Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2023; Vol. 10(2): 273-284.

Semigrupos de clase C_o en $l^2(\mathbb{Z})$

Semigroups of class C_o on $l^2(\mathbb{Z})$

Yolanda Santiago Ayala*

Received, Oct. 15, 2023; *Accepted, Nov. 05, 2023;* *Published, Dec. 27, 2023*

How to cite this article:
Santiago Ayala Y. *Semigroups of class C_o on $l^2(\mathbb{Z})$* . Selecciones Matemáticas. 2023;10(2):273–284. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.04

Abstract
In this work we begin by studying the generalized multiplication operator M on the $l^2(\mathbb{Z})$. We prove that this operator is not bounded, is densely defined and symmetric and therefore does not admit a symmetric linear extension to the entire space. We introduce a family of operators on the $l^2(\mathbb{Z})$ space with n even and demonstrate that it forms a contraction semigroup of class C_o, having $-M$ as its infinitesimal generator. We also prove that if we restrict the domains of that family of operators, they still remain a contraction semigroup. Finally, we give results of existence of solution of the associated abstract Cauchy problem and properties of continuous dependence of the solution in connection to other norms.

Keywords . $l^2(\mathbb{Z})$ space; Hellinger-Toeplitz theorem; generalized multiplication operator; Semigroup of contraction; existence of solution; graph norm.

Resumen
En este trabajo, iniciamos estudiando al operador multiplicación generalizado M en el espacio $l^2(\mathbb{Z})$. Probamos que este operador no es acotado, es densamente definida y simétrica y por lo tanto no admite una extensión lineal simétrica a todo el espacio. Introducimos una familia de operadores en el espacio $l^2(\mathbb{Z})$ con n par y demostramos que esta forma un semigrupo de contracción de clase C_o, teniendo a -M como su generador infinitesimal. Probamos también que si restringimos los dominios de esa familia de operadores estas aún conservan ser un semigrupo de contracción. Finalmente, damos resultados de existencia de solución del problema de Cauchy abstracto asociado y propiedades de dependencia continua de la solución en conexión a otras normas.

Palabras clave. Espacio $l^2(\mathbb{Z})$; Teorema de Hellinger-Toeplitz; operador multiplicación generalizado; Semigrupo de contracción; existencia de solución; norma del gráfico.

1. Introducción. En este artículo estudiaremos algunos operadores en el espacio $l^2(\mathbb{Z})$. Esto es, introduciremos al operador multiplicación generalizado y probaremos que esta no es acotada, pero acotada con la norma del gráfico. Para n par, introduciremos una familia de operadores en $l^2(\mathbb{Z})$ y mostraremos que son acotadas y que forman un semigrupo de contracción de clase C_o, teniendo como generador infinitesimal al operador multiplicación generalizado. Ahora, restringiendo el dominio de esta familia de operadores, probaremos que esta continua formando un semigrupo de contracción de clase C_o. Así, mejoraremos el resultado de existencia de solución para el problema de Cauchy abstracto asociado, observandose que el problema está bien colocado.

Podemos citar algunas referencias para el tratamiento de existencia de solución vía semigrupos, por ejemplo [1], [2], [3], [5] y [6].

*Fac. Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima - Perú. **Correspondence author** (ysantiagoa@unmsm.edu.pe).

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en siete subsecciones. Así, en la subsección 3.1 estudiamos al operador Multiplicación generalizado en $l^2(\mathbb{Z})$. En la subsección 3.2, probamos que la familia de operadores introducida, para n par, forma un semigrupo de contracción de clase C_o en $l^2(\mathbb{Z})$. En la subsección 3.3, calculamos el generador infinitesimal del C_o - semigrupo de contracción y obtenemos el primer resultado de existencia de solución para el problema de Cauchy abstracto asociado y también la dependencia continua de la solución. En la subsección 3.4, introducimos la norma del gráfico en el dominio de M que lo hace un espacio de Hilbert y probamos que M es acotado con esta norma. En la subsección 3.5, introducimos otras normas equivalentes a la norma del gráfico. En la subsección 3.6, probamos que la familia de operadores con dominio restringido continua siendo un semigrupo de contracción. En la subsección 3.7, obtenemos el resultado de existencia de solución en conexion con otras normas.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2. Metodología .

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

Definición 2.1. *Denotamos por $S(\mathbb{Z})$ al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por*

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\,,\ \alpha_k \in \mathbb{C} \,/ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \text{ y } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^J < \infty\ ,\ \forall J \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 2.2. *Definimos el espacio $l^2(\mathbb{Z})$ sobre los complejos*

$$l^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\,,\ \alpha_k \in \mathbb{C} \,/ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < \infty \right\}.$$

Para ver propiedades de $S(\mathbb{Z})$ y $l^2(\mathbb{Z})$ citamos [1], [7] y [8].

Para la teoría de semigrupos, citamos [2] y [3].

Ahora, enunciaremos un importante resultado que será usado posteriormente.

Teorema 2.1 (Hellinger-Toeplitz). *Si T es un operador lineal no acotado, simétrico y densamente definido (i.e. $\overline{Dom(T)} = H$) en un espacio H de Hilbert, entonces no admite extensión lineal simétrica a H.*

Demostración: Citamos [4]. □

3. Principales Resultados.

3.1. El operador Multiplicación M en $l^2(\mathbb{Z})$.

Introduciremos la siguiente aplicación

Definición 3.1 (Operador Multiplicación M). *Sea $n \in \mathbb{N}$, definamos la aplicación*

$$\begin{aligned} M : Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ \alpha = (\alpha_k) &\longrightarrow M\alpha := (k^n \alpha_k) \end{aligned}$$

donde $Dom(M) := \{\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que $(k^n\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})\} \subset l^2(\mathbb{Z})$.

Proposición 3.1. *El operador Multiplicación M es $\mathbb{C}$ - lineal, densamente definido, simétrico y no acotado. Además, M no admite extensión lineal simétrica a $l^2(\mathbb{Z})$.*

Demostración: Primero, se observa que $Dom(M)$ es un subespacio de $l^2(\mathbb{Z})$, pues si $\alpha, \beta \in Dom(M)$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha, \beta \in l^2(\mathbb{Z})$, $\alpha + c\beta \in l^2(\mathbb{Z})$ y $(k^n(\alpha + c\beta)_k) = (k^n\alpha_k + ck^n\beta_k) = (k^n\alpha_k) + c(k^n\beta_k) \in l^2(\mathbb{Z})$; y por consiguiente se tiene que $M\{\alpha + c\beta\} = M\alpha + cM\beta$, lo que prueba la linealidad de M.

Ahora, queremos probar que $S(\mathbb{Z}) \subset Dom\,(M)$. Sea $\alpha = (\alpha_k) \in S(\mathbb{Z})$, y como $S(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$ entonces $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. También, se tiene

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^m |\alpha_k| < \infty\,,\ \forall m \geq 1\,.$$

Luego, $|\alpha_k| \to 0$ y $|\alpha_{-k}| \to 0$ cuando $k \to +\infty$. Así, $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ está acotada, i.e. $\exists C > 0$ tal que $|\alpha_k| \leq C$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2n}|\alpha_k|^2 \leq C^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2n}|\alpha_k| < \infty\,,$$

con esto se ha probado que $(k^n\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})$; luego $\alpha \in Dom\,(M)$.

Se cumple $S(\mathbb{Z}) \subset Dom\,(M)$, luego

$$l^2(\mathbb{Z}) = \overline{S(\mathbb{Z})}^{\|\cdot\|_{l^2}} \subset \overline{Dom\,(M)}^{\|\cdot\|_{l^2}} \subset l^2(\mathbb{Z}),$$

de donde obtenemos $\overline{Dom\,(M)}^{\|\cdot\|_{l^2}} = l^2(\mathbb{Z})$.

Ahora, probaremos que M no es acotada. En efecto, para esto introducimos una familia (α^k) de elementos de $S(\mathbb{Z})$, donde

$$\alpha^k = (..,0,0,\underbrace{\frac{1}{k^n}}_{\text{k-ésima}},0,0...)$$

con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
Se observa $\|\alpha^k\|_{l^2} = \frac{1}{|k|^n}$. Además, $M\alpha^k = e_k$ y $\|M\alpha^k\|_{l^2} = \|e_k\|_{l^2} = 1$, donde

$$e_k = (..,0,0,\underbrace{1}_{\text{k-ésima}},0,0...)\,.$$

Podemos observar que $\frac{\|M\alpha^k\|_{l^2}}{\|\alpha^k\|_{l^2}} = |k|^n, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ no es acotada.

Luego el Operador M no es acotada.
Finalmente, probaremos que M es simétrico. En efecto, sean $\alpha, \beta \in Dom\,(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$ tenemos

$$\begin{aligned} < M\alpha, \beta > &= < (k^n\alpha_k), (\beta_k) > \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^n \alpha_k \overline{\beta_k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \overline{k^n \beta_k} \\ &= < (\alpha_k), (k^n\beta_k) > \\ &= < \alpha, M\beta > \;. \end{aligned}$$

El además sale de usar el Teorema 2.1 de Hellinger-Toeplitz. □

Observación 3.1. *El operador M puede ser visto como una matriz diagonal infinita. Esto es,*

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k+1)^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ (-1)^n\alpha_{-1} \\ 0 \\ \alpha_1 \\ 2^n\alpha_2 \\ 3^n\alpha_3 \\ \vdots \\ k^n\alpha_k \\ (k+1)^n\alpha_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

En la siguiente subsección usaremos el caso n par.

3.2. Semigrupo de Clase C_o en $l^2(\mathbb{Z})$.

Proposición 3.2 (Semigrupo de Clase C_o en $l^2(\mathbb{Z})$). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, definimos las aplicaciones $M_{F_t}\alpha := (e^{-tk^n}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ entonces $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0} \subset B(l^2(\mathbb{Z}))$ y además forma un semigrupo de contracción de clase C_o en $l^2(\mathbb{Z})$.*

Demostración: En $t = 0$, sea $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, tenemos $M_{F_0}\alpha = (e^{-0k^n}\alpha_k) = (\alpha_k) = \alpha$, luego

$$M_{F_0} = I \,, \tag{3.1}$$

donde I es el operador identidad en $l^2(\mathbb{Z})$.

Ahora, probaremos que $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores lineales acotados y de contracción, i.e. $\|M_{F_t}\| \leq 1, \forall t \geq 0$.

En efecto, sea $t > 0$ y $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha\|^2_{l^2} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^n}\alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^n}|^2|\alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-2tk^n}}_{\leq 1}|\alpha_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \\ &= \|\alpha\|^2_{l^2} \ < \ \infty \,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

desde que n es par.

De (3.2) tenemos que $M_{F_t}\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$; esto es, M_{F_t} está bien definida para $t \geq 0$. Por otro lado, es evidente que M_{F_t} es $\mathbb{C}$ - lineal:

$$\begin{aligned} M_{F_t}(\alpha + c\beta) &= (e^{-tk^n}\{\alpha + c\beta\}_k) \\ &= (e^{-tk^n}\{\alpha_k + c\beta_k\}) \\ &= (e^{-tk^n}\alpha_k + ce^{-tk^n}\beta_k) \\ &= (e^{-tk^n}\alpha_k) + c(e^{-tk^n}\beta_k) \\ &= M_{F_t}\alpha + cM_{F_t}\beta \,, \end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in l^2(\mathbb{Z})$ y $c \in \mathbb{C}$.

Así, de (3.2) también obtenemos que $\|M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \leq \|\alpha\|_{l^2}$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. Esto es, el operador M_{F_t} es acotado y

$$\|M_{F_t}\| \leq 1 \,, \ \forall t \geq 0 \,. \tag{3.3}$$

Sea $t > 0$, $r > 0$ y $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, tenemos

$$\begin{aligned} M_{F_{(t+r)}}\alpha &= \left(e^{-(t+r)k^n}\alpha_k\right) \\ &= \left(e^{-tk^n}e^{-rk^n}\alpha_k\right) \\ &= \left(e^{-tk^n}\{M_{F_r}\alpha\}_k\right) \\ &= M_{F_t}\{M_{F_r}\alpha\} \\ &= M_{F_t}\circ M_{F_r}\alpha\,, \end{aligned}$$

esto es, $M_{F_{(t+r)}} = M_{F_t}\circ M_{F_r}$ para $t > 0$ y $r > 0$. El caso $t = 0$ o $r = 0$ es evidente; luego

$$M_{F_{(t+r)}} = M_{F_t}\circ M_{F_r}\ ,\ \forall t, r \geq 0. \tag{3.4}$$

Sea $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, probaremos que $\|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2} \longrightarrow 0$ cuando $t \to 0^+$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|^2_{l^2} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^n}\alpha_k - \alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |(e^{-tk^n} - 1)\alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{-tk^n} - 1|^2}_{\widetilde{M}(k,t):=}|\alpha_k|^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\lim_{t\to 0^+} \widetilde{M}(k,t) = 0$.

Además, el k-ésimo término de la serie (3.5) está mayorado:

$$\widetilde{M}(k,t)|\alpha_k|^2 \leq 4|\alpha_k|^2$$

y como la serie $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2$ es convergente, entonces usando el M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge absoluta y uniformemente. Luego,

$$\lim_{t\to 0^+} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|^2_{l^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t\to 0^+} |e^{-tk^n} - 1|^2}_{=0}|\alpha_k|^2 = 0\,.$$

Así, hemos probado que

$$\lim_{t\to 0^+} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2} = 0\,,\ \forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})\,. \tag{3.6}$$

De (3.1), (3.4), (3.3) y (3.6) concluimos que $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción de clase C_o en $l^2(\mathbb{Z})$. $\square$

Proposición 3.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par; $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, la aplicación: $t \to M_{F_t}\alpha$ es continua de $[0, \infty)$ a $l^2(\mathbb{Z})$.*

Demostración: De (3.6) tenemos la continuidad en 0 a la derecha. Así, nos enfocamos en probar la continuidad en $t > 0$.

Sea $h > 0$, usando la propiedad de semigrupo, la desigualdad (3.3) y el límite (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} &= \|M_{F_t}M_{F_h}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \\ &= \|M_{F_t}\{M_{F_h}\alpha - \alpha\}\|_{l^2} \\ &\leq \|M_{F_h}\alpha - \alpha\|_{l^2}\ \to\ 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

cuando $h \to 0^+$.

Ahora, considerando $h > 0$ tal que $t - h > 0$ y procediendo análogamente como en (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_{t-h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} &= \|M_{F_{t-h}}\alpha - M_{F_{t-h}}M_{F_h}\alpha\|_{l^2} \\ &= \|M_{F_{t-h}}\{\alpha - M_{F_h}\alpha\}\|_{l^2} \\ &\leq \|M_{F_h}\alpha - \alpha\|_{l^2}\ \to\ 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

cuando $h \to 0^+$.

De (3.7) y (3.8) tenemos que la aplicación es continua en $t \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Proposición 3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, si $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\to} \alpha$ entonces $\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \to 0$ cuando $m \to +\infty$.*

Demostración: Es inmediato desde que de (3.2) se tiene

$$\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} = \|M_{F_t}(\alpha^m - \alpha)\|_{l^2} \le \|\alpha^m - \alpha\|_{l^2}\,.$$

$\square$

3.3. Cálculo del G.I. de $\{M_{F_t}\}_{t\ge 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$.

Proposición 3.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par; el operador $-M$ es el Generador infinitesimal (G.I.) del semigrupo de contracción $\{M_{F_t}\}_{t\ge 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$.*

Demostración: Si A es el G.I. del semigrupo de contracción $\{M_{F_t}\}_{t\ge 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$ entonces todo se reduce a probar que $Dom(A) = Dom(M)$ y $A = -M$.

1. $Dom(M) \subset Dom(A)$.- Sea $\alpha \in Dom(M)$ entonces $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ y $M\alpha := (k^n\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})$, i.e.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k^n\alpha_k|^2 < \infty. \tag{3.9}$$

Sea $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} + M\alpha\right\|_{l^2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{-tk^n}\alpha_k - \alpha_k}{t} + k^n\alpha_k\right|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\left\{\underbrace{\frac{e^{-tk^n} - 1}{t} + k^n}_{H(k,t):=}\right\}\alpha_k\right|^2\end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{t\to 0} H(k,t) = 0$. También tenemos

$$|H(k,t)|^2|\alpha_k|^2 \le 4k^{2n}|\alpha_k|^2$$

y como vale (3.9), usando el M-test de Weierstrass tenemos que la serie $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |H(k,t)|^2|\alpha_k|^2$ converge absoluta y uniformemente, luego

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} + M\alpha\right\|_{l^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underbrace{\lim_{t\to 0^+} H(k,t)}_{=0}|^2|\alpha_k|^2 = 0\,.$$

Así, $\lim\limits_{t\to 0^+}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t} + M\alpha\right\|_{l^2} = 0$. Esto es, existe $\lim\limits_{t\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t}\right\} = -M\alpha$. Luego, $\alpha \in D(A)$ y $A\alpha = -M\alpha$.

2. $Dom(A) \subset Dom(M)$.- Sea $\alpha \in Dom(A)$ entonces $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ y $\lim\limits_{t\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t}\right\} = A\alpha$ en $l^2(\mathbb{Z})$. Esto es,

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} - A\alpha\right\|_{l^2} = 0\,.$$

Así, dado $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\epsilon > \left\|\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} - A\alpha\right\|_{l^2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{-tk^n}\alpha_k - \alpha_k}{t} - \{A\alpha\}_k\right|^2 \\ &> \left|\frac{e^{-tk^n}\alpha_k - \alpha_k}{t} - \{A\alpha\}_k\right|^2, \ \forall k \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{e^{-tk^n}\alpha_k - \alpha_k}{t} \to \{A\alpha\}_k \ \text{ cuando } t \to 0^+\,,$$

pero sabemos que

$$\frac{e^{-tk^n}\alpha_k - \alpha_k}{t} \to -k^n\alpha_k \text{ cuando } t \to 0^+$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.
Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\{A\alpha\}_k = -k^n\alpha_k$. Entonces

$$l^2(\mathbb{Z}) \ni A\alpha = (-k^n\alpha_k)\,. \tag{3.10}$$

De (3.10) tenemos que $(-k^n\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})$, esto es $\alpha \in Dom(M)$ y $A\alpha = -M\alpha$.
De los dos items se concluye que $Dom(A) = Dom(M)$ y $A = -M$. □

Proposición 3.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, si $\alpha \in Dom(M)$ entonces $M_{F_t}\alpha \in Dom(M)$. Además, se cumple: $MM_{F_t}\alpha = M_{F_t}M\alpha$, $\forall\alpha \in Dom(M)$.*

Demostración: En efecto, sean $\alpha \in Dom(M)$, $t > 0$, $r > 0$ y $-M$ el G. I. de $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_r}(M_{F_t}\alpha) - M_{F_t}\alpha}{r}\right\} &= \lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}(M_{F_r}\alpha) - M_{F_t}\alpha}{r}\right\} \\
&= \lim_{r\to 0^+} M_{F_t}\left\{\frac{M_{F_r}\alpha - \alpha}{r}\right\} \\
&= M_{F_t}\left[\lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_r}\alpha - \alpha}{r}\right\}\right] \\
&= M_{F_t}[-M\alpha] \in l^2(\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Así, existe el límite en $l^2(\mathbb{Z})$. Esto es $M_{F_t}\alpha \in Dom(M)$ y

$$-M(M_{F_t}\alpha) = M_{F_t}[-M\alpha] = -M_{F_t}[M\alpha],$$

i.e.

$$M \circ M_{F_t}\alpha = M_{F_t} \circ M\alpha\,,\ \forall\alpha \in Dom(M)\,. \tag{3.11}$$

□

Proposición 3.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, si $\alpha \in Dom(M)$ entonces la aplicación $t \to M_{F_t}\alpha$, de $(0,\infty)$ a $l^2(\mathbb{Z})$, es diferenciable en $(0,\infty)$ y su derivada es $-M_{F_t}M\alpha$.*
Además, $\frac{\partial}{\partial t}\{M_{F_t}\alpha\} = -MM_{F_t}\alpha$.

Demostración: Sea $t > 0$, $h > 0$ tal que $0 < t - h$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{M_{F_t}\alpha - M_{F_{t-h}}\alpha}{h} + M_{F_t}M\alpha \\
&= M_{F_{t-h}}\left\{\frac{M_{F_h}\alpha - \alpha}{h}\right\} + M_{F_t}M\alpha \\
&= M_{F_{t-h}}\left\{\frac{M_{F_h}\alpha - \alpha}{h}\right\} \pm M_{F_{t-h}}M\alpha + M_{F_t}M\alpha \\
&= M_{F_{t-h}}\left\{\frac{M_{F_h}\alpha - \alpha}{h} + M\alpha\right\} - M_{F_{t-h}}M\alpha + M_{F_t}M\alpha\,.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como $\|M_{F_{t-h}}\| \leq 1$, $\frac{M_{F_h}\alpha-\alpha}{h} \longrightarrow -M\alpha$ cuando $h \to 0^+$ y $M_{F_{t-h}}M\alpha \longrightarrow M_{F_t}M\alpha$ cuando $h \to 0^+$, tomando límite a (3.12) cuando $h \to 0^+$ tenemos

$$\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}\alpha - M_{F_{t-h}}\alpha}{h} + M_{F_t}M\alpha\right\} = 0\,,$$

esto es

$$\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}\alpha - M_{F_{t-h}}\alpha}{h}\right\} = -M_{F_t}M\alpha\,. \tag{3.13}$$

Análogamente procedemos cuando $h > 0$, esto es,

$$\frac{M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha}{h} = M_{F_t}\left\{\frac{M_{F_h}\alpha - \alpha}{h}\right\}. \tag{3.14}$$

Como $M_{F_t} \in B(l^2(\mathbb{Z}))$ y $\alpha \in Dom(-M)$, tomando límite a (3.14) cuando $h \to 0^+$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \left\{ \frac{M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha}{h} \right\} & \\ &= M_{F_t}\left\{ \lim_{h\to 0^+} \left\{ \frac{M_{F_h}\alpha - \alpha}{h} \right\} \right\} \\ &= M_{F_t}\{-M\alpha\} \\ &= -M_{F_t}M\alpha\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De (3.13 y (3.15) tenemos que

$$\exists \underbrace{\lim_{h\to 0} \left\{ \frac{M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha}{h} \right\}}_{=\frac{\partial}{\partial t}\{M_{F_t}\alpha\}} = -M_{F_t}M\alpha\,.$$

Usando la Proposición 3.6 tenemos que $-M_{F_t}M\alpha = -MM_{F_t}\alpha$, con lo que se concluye. □

Proposición 3.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, si $\alpha \in Dom(M)$ entonces la aplicación $t \to \frac{\partial}{\partial t}\{M_{F_t}\alpha\} = -M_{F_t}M\alpha$, de $(0,\infty)$ a $l^2(\mathbb{Z})$, es continua.*

Demostración: Como $\alpha \in Dom(M)$ entonces $M\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$; luego usando la Proposición 3.3, la aplicación es continua. □

Proposición 3.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, si $\alpha \in Dom(M)$ entonces $M_{F_{(\cdot)}}\alpha \in C^1((0,\infty), l^2(\mathbb{Z}))$.*

Demostración: Es consecuencia de las dos Proposiciones previas. □

Otra consecuencia es el siguiente resultado.

Proposición 3.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, entonces el operador $M : Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ es cerrado.*

Demostración: Desde que $-M$ es el G.I. del semigrupo de contracción $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$ tenemos que $-M$ es cerrado. En efecto, sea $\alpha^k \in Dom(-M)$ tal que

$$\alpha^k \to \alpha \text{ en } l^2(\mathbb{Z}) \text{ cuando } k \to +\infty \tag{3.16}$$

$$-M\alpha^k \to \beta \text{ en } l^2(\mathbb{Z}) \text{ cuando } k \to +\infty\,. \tag{3.17}$$

Probaremos que $\alpha \in Dom(-M)$ y que $-M\alpha = \beta$.
De las Proposiciones 3.7 y 3.8 tenemos que

$$M_{F_t}\alpha^k - \alpha^k = \int_0^t M_{F_r}(-M)\alpha^k\, dr\,. \tag{3.18}$$

Usando la continuidad de M_{F_t} y las convergencias (3.16) y (3.17) tenemos

$$M_{F_t}\alpha - \alpha = \int_0^t M_{F_r}\beta\, dr\,.$$

Así,

$$\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t M_{F_r}\beta\, dr \to M_{F_0}\beta = \beta\,,$$

cuando $t \to 0^+$.

Luego, $\alpha \in Dom(-M)$ y $-M\alpha = \beta$. □

Finalmente, obtenemos un importante resultado de existencia de solución de un problema de valor inicial.

Proposición 3.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, entonces el Problema de Cauchy Abstracto*

$$(Q) \left| \begin{array}{l} u_t = -Mu \\ u(0) = \alpha \in Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

posee una única solución: $u(t) = M_{F_t}\alpha\,,\ \forall t \geq 0$, donde $u \in C([0,\infty), l^2(\mathbb{Z})) \cap C^1((0,\infty), l^2(\mathbb{Z}))$.

Observación 3.2. *De la Proposición 3.4 tenemos que la solución del problema (Q) depende continuamente del dato inicial.*

3.4. Norma del Gráfico en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$.

Definición 3.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$ definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} <\cdot,\cdot>_\Delta : Dom(M)\times Dom(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\alpha,\beta) & \longrightarrow & <\alpha,\beta>_\Delta \end{array}$$

donde

$$<\alpha,\beta>_\Delta := <\alpha,\beta>_{l^2} + <M\alpha, M\beta>_{l^2}\,,\ \forall \alpha,\beta \in Dom(M)\,.$$

Se observa que $<\cdot,\cdot>_\Delta$ está bien definida.

Proposición 3.12. *La aplicación $<\cdot,\cdot>_\Delta$ es un producto interno en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$.*

Demostración: Es inmediato desde que $<\cdot,\cdot>_{l^2}$ es un producto interno. □

Así, el producto interno $<\cdot,\cdot>_\Delta$ induce una norma $\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta}$ en $Dom(M)$:

$$\|\alpha\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta} = \sqrt{\|\alpha\|^2_{l^2} + \|M\alpha\|^2_{l^2}}\,,\ \forall \alpha \in Dom(M)\,. \tag{3.19}$$

Denotaremos a $\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta}$ por $\|\cdot\|_\Delta$.

Así,

Proposición 3.13. *El espacio normado $(Dom(M), \|\cdot\|_\Delta)$ satisface*

$$\|\alpha\|_\Delta \geq \|\alpha\|_{l^2}\,,\ \forall \alpha \in Dom(M)\,, \tag{3.20}$$

$$\|\alpha\|_\Delta \geq \|M\alpha\|_{l^2}\,,\ \forall \alpha \in Dom(M)\,. \tag{3.21}$$

Demostración: Es inmediato de (3.19). □

Proposición 3.14. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, entonces el espacio $(Dom(M), \|\cdot\|_\Delta)$ es completo.*

Demostración: Sea (α^m) una sucesión de Cauchy en $Dom(M)$ con $\|\cdot\|_\Delta$. Probaremos que $\exists \alpha \in Dom(M)$ tal que $\|\alpha^m - \alpha\|_\Delta \to 0$ cuando $m \to +\infty$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\epsilon > \|\alpha^m - \alpha^l\|_\Delta \text{ siempre que } m, l > N_o\,. \tag{3.22}$$

De (3.20) tenemos

$$\epsilon > \|\alpha^m - \alpha^l\|_\Delta \geq \|\alpha^m - \alpha^l\|_{l^2} \text{ siempre que } m, l > N_o\,. \tag{3.23}$$

De (3.21) tenemos

$$\epsilon > \|\alpha^m - \alpha^l\|_\Delta \geq \|M(\alpha^m - \alpha^l)\|_{l^2} = \|M\alpha^m - M\alpha^l\|_{l^2} \text{ siempre que } m, l > N_o\,. \tag{3.24}$$

De (3.23) tenemos que (α^m) es una sucesión de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z})$, y como $l^2(\mathbb{Z})$ es completo, entonces $\exists \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\to} \alpha\,. \tag{3.25}$$

De (3.24) tenemos que $(M\alpha^m)$ es una sucesión de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z})$, y como $l^2(\mathbb{Z})$ es completo, entonces $\exists \beta \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$M\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\to} \beta\,. \tag{3.26}$$

De (3.25), (3.26) y como M es un operador cerrado, entonces

$$\alpha \in Dom(M) \text{ y } M\alpha = \beta\,. \tag{3.27}$$

De (3.25), (3.26) y (3.27) tenemos

$$\begin{array}{rcl} \|\alpha^m - \alpha\|^2_\Delta & = & \|\alpha^m - \alpha\|^2_{l^2} + \|M(\alpha^m - \alpha)\|^2_{l^2} \\ & = & \|\alpha^m - \alpha\|^2_{l^2} + \|M\alpha^m - M\alpha\|^2_{l^2} \to 0 \end{array}$$

cuando $m \to +\infty$.

Entonces $\|\alpha^m - \alpha\|_\Delta \to 0$ cuando $m \to +\infty$. Esto es, $\exists \alpha \in Dom(M)$ tal que $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\to} \alpha$. □

Observación 3.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, el espacio $(Dom(M), \|\cdot\|_{\triangle})$ es un espacio de Banach o también $(Dom(M), <\cdot,\cdot>_{\triangle})$ es un espacio de Hilbert.*

Proposición 3.15. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par y*

$$\begin{array}{rcl} M : (Dom(M), \|\cdot\|_{\triangle}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) \\ \alpha & \longrightarrow & M\alpha = (k^n \alpha_k) \end{array}$$

entonces M es un operador acotado y $\|M\| \leq 1$.

Demostración: Es inmediato de (3.21). □

Tenemos la siguiente propiedad que conecta $\|\cdot\|_{\triangle}$ con el semigrupo $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$.

Proposición 3.16. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, $M_{F_t}\alpha = (e^{-tk^n}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, si $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{\triangle}}{\to} \alpha$ entonces $\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \to 0$ cuando $m \to +\infty$.*

Demostración: Es inmediato desde que usando (3.20) tenemos que $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{\triangle}}{\to} \alpha$ implica $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\to} \alpha$ y como

$$\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} = \|M_{F_t}(\alpha^m - \alpha)\|_{l^2} \leq \|\alpha^m - \alpha\|_{l^2}\,,$$

concluimos. □

3.5. Otras normas en $Dom(M)$.

Ahora, introduciremos otras normas en $Dom(M)$.

Observación 3.4 (p-normas en $Dom(M)$). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, en el subespacio $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$ podemos definir otras normas, por ejemplo: $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq p < \infty\,,\ \|\alpha\|_p & := & (\|\alpha\|_{l^2}^p + \|M\alpha\|_{l^2}^p)^{\frac{1}{p}} \\ \|\alpha\|_\infty & := & \text{máx}\{\|\alpha\|_{l^2}, \|M\alpha\|_{l^2}\} \end{array}$$

para $\alpha \in Dom(M)$. Y se observa que todas estas normas son equivalentes.

Note: $\|\alpha\|_2 = \|\alpha\|_{\triangle}$.

Además, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|\alpha\|_p \geq \|\alpha\|_{l^2}\,,\ \forall \alpha \in Dom(M)\,, \tag{3.28}$$

$$\|\alpha\|_p \geq \|M\alpha\|_{l^2}\,,\ \forall \alpha \in Dom(M) \tag{3.29}$$

para $p \in [1, \infty]$.

Proposición 3.17. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, el espacio $(Dom(M), \|\cdot\|_p)$ es completo, para $p \in [1, \infty]$.*

Demostración: Esto sigue desde que $\|\cdot\|_p$ es equivalente a $\|\cdot\|_{\triangle}$ y $(Dom(M), \|\cdot\|_{\triangle})$ es completo. □

Proposición 3.18. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par y*

$$\begin{array}{rcl} M : (Dom(M), \|\cdot\|_p) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) \\ \alpha & \longrightarrow & M\alpha = (k^n \alpha_k) \end{array}$$

entonces M es acotado y $\|M\| \leq 1$.

Demostración: Es inmediato de (3.29). □

También, tenemos la siguiente propiedad que conecta $\|\cdot\|_p$ con el semigrupo $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$.

Proposición 3.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, $M_{F_t}\alpha = (e^{-tk^n}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. Sea $p \in [1, \infty]$, si $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_p}{\to} \alpha$ entonces $\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \to 0$ cuando $m \to +\infty$.*

Demostración: De (3.28) tenemos que $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_p}{\to} \alpha$ implica $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\to} \alpha$. Luego,

$$\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} = \|M_{F_t}(\alpha^m - \alpha)\|_{l^2} \leq \|\alpha^m - \alpha\|_{l^2} \to 0$$

cuando $m \to +\infty$. □

3.6. Semigrupo de Clase C_o en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$ con $\|\cdot\|_{\triangle}$.

Proposición 3.20 (Semigrupo de Clase C_o en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, definimos las aplicaciones $M_{F_t}\alpha := (e^{-tk^n}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$ entonces $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0} \subset B(Dom(M))$ y además forma un semigrupo de contracción de clase C_o en el espacio $(Dom(M), \|\cdot\|_{\triangle})$ de Hilbert.*

Demostración: Sea $t > 0$ y $\alpha \in Dom(M)$, usando (3.11) y que $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción en $l^2(\mathbb{Z})$, tenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha\|_\Delta^2 &= \|M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 + \|MM_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 \\ &\leq \|\alpha\|_{l^2}^2 + \|M_{F_t}M\alpha\|_{l^2}^2 \\ &\leq \|\alpha\|_{l^2}^2 + \|M\alpha\|_{l^2}^2 \\ &= \|\alpha\|_\Delta^2 \,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Esto es,

$$\|M_{F_t}\alpha\|_\Delta \leq \|\alpha\|_\Delta\,,\ \forall \alpha \in Dom(M)\,, \tag{3.31}$$

de donde se deduce que $M_{F_t} \in B(Dom(M))$ y $\|M_{F_t}\| \leq 1$.

Sea $\alpha \in Dom(M)$ y $t > 0$, usando (3.11) y (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_\Delta^2 &= \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2}^2 + \|M(M_{F_t}\alpha - \alpha)\|_{l^2}^2 \\ &= \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2}^2 + \|M_{F_t}M\alpha - M\alpha\|_{l^2}^2 \to 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

cuando $t \to 0^+$.

Como se satisface (3.1) y (3.4) entonces concluimos que $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción de clase C_o en $Dom(M)$. □

Proposición 3.21. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, para todo $\alpha \in Dom(M)$, la aplicación $t \to M_{F_t}\alpha$ es continua de $[0,\infty)$ a $Dom(M)$.*

Demostración: Sea $\alpha \in Dom(M)$ y $t > 0$, usando (3.11) y la proposición 3.3, tenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_\Delta^2 &= \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 + \|M(M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha)\|_{l^2}^2 \\ &= \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 + \|M_{F_{t+h}}M\alpha - M_{F_t}M\alpha\|_{l^2}^2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$. □

Proposición 3.22. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, si $\alpha^m \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\to} \alpha$ entonces $M_{F_t}\alpha^m \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\to} M_{F_t}\alpha$.*

Demostración: Usando (3.31) con $\alpha^m - \alpha \in Dom(M)$, tenemos

$$\|M_{F_t}\alpha^m - M_{F_t}\alpha\|_\Delta = \|M_{F_t}(\alpha^m - \alpha)\|_\Delta \leq \|\alpha^m - \alpha\|_\Delta \to 0$$

cuando $m \to +\infty$. □

3.7. Existencia de solución.

Así, de las Proposiciones 3.11 y 3.21, obtenemos el siguiente resultado de existencia de solución.

Proposición 3.23. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, $t \geq 0$, $M_{F_t}\alpha = (e^{-tk^n}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$.*
Entonces el Problema de Cauchy Abstracto

$$(Q)\ \left|\begin{array}{l} u_t = -Mu \\ u(0) = \alpha \in Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

posee una única solución: $u(t) = M_{F_t}\alpha,\ \forall t \geq 0$, con $u \in C([0,\infty), Dom(M)) \cap C^1((0,\infty), l^2(\mathbb{Z}))$, donde consideramos a $Dom(M)$ con la norma del gráfico $\|\cdot\|_\Delta$.

Observación 3.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par, en la Proposición 3.23, podemos considerar $\|\cdot\|_p$ en vez de la norma del gráfico, desde que son equivalentes.*

Observación 3.6. *Se obtiene la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial, en las versiones: Proposiciones 3.4, 3.16, 3.19 y 3.22.*

4. Conclusiones.

En nuestro estudio hemos realizado lo siguiente:

1. Presentamos al operador multiplicación generalizado M en $l^2(\mathbb{Z})$, probamos que es densamente definido, no acotado, simétrico y que no admite extensión lineal simétrica a $l^2(\mathbb{Z})$.
2. Considerando n par, introducimos una familia de operadores y probamos que esta forma un semigrupo de contracción de clase C_o sobre $l^2(\mathbb{Z})$.
3. Demostramos que $-M$ es el generador infinitesimal de dicho semigrupo de contracción sobre $l^2(\mathbb{Z})$. Y además se obtiene que el Problema de Cauchy Abstracto (PCA) asociado está bien colocado.
4. Introducimos una norma en el dominio de M: $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$, que hace que M sea acotado, e introducimos otras normas equivalentes a esta.

5. Probamos que las restricciones al $Dom(M)$ de los operadores del semigrupo C_o sobre el espacio $l^2(\mathbb{Z})$, forman también un semigrupo C_o sobre el espacio $Dom(M)$ de Hilbert.
6. Obtenemos un mejor resultado de existencia de solución del PCA asociado.
7. Las propiedades obtenidas se pueden generalizar para los espacios $l^2(\mathbb{Z})$ con peso, espacios de Sobolev periódico y por lo tanto aplicarlo en el estudio de la existencia de solución de ecuaciones de evolución.

Contribuición del autor. El artículo a sido desarrolla en su integridad por al autora YS.

Conflicto de interés. La autora declara no tener conflicto de interes.

ORCID and License

Yolanda Santiago Ayala https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

Referencias

[1] Iorio R, Iorio V. Fourier Analysis and partial differential equation. Cambridge University; 2001.
[2] Muñoz Rivera J. Semigrupos e equações Diferenciais Parciais. Petropolis-LNCC; 2007.
[3] Pazy A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berlin; 1983.
[4] Reed M, Simon B. Methods of Mathematical Physics. Volume I: Functional Analysis. Academic Press; 1980.
[5] Santiago Y, Rojas S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(2):207-230.
[6] Santiago Ayala Y. Semigroup of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger equation. J. of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04):1061-1076.
[7] Santiago Ayala Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.
[8] Santiago Ayala Y. Los espacios $l^2(Z)$ con peso: propiedades y su conexión con los espacios de Sobolev. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 88-104.