



Dynamics of a Leslie-Gower type predation model with non-monotonic functional response and weak Allee effect on prey

Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional no-monotónica y efecto Allee débil en las presas

Francisco J. Reyes-Bahamón^{id}, Simeón Casanova Trujillo^{id} and Eduardo González-Olivares^{id}

Received, Oct. 03, 2023;

Accepted, Nov. 20, 2023;

Published, Dec. 27, 2023



How to cite this article:

Reyes Bahamon F. et al. *Dynamics of a Leslie-Gower type predation model with non-monotonic functional response and weak Allee effect on prey*. *Selecciones Matemáticas*. 2023;10(2):310–323. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.07>

Abstract

This research concerns with analysis of a class of modified predator-prey type Leslie-Gower models. The model is described by an autonomous nonlinear ordinary differential equation system. The functional response of predators is Holling IV type or non-monotone, and the growth of prey is affected by the Allee effect. An important aspect is the study of the point $(0, 0)$ since it has a strong influence on the behavior of the system being essential for the existence and extinction of both species, although the proposed system is not define there.

Keywords . Predator-prey model, Allee effect, functional response, stability, bifurcation, limit cycles.

Resumen

En este trabajo se realiza el análisis de una clase de modelos depredador-presa tipo Leslie-Gower modificado, el cual es descrito por un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomo. La respuesta funcional de los depredadores es Holling tipo IV o no-monótonica, el crecimiento de las presas es afectada por el efecto Allee. Un aspecto importante del trabajo es el estudio del punto $(0; 0)$, pues este tiene una fuerte incidencia en el comportamiento del sistema y es esencial para la existencia y extinción de ambas especies.

Palabras clave. Modelo depredador-presa, efecto Allee, Respuesta funcional, estabilidad, bifurcación, ciclos límites.

1. Introducción. Uno de los aspectos más importantes en las dinámicas de los sistemas complejos, como son las cadenas alimenticias, es el análisis de la interacción entre dos especies, en particular la dinámica entre los depredadores y sus presas. La mayoría de los modelos utilizados para explicar dicha interacción son extensiones del modelo de competencia de Lotka-Volterra [1] que son modelos compartimentados.

En este trabajo el modelo depredador-presa tiene una concepción diferente, teniendo en cuenta las siguientes características:

- i. El crecimiento de las presas es afectada por el efecto Allee [2] [3] .
- ii. La respuesta funcional de los depredadores es no-monótonica [4] [5].

*Escuela de Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería, Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Colombia. **Correspondence author** (francisco.reyes@unad.edu.co).

†Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. (scasanovat@unal.edu.co).

‡Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. (eduardo.gonzalez@pucv.cl).

iii. La ecuación del depredador es una función de crecimiento de tipo logístico [6] [7].

El tercer aspecto caracteriza a los modelos de tipo Leslie-Gower [6] [8] [9], propuesto por P.H. Leslie en 1948 [10], donde la capacidad de carga del medio ambiente de los depredadores K_y es proporcional a la abundancia de presas, es decir, $K_y = nx$ donde $x = x(t)$ indica el tamaño de la población de presas y n es una medida de la calidad de la presa como fuente alimenticia para el depredador, en este caso se dice que el depredador es especialista [8] [9] [11].

1.1. El efecto Allee. Warder Clyde Allee fue un zoólogo y ecólogo de la Universidad de Chicago, que se interesó por investigar el comportamiento grupal de los animales. Pudo observar que el crecimiento poblacional se limita cuando las especies se encuentran aglomeradas y sin competencia [12] [13]. El efecto Allee es un fenómeno común en ciertas poblaciones, que expresa una relación positiva entre la tasa de crecimiento de la población y las bajas densidades [3] [14]. Las consecuencias más representativas del efecto Allee en la conservación y preservación de especies en un entorno dado son ampliamente conocidas y pueden considerarse como la base de la socialidad animal [15]. Matemáticamente, los modelos para este fenómeno pueden revelar mucho sobre su dinámica [15] y pueden originar la aparición de un nuevo punto de equilibrio que cambia la estabilidad estructural del sistema, además cambios en la estabilidad de otros puntos de equilibrio [3].

1.1.1. Modelo de población de una sola especie con efecto Allee. Diferentes herramientas matemáticas se han implementado para analizar el efecto Allee. Este efecto puede ser expresado modificando la función de crecimiento natural (generalmente la función de crecimiento logístico). El modelo matemático, comunmente empleado que representa al *efecto Allee* está dado por la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m), \tag{1.1}$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población afectada por el efecto Allee en cualquier tiempo t , mayor o igual a 0, $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y $K > 0$ es la capacidad de carga del medio ambiente [6], los mismos significados que en la ecuación logística. Si $m > 0$, la ecuación 1.1 representa el *efecto Allee fuerte* o una *descompensación crítica* [6] [16], donde la tasa de crecimiento en el límite de baja densidad es negativa. El parámetro m es un nivel de población umbral; Claramente, si $0 < x < m$, la tasa de crecimiento es negativa (ver Figura 1.1), es decir, $\frac{dx}{dt} < 0$ lo que implica que la población se extingue. Es decir, la población debe superar este umbral para poder crecer.

Si $m \leq 0$, la ecuación diferencial representa el *efecto Allee débil* o una *descompensación pura*, donde la tasa de crecimiento es positiva en la densidad cero y no tiene un umbral de crecimiento.

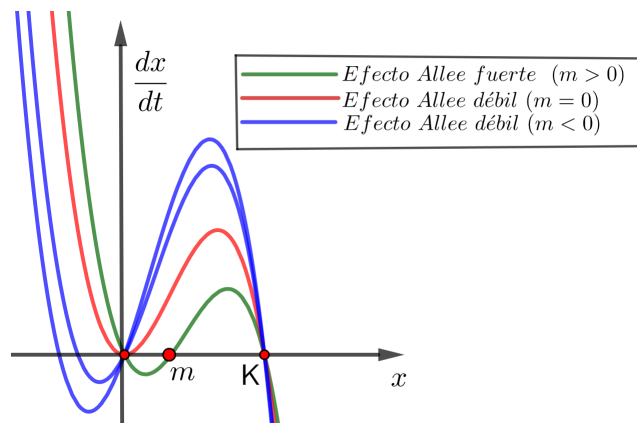


Figura 1.1: Función descompensada o comportamiento Allee

1.2. Respuesta funcional de los depredadores. La respuesta funcional, o tasa de consumo, expresa la acción de los depredadores en la tasa de crecimiento de la población de presas, y representa la cantidad de presas que puede consumir un depredador en una unidad de tiempo [3] [9]. Estas fueron clasificadas en tres tipos por C.S Holling en 1959 [8]. En el año 1984, Taylor describe un cuarto tipo llamado Holling tipo IV o respuesta funcional no monótona [4].

En esta investigación, se asume que la respuesta funcional es no-monótona y es utilizada para modelar comportamientos antidepredatorios (APB), llamado formación de grupos de defensa [4] [8], el cual es empleado por las presas para evitar la depredación. La función es dada por:

$h(x) = \frac{qx^2}{x^2 + bx + a}$, donde q y a son parámetros positivos y considerando el parámetro $b < 0$.

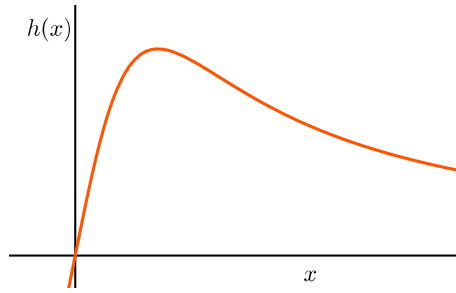


Figura 1.2: La respuesta funcional Holling tipo IV

2. El modelo. El modelo de tipo Leslie-Gower modificado [2] [6] considerando que la población de presas es afectada por el efecto Allee [2] [8] y con una respuesta funcional Holling tipo IV [7], es expresada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas no-lineales de tipo Kolmogorov, dado por:

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qx^2y}{x^2 - bx + a}, \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ indican el tamaño de la población de presas y depredadores, respectivamente, en cada tiempo $t \geq 0$ (medido como biomasa, el número de individuos o densidad por unidad de superficie o volumen), con $\mu = \{(r, K, m, q, a, b, s, n) \in \mathbb{R}_+^8 / 0 \leq m < K\}$, es decir, todos los parámetros son positivos, todos tienen diferentes significados ecológicos y se definen de la siguiente manera: r representa la tasa crecimiento intrínseca de la población de presas, K es la capacidad de carga del medio ambiente (environmental) de las presas, m es la constante del efecto Allee o el umbral de población viable, cuando m mayor que cero, q es la tasa máxima de consumo per cápita, es decir, el número de presas consumidas por cada depredador en una unidad de tiempo (cuando $b \geq 0$); cuando $b < 0$, q es la depredación de saturación, a y b son parámetros adecuados [4]. Cuando $b = 0$, \sqrt{a} es la constante de saturación media. s es la tasa crecimiento intrínseca de la población de depredadores y n es una medida de calidad de la presa como fuente alimenticia para el depredador. En este trabajo, solo se analizará el caso donde $b < 0$.

Observemos que el sistema 2.1 o campo vectorial X_μ no está definido en el eje y , particularmente en el punto $(0, 0)$, pero ambas isoclinas pasan a través de este punto [3] y para nuestro modelo, es un punto de especial importancia como mostraremos más adelante.

El sistema 2.1 está definido en el conjunto:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+.$$

Con el fin de simplificar los cálculos, mediante el cambio de variable y el reescalamiento del tiempo dado por (ver [3]):

$$x = Ku, \quad y = nKv \quad y \quad \tau = \frac{rK}{u \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right)} t,$$

que dan lugar a la función $\varphi : \Omega_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$

$$\text{definida por } \varphi(u, v, \tau) = \left(Ku, nKv, \frac{u \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right)}{rK} \tau \right) = (x, y, t),$$

donde $\Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\}$. Podemos ver que

$$\det J\varphi(u, v, \tau) = \frac{nk}{r} u \left(\frac{(Ku)^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right) > 0, \text{ si } b > 2\sqrt{a}.$$

Esto quiere decir que φ es un difeomorfismo que mantiene la orientación del tiempo [8] y por lo tanto el cambio de variable transforma el sistema 2.1 en uno topológicamente equivalente (ver [17] [18]) con campo vectorial $Z_\eta = \varphi \circ X_\mu$ [3], donde $Z_\eta(u, v) = P(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + Q(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$.

Lema 2.1. El sistema 2.1 es topológicamente equivalente al siguiente modelo de tipo Kolmogorov

$$Z_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2[(1-u)(u-M)(Au^2 - Bu + 1) - Nuv], \\ \frac{dv}{d\tau} = Wv(u-v)(Au^2 - Bu + 1). \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\eta = (M, N, W, A, B) \in \mathbb{R}_5^+$ y $B > 2\sqrt{A}$.

Demostración: Si $x = Ku, y, y = nKv$, se tiene que:

$\frac{dx}{dt} = K \frac{du}{dt}, y, \frac{dy}{dt} = nK \frac{dv}{dt}$. Reemplazando en 2.1 se tiene que

$$\begin{cases} K \frac{du}{dt} = \left[r(1-u)(Ku - m) - \frac{qnK^2uv}{K^2u^2 - bKu + a} \right] Ku, \\ nK \frac{dv}{dt} = snKv \left(1 - \frac{v}{u} \right). \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = rKu \left[(1-u)\left(u - \frac{m}{K}\right) - \frac{qnK}{ra} \frac{uv}{\left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bKu}{a} + 1\right)} \right], \\ \frac{dv}{dt} = sv \left(\frac{u-v}{u} \right). \end{cases}$$

Haciendo el cambio en la escala del tiempo $\tau = \frac{rK}{u \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right)} t$, y utilizando la regla de la

cadena $\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$, con $Z = (u, v)$, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} \frac{rK}{u \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right)} = rKu \left[(1-u)\left(u - \frac{m}{K}\right) - \frac{qnK}{ra} \frac{uv}{\left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bKu}{a} + 1\right)} \right], \\ \frac{dv}{d\tau} \frac{rK}{u \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right)} = sv \left(\frac{u-v}{u} \right). \end{cases}$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2 \left[(1-u)(u-M) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right) - \frac{qnK}{ra}uv \right], \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{s}{rK}v(u-v) \left(\frac{K^2u^2}{a} - \frac{bK}{a}u + 1 \right). \end{cases}$$

Haciendo las sustituciones $M = \frac{m}{K} < 1$, con $0 < M < 1, N = \frac{qnK}{ra}, W = \frac{s}{rK}, A = \frac{K^2}{a}$ y $B = \frac{bK}{a}$, se obtiene el sistema polinomial con cinco parámetros.

El sistema 2.2 está definido en el primer cuadrante, es decir:

$$\Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+.$$

El nuevo sistema 2.2 tiene el origen (0,0) del plano $u - v$ como punto de equilibrio y aunque en el sistema 2.1 no se consideraba $x = 0$. La dinámica en una vecindad del punto (0, 0) en el plano $x - y$ queda entonces reflejada por la dinámica en una vecindad del punto (0, 0) en el plano $u - v$, porque los sistemas son topológicamente equivalentes. A continuación, solo consideramos en el modelo el efecto Allee débil, es decir, cuando $M = 0$; el modelo con fuerte efecto Allee para $M > 0$ será analizado en un trabajo. Así el

sistema 2.2 toma la forma:

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^3[(1-u)(Au^2 - Bu + 1) - Nv], \\ \frac{dv}{d\tau} = Wv(u-v)(Au^2 - Bu + 1). \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $\eta = \{(N, W, A, B) \in \mathbb{R}_4^+\}$ con $N = \frac{qnK}{ra}$, $W = \frac{s}{rK}$, $A = \frac{K^2}{a}$ y $B = \frac{bK}{a}$

La matriz Jacobiana del sistema 2.3 es:

$$J\hat{Z}_\eta(u, v) = \begin{pmatrix} J11 & -Nu^3 \\ J21 & W(Au^2 - Bu + 1)(u - 2v) \end{pmatrix},$$

donde

$$J11 = u^2(3 - 4u - 4Bu + 5Au^2 + 5Bu^2 - 6Au^3 - 3Nv)$$

$$J21 = Wv(1 - 2Bu + 3Au^2 + Bv - 2Auv).$$

Los puntos de equilibrio del sistema 2.3, o singularidades del campo vectorial \hat{Z}_η , son $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ y los puntos que se encuentran en la intersección de las curvas isoclinas:

$$(1 - u)(Au^2 - Bu + 1) - Nv = 0 \quad \text{y} \quad u - v = 0.$$

Estas últimas singularidades (u, v) satisfacen $u = v$ y por lo tanto u debe satisfacer la ecuación

$$(1 - u)(Au^2 - Bu + 1) - Nu = 0,$$

es decir, u debe ser la raíz del polinomio

$$p(u) = Au^3 - (B + A)u^2 + (1 + B + N)u - 1. \tag{2.4}$$

Usando la regla de signos de Descartes obtenemos que $p(u)$ tiene raíces reales positivas y no tiene raíces negativas. El polinomio $p(u)$ tiene tres raíces reales positivas, dos (una simple y una de multiplicidad dos) o una raíz real positiva. En cualquier situación se puede asegurar la existencia de por lo menos una raíz positiva que denotaremos por H . Dividiendo $p(u)$ entre $u - H$ y se obtiene un trinomio de segundo grado que nos permitirá conocer la existencia de otras raíces del polinomio $p(u)$ y obtener condiciones algebraicas sobre el valor de los parámetros. Por lo tanto,

$$p(u) = (u - H)(Au^2 - (B + A - AH)u + 1 + B + N - H(B + A - AH)).$$

Teniendo en cuenta que el residuo de la división es cero, obtenemos:

$$N = \frac{1}{H}(1 - H)(AH^2 - BH + 1). \tag{2.5}$$

Además, se tiene que necesariamente $H < 1$, ya que $N > 0$ y $B > 2\sqrt{A}$. Al sustituir N , el factor cuadrático de $p(u)$, tiene la forma:

$$q(u) = \left(Au^2 - (B + A(1 - H))u + \frac{1}{H} \right).$$

Utilizando nuevamente la regla de signos de Descartes, es claro que si $(B + A(1 - H)) \leq 0$, entonces el polinomio $q(u)$ no tiene raíces reales positivas. En caso contrario, si $(B + A(1 - H)) > 0$ entonces el polinomio $q(u)$ posee a lo más dos raíces reales positivas.

Las soluciones de la ecuación $q(u) = 0$ son:

$$u = \frac{1}{2A} \left((B + A(1 - H)) \pm \sqrt{(B + A(1 - H))^2 - \frac{4A}{H}} \right).$$

El discriminante de la ecuación cuadrática $q(u) = 0$, es

$$D_q = (B + A(1 - H))^2 - \frac{4A}{H},$$

que se puede escribir como un polinomio de grado 2 en A

$$D_q(A) = (1 - H)^2 A^2 + \left(\frac{2BH(1 - H) - 4}{H} \right) A + B^2.$$

Las soluciones de la ecuación $D_q(A) = 0$ son:

$$A = \frac{1}{H(1 - H)^2} \left((2 - BH(1 - H)) \pm 2\sqrt{1 - BH(1 - H)} \right).$$

Por lo tanto,

- Si $B < \frac{1}{H(1-H)}$ entonces el discriminante $D_q > 0$.
- Si $B = \frac{1}{H(1-H)}$ entonces el discriminante $D_q = 0$.
- Si $B > \frac{1}{H(1-H)}$ entonces el discriminante $D_q < 0$.

□

Teorema 2.1. (Raíces positivas de $p(u)$) Para el polinomio $p(u)$ se cumple que:

- i. Si $(B + A(1 - H)) < 0$, o bien si $D_q < 0$, entonces $p(u)$ tiene una única raíz real positiva H .
- ii. Si $B = \frac{1}{H(1-H)}$ o bien si $D_q = 0$, entonces $p(u)$ tiene dos raíces positivas, H y $H_0 = \frac{(B + A(1 - H))}{2A}$.
- iii. Si $B < \frac{1}{H(1-H)}$ o bien si $D_q > 0$, entonces $p(u)$ tiene tres raíces reales positivas, H y $H_{1,2} = \frac{1}{2A} \left((B + A(1 - H)) \pm \sqrt{D_q} \right)$.

Corolario 2.1. (Puntos de equilibrio positivos) Para el sistema 2.3 en el interior de la región $\hat{\Omega}$ se tiene:

- i. Si $(B + A(1 - H)) < 0$, o bien si $D_q < 0$, entonces existe un único punto de equilibrio: $P_H = (H, H)$.
- ii. Si $B = \frac{1}{H(1-H)}$ o bien si $D_q = 0$, entonces existen dos puntos de equilibrio: P_H y $P_{H_0} = (H_0, H_0)$.
- iii. Si $B < \frac{1}{H(1-H)}$ o bien si $D_q > 0$, entonces existen tres puntos de equilibrio: P_H , $P_{H_1} = (H_1, H_1)$ y $P_{H_2} = (H_2, H_2)$.

2.1. Resultados Principales. Para el sistema 2.3 se tienen las siguientes propiedades.

Lema 2.2. El conjunto $\Gamma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es una región de invarianza.

Demostración: En el sistema 2.3, se tiene:

- Si $u = 0$, entonces $\frac{du}{d\tau} = 0$, y, $\frac{dv}{d\tau} = -Wv^2 < 0$ y las trayectorias permanecen sobre el eje v .
- Si $v = 0$, entonces $\frac{dv}{d\tau} = 0$, y, $\frac{du}{d\tau} = -u^3(u-1)(Au^2 - Bu + 1) < 0$ y las trayectorias permanecen sobre el eje u .
- Si $u = 1$, $\frac{du}{d\tau} = -Nv < 0$, y, $\frac{dv}{d\tau} = -Wv^2 < 0$ y las trayectorias apuntan hacia el interior de Γ .

□

Lema 2.3. Las soluciones son acotadas.

Demostración: Con el objetivo de comprobar que las trayectorias están acotadas, se analiza su comportamiento en el infinito mediante la Compactificación de Poincaré [3] [6] [8]. Para esto se introducen las variables $X = \frac{u}{v}$, $Y = \frac{1}{v}$. Entonces,

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{d\tau} - u \frac{dv}{d\tau} \right] \text{ y } \frac{dY}{d\tau} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\tau}.$$

Después de algunas simplificaciones algebraicas y haciendo el cambio en la escala de tiempo $T = \frac{1}{y^5} \tau$, se obtiene el siguiente sistema:

$$\hat{Z}_{\eta_1} : \begin{cases} \frac{dX}{dT} = X^3(Y - X)(AX^2 - BXY + Y^2) - NX^3Y^2 \\ \quad + WXY^2(1 - X)(AX^2 - BXY + Y^2), \\ \frac{dY}{dT} = WY^3(1 - X)(AX^2 - BXY + Y^2). \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$J\hat{Z}_{\eta_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se utiliza el método del *blowing-up* (ver [3] [6]), con el objetivo de desingularizar el origen en el campo vectorial $\hat{Z}_{\eta_1}(X, Y)$, haciendo los cambios de variable

$$X = r, y, Y = r^2s. \text{ Entonces, } \frac{dX}{dT} = \frac{dr}{dT}, y, \frac{ds}{dT} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dY}{dT} - 2rs \frac{dr}{dT} \right).$$

Por lo tanto, el sistema anterior se transforma en el sistema

$$\hat{Z}_{\eta_2} : \begin{cases} \frac{dr}{dT} = r^6[(rs - 1)(A - Brs + r^2s^2) - Nrs + Wrs^2(1 - r)(A - Brs + r^2s^2)], \\ \frac{ds}{dT} = r^5s[Wrs^2(1 - r)(A - Brs + r^2s^2) - 2[(rs - 1)(A - Brs + r^2s^2)]] \\ - Nrs + Wrs^2(1 - r)(A - Brs + r^2s^2). \end{cases}$$

Consideremos el cambio en la escala de tiempo $\zeta = r^5T$, obteniendo el sistema

$$\hat{Z}_{\eta_3} : \begin{cases} \frac{dr}{dT} = r[(rs - 1)(A - Brs + r^2s^2) - Nrs + Wrs^2(1 - r)(A - Brs + r^2s^2)], \\ \frac{ds}{dT} = s[Wrs^2(1 - r)(A - Brs + r^2s^2) - 2[(rs - 1)(A - Brs + r^2s^2)]] \\ - Nrs + Wrs^2(1 - r)(A - Brs + r^2s^2), \end{cases}$$

cuya matriz Jacobiana en el punto $(0, 0)$ es

$$J\hat{Z}_{\eta_3}(0, 0) = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix},$$

donde $\det J(\hat{Z}_{\eta_3}(0, 0)) = -2A^2 < 0$. Se tiene que $(0, 0)$ es un punto de silla de los campos vectoriales \hat{Z}_{η_1} y \hat{Z}_{η_3} . Por lo tanto, el punto $(0, \infty)$ es punto de silla del campo vectorial compactificado. Es decir, las órbitas del sistema son acotadas para cualquier valor de los parámetros [6]. \square

2.2. Puntos críticos sobre los ejes. Se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio que se encuentran en los ejes u y v . Determinamos la existencia de una curva separatriz en el plano de fase que divide el comportamiento de las trayectorias.

Lema 2.4. Para todo (A, B, N, W) el punto $P_1 = (1, 0)$ es un punto silla.

Demostración: La matriz Jacobiana del sistema 2.3 evaluada en el punto de equilibrio $P_1 = (1, 0)$ es:

$$J\hat{Z}_{\eta}(1, 0) = \begin{pmatrix} -(A - B + 1) & -N \\ 0 & W(A - B + 1) \end{pmatrix}.$$

Como $\det J\hat{Z}_{\eta}(1, 0) = -W(A - B + 1)^2 < 0$, $P_1 = (1, 0)$ es un punto silla. \square

Teorema 2.2. El punto $P_0 = (0, 0)$ del dominio del campo vectorial \hat{Z}_{η} determina un sector parabólico y dos sectores hiperbólicos [17]. Es decir, existe una curva en el plano de fase que divide el comportamiento de las trayectorias: el punto $(0, 0)$ es atractor para ciertas trayectorias y punto silla para otras.

Demostración: Como el determinante $\det(\hat{Z}_{\eta}(0, 0))$ es la matriz cero. Para desingularizar el origen, utilizaremos un *blowing-up vertical* [3] [6], dado por la función $\Psi(p, q) = (pq, q) = (u, v)$; Sea $u = pq$, $y, v = q$, entonces $\frac{dp}{d\tau} = \frac{1}{q} \left(\frac{du}{d\tau} - p \frac{dq}{d\tau} \right)$, $y, \frac{dq}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau}$ con un cambio en la escala de tiempo $T = q\tau$, se obtiene el siguiente campo vectorial:

$$Z_{\Psi_1} = \begin{cases} \frac{dp}{dT} = p[p^2q(1 - pq)(Ap^2q^2 - Bpq + 1) - Np^2q^2 \\ - W(p - 1)(Ap^2q^2 - Bpq + 1), \\ \frac{dq}{dT} = Wq(p - 1)(Ap^2q^2 - Bpq + 1). \end{cases}$$

Claramente, si $q = 0$, entonces, $\frac{dq}{dT} = 0$. Además $\frac{dp}{dT} = p[-W(p - 1)]$. Por lo tanto, las singularidades del campo vectorial Z_{Ψ_1} , son $(0, 0)$ y $(1, 0)$, es decir, existe una recta separatriz en el plano de fase pq . La matriz Jacobiana del campo vectorial Z_{Ψ_1} , está dado por:

$$JZ_{\Psi_1}(p, q) = \begin{pmatrix} Z_{\Psi_1}(p, q)_{11} & Z_{\Psi_1}(p, q)_{12} \\ Z_{\Psi_1}(p, q)_{21} & Z_{\Psi_1}(p, q)_{22} \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} Z_{\Psi_1}(p, q)_{11} &= (3p^2q - 4p^3q^2)(Ap^2q^2 - Bpq + 1) + (p^3q - p^4q^2)(2Apq^2 - Bq) \\ &\quad - 3Np^2q^2 + (W - 2Wp)(Ap^2q^2 - Bpq + 1) + (Wp - Wp^2)(2Apq^2 - Bq), \\ Z_{\Psi_1}(p, q)_{12} &= (p^3 - 2p^4q)(Ap^2q^2 - Bpq + 1) + (p^3q - p^4q^2)(2Apq^2 - Bq) \\ &\quad - 2Np^3q + (Wp - Wp^2)(2Ap^2q - Bp), \\ Z_{\Psi_1}(p, q)_{21} &= Wq(Ap^2q^2 - Bpq + 1) + (Wpq - Wp)(2Apq^2 - Bq), \\ Z_{\Psi_1}(p, q)_{22} &= (Wp - W)(Ap^2q^2 - Bpq + 1) + (Wpq - Wq)(2Ap^2q - Bp). \end{aligned}$$

En la singularidad $(0, 0)$ la matriz Jacobiana resulta

$$JZ_{\Psi_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & -W \end{pmatrix}.$$

El $\det JZ_{\Psi_1}(0, 0) = -W^2 < 0$, es decir, la singularidad $(0, 0)$ es un punto de silla del campo vectorial Z_{Ψ_1} . La matriz Jacobiana en la singularidad $(p, 0)$ con $p = 1$ es

$$JZ_{\Psi_1}(1, 0) = \begin{pmatrix} -W & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det JZ_{\Psi_1}(1, 0) = 0$ y $\text{Tra}(JZ_{\Psi_1}(1, 0)) = -W < 0$. Se tiene por el teorema de la variedad central (ver [6]), que la naturaleza de este punto corresponde a un nodo atractor del campo vectorial Z_{Ψ_1} . \square

Teorema 2.3. Sean $W^s(0, 0)$ y $W^u(1, 0)$ las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente. Existe un subconjunto abierto de valores de parámetros por los cuales $W^s(0, 0) \cap W^u(1, 0)$ es no vacía, dando origen a una curva heteroclínica γ_h en el primer cuadrante que contiene al equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

Demostración: Por el Teorema 2.2, el punto de equilibrio $(0, 0)$ tiene una curva separatriz Σ con una inclinación $u = v$, en la vecindad de ese punto, por el Lema 2.4, el punto $(1, 0)$ es punto de silla.

Sean $W^s(0, 0)$ y $W^u(1, 0)$ las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Claramente el α -límite de $W^s(0, 0)$ y el ω -límite de $W^u(1, 0)$ no están en el infinito en la dirección del eje v .

Existen puntos $(u^*, v^s) \in W^s(0, 0)$, y $(u^*, v^u) \in W^u(1, 0)$, con v^s y v^u dependiendo de los valores de parámetros, tal que:

$$v^s = s(A, B, N, W) \text{ y } v^u = u(A, B, N, W).$$

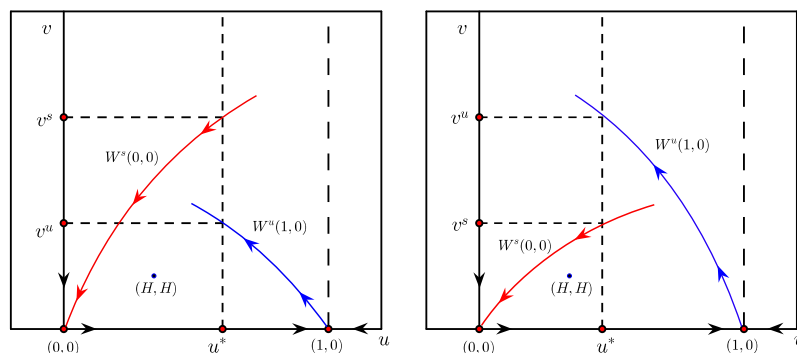


Figura 2.1: Dos posibles posiciones relativas entre la variedad estable $W^s(0, 0)$ del punto de equilibrio $(0, 0)$ y la variedad inestable $W^u(1, 0)$ para el punto silla $(1, 0)$.

◇ Si $0 < u^* \ll 1$, entonces $v^s < v^u$ y la variedad estable $W^s(0, 0)$ está por debajo de la variedad inestable $W^u(1, 0)$.

◇ Si $0 \ll u^* < 1$, entonces $v^s > v^u$ y la variedad estable $W^s(0, 0)$ está por encima de la variedad inestable $W^u(1, 0)$.

Como el campo vectorial \hat{Z}_η es continuo con respecto a los valores de los parámetros, entonces la variedad estable $W^s(0, 0)$ interseca a la variedad inestable $W^u(1, 0)$. Por lo tanto, existe $(u^*, v^*) \in \hat{\Omega}$

(región invariante), tal que $v_s^* = v_u^*$ y la ecuación $s(A, B, N, W) = u(A, B, N, W)$ define una superficie en el espacio de parámetros para los cuales existe una curva heteroclínica [8].

El conjunto $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ / 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq v_s, y, v_s \in \Sigma\}$, es decir, el conjunto determinado por la curva separatriz Σ , la recta $u = 1$ y el eje u es una región compacta. \square

2.3. Puntos de equilibrio positivos. Para el análisis de los puntos de equilibrio interiores, es importante resaltar que estos tienen igual abscisa y ordenada, por lo tanto analizamos la matriz Jacobiana evaluada en un punto (u, u) obteniendo:

$$J\hat{Z}_\eta(u, u) = \begin{pmatrix} -u^2[6Au^3 - (5A + 5B)u^2 + (4 + 4B + 3N)u - 3] & -Nu^3 \\ Wu(Au^2 - Bu + 1) & -Wu(Au^2 - Bu + 1) \end{pmatrix}.$$

Se tiene que (u, u) es un punto de equilibrio, entonces satisface la ecuación $p(u) = 0$ por lo tanto el término de la primera fila y primera columna se puede reescribir como: $-u^2[(A + B)u^2 - (2B + 3N + 2)u + 3]$.

El determinante de la matriz Jacobiana viene dado por:

$$\det J\hat{Z}_\eta(u, u) = Wu^3(Au^2 - Bu + 1)[(A + B)u^2 - (2B + 2N + 2)u + 3].$$

El signo de $\text{Det}(J\hat{Z}_\eta(u, u))$, depende del valor que tome el factor:

$$d(u) = (A + B)u^2 - (2B + 2N + 2)u + 3. \quad (2.6)$$

La traza de la matriz Jacobiana está dada por:

$$\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(u, u)) = -u[(A + B)u^3 - (2B + 3N + 2 - AW)u^2 + (3 - WB)u + W].$$

El signo de la $\text{Tra}(J\hat{Z}_\eta(u, u))$, depende del valor que tome el factor:

$$t(u) = (A + B)u^3 - (2B + 3N + 2 - AW)u^2 + (3 - WB)u + W. \quad (2.7)$$

Para el análisis de la naturaleza de todos los puntos de equilibrio que se encuentran en el interior de $\hat{\Omega}$, se procede según lo enunciado en el corolario 2.1, para uno, dos o tres puntos de equilibrio positivos.

2.3.1. Existencia de un único punto de equilibrio positivo. Supongamos que existe un único punto de equilibrio llamado $P_H = (H, H)$ en el interior de $\hat{\Omega}$, es decir, satisface la primera condición del Corolario 1, si $(B + A(1 - H)) < 0$ o bien $D_q < 0$.

Teorema 2.4. El punto de equilibrio $P_H = (H, H)$ es:

- i. Es un punto atractor, si y sólo si, $W > \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$.
- ii. Es un punto repulsor, si y sólo si, $W < \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$.

Demostración: Utilizando la ecuación 2.5, en el punto (H, H) tenemos:

$$\begin{aligned} d(H) &= (A + B)H^2 - (2B + 2N + 2)H + 3 \\ &= 2AH^3 - AH^2 - BH^2 + 1 \\ &= AH^3 + (AH - (A + B))H^2 + 1 \end{aligned}$$

En el caso que $(B + A(1 - H)) < 0$, donde es equivalente a $(AH - (A + B)) > 0$, se tiene inmediato que $d(H) > 0$.

Es decir, para el único punto de equilibrio se tiene que $\det(J\hat{Z}_\eta(H, H)) > 0$, y la naturaleza de este punto queda determinado por el signo de la traza de la matriz Jacobiana, que depende del siguiente factor:

$$t(H) = 3AH^4 - 2(A + B)H^3 + (1 + B + AW)H^2 - BWH + W.$$

Por lo tanto,

- i. Si $W > \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$ entonces $t(H) > 0$, y como $\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H)) < 0$, se tiene que el punto (H, H) es un punto de equilibrio atractor.
- ii. Si $W < \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$, entonces $t(H) < 0$, y como $\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H)) > 0$, se tiene que el punto (H, H) es un punto de equilibrio repulsor.

Analizando el signo de $\Delta(H) = \text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H))^2 - 4\text{Det}(J\hat{Z}_\eta(H, H))$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H^2[(1 + 3AH + B)H^2 + (A - 2B)H^3 + (1 + AH^2)W - (3 + 3AH^2 + BW)H]^2 \\ &\quad - 4WH^2(AH^2 - BH + 1)[AH^3 + (AH - (A + B))H^2 + 1] \end{aligned}$$

El primer término siempre es positivo y el signo del segundo término depende del factor $AH^3 + (AH - (A + B))H^2 + (1 - H)$. Sin embargo este término siempre va a ser positivo. En conclusión, $\Delta(H)$ cambia de signo y el punto de equilibrio puede ser un foco o un nodo según $\Delta(H) < 0$ o $\Delta(H) > 0$. Por lo tanto, vía Bifurcación de Hopf, el punto de equilibrio (H, H) genera por lo menos un ciclo límite [17]. \square

2.3.2. Existencia de dos puntos de equilibrio positivos. Supongamos la existencia de dos puntos de equilibrio positivos en el primer cuadrante, (H, H) y (H_0, H_0) donde $H_0 = \frac{(B + A(1 - H))}{2A}$. Es decir, $D_q = 0$. Se tiene que la última condición es equivalente a $A = \frac{H(B + A(1 - H))^2}{4}$, igual forma a $A = \frac{1}{HH_0^2}$.

Un hecho importante que debemos mencionar, es que si el determinante $D_q = 0$ entonces las raíces de la ecuación cuadrática son de multiplicidad dos, es decir, el punto de equilibrio (H_0, H_0) es el colapso de otros dos puntos de equilibrio del sistema. Este colapso nos genera un punto de equilibrio llamado silla-nodo y que se puede obtener vía bifurcación silla-nodo y cuando la traza es cero se tiene un punto cúspide (bifurcación de Bogdanov Takens) [18].

Teorema 2.5. *Los puntos de equilibrio satisfacen que:*

(i) El punto de equilibrio (H, H) es:

- i. Es un punto atractor, si y sólo si, $W > \frac{H^2[2 - 3H + 2BHH_0^2 - (B + 1)H_0^2]}{H_0^2 - BHH_0^2 + H}$.
- ii. Es un punto repulsor, si y sólo si, $W < \frac{H^2[2 - 3H + 2BHH_0^2 - (B + 1)H_0^2]}{H_0^2 - BHH_0^2 + H}$.

(ii) El punto de equilibrio (H_0, H_0) es:

- i. Es un punto de equilibrio no hiperbólico estable del tipo nodo, si y sólo si, $W < \frac{HH_0[2H_0 + H(2 - H_0) - 2]}{H^2 + H_0 - 1}$.
- ii. Es un punto de equilibrio no hiperbólico inestable del tipo nodo, si y sólo si, $W > \frac{HH_0[2H_0 + H(2 - H_0) - 2]}{H^2 + H_0 - 1}$.

Demostración: Por el Teorema 2.4, sabemos que para el punto (H, H) se obtiene:

$$\begin{aligned} d(H) &= AH^3 + (AH - (A + B))H^2 + 1 \\ &= AH^3 - 2A \left(\frac{B + A(1 - H)}{2A} \right) H^2 + 1 \\ &= AH^3 - 2AH_0H^2 + 1 \end{aligned}$$

Utilizando la condición $D_q = 0$ y sustituyendo el valor de A obtenemos:

$d(H) = \frac{H^2}{H_0^2} - \frac{2H}{H_0} + 1 = \frac{(H - H_0)^2}{H_0^2} > 0$. Por lo tanto, se debe analizar la traza de la matriz Jacobiana, donde su signo queda determinado por:

$$t(H) = 3AH^4 - 2(A + B)H^3 + (1 + B + AW)H^2 - BWH + W,$$

o, de forma equivalente:

$$t(H) = \frac{3H^3 - 2H^2 - 2BHH_0^2 + (B + 1)H^2H_0^2 + W(H - BHH_0^2 + H_0^2)}{H_0^2}.$$

Por lo tanto,

- i. Si $W > \frac{H^2[2 - 3H + 2BHH_0^2 - (B + 1)H_0^2]}{H_0^2 - BHH_0^2 + H}$, entonces $t(H) > 0$, y como $\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H)) < 0$, se tiene que el punto (H, H) es un punto de equilibrio atractor.
- ii. Si $W < \frac{H^2[2 - 3H + 2BHH_0^2 - (B + 1)H_0^2]}{H_0^2 - BHH_0^2 + H}$, entonces $t(H) < 0$, y como $\text{tra}(J\hat{Z}_\eta(H, H)) > 0$, se tiene que el punto (H, H) es un punto de equilibrio repulsor.

Para el punto (H_0, H_0) , se tiene

$$\begin{aligned} d(H_0) &= AH_0^3 + (AH_0 - (A + B))H_0^2 + 1 \\ &= AH_0^3 - A(H_0 + H)H_0^2 + 1 \end{aligned}$$

donde $H_0 = \frac{B + A(1 - H)}{2A}$ y es equivalente a $AH_0 - (A + B) = -A(H_0 + H)$.

Utilizando la condición $D_q = 0$ y tomando el valor de A obtenemos:

$$d(H_0) = \frac{H_0}{H} - \frac{H_0 + H}{H} + 1 = 0,$$

sustituyendo los valores de A y B en la traza, se tiene

$$t(H) = HH_0(2 + H(H_0 - 2) - 2H_0) + W(H^2 + H_0 - 1).$$

Por lo tanto,

- i. Si $W < \frac{HH_0[2H_0 + H(2 - H_0) - 2]}{H^2 + H_0 - 1}$, entonces (H_0, H_0) es un punto de equilibrio no hiperbólico estable del tipo nodo.
- ii. Si $W > \frac{HH_0[2H_0 + H(2 - H_0) - 2]}{H^2 + H_0 - 1}$, es un punto de equilibrio no hiperbólico inestable del tipo nodo.

2.3.3. Existencia de tres puntos de equilibrio positivos. Para el tercer caso, supongamos que $D_q > 0$, es decir, existen tres puntos de equilibrio en el primer cuadrante (H, H) , (H_1, H_1) y (H_2, H_2) , donde

$$H_1 = \frac{1}{2A} \left[(B + A(1 - H)) - \sqrt{D_q} \right] \text{ y } H_2 = \frac{1}{2A} \left[(B + A(1 - H)) + \sqrt{D_q} \right].$$

Utilizando la notación $H_0 = \frac{(B + A(1 - H))}{2A}$, en adelante consideramos:

$$H_1 = H_0 - \sqrt{H_0^2 - \frac{1}{AH}} \text{ y } H_2 = H_0 + \sqrt{H_0^2 - \frac{1}{AH}}$$

Para realizar el análisis de estabilidad local, vamos a tener en cuenta cuando $H \geq 2H_0$, de forma que $H_1 < H_2 < H$.

Teorema 2.6. Si $H \geq 2H_0$, los puntos de equilibrio satisfacen que:

- (1) El punto de equilibrio (H_1, H_1) es
 - i. Es un punto atractor si y sólo si $W > H_1^2 \left(\frac{2(A + B)H_1 - 3AH_1^2 - (1 + B)}{AH_1^2 - BH_1 + 1} \right)$.
 - ii. Es un punto repulsor si y sólo si $W < H_1^2 \left(\frac{2(A + B)H_1 - 3AH_1^2 - (1 + B)}{AH_1^2 - BH_1 + 1} \right)$.
- (2) El punto de equilibrio (H_2, H_2) es un punto de silla hiperbólico.
- (3) El punto de equilibrio (H, H) es
 - i. Es un punto atractor si y sólo si $W > \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$.
 - ii. Es un punto repulsor si y sólo si $W < \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$.

Demostración:

- (1) Se analiza el determinante y la traza de la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio (H_1, H_1) , obteniendo:

$$\begin{aligned} d(H_1) &= AH_1^3 - 2AH_0H_1^2 + 1 \\ &= A \left(H_0 - \sqrt{H_0^2 - \frac{1}{AH}} \right)^3 - 2AH_0 \left(H_0 - \sqrt{H_0^2 - \frac{1}{AH}} \right)^2 + 1 \\ &= \frac{H - H_0 + \sqrt{H_0^2 - \frac{1}{AH}}}{H} \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{AH} > 0$, y, $H \geq H_0$, se verifica que el $d(H_1) > 0$. Por lo tanto, el $\det(J\hat{Z}_\eta(H_1, H_1)) > 0$. Se debe verificar el signo de la traza de la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio (H_1, H_1) , que se determina por el factor:

$$t(H_1) = 3AH_1^4 - 2(A + B)H_1^3 + (1 + B + AW)H_1^2 - BWH_1 + W.$$

Es decir,

- i. Si $W > H_1^2 \left(\frac{2(A + B)H_1 - 3AH_1^2 - (1 + B)}{AH_1^2 - BH_1 + 1} \right)$, entonces $t(H_1) > 0$, $Tra(J\hat{Z}_\eta(H_1, H_1)) < 0$, y el punto (H_1, H_1) es un punto de equilibrio atractor.

(2) Para el punto de equilibrio (H_2, H_2) , se tiene:
$$d(H_2) = \frac{(H - H_0) - \sqrt{H_0^2 - \frac{1}{AH}}}{H}$$

Como $\frac{1}{AH} > 0$, y, $H \geq H_0$, se verifica que el $d(H_2) < 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio (H_2, H_2) es del tipo silla hiperbólico.

(3) Para el punto de equilibrio (H, H) , utilizando los lemas anteriores y la expresión para H_0 , obtenemos:

$$\begin{aligned} d(H) &= AH^3 - 2AH_0H^2 + 1 \\ &= AH \left(H(H - 2H_0) + \frac{1}{AH} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, es positivo dado la condición $H > 2H_0$. Se debe analizar el signo de la traza de la matriz Jacobiana $tra(J\hat{Z}_\eta(H, H))$, que viene dado por:

$$t(H) = 3AH^4 - 2(A + B)H^3 + (1 + B + AW)H^2 - BWH + W$$

Es decir,

- i. Si $W > \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$, entonces $t(H) > 0$, $tra(J\hat{Z}_\eta(H, H)) < 0$, y el punto de equilibrio (H, H) es atractor.
- ii. Si $W < \frac{2(A + B)H^3 - 3AH^4 - (1 + B)H^2}{AH^2 - BH + 1}$, entonces $t(H) < 0$, $tra(J\hat{Z}_\eta(H, H)) > 0$, y el punto de equilibrio (H, H) es repulsor.

En conclusión, el valor de la traza cambia de signo, es decir, como los casos anteriores se presenta una bifurcación de Hopf y aparece un ciclo límite rodeando al punto de equilibrio (H, H) . \square

Teorema 2.7. Las variedades estable e inestable del punto silla (H_2, H_2) determinan una curva homoclínica.

Demostración: Sea $(u^*, v^s) \in W_-^s((H_2, H_2))$ y $(u^*, v^u) \in W_+^u((H_2, H_2))$. Se tiene que $W_+^u((H_2, H_2))$ es limitada o acotada y para $u < u_1$ deben apuntar hacia abajo. El α -límite de $W_-^s((H_2, H_2))$ puede ser el punto (H_2, H_2) o un ciclo límite inestable o desde el infinito en la dirección del eje u .

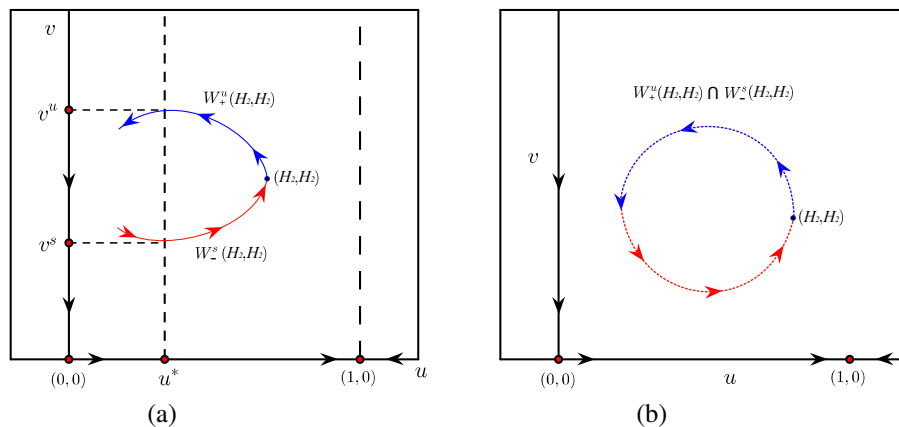


Figura 2.2: (a) La variedad estable $W_-^s((H_2, H_2))$ y la variedad inestable $W_+^u((H_2, H_2))$ para el punto silla (H_2, H_2) . (b) Curva homoclínica formada por la intersección de la variedad inestable $W_+^u((H_2, H_2))$ y la variedad estable $W_-^s((H_2, H_2))$.

Por el teorema de existencia y unicidad, las trayectorias determinadas por la variedad izquierda estable $W_-^s((H_2, H_2))$ no pueden cortar las trayectorias determinadas por la variedad superior inestable $W_+^u((H_2, H_2))$. Según la posición relativa entre $W_-^s((H_2, H_2))$ y $W_+^u((H_2, H_2))$ puede suceder que $v^u > v^s$, o, $v^u < v^s$. Por lo tanto, existe un subconjunto en el espacio de parámetros por el cual $W_-^s((H_2, H_2))$ intersecciona a $W_+^u((H_2, H_2))$ y se obtiene una curva homoclínica. En este caso, el mismo punto (H_2, H_2) es el ω -límite de la variedad superior inestable $W_+^u((H_2, H_2))$ [2]. \square

3. Conclusiones. En este trabajo se analizó una clase de modelos depredador-presa de tipo Leslie-Gower, considerando que la respuesta funcional de los depredadores fue Holling tipo IV y efecto Allee.

Para el sistema 2.3, se ha demostrado que posee dos sectores hiperbólicos y un sector parabólico, y la existencia de una curva separatriz determinada por la variedad estable del punto de equilibrio no-hiperbólico $(0, 0)$. Se puede concluir que para ciertas trayectorias próximas a estas curvas separatriz son muy sensibles a condiciones iniciales. En términos ecológicos, implica que a pequeñas perturbaciones debido a los cambios ambientales causados por la contaminación o por otros factores, podría provocar la extinción de ambas poblaciones.

Se demostró que el sistema 2.3 posee tres posibilidades en la existencia de uno, dos o tres puntos de equilibrio en el primer cuadrante para ciertos valores de parámetros. Se analizó la dinámica poblacional del sistema y se hallaron resultados de vital importancia para la coexistencia de las presas y depredadores.

Cuando existe un único punto de equilibrio (H, H) , éste puede ser un foco o un nodo atractor para ciertos valores de parámetros, y, también puede suceder que el punto sea un foco repulsor, rodeado por un ciclo límite.

Se demostró la existencia de una curva heteroclínica en el primer cuadrante que contiene a los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$, cuando $(u^*, v^s) \in W^s(0, 0)$ y $(u^*, v^u) \in W^u(1, 0)$. Desde el punto de vista ecológico, esto significa que las poblaciones pueden coexistir en relación a los tamaños poblacionales iniciales muy próximos al punto de equilibrio (H, H) .

Se ha demostrado que el punto de equilibrio (H_1, H_1) es un punto de silla y origina una curva homoclínica para ciertos valores de parámetros. Esta curva rodea al punto de equilibrio (H, H) . La órbita homoclínica crea un ciclo límite para ciertas condiciones iniciales y ambas especies pueden coexistir oscilatoriamente alrededor del punto de equilibrio [4].

4. Contribución de autores. Los autores han contribuido de la siguiente manera: Análisis matemático del modelo: Contribución al análisis cualitativo del modelo de estudio. Formalización de los teoremas con sus respectivas demostraciones, FRB; Gestión de datos: Verificación de los datos del modelo y simulación de estos en Matlab. Investigación: analizó la región de invarianza y las equivalencias topológicas, SCT; Conceptualización y formulación del modelo. Estructuró la parte teórica y Análisis de las bifurcaciones, EGO.

Conflicto de interés. Los autores declaran, no hay conflicto de interés.

5. Agradecimientos. F. Reyes-Bahamón, S. Casonova-Trujillo y E. González-Olivares desean agradecer a los miembros del grupo de investigación ABC Dynamics de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

ORCID and License

Francisco J. Reyes-Bahamón <https://orcid.org/0000-0002-1843-2894>

Simeón Casanova Trujillo <https://orcid.org/0000-0002-7324-0860>

Eduardo González-Olivares <https://orcid.org/0000-0003-3907-0076>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Courchamp F, Clutton-Brock T, Grenfell B. Inverse density dependence and the Allee effect. *Trends in Ecology and Evolution*. 1999; 14(6):405-410.
- [2] Arancibia-Ibarra C, González-Olivares E. A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey, In *BIOMAT 2010 International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, Mondaini R (ed). World Scientific Co. Pte. Ltd.: Singapore. 2011; 146-162.
- [3] González-Olivares E, Mena-Lorca J, Rojas-Palma A, Flores JD. Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey. *Applied Mathematical Modelling*. 2011; 35(1):366-381.
- [4] Lamontagne Y, Coutu C, Rousseau C. Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Generalised Holling Type III Functional Response. *J. of Dynamics and Differential Equations*. 2008; 20(3):535-571.
- [5] Broer H, Saleh K, Naudot V, Roussarie R. A Dynamics of a predator-prey model with nonmonotonic response function. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2007; 18(2):221-251.
- [6] Gallego-Berrío L, González-Olivares E. The Holling-Tanner predation model with a special weak Allee effect on prey. *Proceedings of the 2014 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE*. 2014; 2:585-5961.
- [7] Li Y, Xiao D. Bifurcations of a predator-prey system of Holling and Leslie types. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2007; 34(2):606-620.
- [8] González-Olivares E, Tintinago-Ruiz P, Rojas-Palma A. A Leslie-Gower-type predator-prey model with sigmoid functional response. *Int. J. of Computer Mathematics*. 2015; 92(9):1895-1909.
- [9] Saez E, González-Olivares E. Dynamics of a Predator-Prey Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1999; 59:1867-1878.
- [10] Leslie P. Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics. *Biometrika*. 1948; 35:213-245.
- [11] Korobeinikov A. A Lyapunov function for Leslie-Gower predator-prey models. *Applied Mathematics Letters*. 2001; 14(6):697-699.

- [12] Stephens P, Sutherland W, Freckleton R. What is the Allee effect?. Source: *Oikos*. 1999; 87:185-190.
- [13] Liermann M, Hilborn R. Depensation: evidence, models and implications. *Fish Fisheries*. 2001; 2:33-58.
- [14] Courchamp F, Berec L, Gascoigne J. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press. 2008.
- [15] Stephen P, Sutherland W. Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation. *Trends Ecologies*. 1999 14:401-405.
- [16] González-Olivares E, González B, Mena-Lorca J, Ramos-Jiliberto R. Modelling the Allee effect: are the different mathematical forms proposed equivalents. In *Proceedings of the International Symposium on Mathematical and Computational Biology BIOMAT 2006*. 2007; 53-71.
- [17] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer. 7 (2013).
- [18] Kuznetsov Y. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer Applied Mathematics Science. 112, 2013.