ y $||f(x)||_B \leq \frac{||f_n(x)||_B}{1+\frac{1}{n}}$, luego se tiene
$\lim_{n\to\infty} ||f(x) - h_n(x)|| = \lim_{n\to\infty} ||f(x)||_B = ||f(x)||_B < \lim_{n\to\infty} \frac{||f_n(x)||_B}{1+\frac{1}{n}}$ =(hipótesis) $= ||f(x)||$, esto es $||f(x)||_B < ||f(x)||_B$, luego el conjunto de tales x's tiene medida nula; es decir se tiene $\lim_{n\to\infty} ||f(x) - h_n(x)||_B = 0$, ctp.]. Además, desde que $||f(x) - h_n(x)||_B \leq ||f(x)||_B + ||f(x)||_B(1+\frac{1}{n}) \leq 2||f(x)||_B(1+\frac{1}{n})$, por el lema de Lebesgue-Fatou se tiene
$\lim_{n\to\infty} \int_X ||f(x) - h_n(x)||d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} ||f(x) - h_n(x)||d\mu = 0$, luego f es B-integrable.

Nota 4.2. *μ es la medida de Lebesgue.*

De la teoría clásica, de funciones con valores en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, se pasó a estudiar funciones con valor-vectorial y así se obtuvo una teoría que generaliza al análisis real o complejo. La idea, como observamos por lo hecho antes, es considerar funciones definidas sobre espacios de medida abstractas y con valores en espacios de Banach; así se obtuvo la integral de Bochner la cual extiende a la de Lebesgue. Así llegamos a un universo donde se desarrolla una teoría de "integración abstracta", teoría que fue desarrollada mayormente en los años 1920's y 30's. En esta dirección debemos citar a las contribuciones de LM.Graves, quien en 1927 extendió a la integral de Riemann; de T.H.Hildebrandt, [16], en 1927; de S.Bochner en 1933, de G.Birkhoff en 1935-37. También se tienen otros aportes como los debidos a N.Dunford, 1935-38; I.Gelfand, 1936-38; BJ.Pettis, 1938, [24]; R.S.Phillips; ....

La topología jugó un papel importante en la evolución de la teoría de la integral, más concretamente los espacios vectoriales topológicos que ayudó al desarrollo de la medida abstracta; así se usaron las topologías débiles y las $*$-débiles y es en este escenario que los trabajos de Bochner ocupan un lugar importante en el desarrollo del análisis abstracto. Históricamente debemos citar al libro de Saks [27], 1933, donde encontramos muchas ideas y métodos fundamentales. Se debe remarcar que tal integral de Bochner preserva algunas propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue como el teorema de la convergencia dominada, el teorema de diferenciación de Lebesgue, ... Veamos algunas de tales propiedades

(i) Si f y g son B-integrales y α y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces
$(B)\int_X(\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha\int_X f d\mu + \beta\int_X g d\mu$. Esto es, la familia de todas las funciones Bochner -integrables, es un espacio vectorial.

(ii) **(Teorema de la Convergencia Dominada).** "Sea la sucesión de funciones B-integrables $\{f_n\}$, $f_n : X \to B$, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$ ctp. en B. Sea $g : X \to \mathbb{R}$ que es L-integrable tal que $||f_n||_B \leq |g|$ para todo n, entonces f es B-integrable y se tiene $\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu$.

(iii) "Si f y g son dos funciones B-integrables y
$(B)\int_X f(x)d\mu = (B)\int_X g(x)d\mu$ ctp., entonces $f(x) = g(x)$, ctp.".

En la teoría abstracta de la medida se tiene el siguiente resultado: "sea μ una medida σ- finita, no negativa, definida sobre una σ-álgebra F de X. Si F es integrable respecto a la medida μ y para cada $U \in F$ ponemos $\mathcal{V}(U) = \int_U f(x)d\mu$, entonces $\mathcal{V}$ es una medida consigno, σ-finita y continua con respecto a μ". El recíproco de este resultado es el conocido teorema de Radon - Nikodym: "Sean μ y v dos medidas σ- finitas definidas en la σ-álgebra F de un conjunto X, donde $\mu \geq 0$ y v es una medida con signo que es continua respecto a μ. Entonces existe una función medible f tal que $v(U) = \int_U f(x)d\mu$, para todo $U \in F$".

Nota 4.3. *Si μ y v son dos medidas con signo definidas sobre una misma σ- álgebra, se dice que v es continua respecto a μ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\mu(E)| < \delta$ entonces $|v(E)| < \epsilon$.*

Este teorema, importante por su mensaje, medida = integral. No es necesariamente cierto con la integral de Bochner. Sin embargo, esta integral es útil en el desarrollo de los espacios de Banach. Ver el excelente libro de Yosida [40].

5. Integración Abstracta. Ya en la Sección 4 hemos ingresado a ciertos aspectos abstractos en la teoría de la integral; ahora vamos a caminar un poco más por esta ruta. La integral de Bochner motivó investigaciones en espacios mas generales y abstractos. En los años 1930's los trabajos de G.Birkhoff [41], N.Dunford [42] y de BJ.Pettis [24] impulsaron investigaciones dentro de este contexto, trabajos que impulsaron posteriores investigaciones, posiblemente hasta nuestra época. Birkohoff, en su trabajo citado nos dice que tratará la integración de funciones con valores en un espacio de Banach, tema que ya fue estudiado por LM.Graves (1927) y S.Bochner (1933) pero que él enfocará independientemente naciendo una interpretación de Fréchet (1915) de la integral de Lebesgue. Graves, T.H.Hildebrandt (1927) y Bochner estudiaron la integral de Riemann, remarcamos, para funciones que toman valores en espacios vectoriales completos. Pues bien, Dunford estudia tal integral de manera similar a lo hecho por G.Cantor al estudiar los números reales, esto es, hace uso de la idea de convergencia de una sucesión de integrales. También propone la interal para funciones que tienen como dominio a un espacio métrico arbitrario y a un espacio de Banach como su rango, una idea interesante de estudiar o ver que avances ya se ha hecho sobre este tema.

Pettis, en el citado artículo, también dá algunos aportes en la direcdón de la teoría de integración abstracta. Él cita a los trabajos precursores de las analistas arriba mencionados, quienes generalizaron a la integral de Lebesgue para funciones cuyos valores están en un espacio de Banach. Él considera funciones $f(x)$ definidas en un espacio abstracto X con valores en un espacio de Banach en el contexto de la terna (X, F, μ) y compara las funciones medibles bajo las topologías fuerte y débil de B. Luego define la B integral y prueba la aditividad completa y continuidad absoluta de la integral. Por otro lado el espacio de Lebesgue $L^1(\mu)$ vectoriales útil para definir a la integral de Dunford; así con la seminorma usual $|| \; ||_1$, ella es completa en el espacio $L^1(\mu, X)$ de todas las funciones B-integrables definidas en X, y así $L^1(\mu, X)$ es un espacio de Banach (clases de equivalencia).

Definición 5.1 (La Integral de Dunford). *"La función $f : F \to B$ es Dunford integrable (D-integrable) si $b^* o f \in L^1(\mu)$ para todo $b^* \in B^*$".*

Pettis introdujo las llamadas integrales débiles, esto es, integrales de funciones de valor vectorial con respecto a medidas escalares. Veamos la así llamada

Definición 5.2 (La Integral de Pettis). *Sea el espacio medida (X, F, μ), μ es una medida enumerable - aditiva sobre la σ-álgebra, espacio en donde se considera las funciones $f(x)$ con valores en el espacio de Banach B.La función $f(x)$ es llamada débil - medible si para cualquier función $G \in B^*$,la función escalar $G[f(x)]$ es una función medible.*

Es decir, la función f es débilmente medible si para cada $G \in B^*$ la función real $G[f(x)] : X \to \mathbb{R}$ es Lebesgue - medible en X. Una función $f : X \to B$ es fuertemente medible si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)||_B = 0$, ctp. $x \in X$.

"Toda función fuertemente medible es débilmente medible".

Nota 5.1. *En particular $X = [a, b]$.*

La función $f(x)$ es **Pettis integrable** sobre un subconjunto medible M en F, si para cualquier $G \in B^*$, la función $G[f(x)]$ es integrable sobre M y si existe un elemento $f(M) \in B$ tal que $G[f(M)] = \int_M G[f(x)]d\mu$.

Definición 5.3. *$F(M) = (P) \int_M f(x)d\mu$ es llamada* **la integral de Pettis**.

Corolario 5.1. *Toda función B-integrable es P-integrable, y las integrales coinciden si B es de dimensión finita; no cuando es de dimensión infinita. También se verifica que existe una función P-integrable que no es B- integrable.*

El espacio de las funciones P-integrables es un espacio vectorial.

Se tiene la siguiente relación entre las integrales de Bochner, MacShane y la de Pettis.

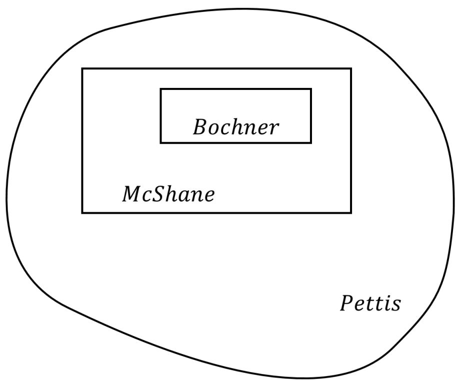

Figura 5.1: Relación entre estas integrales.

Respecto a la teoría abstracta de la integral sugerimos ver el artículo de T.H. Hildebrandt, [16], en donde en 17 secciones da un panorama de la teoría en los años 1930 - 40's. Por ser de interés pasamos a dar los nombres de tales secciones:

1. Postulados de la integral de Lebesgue;

2. La integral general de Fréchet.

Luego pasa a estudiar integrales en espacios vectoriales normados.

3. La integral de Riemann;
4. La integral de Bochner;
5. La (primera) integral de Dunford;
6. Otros enfoques de la integral de Bochner;
7. La integral de Birkhoff;
8. Integrales bilineales;
9. La integral de Price;
10. La integral de Gelfand- Pettis;
11. Generalizaciones de Phillips - Rickart.

Luego Hildebrandt pasa a mostrarnos :Generalización de la integral de Lebesgue basado en el orden.

12. La integral de Daniell;
13. Mesurabilidad de funciones y conjuntos en la integral de Daniell,
14. Extensiones de la integral de Daniell;
15. Casos especiales;
16. Teoría de Carathéodory de integrales sobre espacios sin puntos;
17. Un enfoque adicional a las integraies abstractas.

El artículo de Hildebrandt tiene una amplia bibliografía, 65 referencias; todas ellas entre los años 30's y 40's. Un estudio minucioso de este artículo daría al lector un analítico panorama de la evolución de la integral en tales décadas; requiere cierta madurez matemática por parte del lector. ¿Qué se hizo a partir de los años 1950's sobre la teoría abstracta de la integral?....

Veamos sucintamente algunas contribuciones hechas después de esas décadas (no cronológicamente).

(i) L Gordon, [14], en 1967 desarrolla la r-integral de Perron en donde usa la llamada L^r-derivada introducida en un trabajo de Calderón-Zygmund, [7], (1961); con esta integral estudia a la integral de Henstock-Kurzweil. Este nuevo modelo de integral, L^r-derivada, lo aplica para obtener resultados en la teoría de series de Fourier. En otro trabajo Gordon, [44], en 1990 generaliza la definición de la integral de McShane, para funciones de valor real, a funciones abstractas definidas en intervalos en $\mathbb{R}$ y con valores en espacios de Banach; demuestra que las integrales de McShane y de Pettis son equivatentes cuando la función a integrar es fuertemente medible o cuando el espacio de Banach es separable. En esta dirección, Ye Guoju - Stefan Schwabik, [15] (ver también [45]), en 2002 prueban tal equivalencia para funciones de un intervalo m-dimensional compacto con valores en un espacio de Banach reflexivo, bajo ciertas condiciones. También en esta dirección en 2014-15 Massauwi-Halsted-Musial-King, [46], estudian las propiedades de la L^r-derivada con respecto a una función de Lipschitz monótona creciente, luego definen ciertos espacios L^r respecto a tales funciones y con tal idea definen a una integral del tipo Perron- Stieltjes, integral que extiende a la de L.Gordon. Por otro lado, en [21] Musial-Sagher (2004) estudian un método de integración en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil haciendo uso de la L^r-derivada y verifican todas tales derivadas son integrables!

(ii) Respecto a la teoría de la integral en espacios de Hilbert se sugiere consultar el texto de Mischa Cotlar [47], 1991, sección 7. A.pag.70. La exposición es hecha en el marco de los espacios $L^2(X, \mu, H)$. En esta publicación el autor presenta temas relacionados con teoremas espectrales y operadores en espacios de Hilbert. Es una publicación útil para un curso sobre análisis funcional a nivel avanzado .

(iii) Cuando estudiamos las EDP es inevitable ver a los espacios de Sobolev por su gran importancia en el estudio de tal área. Pues bien, algunas de las integrales definidas en espacios de Banach, como la integral de Bochner, se aplican para estudiar a los espacios de Sobolev-Bochner y luego aplicarse a problemas en EDP. La idea es considerar espacios abstractos como espacios de llegada; así también consideraron ciertos espacios vectoriales topológicos, como los espacios localmente convexos. Ver [11], [25], [12], [33], [37], [32], [9] y [13] para mayores detalles sobre el estudio de la integral desde un punto de vista abstracto. El lector es sugerido a investigar otros recientes avances en esta dirección.

6. La Integral sobre Variedades. Motivado por los trabajos de A.P.Calderón sobre sus contribuciones en el análisis armónico y en las ecuaciones diferenciales parciales, vamos presentar la integral en ese contexto y en las variedades diferenciables, [48]. Por razones de completitud, vamos a presentar con algún detalles las ideas a presentar. Un conjunto no vacío M es llamado una **variedad diferenciable** C^∞, de dimensión n, si él consiste de un conjunto S y de un atlas A de cartas tal que:

(i) cada carta φ_i es una aplicación biunívoca de un conjunto U_i de S sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$;

(ii) $\{U_i\}_i$ es un cubrimiento abierto de S y $\varphi_i\varphi_i^{-1} : \varphi(U_i \cap U_j) \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo C^∞;

(iii) si s_1 y s_2 están en S, entonces existe una carta φ_i cuyo dominio U contiene a s_1 y a s_2;

(iv) A es maximal en el sentido: si $\varphi : U \subset S \to \mathbb{R}^n$ es tal que $A \cup \{\varphi\}$ satisface las anteriores condiciones, entonces φ pertenece al atlas A.

Una variedad n-dimensional puede ser interpretada como un espacio topológico en el cual cada punto tiene una vecindad homeomórfica a algún conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Así mismo decimos que la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es regular si existe $\frac{\partial^\alpha f(x_1,...,x_n)}{\partial x^\alpha}$ y es continua para todo α y todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si M es una variedad, entonces la aplicación $f : M \to \mathbb{R}$ es **regular sobre M** si

$\mathbb{R}^n \underset{\varphi}{\to} U_i \hookrightarrow M \underset{f}{\to} \mathbb{R}$ implica que f o i o φ es regular. Por otro lado, si M_1 y M_2 son dos variedades entonces $f : M_1 \to M_2$ es una aplicación regular si gof es regular donde $g : M_2 \to \mathbb{R}$ pertenece al espacio de las funciones " test"$D(M_2)$ .Por definición, f es un difeomorfismo **si y solo si** existe f^{-1} y tanto f como f^{-1} son regulares. Además, $f \in C^k$ si existe $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ y es continua para $|\alpha| \leq k$.

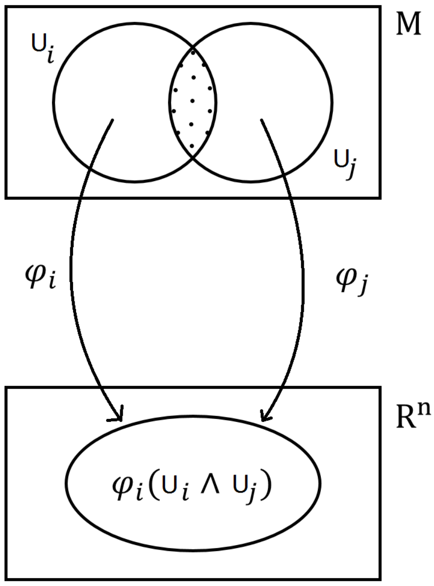

Figura 6.1: Idea de variedad diferenciable

Un sistema de coordenadas diferenciables es una familia $\{U_j\}$ de conjuntos abiertos cubriendo M, y para cada j se tiene un homeomorfismo $\varphi_j : E_j \to U_j$, donde $E_j \subset \mathbb{R}^n$ es abierto tal que la aplicación $\varphi_j^{-1}\varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ es diferenciable. Por otro lado, una variedad M es compacta si existe un subatlas finito φ_1, ..., φ_n tal que $\varphi_j(U_j)$ es limitado en $\mathbb{R}^n$ para cada j. Toda variedad compacta admite una partición finita C^∞ de la unidad, esto es, dado cualquier cubrimiento de M por conjuntos abiertos U_i, existen funciones ψ_1, ..., ψ_n, las que son C^∞ y tales que para cada j: soporte de $\psi_j \subset U_i$, donde $0 \leq \psi_j \leq 1$ y $\sum_{j=1}^n \psi_j = 1$. Tal partición se llama subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$.

6.1. Los espacios de Sobolev $L_r^2(M)$. . Sea M una variedad C^∞, de dimensión n y sea el difeomorfismo $\phi : A_1 \to A_2$ donde A_1 es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y A_2 un abierto en M, sea φ una función C^∞ sobre M con soporte en A_2; sea $r \geq 0$ un número real.

Definición 6.1.

$$L_r^2(M) = \{f \in D'(M)/\varphi fo\phi \in L_r^2(R^n)\},$$

donde $(\varphi fo\phi)(x) = \varphi(\phi(x))f(\phi(x))$ *y* $L_r^2(\mathbb{R}^n)$ *es el espacio de funciones* f *tales que* $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x) \in L^2$ *para* $|\alpha| \leq r$*,* $r \geq 0$ *entero;* $L_r^2(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Hilbert.*

Sea ahora $\{A_1^j\}$ una familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\{A_2^j\}$ un cubrimiento de M por medio de conjuntos abiertos. Sea $\phi_j : A_1^j \to A_2^j$ un C^∞ difeomorfismo y sea la familia de funciones $\varphi_j \in C^\infty$ con soporte en A_2^j y $\varphi_j \geq 0$. Entonces tenemos la caracterización: "$f \in L_r^2(M)$ **si y solo si** $g_j = \varphi_j fo\phi_j \in L_r^2(\mathbb{R}^n)$, para todo j". Además, $L_r^2(M)$ con la norma $||f||_{L_r^2(M)} = \sum_j ||g_j||_{L_r^2(\mathbb{R}^n)}$ es un espacio de Banach.

Nota 6.1. *Una función sobre M es llamada integrable si ella es acotada ,tiene soporte compacto y es casi-continua. Ver [49], sección* 23*, para mayores detatles para la integración sobre variedades.*

Observemos que para cada cubrimiento de M se tiene una norma y si cambiamos de cubrimiento se cambia la norma pero se verifica que todas esas normas son equivalentes; así, si $L_r^2(M)$ es un espacio completo con respecto a $\sum_j ||\varphi_j fo\phi_j||$, tal espacio es también completo con respecto a la norma $||\varphi fo\phi||$. Ahora, en $L^2_r(M)$ se considera el producto interno $< f, g >= \sum_j < \varphi_j fo\phi_j, \varphi_j go\phi_j >$, donde $<,>$ significa $< g_1, g_2 >= \int |\hat{g}_1(x)||\hat{g}_2(x)|(1 + |x|^2)^r dx$; De un modo general, si $r > 0$ el espacio $L^2_r(M)$ se define como la completitud de L^2 con respecto a la norma

$$||f||_{L^2_{-r}(M)} = \sup_{g\in L^2_r,\ ||g||=1} \int_M fgd\mu.$$

Se remarca que $L^2_{-r}(M)$ es el espacio dual de $L^p_r(M)$. Luego, se puede decir: que para r finito $L^2_r(M)$ es la clase de las distribuciones sobre M, las cuales coinciden sobre vecindades coordenadas con distribuciones en $L^2_r(\mathbb{R}^n)$.

6.2. Los Espacios $L^p_r(M)$. . Sea $1 < p < \infty$, $r > 0$ real, por definición
"$L^p_1(M) = \{f \in D'(M)/\varphi fo\phi \in L^p_1(\mathbb{R}^n)\}$, donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y para todo $i = 1, ..., n$ existe una función $f_i \in L^p$ tal que para todo $\phi \in C^\infty_0$ se tiene $(f, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) = -(f_i, \phi)$. Se observa que $f_j = \frac{\partial}{\partial x_i} f$. En general, $f \in L^p_r(\mathbb{R}^n)$ si $f \in L^p_1(\mathbb{R}^n)$ y sí todas las derivadas de primer orden f están en $L^p_{r-1}(\mathbb{R}^n)$".

Complementemos esta definición: M es una variedad compacta de dimensión n y sea la clase C^k, donde $r < k$ y $k > n$. En este contexto y pensando en una partición de la unidad, existe una familia finita $\{\phi_j\}$ de funciones C^k tal que el soporte de ϕ_j está contenido en el dominio de un sistema de coordenadas. Así, si f es una función definida ctp. en cada dominio de coordenada, se tiene que $\phi_j f$ se considera como una función de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Así, por definición: si $1 < p < \infty$,

$$L^p_r(M) = \{f/\phi_j f \in L^p_r(\mathbb{R}^n) \text{ para cada } j\}.$$

En $L^p_r(M)$ la topología es introducida vía la norma

$$||f||_{r,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq r} \sum_{j=1}^{m} ||\phi_j^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\alpha f||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $r = 0$, $||f||_{0,p} = \left[\sum_{j=1}^m ||\phi_j^{\frac{1}{p}}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right]^{\frac{1}{p}} = ||f||_p$. Se observa que las normas obtenidas con diferentes sistemas de coordenadas $\{\phi_j\}$, son todas equivalentes.

$L^p_{-r}(M) := (L^q_r(M))^*$ es el espacio dual donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Por otro lado, un operador T definido sobre $L^p(M)$ es llamado un operador regular de orden m si $T : L^p_r(M) \to L^p_{r+1}(M)$ y $T^* : L^q_r(M) \to L^q_{r+1}(M)$ son funciones continuas para $0 \leq r \leq m$. Se verifica el siguiente resultado:

"T es un operador regular de orden m **si y solo si** para cada ϕ y ψ en C^k, con soportes en una vecindad coordenada simple, $\phi T\psi$, considerado como un operador sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ es regular de orden m".

6.3. Operadores Integrales Singulares sobre M. La teoría de los operadores integrales singulares fue desarrollada por A.P.Calderón -A.Zygmund en la década de los años 1950's y 60's y jugó un rol muy importante en el progreso del análisis armónico y de las ecuaciones en derivadas parciales. Todo esto en el contexto de $\mathbb{R}^n$. Posteriormente Calderón estudió estos operadores, y los pseudo-diferenciales, en el lenguaje de las variedades. Para una introducción a las integrales singulares ver, por ejemplo, [50] y [51]. Bien, un operador T definido sobre $L^p(M)$, $1 < p < \infty$, es un operador integral singular de tipo C^∞_β, con $\beta \leq n - 1$, si satisface:

(i) para cada ϕ y ψ en C^k sobre M, con soportes compactos disjuntos, $\phi T\psi$ es un operador compacto y regular de orden $[\beta]$ sobre todo $L^p(M)$;

(ii) para cada ϕ y ψ en C^k con soporte en un común dominio coordenado, con coordenadas x, se tiene: $\phi T\psi = \phi H\psi + R$, donde H es un operador integral singular de tipo C^∞_β definido vía

$$Hf(x) = a(x)f(x) + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} h(x, x - y)f(y)dy,$$

y donde R es un operador compacto, regular de orden $[\beta]$, sobre $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Además, el núcleo $h(x, z)$ es una función C^∞_β homogénea de grado $-n$ y $a(x) \in C_\beta$. Para mayores detalles sobre integrales singulares ver [50] y para aspectos topológicos y de variedades [49].

Por lo visto, los operadores integrales singulares sobre M son dados esencialmente trasplantando operadores sobre el espacio $\mathbb{R}^n$. Esta ruta ha permitido estudiar áreas del análisis armónico en el contexto general de las variedades diferenciales. Así, por ejemplo, R.Seeley [29] investigó en el contexto de las variedades resultados obtenidos por Calderón - Zygmund en el espacio $\mathbb{R}^n$. En tal trabajo Seeley formula la noción de un operador integral singular sobre una variedad compacta así como desarrolla un cálculo funcional para tales operadores, así como construye una forma de representar operadores diferenciables sobre $L(M)$; introduce ciertos espacios funcionales sobre $L(M)$ y estudia al espacio de Sobolev $L^p(M)$, $1 < p < \infty$, $r \leq n$, como un espacio vectorial topológico en donde se considera una partición de la unidad sobre M. Para $f \in L^p_r(M)$ y si $\phi_i f \in L^p_r(\mathbb{R}^n)$ para cada i, considera la norma:

$$||f||_{L^p_r(M)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq r} \sum_i ||\phi_i^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\alpha f||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Luego Seeley estudia a los operadores integrales singulares sobre M. En posteriores trabajos continúa investigando estos operadores y los operadores pseudo-diferenciales.

6.4. Los Espacios de Hardy $H^1(M)$. . En 1972 R.S. Strichartz, [30], define los espacios H^1 sobre variedades y estudia la acción de los operadores pseudo-diferenciales sobre tales espacios. Para ver estos espacios de Hardy sobre $\mathbb{R}^n$ se sugiere ver [52], [53], [39]. Veamos, Strichartz fija una medida regular sobre M en todo sistema de coordenadas, la cual es equivalente a la medida de Lebesgue; se considera así mismo una C^∞ partición de la unidad $\{\varphi_i\}$, la que es subordinada a un cubrimiento por vecindades coordenadas y considera funciones C^∞, ψ_i, con soporte compacto en una vecindad coordenada tal que $\psi_i\varphi_i = \varphi_i$. Entonces, por definición

$$H^1(M) = \{f \in L^1(M)/\psi_i R_j(\varphi_i f) \in L^1(M), \text{para todo } i,j\}$$

donde R_j es la transformada de Riesz (en $\mathbb{R}^n$) definida vía: $(R_jf)\hat{(}\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$, $j = 1,...,n$ recalcamos que $H^1(R) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ tal que } R_jf \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

En $H^1(M)$ se considera la norma

$$||f||_{H^1(M)} = ||f||_{L^1(M)} + \sum_i \sum_j ||\psi_i R_j(\varphi_i f)||_{L^1(M)}.$$

Esta definición es independiente de la elección de la partición de la unidad y de las coordenadas locales.

6.5. Operadores Pseudo-Diferenciales sobre Variedades. En 1970 L. Nirenberg da la definición: " Un operador $T : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ es llamado un **operador pseudo-diferencial** de orden r si

(i) $\psi_i T(\varphi_i f)(x) = \int e^{ix\xi} p(x,\xi)(\varphi_i f)\hat{}(\xi)d\xi$, donde $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ satisface $\left|(\frac{\partial}{\partial\xi})^\alpha(\frac{\partial}{\partial x})^\beta p(x,\xi)\right| \leq K_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{r-|\alpha|}$, para todo α, β;

(ii) $(1-\psi_i)T(\varphi_i f)$ es dado por $(1-\psi_i)T(\varphi_i f)(x) = \int K(x,y)f(y)dy$ donde $K \in C^\infty(M \times M)$".

Strichchartz prueba que: "Si T es un operador pseudo-diferencial de orden cero, entonces $T : H^1(M) \to L^1(M)$ es un operador acotado, esto es

$$||\psi_i T(\varphi_i f)||_{L^1(M)} \leq C\left[||f||_{L^1(M)} + \textstyle\sum_{j=1}^n ||\psi_i R_j(\varphi_i f)||_{L^1(M)}\right]".$$

Vía este resultado se demostró la siguiente caracterización: " $f \in H^1(M)$ si y solo si $f \in L^1(M)$ y $Tf \in L^1(M)$, para todo operador pseudo-diferencial T de orden cero".

Nota 6.2. *Terminamos esta sección con la observación que Calderón en [8] investiga la clase de operadores pseudo-diferenciales $\&_m$ tanto en $\mathbb{R}^n$ como en una variedad M, los que son aplicados a estudiar problemas de ecuaciones en derivadas parciales; sus argumentos son altamente técnicos y especializados.*

7. Algunas aplicaciones de la integral sobre variedades diferenciables.

1. A. Calderón introdujo los espacios de distribuciones sobre una variedad diferenciable desarrollando un cálculo de las integrales singulares y de los operadores seudo-diferenciables sobre variedades. En dicho cálculo está la integral sobre variedades. Un éxito de la teoría clásica de los operadores diferenciales parciales en términos de ciertas integrales singulares y esto abrió un camino para estudiar los problemas clásicos de las EDP, como son el problema de Dirichlet, de Cauchy, problemas mixtos, ... Este panorama fue llevado al contexto de las variedades por R.T.Seeley en 1958 ("Singular integrals on Compact Manifolds"), en donde obtuvo una representación de un operador diferencial arbitrario sobre $L^p(M)$ (M es una diferencial homogéneo relacionado con el operador de Laplace). El trabajo de Seelet abrió muchas aplicaciones de la integral sobre varieddades sobre todo en el campo de las EDP.

2. En 1972 R.S. Strichartz estudió los espacios de Hardy H^p sobre variedades ("The Hardy space H^1 on manifolds and submanifolds") en donde expone que la teoría L^p de las ecuaciones en derivadas parciales falla para $p = 1$; así define $H^1(M)$ donde M es una variedad C-infinito, sin borde, los que los usa para estudiar porblemas de valor de contorno para la teoría elíptica.
3. U.Neri en "Singular Integral Operators on Manifolds.en donde define ciertos operadores L elípticos definidos sobre ciertos espacios $H(M)$, donde M es una variedad compacta, regular, sin borde, y estudia ecuaciones diferenciales abstractas usando la maquinaria dada en el trabajo.
4. Nota. Usando como modelo la clásica integral de Riemann-Stieljes se introdujeron integrales estocásticas, entre ellas la famosa integral de Ito, las que tuvieron aplicaciones muy importantes en la economía, la física, ...

8. La Integral de Riemann: un Punto de Vista Moderno. Y bien, parece que la ruta de esta historia fuera una circunferencia pues llegamos nuevamente a Riemann, a la integral de Riemann! El camino ha sido largo, se inició a mediados del siglo XIX, se caminó la mitad de este siglo, se siguió caminado por todo el siglo XX y ... aún en este siglo nuestro XXI y llegamos al punto de partida pero con mucha información obtenida en el camino y ahora se penetra más en el pensamiento de Riemann, de donde surgieron nuevas ideas y métodos para explorar sus iniciales ideas. Las teorías, métodos e ideas vistas en los artículos I y II, [22], y parte de éste son muy ricas y contribuyeron a entender el corazón de esta gran idea de los precursores de Newton y de él, la idea de integral. En este panorama se destaca la contribución de H.Lebesgue con su teoría de la medida, la cual contribuyó fuertemente en el desarrollo del análisis funcional, como ya hemos mencionado antes. También hemos visto que algunas de tales teorías clarificaron al notable teorema fundamental del cálculo; se extendieron las funciones, dominios y rango de las funciones a integrar, donde destacamos a la integral de Bochner y su relación con los espacios de Banach.

Todas estas contribuciones llevaron a la formulación de una teoria abstracta de la integral, [16]; además, ellas motivaron, de alguna forma, a volver a explorar la idea original de Riemann, tal fue el caso de los analistas J.Kurzweil y R.Henstock quienes haciendo ligeras modificaciones en las sumas consideradas por Riemann lograron introducir una integral que preserva a la integral de Riemann y tiene otras ventajas y no necesita de toda la maquinaria de la teoria de la medida .Se escribieron muchos artículos y algunos libros, tanto en el siglo XX como en el actual, todo lo cual constituye un fuerte legado para nuevas investigaciones sobre este tema. Ver [22] para algunos otros comentarios.

La idea de definir a la integral de un modo riguroso se inicia a principios del siglo XX gracias al trabajo de Fourier sobre las series trigonométricas en donde se introduce las conocidas integrales de Fourier, más concretamente los coeficientes de Fourier y que motivó estudiar las funciones que sean integrables pues en esa época el análisis no existía; justo se está iniciando. En esta etapa se destaca la contribución de A.Cauchy quien investiga las funciones continuas e introduce una integral para estas funciones; la idea fue ver que las series mencionadas, con esta integral, debería converger a la función, bajo ciertas condiciones, pero no se tuvo éxito pues faltaban aún algunas ideas analíticas. Fue Dirichlet (1829) quien justificó la idea de Cauchy dando una demostración rigurosa de lo deseado. Ver [54] para mayores detalles. Veamos algunos argumentos (con el lenguaje actual) relativo a la convergencia puntual de las series de Furier. Se tiene el importante resultado.

Lema 8.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). *"si f es seccionalmente continua sobre el intervalo abierto (a, b), entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)sen(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)cos(nx)dx = 0\text{''}.$$

Así mismo de tiene: "Sea $s_N(x)$ una suma parcial de la serie de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(nx) + b_n sen(nx)]$ de una función f seccionalmente continua y periódica, de período 2π. Entonces se tiene

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) \frac{sen(N + \frac{1}{2})t}{2sen\frac{t}{2}} dt$$

donde $D_N(t) = \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{2sen\frac{t}{2}}$ es llamado el núcleo de Dirichlet. Entonces se tiene el fundamental resultado,

Teorema 8.1 (Teorema de la convergencia puntual). *Sea $f(x)$ una función seccíonalmente regular, periódica (de período 2π) en $[-\pi, \pi]$. Entonces para todo x se tiene*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f, y $f(x^+) = \lim_{h\to 0} f(x + h)$ y $f(x^-) = \lim_{h\to 0} f(x - h)$. [Se observa que si f es continua en x, entonces $f(x^+) = f(x^-)$ y se tiene $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$.]

Nota 8.1. *“ $f(x)$ es seccionalmente regular sobre $[a,b]$ si $f(x)$ es seccionalmente continua y su derivada $f'(x)$ es también seccionalmente continua, donde los saltos de $f(x)$ ocurren también en x_0, ..., x_n, puntos donde $f(x)$ tiene saltos”.*

Se observa que si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es regular en $[a,b]$.

De esta manera la conjetura de Cauchy se verifica con las ideas introducidas por Dirichlet, y esta situación fue motivada por poner rigor en el trabajo de Fourier. Como la integral de Cauchy motivó a Riemann introducir su integral, recordemos la idea de Cauchy pues ella fue el punto de partida para el nacimiento del análisis matemático, en particular de la evolución de la integral. Sea el intervalo $[a,b]$ donde se considera la partición $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ y sea una función $f(x)$ definida en $[a,b]$; Cauchy considera la sumas $s = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$.

Luego afirma: la integral de $f(x)$ entre a y b, es por definición el límite de esas sumas s cuando la máxima longitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tiende a cero. Luego pasa a demostrar las propiedades de su integral, así demuestra que si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces ella es integrable. Debemos observar que en aquella época la idea de función era un tanto limitada pero posteriormente se introdujeron nuevos tipos de funciones y surgió la cuestión de si ellas eran integrables, según Cauchy. Así mismo, con Cauchy se inicia definir la integral en forma analítica pues la integral considerada por Newton mas tuvo un carácter geométrico. Ya vimos que la integral de Cauchy no era suficiente para el problema de la convergencia de la serie de Fourier, situación que fue clarificada con la contribución de Dirichlet, quien fue el primero en dar una demostración rigurosa de la representación de una función en serie de Fourier (1829), trabajo en donde usa su notable “núcleo de Dirichlet” y que habría de servir a Riemann para su notable integral. Así, se remarca que el problema de la representación de una función en serie de Fourier habría de ser una ruta de inicio de toda esta historia de la evolución de la integral.

8.1. Entra en escenario B. Riemann. Estamos alrededor de 1851; Riemann estudia bajo la dirección de Dirichlet, quien pronto descubre el genio de su joven alumno. Riemann investigó las series trigonométricas, trabajo que sometió para su examen de Habilitación. Ver [55], el bonito artículo de G.Ávila, para otros detalles. Dirichlet se cuestionó: ¿ en que condiciones una función $f(x)$ es integrable? ... pues lo hecho entonces con las funciones continuas por partes no satisfacían del todo ante nuevos tipos de funciones que aparecían. Así Riemann trata de precisar que entender por $\int_a^b f(x)dx$ e investigar la caracterización de las funciones que sean integrables en la nueva concepción. Su idea fue, [55]: “sea $f(x)$ una función definida en $I = [a,b]$ y sea la partición $P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Sean ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n puntos tales que $x_{i-1} < \psi_i < x_i$ y consideremos las sumas, llamadas “SUMAS DE RIEMANN”,

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\psi_i)\Delta_i$$

donde $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Riemann conjetura que “ $f(x)$ es integrable si tales sumas tienen un límite si el máximo de las iongitudes de los intervaios $[x_{i-1}, x_i]$ tienden a cero, de forma independiente de como los ψ_i son escogidos. Afirma que: tal límite es la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, se representa por $\int_a^b f(x)dx$. De esta manera se tiene $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} S(f,P)$, donde $|P|$ es la máxima amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, llamada la norma de la partición P. Se tiene las caracterizaciones, dadas por Riemann:

- C1 “Una función $f(x)$ es R-integrable **si y solo si** $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} w_i\Delta_i = 0$, donde w_i es la oscilación de $f(x)$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$”.
- C2 “Una función $f(x)$ es R-integrable **si y solo si** dado $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P con $|P| < \delta$, la suma s de las longitudes de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, donde $w_i \geq \sigma$, es menor que ϵ; así $s < \epsilon$”.

Riemann demuestra que C1 es equivalente a C2 .Riemann dio un ejemplo de una función integrable que tiene infinitos puntos de discontinuidad que forman un conjunto denso en la recta. Esto fue un importante paso en esta historia pues motivó, de algún modo, la teoría de conjuntos y de la medida. Así mismo, Riemann fue el primero en dar ejemplos de series trigonométricas que no son series de Fourier y así nos dijo que no siempre es factible integrar término a término en una serie trigonométrica y esto tiene que ver con el problema de la unicidad de la serie de una función dada. Luego, se podría conjeturar que exista una función que tenga más de una serie trigonométrica. En este escenario K. Weierstrass aporta otras ideas, como la convergencia uniforme; también se destaca la contribución de H. Heine quien destaca la importancia de la convergencia uniforme para poder integrar término a término en la serie y plantea el problema de la unicidad de la serie trigonométrica. Y acá se produce un hecho histórico destacable: Heine tuvo como alumno a G.Cantor quien se interesa por el problema de la unicidad y así nacen los conjuntos infinitos de puntos, que luego de un arduo trabajo lo condujo a la teoría de conjuntos y a la construcción de los números transfinitos! A seguir entra en escenario la Escuela francesa donde se destacan E.Borel y H.Lebesgue con la teoría de la medida y la integral de Lebesgue. Esto es otra historia; ver, por ejemplo, I y II, [22].

Desde la época de Newton el teorema fundamental de cálculo tuvo una influencia vital en el desarrollo de la teoría. Muchas de la investigaciones del siglo pasado y del presente están relacionadas con tal teorema, pues relaciona a la derivada con la integral. Con el objetivo de comprender los temas que presentaremos posteriormente, recordemos algunos aspectos básicos del cálculo avanzado. Sea $f(x)$ una función R-integrable en $I = [a, b]$, entonces se tiene que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ en todo punto $x \in I$ donde $f(x)$ es continua. Así, si $f(x)$ fuera continua para todo $x \in I$, tal igualdad vale en todo I. Ahora, sea $F(x)$ una función tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, entonces $F(x)$ es llamada una **primitiva** o una **integral indefinida** de $f(x)$. De esta manera, para una función continua se tiene $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$. Se observa que si c es una constante, entonces $F(x) + c$ es también una primitiva de $f(x)$. En esta dirección se tiene el **teorema fundamental del cálculo**:

Teorema 8.2. *"Si $f(x)$ es una función continua sobre I y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$, entonces se tiene $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$".* [En efecto, sea $F(x)$ definida vía $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; entonces $F(x) = G(x) + c$. Determinemos c: vemos que $F(a) = 0$, entonces $c = -G(a)$. Luego $F(x) = G(x) - G(a)$ y finalmente, $F(b) = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$].

Se observó que este teorema tiene deficiencias desde que existen funciones derivables que no son R-integrables .Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\frac{1}{x^2} & ...\ x \neq 0 \\ 0 & ...\ x = 0, \end{cases}$$

entonces se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsen\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}cos\frac{1}{x^2} & ...\ x \neq 0 \\ 0 & ...\ x = 0 \end{cases}$$

Se observa que $f'(x)$ no es limitada en una vecindad del origen y de esta manera $f'(x)$ no es integrable en un intervalo que contenga al origen. Pero, si $f'(x)$ fuera diferenciable sobre I y si $f'(x)$ fuera integrable, entonces se tendría
$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. Aún con la integral de Lebesgue se observó que existen funciones diferenciables en todo punto de I pero que sus derivadas no son L-integrables. Ver [22], II.

Por otro lado, recordemos que para la composición de funciones se tiene, bajo ciertas condiciones, que

$$\{u[v(x)]\}' = u'[v(x)]v'(x). \tag{8.1}$$

Este resultado sirve para demostrar la integral por sustitución:

Teorema 8.3 (Teorema de Sustitución). *"Sea $f(x)$ continua en $[a < y < b]$ y sea $g(x)$ una función con derivada continua $g'(x)$ sobre $[c < x < d]$ y tal que $g(c) = a$, $g(d) = b$. Si $a < g(x) < b$, entonces se tiene $\int_a^b f(y)dy = \int_c^d f[g(x)]g'(x)dx$".*

En efecto, si ponemos $h(y) = \int_a^y f(t)dt$ entonces, por 8.1, $h[g(x)]$ es una primitiva de $h'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x)$. De esto, por el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\int_c^d f[g(x)]g'(x)dx = h[g(d)] - h[g(c)] = h(b) - h(a) = \int_a^b f(y)dy].$$

Por otro lado, la fórmula $(fg)' = fg' + f'g$ para funciones diferenciables se aplica para demostrar que: "Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables sobre $[a, b]$ y si $f'(x)$ y $g'(x)$ son integrables sobre $[a, b]$, entonces se tiene la fórmula de integración por partes,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

donde $f(x)g(x)|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Remarcamos que el tema **cambio de variables**, en su aspecto básico, lo aprende todo estudiante de cálculo. Así, por ejemplo, si le piden calcular $\int_0^2 xcos(x^2+1)dx$ hace el cambio de variables $u = x^2 + 1$, de donde $du = 2xdx$, $u = 1$ y $u = 5$ y esto lo conduce a la integral $\frac{1}{2}\int_1^5 cosudu$, integral definida más fácil de evaluar: esto es una de la "filosofía"del cambio de variables, hacer mas fácil la evaluación de una integral. Es natural que cuando se integre en espacios de mayores dimensiones se tenga que introducir ciertas condiciones. Por otro lado, se integra sobre regiones y a veces en la integral original la región dada no es muy adecuada para hacer la integración; entonces, vía una cambio de variables es factible "transformarla" en una región más fácil de hacer la integración. Por ejemplo, dada la región limitada por las rectas $y = -x + 4$, $y = x + 1$, y $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$, todo estudiante sabe graficar esa región triangular, pero si hace la “transformación”$x = \frac{1}{2}(u + v)$, y $y = \frac{1}{2}(u - v)$ observará que las anteriores rectas se transforman, respectivamente, en

$u = 4$, $v = -1$ y $v = \frac{u}{2} + 2$, que limitan una región más fácil de trabajar. En el caso de n-variables el cambio de variables nos ayuda a calcular integrales múltiples sobre regiones de forma no rectangular a regiones más fáciles de trabajar que permitirán simplificar el cálculo de diversas integrales múltiples. Recordemos la fórmula dada en 8.3 de arriba: $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)dt$, donde $a = g(c)$, $b = g(d)$. Un análisis sobre el signo de la derivada $g'(x)$ conduce a tomar el valor absoluto de ella, $|g(x)|$, ver Apostol [56], pag.270-71. En el caso de n-variables surge el jacobiano de $g(x)$. En el caso de n-variables la fórmula del “cambio de variables”dice sucintamente:

$$\int\int_D\int f(P)dV(P) = \int\int_{D_1}\int f[F(Q)]|J(Q)|dV(Q) \tag{8.2}$$

Veamos algunos detalles de esta fórmula. Como motivación veamos el caso de 3-variables. Sea F una transformación de un dominio D en $\mathbb{R}^3$ al rango R en $\mathbb{R}^3$. Entonces, las componentes de F son dadas por $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$,
$w = h(x, y, z)$. Sea $Q = (a, b, c)$ en el cual $A = f(a, b, c)$, $B = g(a, b, c)$ y $C = h(a, b, c)$ .Se desea ver la existencia de una transformación inversa en una vecindad del punto $P = (A, B, C)$ en el espacio en el cual está el punto (u, v, w).

Bien, sea $P + dP = (A + du, B + dv, C + dw)$ un punto cerca a P. Luego ,si existe una función inversa definida en una vecindad de P, entonces existirá un único punto $dQ = (dx, dy, dz)$ tal que $P+dP = F(Q + dQ)$,es decir, ser un único $dQ = (dx, dy, dz)$ tal que $P + dP = F(Q + dQ)$. De esta manera se tiene: $A + du = f(a + dx, b + dy, c + dz)$, $B + dv = g(a + dx, b + dy, c + dz)$,
$C + dw = h(a + dx, b + dy, c + dz)$. Esto implica que se tenga, aproximadamente,

$$\begin{aligned} du &= f_1(Q)dx + f_2(Q)dy + f_3(Q)dz \\ dv &= g_1(Q)dx + g_2(Q)dy + g_3(Q)dz \\ dw &= h_1(Q)dx + h_2(Q)dy + h_3(Q)dz. \end{aligned}$$

Ahora se usa la notación matricial, ver [57], pag. 244; para obtener

$$dP = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(Q) & f_2(Q) & f_3(Q) \\ g_1(Q) & g_2(Q) & g_3(Q) \\ h_1(Q) & h_2(Q) & h_3(Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \equiv J(Q, dQ),$$

donde, en general $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, etc; además,se observa que la matriz de la transformación lineal F es la matriz que aparece en la anterior igualdad y es llamada la **matriz jacobiana** de F; ella determina el determinante jacobiano.

Regresemos a la fórmula (8.2) de arriba. La idea ahora es determinar las condiciones para que tal fórmula sea válida. Sea $n = 2$ nuevamente y R una región en el plano (x, y); la ecuación $P = F(Q)$ es dada vía las coordenadas $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, y F es una aplicación continuamente diferenciable, uno a uno, de una región abierta S en el plano (u, v) sobre R. Se supone, además, que F y su aplicación inversa satisfacen cierta condición donde se aplica el teorema de Green (“sea D una región abierta en el plano y $H = (h_1, h_2)$ un campo vectorial en $C^1(\bar{D})$; entonces se tiene $\int_D divHdx = \int_{\partial D} < N_Q, H > d\sigma(q)$, donde $divH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x)$, N_Q es la normal unitaria externa a ∂D en Q, $< >$ es producto interno”). Además se acepta que el jacobiano $J(Q) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ es diferente de cero en S. Se verifica que si D es una subregión cerrada, limitada, de R al cual se le puede aplicar el teorema de Green, y si $g(x)$ es 2-continuamente diferenciable, entonces el área de D es dada por Área$(D) = \int\int_{D_1} |J(Q)|dA(Q)$, donde D_1 es la imagen de S en R bajo la aplicación inversa.
Ver [57], pag.327 para los detalles. También se tiene: “sea D y D_1 como antes y sea ϕ continua sobre D, entonces $\int\int_D \phi(P)dP = \int\int_{D_1} \phi[F(Q)]|J(Q)|dA(Q)$”.

En forma análoga se tiene si $n = 3$ en donde la transformación $P = F(Q)$ es dada por las coordenadas $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. Se asume, también, que F aplica una region abierta S en el $Q(u, v, w)$ espacio sobre una región abierta R del $P = (x, y, z)$ espacio de una manera inyectiva. Además, se asume que la transformación F es 2 veces continuamente diferenciable. D es una subregión cerrada de R cuyo contorno ∂D es una superficie regular por partes y D_1 es la imagen de D en S bajo la aplicación inversa; de esta manera el contorno ∂D_1 de D_1 es regular por partes. Se asume que el teorema de la divergencia [“sea D un adecuado dominio y $H = (h_1, ..., h_n)$ una función vectorial limitada en

$C^0(\bar{D}) \cap C^1(D)$; si $divH$ es integrable sobre D, entonces se tiene $\int_D divHdx = \int_{\partial D} < H, N_Q > d\sigma(Q)$".] es aplicable a D y a D_1. Entonces se demuestra que: "sea D y D_1 como antes; si $J(Q) \neq O$, entonces el volumen de D es dado por $V(D) = \int\int_{D_1} |J(Q)|dV(Q)$, donde $J(Q)$ es el jacobiano de F".

También se tiene: "Sean D y D_1 como antes y ϕ una función continua sobre D; entonces

$$\int\int_D \int \phi(P)dV(P) = \int\int_{D_1} \int \phi[F(Q)]|J(Q)|dV(Q)\text{"}.$$

En general para el caso n arbitrario se tiene: "sean D y D_1 dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $g : D \to D_1$ un difeomorfismo (inyectiva y diferenciable) de clase C^1; si $f : D_1 \to \mathbb{R}$ es una función R-integrable entonces la función $[f(g(x))]|J(g(x))|$ es integrable sobre D y se tiene

$$\int_{D_1} f(x)dx = \int_D [f(g(y))]|J(g(y))|dy,$$

donde $J(g(x)) = \frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}$, $g = (g_1, ..., g_n)$". [se asume que D y D_1 tiene "volumen" en $\mathbb{R}^n$; la medida de sus contornos tienen medida cero].

A manera de ejemplo, veamos el siguiente resultado de cambio de variable: "Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas sobre $I = [a, b]$ y $\alpha(x)$ una función de variación acotada sobre I; si se define $h(x) = \int_a^x f(y)d\alpha(y)$, donde $a \leq x \leq b$, entonces se tiene: $\int_a^b g(x)dh(x) = \int_a^b g(x)f(x)d\alpha(x)$".

En efecto: $f(x)$ continua sobre I implica que existe un $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $x \in I$, α es de variación limitada; en primer lugar se asume que α es monótona y creciente sobre I. Entonces sea la partición $P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Ahora recordamos al primer teorema del valor medio de la integral R-S:

Teorema 8.4. *"Sea f una función continua y α una función monótona creciente en $[a, b]$; entonces existe $c \in [a, b]$ tal que se tiene $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)]$".*

Entonces se puede escribir

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d\alpha(x) = f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})].$$

Por otro lado se sabe que "si $f(x)$ es continua y $\alpha(x)$ es monótona creciente sobre $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t)$, donde $x \in [a, b]$, es de variación acotada sobre $[a, b]$". Luego $h(x)$ es una función de variación acotada sobre $[a, b]$; sea la descomposición $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$, donde $h_1(x)$ y $h_2(x)$ son dos funciones crecientes.

$f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas. Sabemos que si $lim_{||P||\to 0} S(P, f, \alpha)$ existe, entonces f es R-S integrable sobre $[a, b]$ y se tiene
$\lim_{||P||\to 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$; luego se tiene
$\int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x) = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$. Entonces se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x) &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d\alpha(x) \\
&= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[h(x_i) - h(x_{i-1})] \\
&= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[h_1(x_i) - h_1(x_{i-1})] \\
&\quad - \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[h_2(x_i) - h_2(x_{i-1})] \\
&= \int_a^b g(x)dh_1(x) - \int_a^b g(x)dh_2(x) \\
&= \int_a^b g(x)dh(x)
\end{aligned}$$

■

Ahora pasamos a ver algunas contribciones que se han hecho en tiempos relativamente recientes con respecto al tema del **Cambio de Variables** en donde se vuelve a trabajar con la integral de Riemann pero relacionada con otros tipos de integrales , vistas en la parte II, [22], y de esta manera se rescata la gran visión del matemático B.Riemann. Veamos.

(i) **Cambio de Variables para la Integral de Darboux.** La fuente de referencia es F.S Cater [58] en donde se expone el cambio de variabie para integrales de Darboux, ver parte II, [22]. Cater usa en su trabajo a las "derivadas de Dini" y su resultado principal es una fórmula de cambio de variable para las integrales de Darboux. Veamos algunas cuestiones previas. Ulisse Dini introdujo sus derivadas las que son generalización de la derivada usual y las introdujo para investigar a las funciones continuas que no son diferenciables. Son cuatro las derivadas de Dini. Sea la función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x\in(a,b)$ y $h\neq 0$ tal que $x+h\in(a,b)$. Sea $Df(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si f es diferenciable en $x\in(a,b)$, ó f tiene derivada por un lado en x ó no lo tiene, entonces las cuatro cantidades siguientes son bien definidas:

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to 0^+}Df(x,h),\ D_+f(x)=\liminf_{h\to 0^+}Df(x,h)$$
$$D^-f(x)=\limsup_{h\to 0^-}Df(x,h),\ D_-f(x)=\liminf_{h\to 0^-}Df(x,h)$$

Estas cuatro expresiones son llamadas **"las derivadas (ó números) de Dini**". Se observa que $D_+f(x)\leq D^+f(x)$ y que $D_-f(x)\leq D^-f(x)$. Además, $f'(x)$ existe si y solo si las cuatro derivadas de Dini de $f(x)$ son iguales.

Nota 8.2. *En el siglo XIX la teoría de diferenciación mereció investigaciones que contribuyeron al desarrollo del análisis matemático y las contribuciones de Dini tuvieron un valor destacable en tal desarrollo. Para mayores detalles sobre Dini y su obra ver [59], pag. 224 y siguientes.*

Nota 8.3. *La idea general de lo que veremos, en forma breve, es considerar en la fórmula de cambio de variables - teorema fundamental del cálculo, los distintos tipos de integrales (Darboux, Denjoy, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, ...) que se introdujeron para tener una teoría de la integral más óptima, sencilla y útil en las aplicaciones. En este sentido el artículo [22] nos será útil.*

Cater estudia la fórmula de cambio de variables para la integral de Darboux. Recordemos a esta integral. Sea $f(x)$ una función acotada definida sobre $[a,b]$; se define las sumas $\sum_i M_i\Delta x_i$ y $\sum_i m_i\Delta x_i$, donde $M_i=\sup_{\Delta x_i}f(x)$ y $m_i=\inf_{\Delta x_i}f(x)$, sumas que tienden a un límite cuando el diámetro de la partición $d(P)$ tiende a cero. Según Darboux, el límite de las sumas superiores es igual a la mayor cota inferior; así mismo, el límite de las sumas inferiores es igual a la menor cota superior. Estas cotas son llamadas las integrales D-superior e D-inferior, y se denotan, respectivamente $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ y $\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Definición 8.1. *(***Integral de Darboux***) $f(x)$ es integrable-Darboux sobre $[a,b]$ si $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=(D)\int_a^b f(x)dx$. La integral de Darboux es equivalente a la integral de Riemann.*

Según Cater Dg significa una de las cuatro derivadas de Dini donde $g(x)$ es una función continua de valor real definida sobre $[a,b]$; considera $g(a)\leq g(b)$ y Dg acotada sobre $[a,b]$. Por otro lado, $f(x)$ es una función acotada sobre $g([a,b])$ tal que para ctp. $t\in[a,b]$ una de las funciones $f[g(.)]$ ó $Dg(.)$ es continua en t. El teorema central de Cater es

Teorema 8.5. *Las integrales superior e inferior de Darboux satisfacen las desigualdades:*

$$\overline{\int_a^b} f[g(t)]Dg(t)dt\geq\overline{\int_{g(a)}^{g(b)}} f(x)dx\geq\underline{\int_{g(a)}^{g(b)}} f(x)dx\geq\underline{\int_a^b} f[g(t)]Dg(t)dt$$

Además, si $f[g(t)]Dg(t)$ es R-integrable sobre $[a,b]$, entonces se tiene que $f(x)$ es R-integrable sobre $[g(a),g(b)]$ y $\int_a^b f[g(t)]Dg(t)=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$".

Cater observa que probado 8.5 se tienen varias consecuencias relacionadas con la integral de Riemann como:

(a) " Si $f[g(t)]Dg(t)$ es R-integrable sobre $[a,b]$, entonces $f(x)$ es R-integrable sobre el intervalo $g([a,b])$".

(b) " Si $f(x)$ es R-integrable sobre $g([a,b])$ y Dg es R-integrable sobre $[a,b]$, entonces $f[g(t)]Dg(t)$ es R-integrable y se tiene

$$\int_a^b f[g(t)]Dg(t)dt=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx".$$

(ii) **Fórmula para Cambio de Variable para la Integral de Henstock - Kurzweil.** En esta sección se presenta a la fórmula de cambio de variables en relación con la integral de Henstock-Kurzweil y las referencias que seguirnos son [60] y [61]; en la primera, V. Rutherford - Y.Sagher dan una caracterización para tal fórmula en el lenguaje de la H-K-integral y la segunda es la tesis PhD de Rutherford en donde en su primera parte expone sucintamente la teoría de HK y da una caracterización para tener el teorema fundamental del cálculo para la integral H-K.

Por razones de completitud recordemos las nociones básicas de la H-K integral. Sea el intervalo $I=[a,b]$ y $|I|=b-a$. Una partición etiquetada de I es un conjunto finito de pares $P_e\equiv P=$

$\{(t_i, I_i), 1 \leq i \leq n\}$, donde $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Un calibrador sobre I es una función $\delta(x) > 0$. Una partición etiquetada es llamada subordinada al calibrador $\delta(x)$ si se tiene $t_i \in I_i \subseteq (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)) = c(t_i)$, donde c controla a la partición P. En este contexto, sea $f : I \to R$ y una partición etiquetada P, entonces la suma $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)|I_i|$ es llamada la suma de Riemann. El número $(R)I$ es la integral de Riemann de $f : I \to R$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un calibrador constante $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si P es cualquier partición etiquetada de I, $|P_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n$, entonces se tiene $|S(f; P) - (R)I| < \epsilon$.

La **H-K integral.** Una función $f : I \to R$ es HK-integrable sobre I si existe un número hk tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ sobre I tal que para cualquier partición etiquetada subordinada a a δ satisface $|S(f, P) - hk|$. Notación: $hk = (HK)\int_a^b f(x)dx$, que es llamada la HK-integral. Por definición. $(HK)\int_a^b f(x)dx = -(HK)\int_b^a f(x)dx$. La (HK)-integral es única.

Se dice que una función f tiene "variación insignificante (vi)"sobre un conjunto $A \subsetneqq I$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ sobre I tal que para cualquier partición etiquetada P subordinada a δ, se tiene

$\sum_{x_i \in P} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Esta idea fue introducida por R. Vyborny en 1993, donde da aplicaciones de la HK-interal, [62]. Una aplicación de la (vi) es dada en el TF del C para la HK-integral:

Teorema 8.6. *"Se tiene $F(x) - F(a) = (HK)\int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$ si y solo si existe un conjunto $A \subseteq I$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, y $I - A$ es un conjunto de medida cero sobre el cual F tiene una (vi)".*

Veamos brevemente algunos argumentos debidos a Rudolf Vyborny sobre su artículo [62] en donde expone algunas aplicaciones de la HK-integral al análisis elemental: teoremas del valor medio para funciones de valor vectorial, la regla de L'Hospital, teorema fundamental de cálculo, ... En [22], II, vimos la integral de Perron la cual integra toda derivada sin restricción alguna; Vyborny opina que "esta propiedad no fue suficientemente divulgada y resaltada porque su elaboración no es muy elemental; y cuando se introdujo la integral de Henstock-Kunweil, la cual es equivalente a la de Perron y tiene tal propiedad, ella fue más aceptada y difundida debido a que es de más simple elaboración". Esto motivó a Vyborny a aplicar la HK-integral al análisis básico . Se observó que las particiones δ - fina (etiquetada) se puede usar en la enseñanza del análisis en la recta. En sus argumentos Vyborny usa la idea de "negligibly"(insignificante) según la definición dada antes para (vi). Como ejemplos, nos dice, son (vi) si

- A es un conjunto enumerable y f es continua sobre A ;
- A es un conjunto de medida cero y f es absolutamente continua sobre A;
- $A = [c, d] \subset [a, b]$, f es constante sobre A y continua en c y d.

El articulo de Vyborny puede ser útil en un proyecto de enseñar la HK-integral para estudiantes de ciencias, matemáticas en particular, por las aplicaciones dadas que pueden motivar mayores estudios.

Regresemos a [60]. La idea de (vi) es útil para clarificar el tema que estamos tratando; ella juega un papel similar al que tiene la idea de continuidad absoluta en la integral de Lebesgue. Así, se tiene la caracterización: "Una función $f(x)$ es absolutamente continua sobre $[a, b]$ **si y solo si** $f(x)$ es de variación limitada sobre $[a, b]$ y $f(x)$ tiene (vi) sobre todo subconjunto de $[a, b]$ que tiene medida cero". En [61] se establece algunas condiciones que implican (vi); veamos:

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in A \subset [a, b]$, entonces $f(x)$ tiene (vi) sobre A".
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene derivadas superior e inferior de Dini sobre un conjunto de medida cero, entonces $f(x)$ tiene (vi) sobre tal conjunto".

También se tiene la definición : Una función $f(x)$ tiene "(vi) condicional" sobre un conjunto $A \subset [a, b]$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ sobre $[a, b]$ tal que para cualquier partición etiquetada P subordinada a δ, se tiene $|\sum_{x_j \in A} \Delta_j f(x)| < \epsilon$. ($\Delta_j f = f(b_j - a_j)$).

Usando esta idea, se tiene un HK cambio de variables, [60]:

Teorema 8.7. *"Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene derivada ctp. y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es HK-integrable sobre todo intervalo con puntos extremos en el rango de g y si por definición $F(x) = (HK)\int_{g(a)}^x f(t)dt$, entonces $(fog)g'$ es HK-integrable sobre $[a, b]$ y se tiene*

$$(HK)\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = (HK)\int_a^b f(g(s))g'(s)ds$$

si y solo si *Fog tiene (vi) condicional sobre el conjunto donde $(Fog)' = fog.g'$ falla ".* Como una consecuencia de este resultado se tiene:

Teorema 8.8. *"si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable ctp. sobre $[a, b]$, entonces $g'(x)$ es HK-integrable sobre $[a.b]$ y se tiene $(HK)\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$* **si y solo si** *$g$ tiene (vi) condicional sobre un*

conjunto donde g no es diferenciable".
El llamado **Lema de Saks - Henstock** juega un papel importante en la ruta que estamos caminando; dice

Lema 8.2. *"Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función HK-integrable sobre $[a, b]$, $\epsilon > 0$ y δ es un calibrador de $[a, b]$ tal que si P es un partición subordinada a δ se tiene $|R(f) - (HK) \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$; entonces se tiene que para cualquier subparticion etiquetada $\{x_i, [a_i, b_i], 1 < i < n\}$ de $[a, b]$ subordinada a δ se verifica*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)(b_i - a_i) - (HK) \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \right] \right| < \epsilon.$$

Luego se tiene: "$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)(b_i - a_i) - (HK) \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \right| < 2\epsilon$".

En [63] Sarkhel - Vyborny discuten una fórmula de cambio de variables para la integral de Riemann .La fórmula que ellos estudian tiene la forma

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f[G(y)]g(y)dy \tag{8.3}$$

donde $G(y) = G(a) + \int_a^y g$; se asume que g es R-integrable sobre $[a, b]$ y que G es su Riemann primitiva. Ellos prueban 8.3 bajo ciertas condiciones. Veamos en forma breve sus argumentos.
Dado $\epsilon > 0$ existe una partición de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |G(x_i) - G(x_{i-1}) - g(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$, donde $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ y la desigualdad se mantiene aún para cualquíer refinamiento de la partición. Entonces prueban "Si $f(x)$ es acotada sobre el rango de $G(x)$ y $g(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, entonces se tiene
$\overline{\int_{G(a)}^{G(b)}} f(x)dx = \overline{\int_a^b} foG.gdx$ y $\underline{\int_{G(a)}^{G(b)}} f(x)dx = \underline{\int_a^b} foG.gdx$. Si $g \geq 0$ ó
$g \leq 0$, entonces si un lado de (8.3) existe como R-integral entonces el otro lado también existe como R-integral , y se tiene la igualdad ". Finalmente los autores prueban el resultado de cambio de variables "La fórmula (8.3) de cambio de variables es verdadera si

(a) si $f(x)$ es R-integrable sobre el rango de $G(x)$, ó
(b) si $f(x)$ es acotada sobre el rango de $G(x)$

y la integral de Riemann en el lado derecho de (8.3), existe". Ellos observan que (8.3) es aún válido si se tiene Lebesgue o Perron - integrabilidad en vez de R-integrabilidad.

(iii) **La Integral de Riemann se sigue Estudiando** ... Como observamos, por lo tratado anteriormente, la integral de Riemann se la sigue investigando en relación al teorema fundamental de cálculo y a la fórmula de cambio de variables; ya hemos visto algunas propuestas al respecto y ahora continuamos en esa ruta y en temas relacionados. Ahora vamos a comentar al trabajo R.López, [19], quien propone la integral de Riemann vía la idea de prímitivas generalizadas y usarla para proponer una demostración sobre el cambio de variables. En esta ruta surge el nombre H.Kestelman quien fue el primero, en 1961- [64], en probar el teorema de cambio de variable para la integral de Riemann; a partir de entonces se dieron otras demostraciones del citado teorema. H.Kestelman, (1908 - 1983), fue un matemático inglés que contribuyó con muchos artículos de investigación, con énfasis en el análisis matemático. Veamos su propuesta [64]: Sean F y G dos funciones diferenciables de una variable; se tiene $\frac{d}{dx}F[G(x)] = f[G(x)]g(x)$ donde f y g son las antiderivadas de F y G respectivamente. Integrando se tiene $F[G(b)] - F[G(a)] = \int_a^b f[G(y)]g(y)dy$, de donde por el TFC se tiene

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f[G(y)]g(y)dy$$

, si se tiene $G'(y) = g(y)$, $a \leq y \leq b$, y $F' = f$ en $G([a, b])$ (significa G está definida en $[a, b]$). Ahora, dice Kestelman, en vez de suponer que f y g tengan primitivas, asume que:

(a) g es R-integrable sobre $[a, b]$;
(b) G es una integral indefinida de G, esto es, $G(x) = \int_h^x g(y)dy$; $a \leq x \leq b$, donde h es fijo en $[a, b]$;
(c) f es Riemann integrable sobre $G([a, b])$.

Ahora, Kestelman concluye que bajo las hipótesis (a),(b) y (c) se tiene que la función $f[G(y)]g(y)$ es R - integrable y se tiene la fórmula (8.3). Este resultado fue puesto más generalmente por D.Preiss-J. Uher vía:

Teorema 8.9. *[P-U].Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable sobre $[a, b]$ y c una constante real y sea $G(y) = c + \int_a^y g(z)dz$ para todo $y \in [a, b]$. Si $f : G([a, b]) \to \mathbb{R}$ es una función acotada* *sobre $G([a,b])$ entonces se tiene: f es integrable sobre $G([a,b])$* **si y solo si** *$(foG)g$ es integrable sobre $[a,b]$ y se tiene $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f[G(y)]g(y)dy$".*

En [19] R.López presenta otra demostración de [PU] en donde remarca que la aplicación $y \to \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx$ es una primitiva generalizada de $(foG)g$. Más precisamente,

" Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, una primitiva generalizada de f es una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para x, y en $[a,b]$, $x < y$, se tiene

$$\inf_{x\leq t\leq y} f(t) \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq \sup_{x\leq t\leq y} f(t).$$

Se observa, [19], que las primitivas generalizadas no necesitan ser diferenciables pero que si tienen relaciones entre sus derivadas en el sentido - Dini con la función f. Un resultado interesante es que cuando f es una función continua sobre $[a,b]$ toda primitiva generalizada de f es una primitiva en el sentido usual y recíprocamente, toda primitiva es una primitiva generalizada. Luego se demuestra una equivalencia de la integral de Riemann:

"Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $I(R)$ es un número real, entonces: f es R-integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)dx = I(R)$ **si y solo si** toda primitiva generalizada F de f satisface $F(b) - F(a) = I(R)$".

Entonces se tiene: "si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces f es R-integrable **si y solo si** F y G son dos primitivas generalizadas de f, entonces $F - G$ es una constante". Además, [19], se tiene la caracterización: "Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrable, entonces la función $F : [a,b]R$ es una primitiva generalizada de f **si y solo si** para todo $x_0 \in [a,b]$ existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(y)dy, x \in [a,b]\text{''}.$$

Luego López pasa a demostrar el resultado (8.9) usando la idea de primitiva generalizada, prueba que es técnica y usa los resultados mencionados arriba; ver [19]. Finalmente el autor nos dá una visión panorámica-histórica de las contribuciones hechas sobre el tema "cambio de variables" desde 1959 hasta el 2008 (el trabajo de López es del 2011), visión muy útil pues nos precisa los tiempos en que se hicieron investigaciones hacia una integral de Riemann generalizada!.

En [65] R. López estudia la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes de funciones acotadas según el siguiente resultado:

Teorema 8.10. *"Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable; sea $G(x) = c + \int_a^x g(y)dy$, donde $x \in [a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene f es Riemann-Stieltjes - integrable con respecto a G sobre $[a,b]$* **si y solo si** *el producto fg es Riemann integrable sobre $[a,b]$ y se tiene*

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{8.4}$$

Se remarca que López estudia el problema de ta existencia de la integral del lado izquierdo de 8.4 en el sentido de Riemann-Stieltjes y que ella puede ser obtenida vía la igualdad $\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)G'(x)dx$, donde solo se exige que f sea acotada. Finalmente, se establece ([65]) que: "en las hipótesis del resultado 8.10, la función G es Riemann-Stieltjes - integrable con respecto a f sobre $[a,b]$ y se tiene

$$\int_a^b G(x)df(x) = [G(b)f(b) - G(a)f(a)] - \int_a^b g(x)f(x)dx\text{''}.$$

Cuando en la universidad nos enseñan la integral de Riemann la suma
$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ nos es familiar. Pues bien, casi todas las investigaciones hechas giran, de alguna forma, alrededor de esta suma. B.Thomson en [66] estudia esta suma. Se pregunta si a la partición usual $P : a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ se le quita la condición de ser una sucesión creciente, ¿ se obtiene aún una útil aproximación a la integral? , (esta cuestión fue también formulada por Herbert Robbins en 1943) ... la respuesta es: sí, si se pone adecuadas hipótesis. En resumen recordemos que la fórmula es:

$$F(G(b)) - F(G(a)) = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f(G(t))dG(t) = \int_a^b f(G(t))g(t)dt,$$

donde se tiene $F(x) = \int_{G(a)}^{x} f(u)du$ y $G(y) = \int_{a}^{y} g(v)dv$. Luego se pasa a probar un resultado de cambio de variables relacionado con la integral de Henstock-Kurzweil:

Teorema 8.11. *"si g es una función HK-integrable ó R-integrable con G una integral indefinida sobre $[a, b]$, y si f es una función de valor real sobre $G([a, b])$, entonces se tiene*

$$\int_{a}^{b} f(G(x))dG(x) = \int_{a}^{b} f(G(y))g(y)dy,$$

donde si una de las integrales existe en el sentido HK o R integral , la otra también existe en tales sentidos y se tiene la igualdad".

La cuestión del cambio de variables fue puesto en el contexto de las diferentes clases de integrales; así, [66], se tienen los resultados: "Sea G una función continua de variación acotada sobre $[a, b]$ y sea f es continua sobre $G([a, b])$, entonces se tiene $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(G(y))dG(y)$, donde las integrales existen en el sentido de Riemann y de Riemann-Stieljes, respectivamente".

Ahora se presenta una fórmula par la HK-integral: "Sea G una función continua, de variación acotada sobre $[a, b]$ y sea F una función diferenciable sobre $G([a, b])$, entonces se tiene $\int_{G(a)}^{G(b)} F'(x)dx = \int_{a}^{b} F'(G(y))dG(y) = F(G(b)) - F(G(a))$, donde las integrales son HK".

El trabajo de Thomson culmina con una demostración más adecuada de lo hecho por Kestelman y por Preiss Uhler:

Teorema 8.12. *"sea g una función R-integrable sobre $[a, b]$ con integral indefinida $G(x) = \int_{a}^{x} g(y)dy$, $a \leq x \leq b$, y sea f una función acotada sobre $G([a, b])$, entonces se tiene*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(G(x))dG(x) = \int_{a}^{b} f(G(x))g(x)dx$$

donde las integrales son en el sentido de Riemann siempre que f es R-integrable sobre $G([a, b])$, ó la integral del centro existe como RS-integral ó la función $(foG)g$ es R-integrable sobre $[a, b]$ ".

Como seguramente sentimos, el teorema fundamental del cálculo y la suma de Riemann fue el centro de los estudios hechos desde el siglo XIX hasta la actualidad, sin desconocer los trabajos pioneros de Newton y de Leibniz. En esta ruta estamos caminando y aún hay cosas por informar. Así, E. Talvila en [68] observa que si f, acotada, es R-integrable en $[0, 1]$ y se define $F(x) = \int_{0}^{x} f(z)dz$, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo, $x \in [0, 1]$. Luego, si $0 \leq x < y \leq 1$ se tiene
$|F(x) - F(y)| \leq \int_{x}^{y} |f(z)|dz \leq M|x - y|$. Esta desigualdad sugiere que la función F esté en algún espacio de funciones sobre $[0, 1]$. ¿F es una función de Lipschitz? Alrededor de esta situación Talvila se plantea algunas cuestiones: ¿cómo caracterizar integrales de funciones que sean R-integrables? ... Para integrales de Lebesgue se tiene " $f \in L^1([0, 1])$ **si y solo si** existe una función F que es absolutamente continua sobre $[0, 1]$ tal que $F' = f$ ctp en $[0, 1]$; además, $\int_{0}^{1} f(x)dx = F(1) - F(0)$". De esta manera: "$f$ es L-integrable **si y solo si** f es expresable ctp como la derivada de una función F que es absolutamente continua". La cuestión ahora es ver como es el asunto si se reemplaza "Lebesgue"por "Riemann". Así se tiene (Talvila): ¿ cuáles son las condiciones sobre una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ que son **si y solo si** para tener $F(x) = \int_{a}^{x} f(y)dy + C$, donde C es una constante y f es R-integrable?"

Para el caso de la integral de Denjoy-Perron se tiene: "$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua generalizada **si y solo si** $F(x) = \int_{a}^{x} f(y)dy + C$, con C un constante y f es D ó P -integrable sobre $[a, b]$". Esta cuestión también fue formulada para funciones de variación acotada . En 1911, F.Riesz [69] formuló el siguiente problema: "dada una función $F(x)$, ¿existe o no existe una función $f(x)$ de variación acotada de la cual es su integral indefinida? ... Riesz asume, condición necesaria, que $F(x)$ es la integral indefinida de una función real $f(x)$ de variación acotada definida en el intervalo (a, b), f puede o no ser continua. Luego descompone (a, b)en un número finito de subintervalos (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, ...m - 1$, $x_0 = a$, $x_m = b$; considera la suma

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left| \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i))}{x_{i+1} - x_i} - \frac{F(x_i) - F(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \right|. \tag{8.5}$$

Luego concluye con la sentencia: "una función $F(x)$ definida en el intervalo (a, b), real o no, es una integral indefinida de una función de variación acotada $f(x)$ si y solo si la suma 8.5 no excede alguna cota finita, independiente del número de subintervalos y como se descompone el intervalo (a, b)".

Nota 8.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para la partición*
$P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ de $[a, b]$, sea el número

$V_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$. Sea $V(f) = supV_p(f)$; en general se tiene $V \leq \infty$. Se dice que f es una función de variación acotada sobre $[a,b]$ si $V < \infty$. Toda función monótona es de variación acotada; no toda función continua lo es. Ver [22], I.

Volvamos al artículo de Thomson [67]. “Remarquemos que la cuestión que estamos tratando es “caracterizar a las integrales de Riemann indefinidas” ya F.Riesz, Talvila pensaron en este problema. Thomson, en su citado trabajo, prueba un resultado similar a la idea de Riesz: “una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es representable en la forma

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy + C, \, a \leq x \leq b,$$

para alguna constante C y f es una función R-integrable sobre $[a,b]$ **si y solo si** para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{F(\xi_i) - F(x_{i-1}))}{\xi_i - x_{i-1}} - \frac{F(x_i) - F(\xi_i'))}{x_i - \xi_i'} \right| (x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

para toda partición $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$,la que es δ- fina y para cualquier elección de los puntos $x_{i-1} \leq \xi_i \leq \xi_i' < x_i$”.

La corriente que surgió en varios estudiosos del problema de cambio de variables fue dar demostraciones ”simples”del teorema de cambio de variables para la integral de Riemann.En esta dirección veamos lo propuesto por H. Tandra, [31], quien nos da dos versiones de tal teorema.

Teorema 8.13. *“ Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable sobre $[a,b]$, $c \in [a,b]$ y $F(x) = \int_c^x f(z)dz$, $x \in [a,b]$. Entonces, $(goF)f$ es una función R-integrable sobre $[a,b]$* **si y solo si** *g es una función R-integrable sobre $F([a,b])$; y se tiene $\int_a^b g(F(x))f(x)dx = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)dy$”.*

Tantra nos recuerda los resultados sobre R-integrabilidad que por razones didácticas reproducimos

- “Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de Lípschitz tal que $F' = f$ ctp, donde f es R-integrable sobre $[a,b]$, entonces se tiene $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$”. Tandra prueba este resultado y establece la consecuencia: “Si f es R-integrable sobre $[a,b]$ y F es una función continua tal que $F'(x) = f(x)$, excepto sobre un conjunto enumerable, entonces se tiene

  $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)”.$$

  [$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz si existe $M > 0$ tal que se tiene $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$; para todo x, y en $[a,b]$. Se sabe que si f es de Lipschitz y $f'(x) = 0$, excepto sobre un conjunto de medida cero, entonces f es una función constante sobre $[a,b]$].
- “Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable, continua en x_0, entonces la función $g(x) = \int_a^x f(y)dy$, $x \in [a,b]$, es diferenciable en x_0 y se tiene $g'(x_0) = f(x_0)$”. [Este resultado fue estudiado por R.G.Bartle- D.R.Sherbert ,2000.]
- Dada una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ con derivada F' finita sobre $E \subseteq [a,b]$, entonces $F(E)$ tiene medida cero **si y solo si** $F' = 0$ ctp. sobre E ”. [Este resultado fue estudiado por J.B.Serrin- D.E. Varberg en 1969] .

El problema de cambio de variables para integral de Riemann también se ha estudiado para el caso multidimensional, ver [71]. También en [72] A.Kuleshov estudia este problema. Nos recuerda que en 1961 Kestelman fue el primero en demostrar tal problema, así como Preiss-Uher complementaron el resultado de Kestelman, cuyos trabajos ya fueron enunciados anteriormente. El teorema que Kuleshow estudia es: “sea $g \in R[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$; por definición $G(x) = \int_a^x g(y)dy + c$ y sea f una función acotada sobre $I = [G(a), G(b)]$ y sea $(foG)g \in R[a,b]$. Entonces, $f \in R[I]$ y se tiene

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f(G(y))g(y)dy”.$$

Y los estudios sobre la integral de Riemann continúan ,como veremos enseguida! ...

9. Otro Punto de Vista de la Integral de Riemann. . Bernhard Riemann (1826-1866) fue un célebre matemático que introdujo profundas ideas sobre el espacio geométrico que contribuyeron al posterior desarrollo de la física del siglo XX, en particular en la teoría general de la relatividad de Einstein. Hizo notables aportes en la teoría de variable compleja, en la teoría de números, en la física matemática. En particular, y esto es el tema de este escrito: introdujo una mejor definición de “integral”, idea que encierra su famosa "sumatoria de Riemann"que muchos años después fue centro de investigaciones en el siglo XX y en el actual. Propuso la ahora llamada "Hipótesis de Riemann", un problema que hasta ahora está abierto!

En esta oportunidad vamos a tratar de dar una visión del aporte de A.Torchinsky sobre este tema que estamos exponiendo: la fórmula de cambio de variable para la integral de Riemann e integrales relacionadas. Comenzamos con el artículo [35]. Veamos las definiciones previas; $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$; G es una función continua creciente definida sobre I; sea $P = \{I_i\}$ una partición de I, donde $I_i = [x_{i,l}, x_{i,r}]$, además, sea f una función acotada sobre I. Se pone $U(f, G, P)$ y $L(f, G, P)$ para expresar las sumas superior e inferior de Riemann, respectivamente, de f con respecto a G sobre I y a P. Así ,se tiene

$U(f, G, P) = \sum_i (sup_{I_i} f)(G(x_{i,r}) - G(x_{i,l}))$ y $L(f, G, P) = \sum_i (inf_{I_i} f)(G(x_{i,r}) - G(x_{i,l}))$. Sea ahora $U(f, G) = \inf_P U(f, G, P)$ y $L(f, G) = \sup_P L(f, G, P)$. Entonces se dice que:

f es Riemann integrable (R-integrable) con respecto a G sobre I si $U(f, G) = L(f, G)$;

el valor común se denota $\int_I f dG$, que es la integral de Riemann de f con respecto a G sobre I.

Nota 9.1. *Si $G(x) = x$ se obtiene la definición conocida de integral de Riemann sobre I. El autor remarca que "integrable"significa integrable Riemann con respecto a $G(x) = x$, y que "integrable Riemann-Stieltjes"significa integrable con respecto a G más general.*

Ahora Torchinsky establece el teorema que probará y que es una formulación general de lo propuesto por Preiss-Uher y por Kestelman sobre la fórmula de cambio de variables, ya vistos en la sección anterior. Tal fórmula es

Teorema 9.1. *[T]"Sea g una función acotada, R-integrable definida sobre $I = [a, b]$, y sea G una integral indefinida de g sobre I. Sea f una función acotada sobre $G(I)$ (el rango de G) . Entonces se tiene: "f es R-integrable sobre $G(I)$* **si y solo si** *$f(G)g$ es R-integrable sobre I y se tiene entonces*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_I f(G(x))g(x)dx".$$

Se sugiere ver los respectivas fórmulas de Preiss-Uher y Kestelman y observar que este resultado es más general que aquellas. Antes de dar la demostración de este resultado, el autor nos dá una caracterización sobre la R-integrabilidad que extiende resultados análogos de otros autores. Así, se tiene: "Sea f una función acotada sobre I, entonces se tiene: " f es R-integrable con respecto a G sobre I **si y solo si** dado $\epsilon > 0$ existe una partición P de I, que puede depender de ϵ tal que

$$U(fG, P) - L(f, G, P) \leq \epsilon \tag{9.1}$$

Además, esta desigualdad es equivalente a la existencia de una sucesión $\{P_n\}$ de particiones de I tal que $lim_{n\to\infty}[U(f, G, P_n) - L(f, G, P_n)] = 0$; y en este caso se tiene $lim_{n\to\infty}U(f, G, P_n) = lim_{n\to\infty}L(f, G, P_n) = \int_I f(x)dG(x)$".

Se observa que si 9.1 se tiene, entonces también se tiene para toda partición P' mas fina que P. Luego Torchinsky demuestra otros resultados, en el primero considera la noción de "oscilación de una función". Precisemos esta noción. Sea f uná función acotada, definida sobre I y sea un intervalo $J \subset I$. Por definición, la oscilación $osc(f, J)$ de f sobre J se define como $osc(f, J) = sup_J f - inf_J f$. Entonces se establece el siguiente resultado:

"Sea f una función acotada sobre I; entonces se tiene: f es R-integrable con respecto a G sobre I **si y solo si** dado $\epsilon > 0$, existe una partición $P = \{I_i\}$ de I, que puede depender de ϵ, tal que $\sum_i osc(f, I_i)[G(x_{i,r}) - G(x_{i,l})] \leq \epsilon$. Además, f es R-integrable con respecto a G sobre I **si y solo si** existe una sucesión $\{P_n\}$ de particiones de I, donde $P_n = \{I_i^n\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i osc(f, I_i^n)[G(x_{i,r}^n) - G(x_{i,l}^n)] = 0".$$

Luego el autor pasa a establecer un resultado que relaciona la integral de Riemann-Stieltjes con la integral de Riemann. El lector es invitado a relacionar estos resultados con los ya establecidos en la sección anterior. Se observa en el artículo que para f integrable , la composición $f(G)$, $[foG]$, resulta Riemann-Stieltjes-integrable, a pesar de que $f(G)$ puede no ser integrable, aun si G es una función continua. Así, se tiene: "sea f una función acotada sobre $G(I)$. Entonces f es integrable sobre $G(I)$ **si y solo si** $f(G)$ es R-integrable con respecto a G sobre I; y se tiene

$$\int_{G(I)} f(x)dx = \int_a^b f[G(y)]dG(y)".$$

Ahora se va a reducir el cómputo de una integral Riemann-Stieltjes a una integral de Riemann, ver [66]; sea g una función acotada, R-integrable definida sobre $I = [a, b]$ y sea G una integral indefinida de g sobre I, esto es $G(x) = G(a) + \int_a^x g(y)dy$, $x \in I$. Entonces se tiene, ver [65], "sea $G(x)$ como antes y $g > O$; sea f una función acotada sobre I. Entonces f es R-integrable con respecto a G sobre I **si y solo si** fg es Riemann integrable sobre I, y en este caso se tiene

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(y)g(y)dy;$$

además, si la integral en un lado de la igualdad existe, entonces también existe la otra integral".

Nota 9.2. *La prueba de este resultado es un poco larga y hace uso de la idea de oscilación. Luego el autor pasa a demostrar su resultado [T], la fórmula del cambio de variables, demostración que es larga y sería interesante en un seminario hacer los detalles.*

En [73] A.Torchinsky sigue estudiando la fórmula de cambio de variables; esta vez para la integral de Riemann-Stieltjes, de un modo más general. Luego de considerar algunos argumentos y resultados ,el autor demuestra dos fórmulas generales:

Teorema 9.2 (Fórmula de substitución). *[T1] "Sea g una función acotada, R-integrable sobre $I = [a, b]$, la que no cambia de signo sobre I; sea G una integral indefinida de g sobre I; sea h una función acotada ,R-integrable ,definida sobre $G(I)$ (es el rango de G), y sea H una integral indefinida de h sobre $G(I)$. Sea f una función definida y acotada sobre $G(I)$; entonces si f es R-integrable con respecto a H sobre $G(I)$, se tiene que $f(G)h(G)$ es R-integrable con respecto a G sobre I, y se tiene entonces*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dH(x) = \int_a^b f(G(y))h(G(y))dG(y)\text{''}.$$

El siguiente resultado que se menciona incluye a lo establecido en [T1] y dice: "Sea G una función continua y monótona definida sobre I y sea H una función definida sobre $J = G(I)$; sea f una función acotada sobre J. Entonces se tiene, f es R-integrable con respecto a H sobre J **si y solo si** $f(G)$ es R-integrable con respecto a $H(G)$ sobre I, y en este caso se tiene

$$\int_{G(I)} f(x)dH(x) = \int_I f(G(y))dH(G(y))\text{''}.$$

Luego de estudiar un técnico lema, el autor pasa a demostrar su fórmula de substitución. En seguida estudia la fórmula de cambio de variables en el contexto que se presenta en este artículo y dice:

Teorema 9.3 (T2). *"Sea g una función acotada, R-integrable definida sobre $I = [a, b]$ y sea G una integral indefinida de g sobre I; sea h una función acotada, R-integrable definida sobre $G(I)$ (rango de G), función que no cambia de signo sobre $G(I)$ y sea H una integral indefinida de h. f es una función acotada definida sobre $G(I)$. Entonces se tiene f es una función R-integrable con respecto a H sobre $G(I)$* **si y solo si** *$f(G)g(G)$ es R-integrable con respecto a G sobre I, y se tiene*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dH(x) = \int_a^b f(G(y))g(G(y))dG(y), \text{ donde } J = [G(a), G(b)]\text{''}.$$

El articulo contiene interesantes comentarios donde relaciona los presentes resultados con los de anteriores autores, como Preiss-Uher, Kestelman, R.O.Davies, ...

El tercer articulo de Torchinsky que gustaríamos comentar es [36] en donde motivado por aspectos físicos considera una modificación en las sumas de Riemann de funciones integrables Riemann-Stieltjes y demuestra que tales sumas son convergentes. Según el autor, la idea básica fue motivada por un trabajo de Baozhu Lu - Darius H.Torchinsky (2018) en la recuperación de la señal en ciertas situaciones. Luego pasa a comentar algunos aspectos relacionados con la teoría de la señal relacionándolos con las sumas de Riemann y en este contexto tales sumas son convergentes vía experimentación de Lu-Torchinsky. Por completitud veamos las nociones ,ya familiares, a ser usadas. $I = [a, b]$, δ es una función creciente definida sobre I; $P = \{I_i\}$ es una partición de I, $I_i = [x_{i,l}, x_{i,r}]$; f es una función acotada sobre I y sean $U(f, G, P)$ y $L(f, G., P)$ las sumas de Riemann superior e inferior, respectivamente, de f con respecto a G a lo largo de P sobre I. $U(f, G)$ y $L(f, G)$ son definidos como antes. f es R-integrable con respecto a G sobre I si $U(f, G) = L(f, G) = \int_I f dG$, integral de Riemann de f con respecto a G sobre I. También se tiene

f es Riemann-Stieitjes-integrabie **si y solo si** dado $\epsilon > 0$ existe una partición P de I, que puede depender de ϵ, tal que $0 \leq U(f, G, P) - L(f, G, P) \leq \epsilon$. $\int_I f dG$ es la integral de Riemann-Stieltjes de f. Luego de una discusión sobre tales sumas, el autor pasa a modificar las sumas de Riemann. Se remarca que G es asumida ser una integral indefinida ($G(x) = G(a) + \int_a^x g(y)dy$, donde $g > 0$ es acotada y R-integrable sobre I).

Sea H una función conjunto definida sobre subintervalos $J \subset I$, tal que a cada J le corresponde un subconjunto $H(J) = J^1$, $J^1 \subset I$, tal que cumple

- $\mathcal{X}_{H(J)}$ (función característica) es R-integrable, y desde luego la longitud $|J^1|_G$ de J^1 es bien definida como $|J^1|_G = 0$ si $J^1 = \emptyset$, y $|J^1|_G = \int_I \mathcal{X}_{H(J)} g$, en lo contrario;
- existe $\eta > 0$ tal que $J^1 = H(J) \subset J$, siempre que $|J| < \eta$. Por otro lado, Torchinsky nos dice, dada una partición P de I, I_1, I_2, ..., I_m, P^1 denota la colección de subconjuntos de I que consiste de las imágenes
  $I_1^1 = H(I_1)$, ..., $I_m = H(I_m)$; ahora se construye las sumas
  $$u(f,G,P^1) = \sum_i (\sup_{I_i^1} f)|I_i^1|_G \ \text{ y } \ l(f,G,P^1) = \sum_i (\text{ínf}_{I_i^1} f)|I_i^1|_G$$

Estas sumas, dice el autor, son las "modificadas sumas superior e inferior de Ríemann"de f con respecto a G a lo largo de P sobre I respectivamente.

Por analogía, se pone: $u(f,G) = \text{ínf}_P\, u(f,G,P^1)$ y $l(f,G) = \sup_I l(f,G,P^1)$.

Se observa que $l(f,G) \le u(f,G)$. Se tiene el criterio de convergencia: "las sumas de Riemann modificadas de f con respecto a G sobre I son convergentes si $u(f,G) = l(f,G)$". Así, las sumas de Riemann modificadas de f con respecto a G sobre I dadas por

$$s(f,G,P^1) = \sum_i f(\xi_i^1)|I_i^1|_G, \text{ donde } \xi_i^1 \in I_i^1 \tag{9.2}$$

que están en el intervalo $[l(f,G,P^1), u(f,G,P^1)]$, convergen a un límite común, según el resultado que sigue.

Teorema 9.4 (T3). *Sea f una función acotada, R-integrable con respecto a G sobre I. Entonces, las sumas modificadas de Riemann de f con respecto a G sobre I son convergentes. Además, existe una sucesión de particiones $\{P_n\}$ de I tal que*

$$\lim_{n\to\infty} [u(f,G,P_n^1) - l(f,G,P_n^1)] = 0 \tag{9.3}$$

y, para cualquier sucesión de particiones $\{P_n\}$ de I que satisface 9.3 se tiene

$$u(f,G) = \lim_{n\to\infty} u(f,G,P_n^1) = \lim_{n\to\infty} l(f,G,P_n^1) = l(f,G)$$

Finalmente, para sumas modificadas de Riemann cualquiera $s(f,G,P_n^1)$ de f con respecto a G sobre I, definida vía 9.2, también convergen a $u(f,G') = l(f,G)$".

Nota 9.3. *El autor discute luego cuatro ejemplos donde pone en juego las ideas dadas anteriormente y donde surge la idea de la integral en el contexto de tales ideas .Sería muy ilustrativo para un lector interesado en estudiar detenidamente estos ejemplos . Terminamos esta sección dando una visión panorámica de libro de A.Torchinsky: "Una Moderna Visión de la Integral de Riemann", [34], publicado en el 2022 y que nos da información sobre la teoría moderna de la integral de Riemann.*

El citado libro consta de un Prefacio, una introducción, seis secciones, dos apéndices y una amplia referencia. Las secciones son:

- 1. La Π-integral integral de Riemann;
- 2. Un teorema de convergencia;
- 3. Las Π-sumas de Riemann modificadas;
- 4. El modelo e integrales uniformes;
- 5. Integrales impropias y dominadas;
- 6. Coda (lo final). (Integrales estocásticas).
- Apéndice I. Fórmulas de cambio de variables y fórmula de substitución.
- Apéndice II. Integrabilidad de Cauchy implica integrabilidad Riemann.
- Referencias. Se dan 108 referencias.

En el **Prefacio** el autor remarca que su publicación descansa en tres observaciones:

1er. el criterio de la integrabilidad-Riemann se dá en términos de oscilaciones;

2do. se analiza la naturaleza de las sumas de Riemann y se introduce las ideas de familias admisibles de particiones y la de sumas de Riemann modificadas; y

3er se analiza el hecho de que muchas de las reglas de cálculos numéricos hacen uso de la elección de las sumas de Riemann ,y luego de la integral de Riemann, propia o impropia.

En la **Introducción** nos da un panorama histórico, desde Riemann hasta autores más actuales; además explica los criterios usados al escribir su obra. Termina explicando el objetivo de las seis secciones, asi como de los dos apéndices. Pasemos a ver un panorama de tales secciones y apéndices .Observamos que lo tratado en los tres artículos de Torchinsky, vistos anteriormente, nos ayuda a comprender el contenido de tales secciones.

9.1. La Π-Integral de Riemann. Se introduce tal integral y se estudia sus propiedades básicas.Se observa que aún cuando las sumas de Riemann puedan converger ,ellas pueden hacerlo de un modo "despacio"; ello sucede cuando se calcula el volumen de un lago. Se discute algunos hechos históricos sobre la

R-integral relacionándola con el conjunto de Cantor. Discute el problema de calcular el volumen de un lago haciendo argumentos históricos, que creemos son de gran valor. Luego se discute la regla de Aproximación de las sumas a la integral, así como de las cuadraturas. Se estudia también la monotonicidad de las sumas de Riemann. Esta sección es un poco extensa pero motiva pues se dan los detalles de lo propuesto, contiene teoremas y proposiciones que ayudan a sintetizar las ideas.

9.2. Un Teorema de Convergencia. En esta sección el autor demuestra un básico teorema de convergencia para la integral de Riemann, que dice: "sea Π una familia admisible de particiones de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$; sea $\{\psi_n\}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones R-integrables sobre I tal que para algún $a \in \mathbb{R}$ y para todos los subintervalos $J \subset I$, los cuales pertenecen a alguna partición P de I en Π, se cumple: $\lim \int_J f(x)\psi_n(x)dx = a|J|$. Entonces se tiene para toda función f R-integrable sobre I que $\lim \int_I f(x)\psi_n(x)dx = a\int_I f(x)dx$. Además, también se tiene: sea $F = \{\phi\}$ una familia de funciones R-integrables sobre I de modo que funciones continuas sobre I pueden ser aproximadas uniformemente por funciones en la expansión de F . Entonces, si $\{\psi_n\}$ es una familia acotada de funciones R-integrables tal que $\lim \int_I \psi_n(x)\varphi(x)dx = a\int_I \varphi(x)$ para todo $\varphi \in F$, se tiene que $\lim \int_I \psi_n(x)f(x)dx = a\int_I f(x)$, para toda función f R-integrable sobre I".

Se observa que este resultado está relacionado con los teoremas de aproximación de Weierstrass.

Nota 9.4. *Una familia $\Pi = \{P\}$ de particiones de I es llamada "admisible "si satisface:*

- *dado $\eta > 0$, existe una partición P de I en Π tal que $||P|| \le \eta$;*
- *si P y P_1 son particiones de I en Π, entonces existe una partición P_2 de I en Π el cual es un refinamiento de P y de P_1.*

Esta noción es la base de los argumentos dados en la sección. Además se tiene la definitión:

Definición 9.1. *f es* **Π-Riemann integrable** *sobre I si existe un número R tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|S_\Pi(f,P,C) - R| \le \epsilon$ para toda partición etiquetada (P,C) de I, $P \in \Pi$, con $||P|| < \delta$, donde $S_\Pi(f,P,C)$ denota la suma de Riemann de f con respecto a la partición etiquetada (P,C) dada en $S_\Pi(f,P,C) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)|I_i|$ con $C = (\xi_1,..,\xi_m)$, $\xi_i \in I_i$, $1 \le i \le m$; P es restringido a Π. Se observa, también, que una definición similar se puede dar para la Π-Darboux integral de f.*

Luego se estudia el lema de Riemann-Lebesgue, los teoremas de aproximación de Weierstrass, la aproximación por polinomios trigonométricos. Así, esta sección nos amplía el panorama sobre la convergencia de las sumas de Riemann.

9.3. Las Π-Sumas de Riemann Modificadas. En esta sección se introduce las Π-sumas de Riemann modificadas sobre conjuntos, no necesariamente intervalos, en los cuales se considera las particiones en el contexto de Π. Ver [36]. Bajo ciertas condiciones se demuestra un teorema que explica el comportamiento de las sumas Π-Riemann de una función f Π-Riemann integrable sobre I. Luego pasa a discutir algunos ejemplos relacionados con la teoría integral Π - Riemann. También considera las sucesiones uniformemente distribuidas y prueba que estas sucesiones son equivalentes a límites promedios que dan una integral sobre I, en el caso de funciones continuas. La sección termina dando un serie de resultados en relación a límites en el contexto de tales sucesiones.

9.4. El Modelo e Integrales Uniformes. En esta sección Torchinsky menciona que las aplicaciones originales de las integrales modelos fueron limitadas a métodos de sumabilidad (J.D.Hill, 1953), el autor está interesado en usar modelos, vía las modificadas sumas Π-Riemann. En este contexto introduce los conceptos previos a ser utilizados, como el de "modelo variable". En este camino se tiene conexión con un trabajo de modelos de integral de R.E.Carr-J.D.Hill (1951), resaltando que los resultados de Torchinsky son más generales que Carr-Hill. La sección termina informando la conexión que existe entre las integrales uniformes con la geometría de los números, lo cual fue puntualizado por B.J. Walsh en 1965.

9.5. Integrales Impropias y Dominadas. Como sabemos, desde la época de estudiantes, que la integral de Riemann $\int f(x)dx$ es asumida con f acotada sobre un intervalo cerrado $[a,b]$; cuando una, o ambas condiciones falla se tiene la integral impropia, de 1er tipo si falla la acotación y de 2do tipo si falla el dominio cerrado, el dominio es infinito. En esta sección se discute las integrales impropias de ambos tipos usando el lenguaje de las anteriores secciones. También se discute las integrales dominadas en el sentido que se explica en la sección. Brevemente veamos algunos argumentos". Sea f una función del 1er tipo definida en $I = (a,b]$ Se dice que la integral de Riemann impropia de f converge y tiene como valor $\int_{[a^+,b]} f(x)dx$, si f es R-integrable sobre $[a+\epsilon,b]$ para todo $\epsilon > 0$ y se tiene $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{[a+\epsilon,b]} f(x)dx = \int_{[a^+,b]} f(x)dx$". En esta dirección el autor propone: "Sea f una función definida sobre $(0,1]$ y F una función monótona decreciente cuya integral impropia converge y tal que $|f(x)| \le F(x)$ sobre $(0,1]$.

Entonces f es R-integrable, absolutamente impropia sobre $[0,1]$; y si Π es una clase de particiones de $[0,1]$ conteniendo particiones P con norma $||P||$ arbitrariamente pequeña tal que $\lim_{||P||\to 0} S_\Pi(F,P,C) = \int_{[0^+,1]} F(x)dx$, entonces para la misma familia Π de particiones P de $[0,1]$ se tiene: $\lim_{||P||\to 0} S_\Pi(f,P,C) = \int_{[0^+,1]} f(x)dx$".

Con respecto a la integral dominada se afirma: "Si f es definida sobre $(0, 1]$ se dice que f es **integrable dominadamente** si existe un número real D tal que para todo $\epsilon > 0$, existen $0 < \delta, \eta < 1$ tal que $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - D| \leq \epsilon$ donde $0 < x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$, $x_0 < \eta$, $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y $x_{i-1} > (1 - \delta)x_i$, $i = 1, ..., n$.
Si D existe, él es único, y es llamada la **integral dominada** de f. Torchinsky verifica que "si f es integrable dominadamente, entonces f es R-integrable sobre $[a, 1]$, con $0 < a < 1$". Por otro lado, respecto a las integrables impropias de 2do tipo se nos dice: una función f definida sobre $[0, \infty)$ y que es R-integrable sobre $[0, r)$ para todo r, tiene integral impropia de Riemann sobre $(0, \infty)$ si existe el límite $\lim_{r\to\infty} \int_{[0,r]} f(x)dx = \int_{[0,\infty)} f(x)dx$. Se observa que estas funciones no son necesariamente L-integrable sobre $[0, \infty)$. Ver [34] para los detalles de esta interesante sección, así como también de lo afirmado anteriormente.

9.6. Coda. En esta última sección se discute una extensión de la integral de Riemann - Stieltjes por ser esta integral la que aparece con frecuencia en el análisis de los procesos estocásticos, en particular en el trabajo de J.Liu, [74], donde las integrales son tomadas como límites de sumas de Riernann-Stieltjes, al estilo de las integrales que aparecen en tal área de las probabilidades. El autor cita su trabajo [36]. Luego de presentar varios ejemplos y resultados se concluye con algunas reflexiones sobre la integral de Riemann.

9.7. Apéndice I. Esta parte está dedicada a las fórmulas de cambio de variable para la integral de Riemann donde el autor considera los trabajos de Preiss-Uher (1970) ,así como destaca el trabajo pionero de Kestelman (1961) en esta área, en donde los aportes de R.J.Bagby (2001/02), R.López (2011), D.N. Satchel-R.Vyborny (1996/97), B.S. Thomson (2011/12), entre otros, son considerados y que anteriormente hemos ya expuesto. Además, también discute la fórmula de substitución; ambas fórmulas en el contexto de la integral de Riemann como la de Riemann-Stieltjes. Torchinsky termina el apéndice con la reflexión: "no siempre lo más general, es lo más útil".

9.7.1. Apéndice II. Esta breve parte está dedicada a un clásico resultado: "si f es integrable según Cauchy, f es integrable según Riemann". Creemos que el autor ha deseado rescatar el valor histórico de dos grandes analistas del siglo XIX ,Cauchy y Riemann, cuyas ideas fue el punto de partida de toda esta hermosa historia y que ,capaz, no es bien conocido por algunos estudiantes o profesores .Se prueba un único teorema al respecto.

El estudio detallado del libro citado de Torchinsky podría ser de mucha utilidad para motivar estudios sobre un tema que aún se investiga. En nuestro medio, se usaría en seminarios o cursos de maestría o doctorado que conducirían a diversas tesis para los jóvenes estudiantes de matemáticas. También existen otros excelentes libros sobre esta área (ver la bibliografía en [34]) que complementarían los proyectos.

faltaría añadir un cuadro con los autores y sus respectivas integrales.

Autor	Año
Cauchy	1821
Riemann	1854
Darboux	1875
Riemann-Stieltjes	1894
Lebesgue	1901
Young	1905
Denjoy	1912
Radon	1913
Perron	1914
Khinchin	1916
Daniell	1917
Haar	1933
Bochner	1933
Birkhoff	1935
Dunford	1935

Pettis	1937
Henstock-Kurzweil	1957-1961
A.Calderón(variedades)	1970
McShane	1983
C-integral	1996
Teoría Moderna Int. Riemann	Siglos XX y XXI

Tabla 9.1: Evolución de la Idea Integral a Través del Tiempo

Nota 9.5. *La idea de integral, desde la época de Newton y Leibniz, contribuyo notablemente en el desarrollo de la matemática pura y de la aplicada, y de esta manera en el desarrollo de la ciencia con los beneficios que tuvo la humanidad. Didácticamente, el tener una visión gobal de la evolución de tal idea contribuye mucho en el aprendizaje de las diversas partes de la matemática, donde ella interviene.*

10. Unas Breves Palabras, aún .... Y bien, hemos llegado al final de una larga caminata por caminos llenos de ideas,mensajes y motivaciones matemáticas .En los artículos I, II y III el objetivo fue presentar como la idea de integral, cuyo germen está en la lejana Grecia con Arquímedes, fue evolucionando a través del tiempo, hasta hace pocos años. Confiamos, y esto es el objetivo principal, que a las actuales y posteriores generaciones, estos escritos les puedan ser útiles en sus propios proyectos.

Pero, al final del camino se vislumbra otra ruta y a la entrada se lee: "Analisis Armónico-Procesos Estocásticos ¿Que son las integrales estocásticas?"

Homenaje Póstumo. Rendimos nuestro homenaje al Profesor Dr. Julio Ruiz Claeyseen por sus valiosas contribuciones a la matemática y con ello al progreso de nuestra ciencia en el Perú. Apreciamos también sus condiciones personales de buen amigo, con quien nos unió una recordada amistad.

Contribuición del autor. El artículo a sido desarrolla en su integridad por la autora: AO.

Conflicto de interés. El autor declara no tener conflicto de interes.

ORCID and License

Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] Bartle RG. Return to the Riemann Integral. American Mathematical Monthly. 103,8. 1980.
[2] Beires-Dias MM. Los espacios de Sobolev-Bocher[Internet], Santiago de Compostela, Univ. de Santiago de Compostela. 2021[consultado en mayo 2023]https://minerva.usc.es/xmlui/handle/10347/28928.
[3] Bongiorno B. On the C-integral. Dpto Mathematics University of Palermo. Arch. 34, 90123. 2002.
[4] Bongiorno B. On the minimal solution of the problem of primitives. J. of Mathem. Anal. and Aplic. 2000; 251.
[5] Bongiorno B, Di Piazza L, Preiss D. A constructive minimal integral wich includes Lebesgue integrable functions and derivates. AMS. 2014; 28A15-26A39.
[6] Brito W. Las integrales de Riemann, Lebesgue y Hernstock- Kurzweil[Internet], ULA-Venezuela; [accesado en 19 febrero 2023].Disponible en http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf
[7] Calderón AP, Zygmund A. Local properties of solutions of partial differential equations. Studia Math. 20. 1961.
[8] Calderón AP. Theory of pseudo differential operators on manifolds. Lecturas. Universidad de Chicago. 1970.
[9] Feauveau J-Ch. A generalized Riemann integral for Banach- valued functions[Intenret]. Real Analysis Exchange. Pp 919-930.Fr. Disponible en FedersonM. SomepecularitiesoftheHenstockandKurzweilintegralsofBanachspace-valuedfunctions
[10] Federson M. Some pecularities of the Henstock and Kurzweil integrals of Banach space-valued functions[Intermet]. Dpto. de Matem. Univ. Sao Paulo. 1993[accessado 12 marzo 2023]. Disponible en https://sites.icmc.usp.br/federson/birkhoff3.pdf.
[11] Fremlin DH, Mendoza J. On the integration of vector-valued functions. Illinois. J. of Mathematics. 1994; Vol 38, No 1.
[12] Fremlin DH. The Henstock and McShane integrals of Banach space-valued functions. Illinois. J. of Mathematics. 1994; Vol 38, No 1.
[13] Fremlin DH. The generalized McShane integral. Illinois. J. of Mathematics. 1995; Vol 39, No 1.
[14] Gordon L. Perron's integral for derivates in L^r. Dpt. of Math. Univ. of Illinois in Chicago. 1956.

[15] Guoju Y, Schwabik S. The MacShane and the Pettis integrals of Banach space-valued functions definided on $\mathbb{R}^m$. Illinois J. of Mathem. 2002; Vol. 46. No 4.

[16] Hildebrant TH. Integration in abstract spaces[Internet]. Univ. Of Michigan. 1952https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi3nMjVhZyDAxVzu5UCHd4AAYUQFnoECAsQAQ&url=https%3A%2F%2Fprojecteuclid.org%2FjournalArticle%2FDownload%3Furlid%3Dbams%252F1183517761&usg=AOvVaw2hOKlZOaKxuksi5jXPySQ0&opi=89978449.

[17] Kurtz D, Swartz Ch. Theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and Mcshane. World Scientific Publ. 2004.

[18] Lewis J, Shisha O. The generalized Riemann, domined improper integrals. Journal of Approx. Theory. 38. 1983.

[19] López R. Riemann integration via primitives for a new proof to the change of variable theorem. arXiv: 1105.5938v1. math. CA.2011.

[20] Massarwi E, Halsted S, Musial P, King S. A Stieltjes type extension of the L^r-Perron integral. Real Analysis Exchange. 2015; Vol.40 (2): 291-308.

[21] Musial PM, Sagher Y. The L Henstock- Kurzweil integral. Studia Mathematica. 2004; 160(1).

[22] Ortiz A. La integral, una visión de su evolución a través del tiempo I. Selecciones Matemáticas. 2023; Vol 10(1):173-198.

[23] Pérez T. Un análisis de las integrales de Henstock y Kurzweil en el marco de los espacios de Banach[Intenet]. Puebla: Univ. Autónoma de Puebla, 2014. Disponible en https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/e68c3b44-6644-474b-944e-d801898b85c0.

[24] Pettis BJ. On integration in vector spaces[Internet]. The University of Virginia. 1937. Disponible en https://www.ams.org/journals/tran/1938-044-02/S0002-9947-1938-1501970-8/S0002-9947-1938-1501970-8.pdf

[25] Rim D, Kim Y. The McShine integral of Banach space-valued functions. Journal of the Chungcheong Mathematical Soc. 2004; Vol 17. No 2.

[26] Saab E. Unified integration by E.J. Mc Shane. 1983. Bulletin of the AMS. 1985; Vol. 13. No 1.

[27] Saks S. Theory of the integral. Warszawa. 1937. Dover Publications, N.Y. 1964.

[28] Sánchez JR. La integral de Bochner[Internet]. Thesis Maestria, Benemérita Univ. Autónoma de Puebla. Disponible en https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/JairRaulSanchezMorales.pdf.

[29] Seeley RT. Singular integrals on compact manifolds. Amer. J. of Math. 81.1959.

[30] Strichartz RS. The Hardy space H^1 on manifolds and submanifolds. Can. J. Math. 1972; Vol. XXIV. No 5.

[31] Tandra H. A simple proof of the change of variable theorem for the Riemann integral. The Teaching of mathematics. 2015; Vol XVIII.

[32] Thange TG, Gangane SS. Henstock- Kurzweil integral for Banach valued function. Mathematics and Statistics. 2002; 10(5).

[33] Tikare SA, Chaudhary MS. Henstock- Kurzweil integral for Banach space-valued functions. Bulletin of Kerala Math. Associations. 2010; Vol. 6. No 2.

[34] Torchinsky, A. A modern view of the Riemann integral. Lecture Notes in Mathematics 2309. Springer Nature. Feb 2022.

[35] Torchinsky A. The change of variable formula for the Riemann integral. Real Anal. Exchange. 2020; 45(1).

[36] Torchinsky A. Modified Riemann sums of Riemann -Stieltjes integrable functions. ArXiv; 1905.0088 lvl. math. CA. 2019.

[37] Ye G. On Henstock -Kurzweil and McShane integrals of Banach space-Valued functions. J. Math. Anal. Appl. 330. 2007.

[38] Brucker AM, Fleissner RJ, Foran J. The minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivates. Coll. Math. 1986; 50(2).

[39] Ortiz A. Tópicos sobre análisis armónico. Departamento de Matemáticas. UNT. 1988.

[40] Yosida K. Functional analysis. 2da Edic. Springer- Verlag. N.Y. 1966.

[41] Brikhoff, Garrett: Integration of functions with values in a Banach space. These. Transactions. 1935; Vol. 28.

[42] Dunford N. Integration in general analysis. These. Transactions; 1935; Vol. 27.

[43] Rodriguez J. Integración en espacios de Banach. Departamento de Matemática. Universidad de Murcia. 2005.

[44] Gordon RA. The McShane integral of Banach-valued functions. Illinois J. Math. 1990; 34.

[45] Guoju Y, Schwabik S. On the strong McShane integral of functions with values in a Banach space. Czechoslovak Math. J. 2001; 51.

[46] Massarwi E, Halsted S, Musial P, King S. A Stieltjes type extension of the L^r- Perron integral. Real Analysis Exchange. 2014; Vol.40.

[47] Cotlar M. teoremas espectrales, modelos funcionales y dilataciones de Operadores en espacios de Hílbert. Instituto Argentino de Matemática.Bs As.1991.

[48] Calderón AP. Theory of pseudo differential operators on manifolds. Lecturas Universidad de Chicago. 1970.

[49] Tu LW. An introduction to manifolds .2d.Ed. Springer Science, 2010.

[50] Neri U. Singular integrals. Springer -Verlag .200 . 1971.

[51] Ortiz A. Operadores integrales singulares. Dpto.Matemática. Universidad Nacional de Trujillo. Perú. 1972.

[52] García-Cuerva J, Rubio de Francia J. Weighted norm inequalities and related Topics. North - Holland. 1985.

[53] Torchinsky A. Real variable methods in harmonic analysis.Academic Press. Inc. 1986.

[54] Ruch D. The definite integrals of Cauchy and Riemann. Digital Commons@ Ursinus College. 2017.

[55] Ávila G. Evolução dos conceitos de função e de integral. Matemática Universitária .No 1. S.M.B.1985

[56] Apostol TM. Mathematical analysis .Addison-Wesley Pub. Com., INC. 1958.

[57] Fulks, W. Advanced calculus .John Wiley & Sons, Inc .1962.

[58] Cater FS. A change of variables formula for Darboux integrals. Real Analysis Exchange. 1999; Vol. 24 (1).

[59] Medvedev FA. Scenes from the history of real functions. Birkhauser Verlag. 1991.

[60] Rutherfoord V, Sagher Y. Negligible variation and the change of variables theorem . arXiv :1212.4574v1. Math.CA .2012.

[61] Rutherfoord VCh. Negligible variation, change of variables, and a smooth analog of the Hobby - Rice theorem. Florida Atlantic University. Boca Raton.2016.

[62] Vyborny R. Some applications of Kurzweil - Henstock integration. Mathematica Bohemica. 1993; Vol. 118. No 4.

[63] Satchel DN, Výborný R. A change of variables theorem for the Ríemann integral. Real Analysis Exchange. 1997; Vol. 22 .1

[64] Kestelman H. Change of variable in Riemann integration. Math. Gaz. 1961; 45.

[65] López R. Existence and computation of Riemann-Stieltjes integrais through Riemann íntegrals .arXiv: 11071996vl .math.CA. 2011.

[66] Thomson BS. On Riemann sums . Real Analysis Exchange. 2012; Vol. 37(1)

[67] Thomson BS. Characterizations of an indefinite Riemann integrai .Real Analysís Exchange. 2009/2010; Vol.35 (2).

[68] Talvila E. Characterizing integrals of Riemann integrable functions .Real Analysis Exchange .Summer Symposium. 2002.
[69] Riesz F. Sur certains systémes singuliers d'équations intégrales .Annales scientifiques de I'E.N.S.3rd series. 1911; Vol. 28.
[70] Botsko MW. A fundamental theorem of calculus that applies to all Riemann integrable functions . Math.Mag. 1991; Vol. 64. No 5.
[71] Molnár Z, Nagy I, Szilágy T. A change of variables theorem for the multidimensional Riemann integral. arXiv:0804.2333 [math.CA], 2008.
[72] Kuleshow A. A remark on the change of variable theorem for the Riemann integral. Mathematics.2021; 9(16):1899.
[73] Torchinsky A. The change of variable formula for the Riemann-Stieltjes integral. arXiv.1904.07447 [math.CA]. 2019.
[74] Liu J. Approximative theorem of incomplete Riemann-Stieltjes sum of stochastic integral. arXiv:1803.05182v2 [math.PR]. 2018.
[75] Hunter JK. An introduction to real analysis .Lecture Notes. U.C. Davis .2010.