Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2023; Vol. 10(2): 381-403.

REVIEW

# The integral, a vision of its evolution through time II

# La integral, una visión de su evolución a través del tiempo II

Alejandro Ortiz Fernández

*A la memoria del Profesor Leopoldo Nachbin, a quien le debo mucho por su ayuda y orientación en mis estudios de la matemática. Muchas gracias Don Leopoldo*

*Received, Set. 12, 2023;* *Accepted, Nov. 10, 2023;* *Published, Dec. 27, 2023*

How to cite this article:
Ortíz F. *La integral, una visión de su evolución a través del tiempo II*. Selecciones Matemáticas. 2023;10(2):381–403.
http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.13

**Abstract**

*In this part II we intend to give an overview of the different ways in which the idea of integral has evolved over time; in particular the Riemann integral has been the motivation for further research up to the present. We only want to motivate this part of the history of mathematical analysis in our environment with the aim that student and teachers have a guide for more detailed studies and thus contribute to the development of matematics in our region.*

**Keywords** . Integral, Riemann- Stieltjes, Lebesgue, Young, Denjoy, Perron, Daniel, generalized R-integral, Henstock-Kurzweil, Haar, change of variable.

**Resumen**

*En la parte II pretendemos dar un panorama de las distintas formas como la idea de integral ha ido evolucionando en el tiempo; en particular la integral de Riemann ha sido motivación de posteriores investigaciones, hasta la actualidad. Solo deseamos motivar esta parte de la historia del análisis matemático en nuestro entorno con el objetivo de que estudiantes y profesores tengan una guía para estudios más detallados y así contribuyan al desarrollo de la matemática en nuestra región.*

**Palabras clave**. Integral, Riemann- Stieltjes, Lebesgue, Young, Denjoy, Perron, Daniel, integral-R generalizada, Henstock-Kurzweil, Haar, cambio de variable.

**1. Complemento a la Parte I.** Como sabemos, la idea de integral se remonta a la antigua Grecia con los trabajos de Arquímedes y en los siglos XVII y XVIII se desarrolla el cálculo infinitesimal; a inicios del siglo XIX Fourier usa las series trigonométricas en su estudio sobre la difusión del calor. En todas estas investigaciones la idea de integral , y de derivada, es fundamental aún con la falta de rigor en su formulación. Desde la época de Newton y Leibniz el teorema fundamental del cálculo infinitesimal, “$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ implica $F'(x) = f(x)$, fue esencial en el desarrollo del cálculo ya que contiene delicadas cuestiones por clarificar ; así fue en efecto. En el siglo XIX con A. Cauchy el estudio de la integral se hace rigurosa y analítica iniciando el período del rigor en el cálculo pues define a las funciones continuas tal como hoy las entendemos y define la integral para estas funciones. Ver [23]. La contribución de Cauchy fue parcial al problema de la existencia de la integral de funciones “arbitrarias”,tal como Fourier las asumía . Por otro lado, Peter Dirichlet estudió la obra de Fourier y sabía que no toda función es integrable ;así , su famosa función: $f(x) = 0$ si $x$ es racional, $f(x) = 1$ si $x$ es irracional ,no es integrable donde se observa que la

*Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. **Autor para correspondencia:**(jortiz@pucp.edu.pe).

cantidad de puntos en donde la función es discontinua es “muy grande”pues es discontinua en todo punto de la recta. Esta observación motivó las cuestiones: ¿ cuántas discontinuidades se puede admitir sin que la función pierda su condición de íntegrabilidad?, ¿ es posible admitir infinitas discontinuidades ,aún en intervalos acotados ?, ... Dirichlet ,en Berlin , fue profesor de un distinguido alumno, Bernhard Riemann!

Dirichlet tenía la sospecha que la integrabilidad de una función estaba relacionada al hecho de que los puntos de discontinuidad no estén muy aglomerados y que deberían estar “ralamente”distribuidos. Años después esta conjetura conduciría a la teoría de conjuntos de G.Cantor. En 1853 Riemann, bajo la guía de Dirichlet, expone su trabajo de Habilitación en Berlín que trataba sobre la teoría de las series trigonométricas; ahí expone su teoría sobre la integral, póstumamente publicada en 1868 (esta es la integral que enseñamos actualmente a nuestros estudiantes de ciencias!). Riemann considera funciones limitadas sobre un intervalo cerrado, limitado y sigue el modelo de Cauchy (ver [23]); establece criterios para la integrabilidad de funciones en donde aparece la idea de “medir conjuntos”, conjuntos de puntos de discontinuidad de una función: estamos en los albores de la teoría de la medida, elaborada por H.Lebesgue.

Riemann tuvo un gran interés por la obra de Fourier, investiga a las series trigonométricas en donde sus coeficientes son arbitrarios, no necesariamente son coeficientes de Fourier; todo ello le motiva estudiar el problema de la integral. Por esa época E.Heine trabajaba las series de Fourier y planteó la cuestión : ¿ cómo debilitar la convergencia uniforme y tener la unicidad de los coeficientes ? ... Heine encuentra el resultado : “si la serie converge uniformemente sobre el subconjunto de $[-\pi, \pi]$ que queda después de retirar pequeñas vecindades arbitrarias de un número finito de puntos , entonces los coeficientes son únicos”. Es oportuno remarcar que la idea de çonvergencia uniforme”, introducida por Stokes en 1847, y Seidel en 1848, contribuyó mucho en la investigación de la convergencia de las series de Fourier. Heine tuvo como alumno a G.Cantor y lo motiva a investigar el problema de la unicidad de los coeficientes de la serie de Fourier. Cantor desarrolla la teoría de los números reales y nace la teoría de conjuntos, la que ha de permitir construir una teoría abstracta de la integral basada en la ”medida”de conjuntos. Así, en 1870 ,Hermann Hankel, alumno de Riemann, fue un pionero de un nuevo punto de vista de la idea de integral pues buscó una caracterización de integración en términos del conjunto de puntos en donde la función es discontinua. En 1891 , Vito Volterra dio algunos avances que contrastaron aún más las deficiencias de la integral de Riemann , esto conforme a los nuevos avances de la teoría de conjuntos. Es oportuno remarcar que desde 1875 se observó que el intercambio de límites con una integral no siempre es posible establecerse . En consecuencia comienza a surgir la necesidad de construirse una teoría general de la integral que corrigiera las deficiencias de la integral de Riemann. La Escuela Francesa toma la posta.

A fines del siglo XIX en Francia surge un movimiento de investigación del análisis matemático; entre otros tenemos las contribuciones de E.C.Jordan, E.Borel y de H.Lebesgue. Se va madurando una nueva teoría ,que sería la “teoría de la medida” y de la integral. En 1902 Lebesgue propone una nueva definición de integral ( ver [31], [23]) la que es más amplia que la integral de Riemann y que permite estudiar el problema de la convergencia con mejores recursos; la teoría descansa en la idea de medida de un conjunto de puntos .Se tiene que si f es una función acotada e integrable según Riemann,entonces f es integrable según Lebesgue; el recíproco no es necesariamente cierto (la función de Dirichlet es L-integrable, pero no R-integrable). Se remarca que los teoremas básicos de ambas integrales valen en ambas teorías de la integral. Una novedad en la L-integral es que si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ y cada $f_n(x)$ es L-integrable, entonces $f(x)$ también es L-integrable. Además se tiene el teorema de la convergencia dominada: “bajo ciertas condiciones, si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ entonces se tiene el intercambio de límites $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ ”. En 1903 Lebesgue verifica el lema fundamental (“teorema de Riemann-Lebesgue”): “si $f(x)$ es L-integrable en $(a, b)$ , entonces $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sennxdx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx$ ”. Aún más, Lebesgue observa que con su teoría se puede integrar término a término en una serie de Fourier, no dependiendo de la convergencia uniforme. En las primeras décadas del siglo pasado se desarrolla en análisis funcional en base a la integral de Lebesgue; por ejemplo se obtiene el conocido teorema de Riesz-Fischer. Para mayores detalles de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue, ver, por ejemplo, [31], [26], [23].

**2. La Integral de Darboux.** Jean Gastón Darboux, (1842-1917), fue un matemático francés que hizo importantes contribuciones al análisis y a las ecuaciones en derivadas parciales. Fue profesor, entre otros, de E.Borel, E.Cartan, E. Goursat, E.Picard y S. Zaremba. En particul.ar es conocido por su integral, la integral de Darboux .Veamos algunas ideas al respecto. En 1875, [9], basándose en las ideas de Riemann y Hankel diferencia a las funciones discontinuas que son integrables y las que no son basándose en la idea de oscilación. Si f es una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$, se define las sumas $\sum M_i \Delta x_i$ y $\sum m_i \Delta x_i$, donde $M_i = \sup_{\Delta x_i} f(x)$ y $m_i = \inf_{\Delta x_i} f(x)$, sumas que tienden a un límite cuando $d(\sigma) \to 0$, donde $d(\sigma)$ es el diámetro de la partición . Además, Darboux verifica que el límite de las sumas superiores es igual a la mayor cota inferior, y que el límite de la suma inferior es igual a la menor cota superior. Estas cotas son llamadas las integrales de Darboux superior e inferior ,y se denotan $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ y $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, respectivamente.

**Definición 2.1.** *$f$ es integrable-D si* $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \equiv \int_a^b f(x)dx$, **integral de Darboux**.

**Nota 2.1.** *Se verifica que esta definición de integral es equivalente a la integral de Riemann. Según la opinión de algunos analistas, la integral-D es más práctica que la integral-R en los cálculos o demostraciones de resultados. Se remarca que la idea de Darboux es basada sobre la introducción de las integrales superior e inferior, integrales por exceso y por defecto; así Darboux prueba que si el intervalo $(a, b)$ es dividido como es usual y la suma de los productos también , PERO con la diferencia de que en lugar de tomar el valor de la función en un punto arbitrario del intervalo, se toma el límite superior(inferior) de los valores de la función en los intervalos y se multiplica por la longitud del intervalo correspondiente; estas sumatorias tienen, cualquiera que sea el tipo de función, cada una de ellas un límite definido, independiente del modo de división y del modo en que tiende al valor cero. Este límite es llamado la integral superior(inferior) de la función. En el caso especial de que estos dos límites coincidan, el valor común es llamado "la integral de Darboux"de la función.*

## 3. La integral de Young.

William H. Young (1863-1942) fue un matemático inglés que contribuyó a la teoría de la medida ,a las series de Fourier, a las funciones de variable compleja y a la teoría de la integral. Tenía 35 años cuando publicó su primer artículo ,luego por un período de 25 años trabajó intensamente publicando tres libros y alrededor de 200 artículos matemáticos. Su énfasis estuvo en el estudio de la integral de Stieltjes, de las series de Fourier y sobre todo en la investigación de la integral en donde contribuyó con la llamada "Integral de Young". Hardy lo consideró uno de los matemáticos más originales de su época. Su esposa también fue matemática y escribieron algunos artículos juntos. Su trabajo [32], escrito tres años después de un trabajo de Lebesgue, contiene la construcción de una integral, la cual es equivalente a la integral de Lebesgue pero ambas tienen diferentes enfoques que generalizan a la tradicional integral de Riemann. (Ver el excelente libro de Ivan N.Pesin, [24], para mayores comentarios) . Ver también los originales trabajos de Young [32], [33], y [34], donde el autor expone sus ideas y propuestas sobre una nueva visión de la integral. Young, [32], nos explica que la integral de Riemann fue sometida a diversas explicaciones y propuestas de otras formas de introducir la integral.

Young, en su original trabajo [32] destaca la gran importancia de la teoría de conjuntos de Cantor en posteriores investigaciones sobre la integral. Asi, se cuestiona si en las definiciones de Riemann y de Darboux la palabra "finito"se reemplazara por "contablemente infinito " y si la palabra "intervalo"se reemplazara por "conjunto de puntos"; si esto se hace, ¿qué sucede? .... Es decir, ¿y si se reemplaza el intervalo $(a, b)$ por un conjunto cerrado de puntos y se define la integral respecto a este conjunto cerrado de puntos ? Luego de hacer algunos comentarios sobre Riemann y Lebesgue, Young ejecuta su plan de construir su integral. Young prueba: "si una función $f$ es R-integrable sobre $[a, b]$ ,entonces $\int_a^b f(x)dx$ es el límite de las sumas $\sum_i f(\xi_i)\Delta_i$, donde $\{\Delta_i\}$ es un sistema enumerable de segmentos mutuamente no superpuestos y con la condición que $m[(a, b) - \sum_i \Delta_i] = 0$. $m$ es medida en el sentido actual y esta condición es esencial. Además, el límite es tomado cuando $\max_i m\Delta_i \to 0$.

Remarcamos que Young fue contemporáneo con Lebesgue y de los últimos años de Cantor y fue así estimulado por las notables teorías de estos notables analistas. En 1906 Young y su esposa Grace Ch.Young publicaron el primer libro comprensible sobre la teoría de conjuntos con aplicaciones a la teoría general de funciones. Bajo este contexto Young investiga las integrales de Riemann y de Darboux. Así dice que tanto en la R-integral como en la D-integral el límite de las sumas superior e inferior no existe si se permite subdivisiones en conjuntos arbitrarios. Esto motivó que Young investigara las integrales superior e inferior de Darboux. Para mayores detalles de lo afirmado veamos las siguientes definiciones, ver [24], pags.79 y siguientes.

**Definición 3.1.** *Sea $\{E_i\}$ una subdivisión finita o enumerable del segmento $[a, b]$ en conjuntos medibles $E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$ Sea $M_i = \sup_{x\in E_i} f(x)$, $m_i = \inf_{w\in E_i} f(x)$. Entonces los números* $\inf \sum_i M_i mE_i$, $\sup \sum_i m_i mE_i$, *donde el supremo y el ínfimo son tomados sobre todas las posibles subdivisiones $\{E_i\}$, son llamados la integral superior y la integral inferior, respectivamente , de la función $f$. ($mE$ es la L-medida de $E$).*

([33]) Young afirma que esta definición es justificada si se puede probar que la integral superior no es menor que la integral inferior, además, dice, esos números coinciden en todos los casos con la integral de Darboux. Young prueba lo primero pero lo segundo no es cierto en general.

**Definición 3.2.** *Sea $S$ un conjunto con medida positiva, y sea $\{E_i\}$ una subdivisión de $S$ en conjuntos medibles . Sea $\varphi(x) = \overline{\lim}_{x'\to x} f(x')$, $M_i = \sup_{x\in E_i} \varphi(x)$. Entonces el número* $\inf \sum_i M_i mE_i$ *,donde el ínfimo es tomado sobre todos los posibles sistemas $\{E_i\}$, es llamado la integral superior de la función $f(x)$ sobre el conjunto $S$.* Se observó que en el caso que $S$ fuera un segmento , esta integral coincide con la D-integral superior. En forma análoga se define la integral inferior de $f$ sobre $S$.

**Definición 3.3.** *Cuando las integrales superior e inferior en el sentido de la definición 3.2 coinciden, la función $f(x)$ es llamada integrable sobre el conjunto $S$ ,y el valor común de esas integrales es llamada la integral de $f(x)$ sobre el conjunto $S$.* Notación: **integral de Young** de $f$ sobre $S = (Y)\int_S f(x)dx$.

En un trabajo publicado en 1910, Young propuso su integral usando el método de las sucesiones monótonas; luego en 1912, [33], bajo algunas mejoras de presentación, él es capaz de excluir en su teoría la noción de medida de un conjunto. ¿ Cuál es la idea ? ... (ver [32], [24] ). Estudiando la teoría de la integral de funciones continuas,Young observó que ella descansa en dos principios:

(i) la integral es un límite de integrales de funciones escalera (constantes) y éstas funciones pueden ser tomadas ser semicontinuas superior (inferior) si el valor de cada una de esas funciones, en un punto de discontinuidad, es adjunto a la constante mayor(menor).

(ii) la función límite es aproximada por medio de sucesiones monótonas de funciones constantes.

Luego de estas observaciones ,Young señala que con tal interpretación de la integral ,uno podría asumir que la integral (inferior y superior) de una función dada podría ser reemplazada por la integración de dos funciones semicontinuas. En resumen Young dice:

**Principio de las Sucesiones Monótonas**. “Una función es dicha tener una integral si ella puede ser expresada como el límite de una sucesión monótona de funciones cuyas integrales ya han sido bien definidas, siempre que el límite de integrales de las funciones en tal sucesión, sea la misma. Este límite es llamado la integral de la función dada”. Ver [32] y [33].

En el trabajo[34], 1913, Young estudia la integración con respecto a una función de variación acotada. Nos dice que Stieltjes (1894) fue el primero en introducir el concepto de la integral de una función con respecto a otra función la cual no es necesariamente continua. (Ver [31], [23] sobre la integral de Stieltjes). La función a ser integrada,según Stieltjes, es continua, en tanto que la función con respecto a la cual la integración es considerada, es una función monótona creciente. Lebesgue, en 1910, investigó la posibilidad de extender la integral de Stieltjes de modo que abarque la integral de todas las funciones sumables acotadas con respecto a funciones de variación acotada. Lebesgue logra este objetivo basado sobre el cambio de una variable independiente. Young en su trabajo [33] investiga tal propuesta de Lebesgue; su método está basado en la teoría de las sucesiones monótonas, explica las ventajas de usar este método en su teoría. Para los detalles de este trabajo de Young, ver [33].

**4. La Integral de Lebesgue - Stieltjes.** En [22] hemos expuesto sobre las integrales de Riemann ,de Riemann - Stieltjes y de Lebesgue; asumimos que el lector está familiarizado con estas integrales. En esta sección vamos a ver la relación entre estas dos últimas integrales . En 1894 Thomas Stieltjes tuvo la idea ,por primera vez, de reemplazar la variable de integración $x$ en la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ por una función $\alpha(x)$. Como sabemos la integral de Stieltjes es el límite de las sumas $\sum_i f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$, donde los $x$ son puntos de una subdivisión de $(a, b)$ y $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Esta integral existe, por ejemplo, si $f(x)$ es continua y $\alpha(x)$ es una función de variación acotada o una función monótona. La idea de Stieltjes fue extender la integral de Riemann ($\alpha(x) = x$) y su integral pasó a llamarse la integral de Riemann - Stieltjes, la cual pasó a ser enseñada por sus propiedades tenidas. El siguiente paso fue combinar esta integral con la teoría de la medida de Lebesgue y con su integral, lo que se logró resultando la integral de Lebesgue - Stieltjes, la cual es más potente y flexible en las aplicaciones. Todo esto transcurrió en las primeras décadas del siglo XX. Por esos años, en 1909, F.Riesz estableció que la integral de Stieltjes fue la forma general de las funcionales lineales continuas sobre el espacio vectorial de las funciones continuas. Un año después, H.Lebesgue publica una fórmula en la que expresa la integral de Stieltjes de una función continua $f$ en términos de una integral de Lebesgue de alguna función integrable $\alpha(x)$ con otro argumento. En 1914, Young criticó el método tedioso de Lebesgue probando que el método de las sucesiones monótonas aplicado a la integral de Stieltjes conduce a una más simple generalización. En otra dirección, la introducción de la integral de Lebesgue - Stieltjes fue posible debido a la noción de “función conjunto ”, noción que fue útil a Lebesgue en su extensión de la teoría de diferenciación e integración para el paso de funciones de una variable a varias variables. Así se fue llegando a la teoría abstracta de la integral siendo uno de sus pioneros M.Fréchet, J.Radon y C. Carathéodory . Remarcamos que la fórmula dada por Lebesgue en la que reduce la integral de Stieltjes a una integral de Lebesgue es ( [24], pag.115)

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_\alpha^\beta f(x(v))\frac{d\alpha(x)}{dv}dv \tag{4.1}$$

donde $v(x)$ es la variación total de $\alpha(x)$ sobre $[a, x]$, $x(v)$ es el inverso de de $v(x)$ [el subíndice de $\alpha$ de la integral es diferente de la función $\alpha(x)$] . Lebesgue afirma que la igualdad (4.1) podría ser la definición de la integral de Stieltjes de una función discontinua $f(x)$, es decir siendo la integral de Lebesgue que aparece a la derecha. Pero Young ,en 1913 ,afirma en su trabajo [33], que un modo más natural para esta definición-generalización es vía su método de las sucesiones monótonas. Ver [33] para otros detalles. Luego de algunos argumentos, la noción de variación de una función creciente va tomando interés en estas investigaciones.

Sea $\alpha(x)$ una función creciente e $I = (a, b)$. Por definición la variación de $\alpha(x)$ sobre $I$, denotado $v(\alpha, I)$, es $v(\alpha, I) = \alpha(b - 0) - \alpha(a + 0)$, donde $\alpha(a + 0)$ es límite por la derecha de $\alpha$, y $\alpha(b - 0)$, el límite por la izquierda. Si el intervalo se reduce a un solo punto $x$, la variación es definida como $v(\alpha, x) =$

$\alpha(x-0)-\alpha(x+0)$, la cual es cero si y solo si $\alpha(x)$ es continua en $x$ . Si $U$ es un conjunto abierto, $v(\alpha, U)=\sum v(\alpha, I)$, donde la surma es sobre todos los intervalos $I$ que aparecen en la descomposición de $U$. Por simplicidad escribamos $vU$ en vez de $v(\alpha, U)$. Por otro lado, dado un conjunto $E$ se define $v^*E$ como la cota inferior de $vU$ para todos los $U$'s que contienen a $E$; similarmente, $v_*E$ es la cota superior de $vQ$ ,para las $Q$'s contenidas en $E$. Si $v^*E=v_*E$, se dice que $E$ es $\alpha$- medible y que tiene una variación definida $vE$ sobre $E$. Esta definición tiene las propiedades conocidas, como ser aditiva para una sucesión infinita de conjuntos $E_1$, $E_2$, ... . Además, hay una definición para la variación de funciones de varias variables. Hagamos un paréntesis para ver,ligeramente, conjuntos medibles según Emile Borel quien en 1898 define la medida para un conjunto abierto $U$ como la suma de las longitudes de sus componentes pues él sabía que todo abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de la familia enumerable de sus componentes ó intervatos abiertos, disjuntos dos a dos. Posteriormente considera a los llamados conjuntos de Borel, los cuales son obtenidos de conjuntos abiertos aplicando uniones e intersecciones a un número enumerable de tales conjuntos, tomando límite se obtiene la medida, medida de Borel, la cual tiene la propiedad aditiva: "si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos de Borel ,disjuntos dos a dos, entonces la medida de la unión $\bigcup_n E_n$ (que se asume acotada) es igual a la suma de las medidas de $E_n$". Además, se sabe que si $E$ es L-medible, entonces existen dos conjuntos B-medibles $F$ y $G$ tales que $F\subset E\subset G$ y $|F|_B=|E|_L=|G|_B$.

Pues bien, los conjuntos B-medibles son importantes en el objetivo de definir la integral de Lebesgue-Stieltjes pues se sabe que dado un conjunto, el puede o no ser medible para una particular función $\alpha(x)$; pero, si un conjunto es B-medible es L-medible para toda función $\alpha(x)$; esto sigue por la forma como se construye la medida de Borel. Por otro lado, se dice que una función $f(x)$ es $\alpha$-medible si el conjunto de los valores de $x$ para los cuales $f(x)>c$; es $\alpha$-medible para todo c. (Función "distribución"). De esta manera, una función la cual es B-medible, es L-medible con respecto a toda función creciente $\alpha$. Por ello se asumirá que $\alpha(x)$ es creciente y que $f$ es positiva . Ver [5] .Ahora vamos en pos de la interal de Lebesgue-Stieltjes!

Sea el plano cartesiano $x-\xi$, con origen 0; sea $\xi=\alpha(x)$, al intervalo $(a,b)$ del eje $0x$ le corresponde un interJalo $(\alpha',\beta)$ del eje $0\xi$; la correspondencia entre $x$ y $\alpha$ es unívoca, excepto para los casos:

(a) si $\alpha(x)$ es una función constante en un intervalo ,el mismo valor de $\xi$ corresponde a todo valor de $x$ en tal intervalo

(b) si $\alpha(x)$ es discontinua en $x_0$ entonces aceptamos que todo valor de $\xi$ entre $\alpha(x_0-0)$ y $\alpha(x_0+0)$ corresponderá al valor en $x_0$

Así mismo,la función $x=\alpha^{-1}(\xi)$, ó digamos $x=\mathcal{X}(\xi)$, inversa de $\xi=\alpha(x)$, es unívocamente definida excepto para los valores de $\xi$ especificado en (a), los cuales forman a lo más un conjunto enumerable. Bien, a una función $f(x)$ le corresponde una función de $\xi$ , así, $f(\mathcal{X}(\xi))$. Además, se desea que esta definición sea bien determinada, es decir, única; para ello se debe aceptar ciertas condiciones. Se observa que una discontinuidad de $\alpha(x)$ corresponde a un intervalo donde $\mathcal{X}(\xi)$ es constante ,y así también de $f(\mathcal{X}(\xi))$.

**Definición 4.1.** *[5]. La integral de Lebesgue-Stieltjes, LS $\int_a^b f d\alpha$, es definida siendo el valor de la integral de Lebesgue $\int_\alpha^\beta f(\mathcal{X}(\xi))d\xi$.*

*En el caso general de $f$ arbitrario, $f=f_+-f_-$, se define*

$$\int f d\alpha=\int f_+ d\alpha-\int f_- d\alpha.$$

Si f es una función limitada, la integral L-S se define siendo el valor común de los límites de las sumas $S=\sum_{i=1}^n l_{i+1}e_i$ y $s=\sum_{i=1}^n l_i e_i$ ,donde $e_i$ es la variación de $\alpha$ sobre el conjunto $E_i$ donde se tiene $l_i<f(x)<l_{i+1}$. La definición se extiende para el caso $f$ no limitada. Por otro lado, si $\alpha$ es una función de variación acotada, entonces $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$, donde $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son funciones crecientes , entonces se tiene la definición $\int f d\alpha=\int f d\alpha_1-\int f d\alpha_2$. Se observa que si estas dos integrales de la derecha existen, entonces también existen $\int f d\alpha_1+\int f d\alpha_2$ y se podría entonces escribir $\int f|d\alpha|$.

Se observa que la definición de la L-S integral es mas laboriosa que la integral de Riemann pues se necesita de la teoría de la medida e integral de Lebesgue. Sin embargo ella posee las propiedades usuales de la R integral y otras propiedades que !a hacen útil. Veamos algunas de ellas, (integrable se entiende L-S integrable).

(i) Si $f: I\to\mathbb{R}$ es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$, entonces también lo son $f^+$, $f^-$ y $|f|$ y se tiene

$$\int_I f d\alpha=\int_I f^+ d\alpha+\int_I f^- d\alpha \quad \text{y} \quad \int_I |f| d\alpha=\int_I f^+ d\alpha-\int_I f^- d\alpha.$$

(ii) Si $f_n: I\to\mathbb{R}$, $n=1,2,...$, es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$, y si $f: I\to\mathbb{R}$ es tal que $(|f-f_n|)\to 0$, en cierto sentido, entonces $f$ es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$, y se tiene $\int_I f_n d\alpha\to\int_I f d\alpha$; $\int_I f_n^+ d\alpha\to\int_I f^+ d\alpha$; $\int_I f_n^- d\alpha\to\int_I f^- d\alpha$; $\int_I |f_n| d\alpha\to\int_I |f| d\alpha$.

(iii) Si $f: I\to\mathbb{R}$ es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$, entonces se tiene

$$\left|\int_I f d\alpha\right|\leq\int_I |f| d\alpha. \tag{4.2}$$

(iv) Si $f_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$, es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$, $a_j$ un número real, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_j f_j$ es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$, y se tiene

$$\int_I (\sum_{j=1}^{n} a_j f_j) d\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_I f_j d\alpha. \tag{4.3}$$

v) Si $f \geq 0$ sobre $I$, entonces $\int_I f d\alpha \geq 0$. Si $f$ y $g : I \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables y $g \leq f$ sobre $I$, entonces $\int_I g d\alpha \leq \int_I f d\alpha$.

(vi) (Teorema de la convergencia monótona). Sea $f_1$, $f_2$, ..., una sucesión monónota de funciones integrables sobre $I$ con respecto a $\alpha$; además $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n d\alpha$ es finito. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es tal que $f_n \to f$ ctp, entonces $f$ es también integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$ y se tiene $\int_I f_n d\alpha \to \int_I f d\alpha$.

(vii) (**Teorema de la convergencia dominada**). Sea $f_1$, $f_2$, ... una sucesión monótona de funciones integrables sobre $I$ con respecto a $\alpha$ y tal que $|f_n| \leq \beta$, $\forall n$, sobre $I$ donde $f_n : I \to \mathbb{R}$ es una función integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es tal que $f_n \to f$ ctp, entonces $f$ es también integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$ y se tiene $\int_I f_n d\alpha \to \int_I f d\alpha$ y $\int_I |f_n - f| d\alpha \to 0$.

viii) Sea $f_1$, $f_2$, ... una sucesión de funciones integrables sobre $I$ con respecto a $\alpha$, todas con el mismo signo (positivo o negativo o cero) tal que $\sum_{j=1}^{\infty}(\int_I f_j d\alpha)$ converge. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ ctp; entonces $f$ es integrable sobre $I$ con respecto a $\alpha$ y se tiene $\int_I f d\alpha = \sum_{j=1}^{\infty}(\int_I f_j d\alpha)$.

ix) Si $\alpha(x)$ es una función de variación acotada, creciente; $f$ y $g$ tienen el mismo signo y sea $\theta(x) = \int_a^x g d\alpha$, entonces $\int_a^b f d\theta = \int_a^b fg d\alpha$ (cambio de variable).

La integral de Lebesgue- Stieltjes es también, construída vía la noción de función conjunto vía argumentos dados por Lebesgue en 1910, en donde extiende la teoría de diferenciación e integración de una a varias variables. Y así la integral fue imaginado como una función conjunto, visión que fue útil en la investigación del análisis. Se comienza a usar nociones del álgebra abstracta ($\sigma$-anillos, ...) y asi, en 1915, M. Fréchet trata la integral vía espacios abstractos.

Desde la época de Leibniz y Newton ya se conocía la relación entre la derivada y la integral, vía el teorema fundamental del cálculo, que dice

$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. Se observó que este teorema exigía condiciones extras para su validez, aún con la integral de Riemann se tenía deficiencias en sectores del análisis pues hay funciones que no son R-integrables, además no era fuerte en teoremas de convergencia. Esto, y otras razones, motivaron a Lebesgue introducir su integral pero ésta también tenía deficiencias pues existen funciones $f$ que son diferenciables en todo punto pero sus derivadas $f'$ no son L-integrables; es decir, no tendríamos el teorema fundamental. Esto, y otras situaciones motivaron a los analistas a buscar otras integrales que, al menos, superen esta deficiencia y/o otras. Por ello en las próximas secciones presentaremos algunas de tales integrales.

**5. Algunas otras integrales.** Lo expuesto en la sección 4 se desarrolló en las primeras décadas del siglo XX, cuando se introdujeron ideas revolucionarias en la matemática, y en el análisis funcional; la teoría de Lebesgue, su medida e integral se imponían en el escenario de entonces. En el siglo XIX, la teoría de integración estuvo basada en las series trigonométricas; surgió la integral de Riemann, luego la de Stieltjes, la que F.Riesz (1909) la interpretó como la forma general de una funcional lineal continua. Como ya hemos dicho, Lebesgue expresa a la integral de Stieltjes como una integral de Lebesgue. Las investigaciones usando la teoría de la medida condujeron a la integral de Lebesgue-Stieltjes, la que con la función conjunto tuvo otra presentación. Luego vino el paso de una variable a varias variables. Se introdujeron los $\sigma$ - anillos de conjuntos L-medibles en el estudio de la integral y asi su estudio se hacía más delicado y exigente. En este escenario surge J.Radon (1887- 1956), quien es también conocido por su “transformada de Radon”, integral de una función sobre un conjunto de rectas. Radon es considerado como un precursor de la tomografía, tal útil en la medicina. Se remarca que las nociones básicas de la actual teoría de la medida ya fueron consideradas en el trabajo de Radon. En 1913 generaliza las ideas de Lebesgue e introduce la llamada “integral de Radon”. En este año Radon generaliza la convergencia media, entre otros aportes como generalizar algunos resultados de F.Riesz, todo esto dentro de la teoría de funciones y del análisis funcional. En cuanto a su integral, ella es una deseable generalización de las integrales de Stieltjes y de Lebesgue; su nombre es reconocido en el conocido “teorema de Radon-Nikodym”, tan útil en el análisis funcional. Debido a la maquinaria de teoría de la medida y a diversos conceptos abstractos del análisis , invitamos al lector a consultar el excelente libro de l.Pesin, [24], pag.121 y siguientes.

Arnoud Denjoy (1884-1974) fue un matemático francés que también contribuyó a la teoría de la integral. Como anécdota digamos que no entró directamente a la prestigiosa Escuela Normal pero ante el retiro de uno de los estudiantes, ocupó su plaza. Entró en 1910 y pronto demostró sus grandes condiciones para la matemática y logró estudiar con los ya prestigiosos maestros E.Borel, Paul Painlevé, y otros, quienes les dieron una sólida formación y así Denjoy pudo participar en la evolución del análisis de entonces. Como sabernos, una preocupación de los analistas de esos tiempos fue construir una integral para la cual todas las derivadas de funciones, sean integrables. En 1912, A. Denjoy introdujo una teoría de integración donde se tenía esta propiedad; sus argumentos fueron un tanto técnicos pero daremos algunas ideas de la **integral de Denjoy**. Seguimos la presentación de Natanson, [35], vol. II. Pag.175, la cual es dada en el sentido "restricto"( la integral de Denjoy en el sentido "amplio" es la integral de Denjoy-Khinchin).

La idea es construir una sucesión infinita de integrales que se llamarán D-integrales de la forma

$$(D_\xi)\int_a^b f(x)dx, \tag{5.1}$$

donde $f(x)$ es una función definida en $[a,b]$. Ahora se procede por inducción, $(D_0)\int_a^b f(x)dx$ la cual es la integral de Lebesgue $(L)\int_a^b f(x)dx$. Ahora se asume que se tienen definidas las integrales (5.1) para todo $\xi < \eta$ ,donde $\eta < \Omega$. Si tenemos $(D_{\eta-1})\int_a^b f(x)dx$, entonces se define la integral $(D_\eta)\int_a^b f(x)dx$, donde $\eta$ es un número de "primera clase" y si es de "segunda clase", ver [35], pag. 175, también se define $(D_\eta)\int_a^b f(x)dx$. En conclusión, la integral de Denjoy en el sentido restricto de la función $f(x)$ definida el intervalo cerrado $[a,b]$ es la integral $(D_\Omega)\int_a^b f(x)dx$.

**Nota 5.1.** *Esta integral es también llamada la integral de Denjoy - Perron. La integral en el sentido amplio es una generalización de la en sentido restricto.*

En el libro de Saks, [27], pag.241 tenemos una mejor definición de la integral de Denjoy: "una función $f(x)$ de variable real es integrable, en el sentido Denjoy, en un intervalo $[a,b]$ si existe una $F$ la cual es continua sobre un conjunto $E$ y si $E$ es la suma de una sucesión finita o enumerable de conjuntos $E_n$ sobre cada una de ellas $F$ es absolutamente continua (esto es, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para toda sucesión de intervalos no superpuestos $\{[a_n,b_n]\}$ cuyos puntos extremos pertenecen a $E$, $\sum_n(b_n - a_n) < \eta$, implica $\sum_n |F(b_n) - F(a_n)| < \epsilon$) sobre $I$ y la cual tiene a $f$ como su derivada aproximada ctp. Esta función F es, entonces, llamada la **integral indefinida de Denjoy** de $f$ sobre $I$.

Su incremento $F(I) = F(b) - F(a)$ se llama la **integral definida de Denjoy** de $f$ sobre $I$.

Notación . $(D)\int_I f(x)dx =$ integral definida de Denjoy (conocida también como integral de Denjoy - Khinchin).

Así mismo se define la $D_*$-integral indefinida (de Denjoy). Veamos; una función finita $F$ es llamada absolutamente continua en el sentido restricto sobre un conjunto limitado $E$ si $F$ es limitado sobre un intervalo conteniendo $E$ y si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que para toda sucesión de intervalos no-superpuestos $\{I_n\}$ cuyos puntos extremos pertenecen a $E$, la desigualdad $\sum_n |I_n| < \eta$ implica $\sum_n 0(F;I_n) < \epsilon$, donde $O(F,I_n)$ significa la oscilación de $F$ sobre el intervalo $I_n$. Por otro lado , se dice que $f$ es absolutamente continua generalizada sobre un conjunto E si la función es continua sobre $E$ y si el cornjunto $E$ es expresado como la suma de una sucesión de conjuntos limitados y sobre cada uno de ellos, la función f es absolutamente continua en el sentido restricto. Ahora se define la integralde Denjoy - Perron.

Una función es dicha D-integrable sobre un intervalo $I = [a,b]$ si existe una función $F$, la cual es absolutamente continua generalizada sobre $I$ y la cual tiene a $f$ como su derivada ordinaria ctp. La función $F$ es llamada la D - integral indefinida de $f$ sobre $I$. La diferencia $F(I) = F(b) - F(a)$ se llama la D - integral definida de $f$ sobre $I$, y se le denota con $(D)\int_a^b f(x)dx$.

Se verifica que, [27], pag.242, "si dos funciones son iguales ctp. y una es D -integrable ó $D_*$ - integrable sobre un intervalo $I$, entonces también lo es la otra y las dos funciones tienen la misma integral definida sobre $I$". Otra propiedad es: "si dos funciones $f$ y $g$ son D ó - $D_*$ integrables sobre un intervalo $I$, entonces $af + bg$ también lo es, y se tiene

$$(D)\int_a^b [af(x) + bg(x)]dx = a(D)\int_a^b f(x)dx + b(D)\int_a^b g(x)dx. \tag{5.2}$$

Se tienen los siguientes resultados fundamentales [27]:

**Teorema 5.1.**

*(i)* *"Si una función $f$ es $D_*$-integrable sobre un intervalo $I$, ella es también D-integrable sobre $I$ y se tiene $(D)\int_I f dx = (D_*)\int_I f dx$."*

*(ii)* *(Relación entre la integral de Lebesgue y la de Denjoy). " Si la función $f$ es L-integrable sobre un intervalo $I$, ella es, también, $D_*$ -integrable sobre $I$ y se tiene $(D_*)\int_I f dx = (L)\int_I f dx$".*

*(iii)* *"Si $f$ es D - integrable y ctp. no-negativa sobre un intervalo $I$, entonces $f$ es L - integrable sobre $I$".*

**Teorema 5.2.** *(Extensión de un resultado de Lebesgue )."Sea $f_n$ una sucesión no-decreciente de funciones que son D -integrables sobre un intervalo $I$ tales que sus D-integrales sobre $I$, son limitadas supe-*

*riormente. Entonces la función $f(x) = \lim_n f_n(x)$ es D-integrable sobre $I$ y se tiene*

$$(D)\int_I f dx = \lim_{n\to\infty} (D)\int_I f_n(x)dx \tag{5.3}$$

*Se tiene el mismo resultado si $D$ es reemplazado con $D_*$"(Intercambio de límites).*

**Teorema 5.3.** *Sí $f$ es una función D-integrable , entonces f es una función medible y finita ctp .*

Ver [27], pags.242-43 , para la prueba de estos resultados. En las siguientes páginas , Saks da mucha más información de la integral de Denjoy.

Aleksandr Khinchin (1894-1959) fue un notable analista ruso , alumno de N.Luzin, quien contribuyó también en la investigación sobre la integral; es conocido también por sus contribuciones en la teoría de la probabilidad. Ya hemos mencionado que la integral de Denjoy en el sentido ancho es llamada también la integral de Denjoy - Khinchin, la cual es una generalización de las integrales de Riemann y de la Lebesgue. En efecto , en 1916 y posteriormente en 1918 Khinchin publica dos trabajos donde extiende la integral de Denjoy; por esa época se introdujeron nuevas ideas sobre convergencia, en la teoría de la medida; se define la derivada aproximada, se generaliza la noción de función absolutamente continua, entre otras ideas, todo lo cual sirvió para extender, generalizar la noción de integral. Consultar el excelente libro de S.Saks, "Theory of the Integral", 1937, [27], donde se puede encontrar muchas ideas y métodos que sobre esta teoría se estaban elaborando entonces. Saks, matemático polaco, falleció a temprana edad como consecuencia de la II G.M. y fue considerado uno de los líderes de la integral a nivel internacional. Su libro fue una guía para muchas investigadones sobre este tema. Sugerimos también consultar el artículo de B .Thomson [29] en donde, entre otras ideas, caracteriza a la integral de Denjoy-Khinchin.

Veamos algunos argumentos matemáticos . Sea $I = [a, b]$ un intervalo y $f : I \to R$ una función de valor real. Recordemos que f es absolutamente continua sobre un subconjunto $E$ de $I$ si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que cuando tengamos una familia finita $[x_i, y_i]$ de subintervalos de $I$, disjuntos dos a dos,cuyos extremos están $E$, se tenga $\sum_i |y_i - x_i| < \delta$ entonces se tenga $\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Esto permite decir que $f$ es absolutamente continua generalizado sobre un subconjunto $E$ de $I$ si la restricción de $f$ a $E$ es continua sobre $E$, se puede escribir como una unión enumerable de subconjuntos $E$ tal que $f$ es absolutamente continua sobre cada $E$. Por otro lado, el número real $x$, que no necesariamente está en $E$, es llamado un "punto de densidad"de $E$ si $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{|E\cap[x-\epsilon,x+\epsilon]|}{2\epsilon} = 1$. Entonces, la función L-medible $f : E \to R$ tiene un "límite aproximado "$c$ en $x$, el cual es un punto de densidad, si para todo $\epsilon > 0$, $x$ es un punto de densidad de $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$. Si además, $f(x) = c$, entonces se dice que $f$ es "aproximadamente continua en $x$". En otras palabras, $f$ tiene un límite aproximado $c$ en $x$ si por definición existe un subconjunto medible $F$ de $E$ tal que $x$ es punto de densidad de $F$ y su límite en $x$ de la restricción de $f$ a $F$ es $c$. Se sabe que si el límite aproximado existe, el es único.

**Definición 5.1.** *(**Derivada Aproximada**) Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función L-medible; $f$ tiene una derivada aproximada $c$ en $x$ si por definición $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, $x \neq x'$, tiene limite aproximado $c$ en $x$. Si esto se cumple, entonces $f$ es aproximadamente continua en $x$.*

**Nota 5.2.** *Se verifica que una función L-medible es aproximadamente continua ctp, y recíprocamente.*

**Definición 5.2.** *(**La Integral de Khinchin**). Sea $I = [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función de valor real sobre $I$, $f$ es Khinchin integrable sobre $I$ si, por definición, existe una función $F$ la cual es absolutamente continua generalizada y cuya derivada aproximada coincide con $f$ ctp. ($F$ es determinada por f a menos de una constante).*

*La integral de Khinchin de f es, $(K)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

También se podría decir que una función $f$ es integrable en el sentido de Khinchin sobre el intervalo $[a, b]$ si $f$ es D-integrable en el sentido ancho y si su integral indefinida es difereniable ctp. Remarcamos que esta integral es también llamada la integral Denjoy-Khinchin. Ver los libros de Saks, [27] pag.295 ,y de Pesin, [24] pag.148, para mayores comentarios. El artículo de B.Thomson [29] también trata sobre la integral de Denjoy-Khinchin, donde entre las nociones preliminares da una caracterización de ella. También debemos mencionar que la integral de Denjoy ha sido estudiada en el contexto de la teoría de distribuciones.

**6. Integrales de Perron y de Daniell.** Oskar Perron (1880-1975) fue un matemático alemán quien hizo interesantes contribuciones a la matemática, en particular es conocido por su integral, la Integral de Perron. En 1902 obtuvo su doctorado bajo la asesoría de F.von Lindemann; luego estudió en Gottingen donde trabajó con D.Hilbert. Llegó a publicar 218 trabajos sobre diferentes áreas lo que le valió los correspondientes reconocimientos, así llegó a ser presidente de la Sociedad Matemática Alemana. Fue testigo de las estragos producido por la II G.M. y de las atrocidades cometidas entonces. En particular hacemos un paréntesis para dar una ligera idea de su método para resolver el clásico problema de Dirichlet. Mayores detalles ver [22]. La idea es construir una función, la función de Perron, tal que si el problema: "hallar una función $u$ tal que $\Delta u = 0$ en un adecuado dominio $D$, y $u = f$ sobre el contorno de $D$ ,donde $f \in C^0$

(contorno de $D$) es una función dada, tiene solución y entonces esta solución coincide con la función de Perron.

Veamos. Sea $D$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ y $u : D \to \mathbb{R}$ una función continua. $u$ es llamada subarmónica en $D$ si para todo $x_0 \in D$ se tiene $u(x_0) \leq \frac{1}{|\partial B(x_0,R)|} \int_{\partial B(x_0,R)} u(y) d\sigma(y)$, para toda $B(x_0, r) \subset D$. ($\partial B$ es la frontera de $B$). $u$ es llamada superarmónica $D$ si se tiene $\geq$ en la anterior definición. Todo función armónica es sub y super armónica y recíprocamente,

**Definición 6.1.** *(***Función de Perron***) Sea $f \in C^0(\partial D)$; se dice que $u(x)$ es una subfunción sobre $D$ si:*

*(i) $u(x)$ es subarmónica en $D$;*
*(ii) $u \in C^0(\bar{D})$;*
*(iii) $u(y) \leq f(y)$, para todo $y \in \partial D$.*

*Pongamos $S(f) = \{$ subfunciones en $D$ asociadas a cada $f$ $\}$.*

**Nota 6.1.** *Esta familia no es vacía ya que la función constante $\min_{y \in \partial D} f(y)$ es una subfunción. Por definición, $P(x) = \sup_{u \in S(f)} u(x)$ es llamada la función de Perron.*

**Teorema 6.1.** *$P(x) \in L^\infty(\overline{D})$ y $\Delta P(x) = O$ en $D$.*

**Teorema 6.2.** *Dado $f \in C^0(\partial D)$, si el problema de Dirichlet (PD) $\Delta u = O$ en $D$ y $u = f$ sobre $\partial D$ tiene solución $u(x)$, entonces $u(x) = P(x)$.*

**Nota 6.2.** *No se afirma que dado el PD, la solución es $P(x)$ . Se afirma si PD tiene solución, ella coincide con la función de Perron.*

Perron pertenece al período (primeras décadas del siglo XX) del desarrollo de la teoría de funciones de una variable real basado en la teoría de conjuntos en el espacio $\mathbb{R}^n$; es la época en que se estudian las integrales de Lebesgue, de Denjoy, de Perron, entre otras investigaciones de la integral, relacionándolas con la integral de Stieltjes. Perron construye su integral con la ausencia de sumas parciales, como lo hizo Riemann y algunos sucesores, y lo hizo solo como la inversa de la derivada en su forma esencial.

La integral de Perron es una generalización de la integral de Lebesgue y para introducirla se necesita de algunos conceptos previos. $M$ es llamada una función mayor de una función $f$ sobre $[a, b]$ con respecto a una función $G$ sobre $[a, b]$ si para cada $x \in [a, b]$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $M(d) - M(c) \geq f(x)[G(d) - G(c)]$ para todo $c \leq x \leq d$ de donde $|d - c| < \epsilon$. La función $m$ es llamada función menor de $f$ si $\geq$ es reemplazado con $\leq$. De esta manera, una adecuada derivada inferior ($\bar{D}$) de $M$ con respecto a $G$, es mayor que $f$. Analogamente, se tendría la derivada superior ($\underline{D}$) de $M$ con respecto a $G$.

**Definición 6.2.** *(***Integral de Perron***). Una función $f$ es integrable, en el intervalo $[a, b]$, según Perron si existe una función mayor $M$ y una función menor $m$ tal que*

*(i) $M(a) = 0$, $\underline{D}M(x) \geq f(x)$, $\underline{D}M(x) \neq -\infty$,*
*(ii) $m(a) = 0$, $\overline{D}M(x) \leq f(x)$, $\overline{D}M(x) \neq +\infty$*

*donde $\underline{D}$ y $\overline{D}$ son las derivadas superior e inferior, donde $x \in [a, b]$ y si la cota inferior de los valores $M(b)$ de los $M$'s, es igual a la cota superior de los valores $m(b)$ de los $m$'s. La* **integral de Perron** *de $f$ sobre $[a, b]$ es tal valor común, y se denota $(P) \int_a^b f(x)dx$.*

Se verifica que la integral de Perron es equivalente de la integral estricta de Denjoy. Ella fue introducida en 1914 y fue completada por H.Bauer en 1915 . Esta integral fue luego generalizada vía la integral de Perron - Stieltjes, según el siguiente argumento. Sea $f$ una función finita sobre $[a, b]$. $f$ es integrable según Perron-Stieltjes con respecto a una función finita G sobre $[a, b]$ si existe ,sobre $[a, b]$, una función mayor $M$ y una función menor $m$ para $f$ con respecto a $G$ sobre $[a, b]$, con $M(a) = m(a) = 0$ y tal que para todo $x \in [a, b]$ se tenga

(i) $M(x + \beta) - M(x - \alpha) \geq f(x)[G(x + \beta) - G(x - \alpha)]$,
(ii) $m(x + \beta) - m(x - \alpha) \leq f(x)[G(x + \beta) - G(x - \alpha)]$,

donde $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ son suficientemente pequeños, siempre que la mayor cota inferior de los números $M(b)$ (donde $M$ es cualquier función mayor de $f$ con respecto a $G$) y la menor cota superior de los números $m(b)$ (donde $m$ es una tal función menor de $f$ con respecto a $G$), ellas coincidan.

El valor común es llamado la **integral de Perron - Stieltjes** de $f$ con respecto a $G$ sobre $[a, b]$ y se denota: $(P - S) \int_a^b f(x)dG(x)$.

Veamos algunos aspectos de estas integrales $(P)$ y $(P - S)$. [27] .

**Teorema 6.3.** *Toda función P-integrable es L-medible, ctp. finita y es igual a la derivada de su integral indefinida.*

**Teorema 6.4.** *Si dos funciones $f$ y $g$ son ctp. iguales y una de ellas es P-integrable, entonces la otra también lo es y las P-integrales definidas de $f$ y $g$ son iguales.*

**Teorema 6.5.** *Sea $F$ una función continua y $g$ una función de variable real, P-integrable y tal que se tiene:*

*(a) $\overline{F}^+(x) \geq g(x)$ casi en todo punto $x$ ;*
*(b) $\overline{F}^+(x) > -\infty$ en todo punto x, excepto a lo mas en un conjunto enumerable;*

*entonces se tiene* $(P)\int_a^b g(x)dx \leq F(b) - F(a)$, *para todo par de puntos* $a$ *y* $b$ *tales que* $a < b$*".*($\overline{F}^+(x)$ *denota la derivada superior derecha).*

**Teorema 6.6.** *Sea* $f$ *una función finita LS-integrable sobre el intervalo* $[a, b]$ *con respecto a una función de variación acotada* $G$*, entonces ella es PS-integrable y se tiene*

$$(PS)\int_a^b fdG = \int_a^b fdG - \{f(a)[G(a) - G(a-)] + f(b)[G(b+) - G(b)]\}. \tag{6.1}$$

**Teorema 6.7.** *(Generalización del 6.3) Sea* $f$ *una función finita y* $P$ *la PS-integral de* $f$ *con respecto a una función* $G$*; entonces, en casi todos los puntos* $x$ *se tiene* $\frac{[P(I)-f(x)G(I)]}{|I|} \to 0$ *si* $\delta(I) \to 0$*, donde* $I$ *es cualquier intervalo que contiene a* $x$*.*

Para las demostraciones de estos resultados y otros comentarios ver el libro de Saks, cap. VI. [27]. La integral de Perron-Stieltjes mereció posteriores investigaciones; ella incluye a la integral de Lebesgue-Stieltjes; se introdujeron la integral de P-S aproximada, la integral de Cesaro-Perron, la integral general de Perron, ....

Como sabemos, las primeras décadas del siglo pasado fueron de gran inquietud por investigar a la integral de Riemann, superar los defectos que ésta tiene y se procuraba extenderla y generalizarla lo que se consiguió por los aportes de varios analistas. El trabajo de H.Lebesgue y de sus precursores fue un paso importante para desarrollar nuevas teorías, como el análisis funcional. Desde la época de Riemann se integraba sobre conjuntos con naturaleza geométrica ($\mathbb{R}^n$) pero comenzaba a surgir la idea de proponer una teoría de integral sobre conjuntos abstractos, sobre espacios generales; ver a una integral como una funcional. Por esta ruta, en 1915 M.Fréchet propuso extender la idea de Lebesgue a un problema general de análisis funcional. Un poco después, P.Daniell en 1919 define su integral siguiendo esta ruta.

Percy J. Daniell (1889-1946) fue un matemático inglés (nació en Chile) quién se educó en la Universidad de Cambridge poniendo interés en la matemática aplicada y en la física teórica. Fue profesor en la U. de Liverpool, luego en la U. de Rice, Texas. Estudió en Gottingen con D.Hilbert y Max Born. Regresa a Inglaterra para seguir su carrera científica enseñando en la U. de Sheffield; fue asesor durante la II G.M.

La integral de Lebesgue, teniendo aún algunas deficiencias, se consigue luego de introducir toda una teoría de la medida y en base a ello definir las funciones medibles; todo esto exige un buen tiempo de asimilación, lo que se dificulta cuando la teoría se la enfoca desde un punto de vista abstracto. Por ello se buscaba una integral que no necesitara de tantos requisitos; se buscaba un enfoque alternativo.Uno de esos enfoques fue dado por P.Daniell en 1918 cuya integral tiene algunas ventajas, como generalizarla a espacios de mayores dimensiones, así como relacionarla con la integral de Stieltjes. En su artículo [8] Daniell expresa que la idea de integral ha sido extendida por Radon (1913), Young (1914), F.Riesz (1914), entre otros, en donde se incluye integración con respecto a funciones de variación acotada y remarca que tales teorías se fundan en propiedades de conjuntos de puntos en un espacio de dimensión finita. Daniell dice que en su trabajo desarrollará una teoría de la integral la cual es independiente de la naturaleza de sus elementos, éstos pueden ser puntos en un espacio $\mathbb{R}^n$ ó curvas, ... .En su trabajo no usará sucesiones relativamente uniforme, como se hace en otra propuesta. Daniel considera un grupo de elementos $p$ cualquiera asi como cierta clase de funciones $f(p)$, números reales. Así, a cada función de cierta clase le corresponde un número real $S(f)$ ó $I(f)$ el cual es definido satisfaciendo ciertas condiciones. Afirma que $S(f)$ es la integral de Stieltjes generalizada, en tanto que $I(f)$ la llama integral positiva y poseerá casi todas las propiedades de la integral de Lebesgue. Daniell prueba que toda I-integral es una S-integral, y que toda S-integral se expresa como la diferencia de dos I-integrales.

Veamos algunos argumentos matemáticos sobre la integral de Daniell. Seguimos de cerca [8]. Sea $M$ un espacio arbitrario; se define la clase inicial de funciones $T_0$ vía:

(i) si $f_1$ y $f_2 \in T_0$ entonces $f_1 + f_2 \in T_0$;
(ii) si $f \in T_0$ y $c$ es una constante real, entonces $cf \in T_0$;
(iii) si $f_1$ y $f_2 \in T_0$, entonces $\max(f_1, f_2) \in T_0$ y $\min(f_1, f_2) \in T_0$

Se asume que todas las funciones en $T_0$ son acotadas. Ahora se define una funcional $U(f)$ sobre la clase $T_0$:

(i') $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$;
(ii') $U(cf) = cU(f)$ donde $c$ es un número real;
(iii') si $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq ...$ y se tiene $\lim_{n\to} f_n = 0$,entonces $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0$; esto es el intercambio de límites (Lebesgue)
(iv') si $f \geq 0$, entonces $U(f) \geq 0$.

Se observa que las condiciones (i'), (ii') y (iv') serían las propiedades básicas de la integral de Riemann-Stieltjes $\int fdg$ con respecto a una función monótona creciente $g$, de esta integral que se está definiendo para funciones "escaleras" o elementales. La condición (iii') nos prepara sobre la unicidad de la continuidad de $U(f)$. Daniell para construir su integral, en vez de considerar una medida, trabaja con una funcional $\geq 0$.

$U(f)$ definida sobre una clase aditiva de combinaciones lineales de funciones características de conjuntos medibles sobre $[a, b]$, satisfaciendo las condiciones mencionadas; además se impone ,si $E_1$ y $E_2$ son congruentes, entonces $U(\mathcal{X}_{\epsilon_1}) = U(\mathcal{X}_{\epsilon_2})$. Luego $U(f)$ es construida vía $U(f) = lim_{n\to\infty}U(f_n)$ para toda función $f$ la cual es el límite de una sucesión monótona creciente $\{f_n\}$ de funciones que están, por definición, en la clasé $T_1$. Estas funciones límites se dice que están en la clase $T_1$. Se observa que la clase $T_0$ está contenida en la clase $T_1$. La condición (iii') garantiza la independencia de la elección de las sucesiones. Ahora se construyen las integrales superior e inferior de una función arbitraria. Por definición:

$$\overline{U}(f) = \inf_{g\in T_1,\ f\leq g} U(g) \quad \text{y} \quad \underline{U}(f) = -\overline{U}(-f)$$

Así mismo, $f$ es llamado sumable si $\overline{U}(f) = \underline{U}(f)$, donde se asume que $\overline{U}(f)$ y $\underline{U}(f)$ son finitos. Por definición, $U(f) = \overline{U}(f)$. Además, $f$ es sumable $\leftrightarrow |f|$ es sumable. Si $S$ es la clase de las funciones sumables, entonces $S$ tiene las propiedades (i), (ii) y (iii), y también la clase $T_0$ tiene estas propiedades. Por otro lado, la funcional $U(f)$ sobre $S$ posee las propiedades (i'), (ii'),(iii') y (iv'). Asi definida la integral, ésta posee las propiedades, al estilo Lebesgue:

**Lema 6.1.** *Si $\{f_n\}$ es una sucesión monótona de funciones sumables y si $\lim_{n\to\infty} U(f_n) \neq \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} f$ es sumable y se tiene el intercambio de límites $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = U(\lim_{n\to\infty} f_n)$.*

**Lema 6.2.** *Si $\{f_n\}$ es una sucesión convergente de funciones sumables y si $|f_n| \leq g$, donde $g$ es una función sumable, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n$ es sumable y se tiene $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = U(\lim_{n\to\infty} f_n)$* **teorema dominado de Lebesgue**.

Ahora miremos a la condición (iv'), sí $f \geq 0$, entonces $U(f) \geq O$ ,es decir, el modelo de integral de Daniell es cuando la funcional $U(f)$ es positiva.¿y si $U(f)$ no satisface esta condición sobre $T_0$?

Según Pesin [24] esto es el caso cuando $U(f) = \int f dg$ donde $g$ no es una función monótona. En este caso se descompondría la funcional $U(f)$ en sus partes positiva y negativa , donde cada parte es una funcional positiva, como en el caso de la integral de Stieltjes $\int f dg$, la función $g$ es descompuesta en sus partes positiva y negativa. En el caso que se expone $U(f)$ no depende explícitamente de una medida, como en el ejemplo de Stieltjes, así que hubo que hacer algunas modificaciones. En esta situación Daniell asume que la funcional $U(f)$ satisface las anteriores condiciones donde en vez de (iv') se asume

(iv') Existe una funcional finita $M(f)$ definida sobre todas las funciones positivas tal que satisface la condición $M(g) \leq M(f)$ donde $g \leq f$ y tal que $U(f) \leq M(f)$ para cualquier $f \in T_0$.

Se observó que la funcional $U$ que satisface las condiciones (i'), (ii'), (iii') y (iv'), también satisface la condición (v') si se toma $M(f) = U(|f|)$. Bien, veamos la descomposidón de $U(f)$ en sus partes positiva y negativa : sea $f \geq 0$. Por definición $U^+(f) = \sup_{0\leq g\leq f} U(g)$. Si $f$ es arbitrario, $f = f^+ - f^-$ y se define:

$$U^+(f) = U^+(f^+) - U^+(f^-) \quad \text{y} \quad U^-(f) = U^+(f) - U(f)$$

Se observó, [24], que $U^+(f)$ y $U^-(f)$ satisfacen las condiciones (i'), ( ii'), (iii') y (iv') . Por definición, la función $f$ es **sumable** si es sumable relativamente a $U^+(f)$ y a $U^-(f)$. En este caso se define **la integral de Daniell** vía:

$$U(f) = U^+(f) - U^-(f).$$

Esta integral incluye a las integrales de Lebesgue y de Stieltjes! (esto se consigue escogiendo adecuadamente la clase $T_0$ y la funcional definida sobre esta clase). En 1920, Daniell informa que las nociones de medida y de función medible se puede introducir en el espacio $M$ en términos de la funcional $U(f)$ y con ello se establece la relación cerrada entre las integrales de Lebesgue y la de Daniell. Pesin nos dice que en los años posteriores la integral de Daniel sufrió varias modificaciones y surgieron otras propuestas de integral.

El lector es sugerido también consultar el excelente libro de análisis fucional de F.Riesz-B.Nagy [25], cap.III, pag.132., en donde se expone sobre la integral de Daniell con una metodología y notación un tanto diferente a Pesin, pero el mensaje y las conclusiones son las mismas. En Internet también se pueden encontrar información sobre esta integral, y también de las otras ya tratadas. Como ya hemos mencionado,la integral de Lebesgue necesita de todo una teoría de la medida para definirla, lo que es ya un esfuerzo. La integral de Daniell, y algunas otras, no lo necesitan, entonces ¿porqué casi siempre cuando se enseña una integral, después de la de Riemann, es la integral de Lebesgue ? ...Una razón puede ser, como lo dicen las autoridades en el tema, que la integral de Lebesgue contribuyó al nacimiento de análisis funcional, a los famosos espacios de Lebesgue $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$; en fin, al surgimiento del análisis moderno y ser fundamento en distintas teorías matemáticas y de la física teórica. Esto, aparte de ser una teoría estética y con resultados bien establecidos, al margen que aún tiene algunas limitaciones , como (creemos) el mismo Lebesgue lo predijo .Ver la parte I, [23].

**7. La integral de Haar.** En el libro de S.Saks, [27], (escrito en 1933) al final existen dos Notas de S.Banach: la primera trata sobre "la medida de Haar" y la segunda sobre "la integral de Lebesgue en espacios abstractos ". Esto nos motiva seguir con tal excelente libro y exponer sobre tal medida y sobre la integral de Haar. Por otro lado, también poseemos el libro "Integral de Haar"de Leopoldo Nachbin, 1960, (edic. en portugués, hay versión en inglés), escrito con lenguaje moderno, Escuela Francesa. Tiene tres capítulos: I. Integración en espacios localmente compactos; II. Integración en grupos localmente compactos y III. Integración en espacios homogéneos localmente compactos. Siguiendo la línea de este artículo, ser una guía a los intersados en la evolución de la integral, solamente daremos las ideas, definiciones y resultados fundamentales, sin entrar necesariamente en los detalles analíticos. El Prof.Nachbin se esforzó porque su libro sea autosuficiente; sin embargo daremos algunos detalles de los requisitos, sobre todo de topología general y de álgebra (teoría de grupos). Nos limitaremos al capítulo II, dando lo necesario del Cap.I.

En 1933, A.Haar escribió un artículo en donde introduce una teoría de la integral sobre una medida, la medida de Haar, sobre la cual se define su integral; esta medida cumple las condiciones de la conocida medida de Lebesgue, como que todo conjunto de Borel es medible. Banach nos dice que la teoría está relacionada con los grupos continuos. Un hecho importante en la evolución de la integral fue cuando en 1894 T.Stieltjes introduce una notable generalización de la integral de Riemann considerando una función creciente $\alpha$ en el intervalo $[a, b]$, así se tiene la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, la cual es extendida a la integral de Stieltjes-Lebesgue. Recalcamos que la integral de Riemann fue extendida por la integral de Lebesgue. Dentro de los posteriores enfoques de la teoría de la integral, es estudiarla según la Escuela Bourbaki como lo hace Nachbin en su citado libro [21] y que nosotros seguimos. El autor nos dice que tratará la integral en espacios localmente compactos.

Sea el intervalo $I = [a, b]$; $f$ y $\alpha$ son dos funciones reales definidas sobre $I$ .Conocemos la definición de la integralde Ríemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, ver [23]. Se probó que esta integral existe si $f$ es continua y $\alpha$ es una función de variación limitada (ver [23]). Sea $C(I)$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas sobre $I$. Toda función $\alpha$ de variación acotada sobre $I$ determina una funcional lineal $\mu$ representada en el espacio $C(I)$ vía

$$\mu(I) = \int_a^b f d\alpha, \text{ donde } f \in C(I) \tag{7.1}$$

En 1903 J.Hadamard caracterizó a las funcionales lineales continuas sobre $C(I)$ y en 1909, F.Riesz asegura que toda funcional lineal continua sobre $C(I)$ es representable por una integral de Stieltjes. Veamos. La funcional lineal $\mu$ en $C(I)$ es llamada positiva existe una función real creciente $\alpha$ sobre $I$ tal que (7.1) se tiene **si y solo si** $\mu$ es positiva. Luego, se puede decir que la integral de Riemann-Stieltjes respecto a las funciones crecientes coincide con las funcionales lineales positivas sobre $C(I)$. Se remarca que $C(I)$ es un espacio de Banach con la norma $||f|| = \sup\{f(x); x \in I\}$ y así tener funcionales lineales continuas respecto a esa norma . Se tiene: (Riesz) "Dada una funcional lineal $\mu$ sobre $C(I)$ ,existe una función real $\alpha$ de variación acotada sobre $I$ tal que (7.1) se tiene **si y solo si** $\mu$ es continua ".

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f d\alpha$ se define vía: $\int_{-\infty}^{\infty} f d\alpha = \lim_{a\to-\infty b\to\infty} \int_a^b f d\alpha$, en las anteriores condiciones y siempre que exista el límite.

Sea $K(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ (números reales) que se anulan, cada una de ellas, fuera de un compacto. ¿ Cuáles son las funcionales lineales $\mu$ sobre $K(\mathbb{R})$ que se pueden representar por una integral de la forma

$$\mu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\alpha?, \tag{7.2}$$

donde es una función creciente o de variación limitada en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$, y que garantice la existencia de la integral en (7.2). Se verifica que los dos teoremas de Riesz anteriores se verifican en este caso. Ver [21], que estamos siguiendo de cerca.

Vamos a ver, sucintamente, las integrales positivas de funciones continuas con soporte compacto. Sea $E$ un espacio localmente compacto (esto es, un espacio en el cual todo punto posee al menos una vecindad compacta; todo espacio compacto es localmente compacto ,el recíproco es falso, $\mathbb{R}$) ,para más detalles ver un libro de topología general ó [21] . Sea $C(E)$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas sobre $E$, y sea $K(E)$ el subespacio vectorial de $C(E)$ de las funciones con soporte compacto (esto es, que se anulan fuera de un compacto). $C_+(E)$ y $K_+(E)$ denotan los conjuntos de las funciones positivas de $C(E)$ ó de $K(E)$. Por definición, "una **integral positiva** sobre $E$ es una funcional lineal $\mu$ sobre $K(E)$, la que es positiva sobre $K_+(E)$". Se observa que $\mu$ es creciente en $K(E)$. Veamos un ejemplo [21]; sea el intervalo $I = [a, b]$ en la recta el cual es compacto; se toma $E = I$. La funcional lineal $\mu$ definida en $K(I) = C(I)$ vía:

$f \in K(I) \to \mu(f) = \int_a^b f(x)dx$ donde la integral es una integral de Riemann la cual es positiva en $K_+(I)$ y así, es una integral positiva en el espacio compacto $I$ de acuerdo a la anterior definición.

Sea una integral positiva en un espacio localmente compacto $E$ y sea $K(E)$; si $f \in K(E)$ se define la seminorma $||f|| = \sup|f|$ en el espacio vectorial $K(E)$. Con el objetivo de obtener una completación, [21], se considera el espacio vectorial $L(E,\mu)$ de las funciones reales **integrables** sobre $E$; vía argumentos dados en [21] se logra extender univocamente. Esta acción de pasar de $K(E)$ a $L(E,\mu)$, y así extender $\mu$, conduce a la integral de Lebesgue cuando el proceso se aplica a la integral de Riemann; así mismo conduce a la integral de Stieltjes - Lebesgue cuando se aplica a la integral de Stieltjes - Riemann . Se verifica que "si $f$ y $g$ están en $L(E,\mu)$ entonces el $\sup(f,g)$ y el $\inf(f,g)$ también lo están. Si $f \in L(E,\mu)$ entonces $\int f d\mu \geq 0$". Se remarca que las funciones que están en $L(E,\mu)$ se llaman **integrables** respecto a $\mu$ y la funcional lineal $\mu$ se llama la **integral positiva** sobre $E$. Se tiene también "si $f \in L(E,\mu)$ entonces $|f| \in L(E,\mu)$ y se tiene

$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$. Riesz - Fischer verificaron que el espacio vectorial seminormado $L(E,\mu)$ es completo en el sentido de Cauchy . El capítulo I termina con la integración en los espacios productos cartesianos.

Ahora entramos al capítulo II del libro [21], la integral en espacios locamente compactos. Para ubicarnos veamos algunos antecedentes y así comprender la medida e integral de Haar. Veamos. En 1898 el matemático francés Emile Borel introdujo una medida de conjuntos con las siguientes propiedades:

(i) la medida de una suma enumerable infinita de conjuntos es igual a la suma de las medidas de tales conjuntos;
(ii) la medida de la diferencia de dos conjuntos es igual a la diferencia de sus medidas;
(iii) la medida es siempre mayor o igual a cero;
(iv) un conjunto con medida positiva en no enumerable

Borel dice que su medida se aplica solamente a estos conjuntos, con tales propiedades, y que los llamará conjuntos medibles. Aclara que cuando habla de la propiedad (i) ,se asume que todo par de ellos no tienen puntos comunes, y en (ii) se asume que un conjunto está contenido en el otro. Borel no llega a probar la existencia de su medida.

En este escenario surge H.Lebesgue quien en 1901 introduce su medida-integral y prueba, bajo su teoría, la existencia de conjuntos medibles según Borel. La idea de Lebesgue fue dar a todo conjunto limitado un número positivo ó 0, que llamó medida y que tenga las siguientes condiciones :

(i') existen conjuntos con medida positiva;
(ii') dos conjuntos iguales tienen igual medida;
(iii') la medida de la suma de un número finito ó infinito enumerable de conjuntos, sin puntos comunes, es igual a la suma de las medidas de tales conjuntos.

Lebesgue resuelve este problema solamente para conjuntos medibles según su teoría. En 1904 introduce el problema de la integral formulando lo siguiente: "asignar a toda función limitada $f(x)$, definida en $(a,b)$, positiva, negativa ó cero, un número finito $\int f(x)dx$ el cual se llamará la integral de $f(x)$ en $(a,b)$ y que satisface las siguientes condiciones:

(a) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$, para todo $a,b,h$;
(b) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$, para todo $a,b,c$;
(c) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
(d) $\int_0^1 dx = 1$
(e) si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión creciente y converge a $f(x)$, entonces la integral de $f_n(x)$ converge a la integral de $f(x)$.

Como observamos Lebesgue propone una integral que sea invariante por traslaciones y así tener "$f(x)$ es L-integrable si y solo si $\int f(x)dx = \int f(x-h)dx$ ,donde se integra sobre toda la recta $\mathbb{R}$. Esta idea se extiende a $\mathbb{R}^n$. Es decir, la invarianza por traslaciones caracteriza a la integral de Lebesgue, donde $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^n$ son "grupos, relativos a la suma, topológicos localmente compactos!". Esto sugerió estudiar los grupos topológicos localmente compactos en relación con la integral; se demostró que en todo grupo localmente compacto existe una teoría de la integral, invariante por traslaciones. Por los años 1920's y 30's se hicieron muchas investigaciones al respecto; recordemos que el quinto problema de Hilbert dice: "¿ todo grupo topológico que sea localmente euclideano, es necesariamente un grupo analítico? [localmente euclideano significa que todo punto t iene una vecindad abierta homeomorfa a una parte abierta de un espacio euclideano $\mathbb{R}^n$]; [grupo analítico significa que las operaciones del grupo se expresan a través de funciones analíticas]. Luego de algunas investigaciones, A.Haar en 1933 propuso una teoría que le permitió probar la existencia de una medida invariante en un grupo compacto separable. A esta altura de la historia conviene remarcar que lo hecho por los antiguos matemáticos , desde los griegos y hasta siglos después, sirvieron de motivación de conquistas hechas en el siglo XX, como es el caso que estamos tratando. En efecto, en el colegio hemos aprendido la geometría de Euclides donde las nociones de longitud, de área y de volumen tenían la característica de ser invariantes por traslaciones, es decir, si tenemos un cuadrado cuya área conocemos y lo trasladamos, el cuadrado en su nueva posición tiene la misma área! Luego vino el cálculo infinitesimal y años después el trabajo de Lebesgue y sus precursores en donde se tiene la fórmula del cambio de variables y ahí está escondida la invariabilidad por desplazamientos. Haar se inspiró en el cálculo para dar un paso más en la existencia de una medida invariante para grupos localmente compactos.

Un grupo es un par $(G, *)$ donde $G$ es una conjunto y $*$es una operación interna que satisfacen:

(i) $(f * g) * h = f * (g * h)$ para todo $f, g, h$ en $G$;

(ii) existe un elemento $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$ ($e$ elemento neutro) para todo $g \in G$;

(iii) para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ (elemento inverso).

En la práctica es usual omitir el $*$. Cuando en un grupo se satisface $f * g = g * f$, se dice que el grupo es abeliano. Ejemplo de grupo son los números racionales sin el cero y con la multiplicación usual.

Un grupo localmente compacto abeliano es un grupo abeliano, $G$, el cual es al mismo tiempo un espacio de Haudorff localmente compacto y tal que las operaciones internas son continuas.Así, si la adición fuera tal operación, la continuidad exige que las operaciones $x \to -x$ de $G$ sobre $G$ y que $(x, y) \to x + y$ de $G \times G$ sobre $G$, sean continuas. Ejemplo: todo grupo abeliano es un grupo localmente compacto abeliano.

**7.1. La Medida e Integral de Haar.** Sea $G$ un grupo localmente compacto abeliano . Una medida de Haar sobre $G$ es una medida $\mu$ que es positiva, regular y de Borel, que satisface:

(i) si $E$ es compacto, entonces $\mu(E) < \infty$.

(ii) $\mu(E + x) = \mu(E)$ para todo conjunto medible $E$, $E \subset G$, y todo $x \in G$.

Se probó que una medida de Haar existe y es única, a menos de una multiplicación por una constante positiva. Además, la medida de Haar de $G$ es finita si y solo si $G$ es compacto, luego vía una normalización se asume que tiene una masa total igual a 1. Si $G = R$, la medida de Haar es un múltiplo de la medida de Lebesgue.

Una integral positiva $\mu$ en un grupo localmente compacto $G$ es llamado invariante por la izquierda si $f \in L(G, \mu)$ y $s \in G$, entonces $sf \in L(G, \mu)$ y se tiene $\int f(s^{-1}x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$ . A. Haar verificó que:“ En todo grupo localmente compacto $G$, existe al menos una integral positiva $\mu \neq 0$ invariante por la izquierda. $\mu$, es única a menos de un factor de proporcionalidad positivo; esto significa que si $v \neq 0$ fuera otra integral positiva invariante por la izquierda en $G$, entonces existe un número real $c > 0$ tal que $v = c\mu$”. La integral de Haar: “toda integral positiva $\mu \neq 0$, invariante por la izquierda en $G$ se llama **integral de Haar** invariante a la izquierda”. J.von Neumann probó la unicidad de tal integral.

**Ejemplo 7.1.** *La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es una integral de Haar en $\mathbb{R}^n$; se observó que la forma más general de integral de Haar en $\mathbb{R}^n$ es dada por $\mu(f) = c\int f(x)dx$ ,donde $c > 0$ y la integral del segundo miembro es la integral de Lebesgue.*

Algunas propiedades de la integral de Haar son las siguientes:

**Proposición 7.1.** *Un grupo localmente compacto $G$ tiene una integral de Haar invariante por la izquierda, en la cual la medida de $G$ es finita* **si y solo si** *$G$ es compacto.*

**Proposición 7.2.** *En un grupo localmente compacto $G$ todo punto tiene una medida mayor que cero relativa a una integral de Haar invariante por la izquierda en $G$* **si y solo si** *$G$ es discreto.*

**Proposición 7.3.** *Si $\mu$ es una integral de Haar invariante a la izquierda en un grupo localmente compacto $G$ y $f \in K_+(G)$, $f = 0$, entonces $\int f d\mu > 0$. Por otro lado , André Weil y Henri Cartan probaron en forma independiente la existencia y la unicidad de la integral de Haar .*

En el contexto de la teoría de grupos localmente compactos se define los espacios de Lebesgue $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, vía el espacio $L^p$ sobre $G$ con respecto a la medida de Haar $\mu$. La convolución sobre $G$ es definida vía:

$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$. Si $f$ y $g \in L^1(G)$ entonces $f * g \in L^1(G)$ y se tiene $||f * g||_{L^1(G)} \leq ||f||_{L^1(G)}||g||_{L^1(G)}$. Se verifica que $L^1(G)$ es una álgebra de Banach.

A esta altura sentimos que la teoría de la integral es todo un mundo y aún hay mucho más! Para los detalles de lo expuesto y muchas más cosas ver el libro de Nachbin [21](ver la edición en inglés) . El libro de Saks [27] nos lleva a las primeras ideas de la teoría. En Bourbaki [3] encontramos referencias históricas de la medida de Haar, sobre todo relacionado con las contribucíones de los matemáticos franceses y otros. El libro de Katznelson [13] trata los grupos localmente compactos y la medida e integral de Haar, Capítulo VII.

Alfred Haar ( 1885 - 1933 ) fue un notable analista húngaro que estudió en Gotinga obteniedo su doctorado bajo la asesoría de D.Hilbert siendo su tesis “On the theory of ortogonal functions systems”, trabajo en donde está el germen de la idea de ondícula, (“wavelet”) obteniéndose así las famosas “ondículas de Haar”. Fue profesor en la universidad de Gotinga hasta 1912 en que regresa a Hungría siendo profesor en una universidad local. Junto a M.Riesz formaron un centro matemático de prestigio internacional. Su trabajo sobre grupos le permitió desarrollar una teoría de la integral sobre grupos localmente compactos ,siendo la base para que J.von Neumann - Pontryagin (1934) y A.Weil (1940) desarrollaran la teoría del análisis armónico conmutativo.

**8. La Integral de Henstock - Kurzweil.** Bien, ya hemos recorrido buen trecho de la ruta hacia una visión moderna de la noción de "integral"; desde los tiempos de Arquímedes [23] hasta recientemente la integral de Haar. En todas esas teorías, la idea de conjunto, de la medida de Lebesgue y de la naciente teoría del análisis funcional jugaron un rol fundamental en el desarrollo de nuevas teorías de la integral todo lo cual demanda una buena dosis de estudio y preparación en teorías que cada vez se hacían más abstractas, como es el caso de la "teoría abstracta de la integral". De esta manera, la idea de Riemann se iba perdiendo o adquiría nuevos enfoques, como ya hemos visto antes. La influencia de Lebesgue fue, y es, muy fuerte pues en base a ella se construyó casi todo el análisis moderno y así su enseñanza, sobre todo para estudiantes de ciencias, y mejor para los de matemáticas, estudiar la medida e lntegral de Lebesgue es una tarea indispensable, con todo el esfuerzo que ello demanda. Por ello, cuando en 1957 Jaroslav Kurzweil, [17], e independientemente en 1961 Ralph Henstock [11] anunciaron una nueva forma de introducir una integral que recoge la idea inicial de Riemann, que no hace uso de una teoría de la medida y que es más amplia que la de Lebesgue y otras, se produjo un gran interés internacional de conocer, difundir, y surgieron nuevas investigaciones sobre esta nueva integral. Era el retorno a la integral de Riemann, en donde se hicieron ligeras ingeniosas modificaciones en las suman de Riemann y se obtuvo una integral con otras ventajas que las ya mencionadas.

El punto de partida de esta historia es el trabajo de J. Kurzweil [17] sobre un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias que mencionamos: "sean las funciones $f_k(x,t)$, $k = 1, 2, ...$ definidas y continuas para $(x, t) \in G \times [0, T]$, donde $0 \in G$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $G$ es abierto y $f_n(x, t) \in \mathbb{R}^n$. Con $x_k(t)$ se denota la solución de

$$\frac{dx}{dt} = f_k(x, t),\, x(0) = 0; \tag{8.1}$$

y se asume que existe una única solución $x_0(t)$ definida en $0 \leq t \leq T$. Entonces Kurzweil anuncia su teorema

**Teorema 8.1.** *Si se tiene que*

$$F_k(x, t) = \int_0^t f_k(x, \alpha)d\alpha \to \int_0^t f_0(x, \alpha)d\alpha = F_0(x, t) \tag{8.2}$$

*uniformemente con $k \to \infty$, donde los $f_k(x,t)$ son funciones equicontinuas para $x$ con fijos $k$ y $t$. Entonces los $x_k(t)$ son definidos sobre $[0, T]$ para $k$ suficientemente grande y $x_k(t) \to x_0(t)$ uniformemente con $k \to \infty$.*

En el citado trabajo Kurzweil estudia la teoría de ecuaciones diferenciales generalizadas ,en cierto sentido [17] , y así el problema propuesto es investigado en tal contexto. El autor da aplicaciones de su teoría a las ecuaciones lineales y a temas de convergencia en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Así mismo nos dice que algunos de sus resultados pueden ser interpretados en términos de la teoría de distribuciones. Kurzweil comienza su trabajo presentando una generalización de la integral de Perron. Vía esta ruta llega a formular su integral generalizada. Ver [17] para las ideas iniciales de Kurzweil respecto a la nueva integral, la que fue luego estudiada e investigada por Henstock. Para entender mejor la integral de Henstock-Kurzweil, la que es fundamentalmente la integral de Riemann modificada en su definición, presentaremos nuevamente esta integral poniendo énfasis en sus detalles de definición, así mismo retornaremos a la integral de Lebesgue en su definición y algunos detalles. También veremos algunas otras integrales que surjan en el camino.

En 1854 Riemann introdujo su modelo de integral mejorando las ideas previas de Cauchy e iniciando una ventana desde posteriormente se hicieron otras investigaciones ;luego de los trabajos de Lebesgue y todo lo que se hizo alrededor de su modelo se retornó a Riemann , como es el caso de la integral de Henstock-Kurzweil. Veamos. Sea $f$ definida sobre $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y se divide este intervalo en intervalos de menor longitud. Una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito de números $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, ..., n$.

La longitud de cada $[x_{i-1}, x_i]$ se define vía: $l([x_{i-1}, x_i]) = x_i - x_{i-1}$. El máximo de tales longitudes es llamado la norma de la partición y se denota

$\mu(P) = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}; i = 1, ..., n\}$.

De esta manera los puntos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una sucesión creciente de números en $[a, b]$ que lo dividen.en subintervalos vecinos. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $P$ una partición de $[a, b]$ y sea $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i$, Riemann consideró las sumas

$$S(f, P, (t_i), i = 1, ..., n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

respecto a la partición $P$ y al conjunto de puntos muestras $t_i$, $i = 1, 2, ..., n$. El límite de estas sumas produce la integral de Riemann; veamos,

**Definición 8.1.** *La función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ si existe $J \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ y si $P$ es cualquier partición de $[a,b]$ con $\mu(P) < \delta$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i$, entonces*

*$|S(f, P, (t), i = 1, ..., n) - J| < \epsilon$; donde se asume que el límite de las sumas es cuando la norma de la partición tiende a cero.*

Notación: $J = R\int_a^b f(t)dt$. Se verifica que $J$ es único. Para otros detalles sobre esta integral ver [20], [22] o un libro de cálculo avanzado.

Observación: $\delta$ es un número y nos mide cuan pequeños los subintervalos deben ser para que las sumas de Riemann deban aproximarse más y más a la integral.

En [22], sección 3.1., vimos algunas insuficiencias de la integral de Riemann que la limitan como un recurso para estudiar áreas de del análisis moderno. Además, ella está limitada a funciones acotadas definidas sobre intervalos cerrados y acotados, y así se excluye a las funciones no acotadas y otras que son acotadas pero no son R-integrables (la función de Dirichlet). Pero existe un camino para extenderla a toda la recta ; así, si $f$ es R-integrable en el intervao $[-a, a]$, con $a > O$, entonces se define $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$, si el límite existe.

Se observa que esta extención no es buena porque la integral extendida no es invariante por translaciones, propiedad deseada que una integral debe tener. Una mejor idea fue formulada por Cauchy-Riemann: sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que se asume R-integrable sobre todo subintervalo $[c,b]$, donde $a < c < b$. Se dice que f es Cauchy-Riemann integrable sobre $[a,b]$ si existe el $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f$.

Se define la integral de Cauchy-Riemann de $f$ sobre $[a,b]$ siendo

$\int_a^b f = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f$. Si el límite existe tal integral es convergente; en caso contrario, es divergente. Se observó que $f$ es R-integrable sobre [a,b], entonces esta definición coincide con la definición original dada por Riemann y de esta manera se tiene una extensión de la integral de Riemann. Sea ahora $f$ definida sobre el intervalo no acotado $[a,\infty)$ con valores en $\mathbb{R}$. Se dice que $f$ es Cauchy-Riemann integrable sobre $[a,\infty)$ si $f$ es R-integrable sobre $[a,b]$ para todo $b > a$ y existe $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f$. Entonces, la CR-integral de $f$ es definida vía $\int_a^{\infty} f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$. Si el límite existe, tal integral es convergente; caso contrario, es divergente.

En forma análoga es hecho para funciones definidas sobre el intervalo $(-\infty, b]$. Entonces se tiene el caso general: "sea $f : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$; se dice que $f$ es Cauchy-Riemann integrable (CR-íntegrable) sobre $(-\infty,\infty)$ si y solo si exiten ambas integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_a^{\infty} f$ para algún a; y la CR-integral de $f$ sobre $(-\infty,\infty)$ es definida vía: $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^{\infty} f$.

Desde la época de Newton y Leibniz se conoció la relación existente entre las ideas de derivada y de integral; una es inversa de la otra y fue conocido como el teorema fundamental del cálculo. En esta relación quedaron algunas interrogantes analíticas que fue motivación de posteriores investigaciones. Veamos. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a,b]$, con derivada $f'$.

**Teorema 8.2 (El primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC 1)).** *dice: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $f'$ es R-integrable en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.*

Importante: se exige que $f'$ sea R-integrable!; ¿porqué esta hipótesis? ... porque existe una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que es diferenciable con $f'$ acotada pero no es R-integrable. Esto está en un resultado debido a Volterra: "existe una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la cual es diferenciable en todo punto de $[0,1]$, con $f'$ acotada sobre $[0,1]$, pero $f'$ no es R-integrable sobre $[0,1]$".

Un ejemplo que ilustra esta situación es, [16]: "sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida vía

$$f(x) = \begin{cases} x^2 cos(\frac{\pi}{x^2}) & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{8.3}$$

Se observa que $f$ es diferenciable sobre $[0,1]$ cuya derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2xcos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x} sen(\frac{\pi}{x^2}) & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

Se sabe que "si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es R-integrable, entonces $f$ es acotada"; luego en el ejemplo $f'$ no es acotada sobre $[0,1]$ y por tanto $f'$ no es R-integrable sobre $[0,1]$ .También se observó que esta derivada $f'$ no es L-integrable (Lebesgue), y esto resalta la importancia de la integral de Henstock - Kurzweil, que veremos después, pues con ella se integra todas las derivadas y se tiene, en toda su generalidad, la tesis del TFC 1.

Es usual que luego de estudiar a la integral de Riemann se estudie a la integral de Lebesgue, sobre todo para los estudiantes de matemáticas y física. En [23] dimos una preséntación, mas o menos, detallada de la integral de Lebesgue; ahora, en forma sucinta, haremos algunos comentarios de esta integral no vistos en [23] resaltando las deficiencias que tiene aún, lo que contrasta con la integral de Henstock -Kurzweíl que es más general que Lebesgue y es más simple en su formulación. Veamos. Lebesgue, a inicios del siglo XX, se propuso el problema, ver [16]: "proporcionar a cada función acotada $f$ definida en el intervalo finito $[a,b]$ un número, que se llamará $\int_a^b f(x)dx$, que satisfaga las siguiente condiciones:

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$;

(ii) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$;

(iii) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

(iv) Si $f \geq 0$ y $a < b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

(v) $\int_0^1 1dx = 1$;

(vi) Si $\{f_k\}$ es creciente punto a punto hacia $f$, entonces $\int_a^b f_k(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$

Así, Lebesgue guiado por estas condiciones, definirá su integral; por ello, este método se llama una definición descriptiva. ([16], pag.56 )

Lebesgue reduce su problema para definir su integral a la idea de extender la definición de longitud de intervalos en $\mathbb{R}$ hacia subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$ y así llega a la tarea o problema de "medir conjuntos". De esta manera a cada conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$ le asigna un número no negativo, que se denota $m(E)$. Lebesgue también se plantea el "problema de medir conjuntos". El primer paso para extender la idea de longitud de un intervalo a medir conjuntos arbitrarios de la recta fue definir el concepto de **medida exterior**: Sea $E \subset \mathbb{R}$; la medida exterior de E se define vía $m^*(E) = \text{ínf} \sum_i (I_i)$, donde el ínfimo es tomado sobre todas las familias enumerables de intervalos abiertos $\{I_i\}$ tal que $E \subset \bigcup_i I_i$.

Para ver mayores detalles y propiedades de esta medida ver [16], [23]. Previo algunos argumentos, Lebesgue define la "medida interior"de $E \subset [a,b] = I$ vía: $m_*(E) = (b-a) - m^*(I-E)$ ; Lebesgue nos dice que "$E$ es un conjunto L-medible si $m^*(E) = m_*(E)$". Es decir, se tiene $m^*(I) = m^*(E) + m^*(I - E)$, desde que la medida exterior de un intervalo es su longitud, $m(E)$ denota la L- medida de E.

Desde que R tiene longitud infinita, esta última igualdad tiene dificultades si se desea considerar conjuntos arbitrarios de R; entonces ¿cómo caracterizar aquellos subconjuntos L-medibles... La respuesta es debida a C. Caratheodory : "Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado . Si $E \subset J$, entonces son equivalentes:

(i) $m^*(I) = m^*(E) + m^*(I - E)$;

(ii) $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$, para todo $A \subset I$"

La prueba de este teorema es técnica; ver [16], pag.64. El mensaje de este resultado es que la medida según Lebesgue es equivalente a la medida según Caratheodory. Luego se puede dar la definición:

**Definición 8.2.** *Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ es medible según Lebesgue si para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se tiene $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$"*

Para ver los detalles de estos conjuntos L-medibles ver [16].

Como sabemos, se integra funciones; entonces se desea saber que clase de funciones deben ser consideradas dentro del proyecto de Lebesgue .La idea es , en principio extender el concepto de función continua sobre $\mathbb{R}$. Lo hecho anteriormente sobre conjuntos L-medibles nos conduce de modo natural a considerar un subconjunto propio dentro de todos los subconjuntos de R. Se observa que si E es un intervalo y se considera su función característica $\mathcal{X}_E$, entonces se tiene $\int \mathcal{X}_E dx = l(E) = m(E)$. Esto nos dice: para que $\mathcal{X}_E$ tenga una L-integral definida, $E$ debe ser un conjunto medible. Luego la función $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{X}_{E_i}(x)$ es también integrable y se especula que el límite de tales funciones simples también debe ser L-integrable. Lebesgue se motiva así para introducir las adecuadas funciones en donde se tenga tales propiedades. Tales funciones son las llamadas **funciones medibles**. Sea la función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $A$ es un conjunto medible y sea $y$ un número real; sea el conjunto $E(y) = \{x \in A / f(x) > y\}$. " $f$ es una función medible si $E(y)$ es un conjunto medible para todo y". Para ver más detalles sobre estas funciones consultar [23], [16]. Una guía para definir a la integral de Lebesgue fue observar que si $f$ es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{X}_{I_i}(x)$, donde los $I_i$'s son intervalos disjuntos dos a dos, entonces Lebesgue asume que deberíamos tener $\int_R f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i l(I_i) = \sum_{i=1}^n c_i m(I_i)$, siempre que $l(I_i) < \infty$ para todo $i$. Entonces se define la integral de Lebesgue de una función simple: "Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función no-negatíva, simple de la forma $\sum_{i=1}^n c_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$, entonces, por definición $\int f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i m(A_i)$, donde $A_i = \{x/f(x) = c_i\}$". De un modo más general: "Sea $E$ un conjunto medible y $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función no-negativa y medible. Entonces la L-integral de $f$ sobre $E$ es definida siendo $\int_E f(x)dx = \sup\{\int_E sdx / 0 \leq s \leq f$ y s es simple $\}$.

Para funciones medibles en general $f$, se considera la conocida descomposición $f = f^+ - f^-$,donde $f^+$ y $f^-$ son funciones no-negativas. Luego, "si $E$ es un conjunto medible y $f$ es una función medible sobre $E$, se define la integral de Lebesgue de $f$ sobre $E$ siendo: $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$". Se dice que $f$ es L-integrable. Una interesante caracterización de las funciones L- integrales es: "$f$ es L-integrable sobre $E$ si y solo si $|f|$ es L-integrable sobre $E$; además, $|\int_E f| < \int_E |f|$. Para mayores detalles sobre la integral de

Riemann y la de Lebesgue ver, por ejemplo, [16], [30], [23].

Ahora pasamos a presentar a la **Integral de Henstock -Kurzweil**, el objetivo central de esta sección. Veamos un pequeño recuento de lo que estamos tratando en este artículo y que está relacionado con el tema actual. Por completitud daremos algunas definiciones ya conocidas.

El punto de partida es la integral de Riemann, como ya hemos mencionado pero se dará énfasis a su definición. Como sabemos, luego de algunos precursores, Lebesgue nos legó su integral, la que supera algunas de las deficiencias de la de Riemann .La L-integral se hizo muy útil en el ambiente matemático pues $f$ es L-integrable si y solo si $|f|$ es L-integrable, lo que permitió construir los famosos espacios de Lebesgue $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, que permitieron un gran desarrollo del análisis funcional. Pero, como Lebesgue lo advirtió, su integral no puede integrar a todas las derivadas no-acotadas. Esto está relacionado con el teorema fundamental del cálculo, el cual no cumple la integral de Lebesgue. Veamos el ejemplo dado por (8.3), sea $0 < a < b < 1$; se observa que $f'$ es continua en $[a, b]$ y por tanto es R-integrable y se verifica que $\int_a^b f'(x)dx = b^2 cos(\frac{\pi}{b^2}) - a^2 cos(\frac{\pi}{a^2})$. Ahora hay que elegir adecuadamente $a$ y $b$ para tener una familia de intervalos $[a, b]$'s de modo que la integral del valor absoluto de $f'$ sea divergente .Tal elección se consigue ([16], pag. 134) poniendo $a_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$ y $b_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, y observar que $\int_{a_k}^{b_k} f'(x)dx = \frac{1}{2k}$. Tales intervalos son disjuntos dos a dos, luego

$$\int_0^1 |f'|(x)dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty.$$

Por tanto, $f'$ no es absolutamente integrable sobre $[0, 1]$, y así $f'$ no es L-integrable sobre $[0, 1]$.

La integral de Lebesgue tiene también otras deficiencias , así la integral de Dirichlet $\int_0^{\infty} \frac{senx}{x} dx$ no es integrable según Lebesgue pues $\left|\frac{senx}{x}\right|$ no es L-integrable. Se remarca que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre $[a, b]$ y si $f'$ es acotada , entonces $f'$ es L-integrable y se tiene $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. Por otra parte, para llegar a definir la integral de Lebesgue se tiene que aprender la teoría de la medida y de las funciones medibles, todo lo cual demanda un buen tiempo de estudio. Por ello y otras razones, se buscó otras integrales, como las que hemos mencionado en este artículo. Así, en 1912 A.Denjoy y en 1914 0.Perron introdujeron otras integrales donde el teorema fundamental del cálculo se cumple sin restricciones; estas dos integrales son equivalentes. Ver las secciones 5 y 6. Luego de otras contribuciones, J.Kurzweil y R. Henstock, en el período 1957 -1961, en forma independiente introducen una nueva integral que conserva la forma original de la definición dada por Riemann dando una original e ingeniosa modificación con el número o constante $\delta$, que ahora se considera como una función positiva $\delta(x)$. Esta integral, en muchos casos, es más fuerte que la integral de Lebesgue. Si $HK([a, b])$ es el conju nto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que son integrables según Henstock-Kurzweil (HK-integrables), entonces toda función R-integrable y L-integrable están en HK($[a, b]$). Es decir se tiene:
{funciones R-integrables} $\underset{\neq}{\subset}${funciones L-integrables} $\underset{\neq}{\subset}${funciones HK-integrables}.

Pero ... si $f$ es HK-integrable, esto no implica que $|f|$ sea HK-integrable; algo lamentable pues no se podría definir algo similar a los espacios de Lebesgue $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, donde se define la norma en base al valor absoluto de $f$.

Veamos algunas definiciones hacia la HK-integral. Sea el intervalo $I = [a, b]$ acotado en $\mathbb{R}$. Una partición $P$ de $[a, b]$ es una familia finita de puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ de $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$. Se pone,

$I_1 = [x_0, x_1]$, ... ,$I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Una etiqueta $t_i$ es un punto tal que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Así tenemos un conjunto de etiquetas $\{t_1, t_2, .., t_n\}$ asociados a los intervalos $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$ de la partición $P$. Una partición etiquetada de $[a, b]$ es el conjunto de pares $P_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])/i = 1, 2, ..., n\}$, donde $e = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ es un conjunto de etiquetas asociadas a los intervalos $I_i$'s y $P$ es una partición de $[a, b]$. Si $P_e$ es una partición **etiquetada** de $[a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función, entonces se define la suma de Riemann $S(f; P)$ de $f$ asociada a $P$ siendo el número

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

.

**8.1. Integral de Riemann.** "el número $I_R$ es la integral de Riemann de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > O$ existe una constante $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $P_e$ es cualquier partición etiquetada de $[a, b]$ y se satisface $x_i - x_{i-1} < \delta$ para $i = l, ..., n$, entonces se tiene

$$|S(f; P) - I_R| \leq \epsilon$$

.

Notación: $I_R = (R)\int_a^b f(x)dx$ y diremos que $f$ es R-integrable. ·

Atención : $\delta$ es una constante y esto restringe a la R-integral. La ingeniosa idea de Henstock-Kunweil fue considerar $\delta$ como una **función estrictamente positiva** sobre $[a, b]$, algo que de inicio pudo ser considerado como una simple idea pero se demostró que es algo profundo por los resultados obtenidos.

Si $\delta$ es una función $> 0$ ella se llama un **calibrador (o indicador)** sobre $[a, b] = I$. Si $\delta$ es un calibrador sobre $I$ y $P_e$ es una partición etiquetada de $I$, entonces $P_e$ es $\delta$**-fina** si se tiene $0 < x_i - x_{i-1} < \delta(t_i)$, $i = 1, ..., n$.

Se probó que dado cualquier calibrador $\delta$, entonces existe una partición etiquetada $\delta$-fina de $I$. Esto es el Lema de P.Cousin, el cual da validez a la definición de la integral de HK siguiente. Así se tiene $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)) = c(t_i)$, donde $c$ tiene el papel de controlar a $P_e$. La idea de la HK-integral es usar calibradores en general, algo más general que una función constante positiva.

**8.2. La integral HK.** "un número $H \in \mathbb{R}$ se llama la integral de Henstock-Kurzweil ( o integral de Riemann generalizada ) de una función $f : I \to \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un calibrador $\delta$ sobre $I$ tal que si $P_e = ([x_{i-1}, x_i]; t_i), i = 1, ..., n)$, es cualquier partición etiquetada de $I$ la que es $\delta$-fina, entonces $|S(f; P_e) - H| < \epsilon$". En este caso escribiremos que $f \in HK(I)$ y la integral de HK se escribe (HK)$\int f(x)dx$. La integral de HK es única.

**Ejemplo 8.1.** *Sea la función constante $f(x) = c$ sobre $l = [a, b]$, entonces $f \in HK(I)$ y se tiene $\int f(x)dx = c(b - a)$. En efecto, sea $P_e = \{t_i, [x_{i-1}, x_i]/i = 1, ....n\}$ una partición etiquetada cualquiera de $I$. Entonces,*

$S(f; P_e) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$*; esto es, la suma de Riemann es una constante igual a $c(b - a)$; de esta manera se puede elegir un calibre arbitrario, que da una partición etiquetada $\delta$-fina, y así eligiendo $H = c(b - a)$, se obtendría*

$$|S(f; P_e) - c(b - a)| = |c(b - a) - c(b - a)| = 0 < \epsilon$$

*Luego,*

$$(HK)\int_a^b c dx = c(b - a).$$

[Para ver los detalles de lo mencionado y de lo que expondremos a seguir, ver [16], [12], [4], entre otros artículos dados en la Referencia].

En relación al ejemplo 1 (8.1), si $A \subset \mathbb{R}$ entonces la función $f : A \to \mathbb{R}$ se llama una "función nula"si el conjunto $\{x \in A/f(x) \neq 0\}$ es un conjunto de medida nula. Entonces se verifica "si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$es una función nula sobre $[a, b]$, entonces $f$ es (HK) integrable y $\int f(x)dx = 0$".

La integral de Lebesgue también se puede definir vía sumas de Riemann ,como el mismo Lebesgue lo expresó en 1909 ("Sur les intégrales singuliéres"): "sea

$f \in L^1([a, b])$, entonces existe una sucesión de particiones etiquetadas $P_n$ con norma $||P_n|| \to 0$, $n = 1, 2, 3, ...$, tal que $\lim_{n\to\infty} |S(f, P_n) - (L)\int_a^b f(x)dx| = 0$". Entonces, ¿porqué no usar esta definición para definer a la integral de Lebesgue? ..., Lebesgue dice que para construir tal sucesión se requiere de la integral de Lebesgue! (ver también [4]).

**Ejemplo 8.2.** *La función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional} \\ 0 & x \text{ irracional} \end{cases}$, $x \in [0, 1]$, *sabemos que no es R-integrable, pero si es (HK)- integrable y se tiene*

$\int f(x)dx = 0.$

En efecto, debemos probar que existe un número $H \in \mathbb{R}$ (que es único) tal que para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador

$\delta(x)$, $\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ tal que si $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])$ es una partición $\delta$-fina de $[0, 1]$, entonces se tiene $|S(f; P_e) - H| < \epsilon$. Bien, sea $\epsilon > 0$ dado y consideremos la sucesión enumerable $(x_j)$, $j = 1, 2, ....$, de números racionales $(f(x_j) = 1)$. Ahora se define

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} & \text{si } x = x_j, j = 1, 2, ... \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional}, (f(x) = 0). \end{cases}$$

Vemos que $\delta(x) > O$, esto es, $\delta$ es un calibrador. Ahora se fija una partición etiquetada de $[0, 1]$, $\delta$-fina, $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])$, $i = 1, 2, ..., n$ . La suma de Riemann es $S(f, P_e) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + ... + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$. Luego, si $t_i$ es irracional, $f(t_i) = 0$. Entonces tendríamos $S(f, P_e) = 0$ y $|S(f, P_e) - 0| = 0 < \epsilon$, y se tiene la tesis. Veamos el caso $t_i$ es racional, $f(t_i) = 1$. Se tiene

$S(f, P_e) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})$. Pero,

$[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i + \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$; luego $x_i - x_{i-1} < 2\delta(t_i)$; entonces, si $t_i = t_j$ racional, para cada $j = 1, 2, ...$ se tiene

$$0 < f(t_i)(x_j - x_{j-1}) \leq 2\delta(t_j) \leq 2\frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \frac{\epsilon}{2^j}$$

Luego se tiene, $|S(f,P_e)-0| = \epsilon\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \epsilon$, y se tiene la tesis.

Veamos ahora otras propiedades y resultados de la HK-integral de forma sucinta; los detalles pueden ser encontrados en las referencias dadas antes: $f \in HK([a,b])$ significa que $f$ es HK-integrable sobre $[a,b]$.

**Teorema 8.3.** *Si $f$ es R-integrable en $[a,b]$, entonces $f$ es HK-integrable en $[a,b]$ y se tiene*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (HK)\int_a^b f(x)dx.$$

En efecto, por hipótesis dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta_\epsilon = \delta(\epsilon)$ tal que para cualquier partición etiquetada $P$ de $[a,b]$ que satisface $||P|| < \delta_\epsilon$, se tiene $|S(f,P) - (R)\int_a^b f(x)dx| < \epsilon$. Ahora, parte importante, se define $\delta(x) = \frac{1}{4}(\delta_\epsilon)$ para todo $x \in [a,b]$.

Se observa que $\delta$ es un calibrador de $[a,b]$; sea $P = (t_i, [x_{i-1}, x_i])$, $i = 1,2,...,n$, una partición etiquetada de $[a,b]$ $\delta$-fina. Ahora observemos que se tiene, por definición de $\delta$-fina $[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)) = (t_i - \frac{1}{4}\delta_\epsilon, t_i + \frac{1}{4}\delta_\epsilon)$, de donde se obtiene $0 < x_i - x_{i-1} < \frac{1}{2}\delta_\epsilon < \delta_\epsilon$ para cada $i = 1,2,...,n$ ; y así la partición $P_\epsilon$ satisface también $||P_\epsilon|| < \epsilon$ y se tiene entonces que $|S(f,P_\epsilon) - (R)\int_a^b f(x)dx| < \epsilon$.

**Corolario 8.1.** *Toda función continua f sobre [a,b], es HK-integrable sobre [a,b].*

Algunas propiedades de la integral HK son :

(1) Si $f$ y $f \in HK([a,b])$, entonces $(f+g) \in HK([a,b])$ y se tiene $(HK)\int_a^b (f+g)dx = (HK)\int_a^b fdx + (HK)\int_a^b gdx$. Si además $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(HK)\int_a^b \alpha f dx = \alpha(HK)\int_a^b fdx$.

(2) Sea la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$; si $f \in HK([a,c]) \cap HK([c,b])$, entonces $f \in HK([a,b])$ y

$$(HK)\int_a^b fdx = (HK)\int_a^c fdx + (HK)\int_c^b fdx\ .$$

(3) Si $f \in HK([a,b])$, entonces $f \in HK([c,d])$ para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$.

(4) Si $f \in HK([a,b])$ y $|f| \leq K$, donde $K$ es una constante $\geq 0$, entonces

$$\left|(HK)\int_a^b fdx\right| \leq K(b-a)\ .$$

**Nota 8.1.** *Se verifica que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ...x \in (0,1] \\ 0 & ...x = 0 \end{cases}$ NO es HK - integrable. También se tiene que: si $f$ y $g$ son HK-integrables, entonces su producto $fg$ no es HK-integrable, en general. En efecto, la función $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & ...x \in (0,1] \\ 0 & ...x = 0 \end{cases}$ es HK -integrable, pero $gg = f$ no lo es .*

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y asumamos que $f$ es R-integrable sobre cada $[a,c] \subset [a,b]$ donde $c \in (a,b)$ y donde se asume que $b$ es un punto singular de $f$ ("0 es un punto singular de $f(x) = \frac{1}{x}$").

Por definición, si el límite existe, el $\lim_{c\to b^-}(R)\int_a^c fdx$ es llamada la integral impropia de Riemann (o la integral de Cauchy-Riemann) y se denota $(CR)\int_a^b fdx$. Se dice que la integral impropia es una generalización de la integral de Riemann (puede suceder en CR-integral que f no sea R-integrable; esto mismo sucede con la integral de Lebesgue). Pero, para la integral de HK NO EXISTEN INTEGRALES IMPROPIAS. Asi se tiene el resultado de Hake:

**Teorema 8.4.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $f \in HK([a,b])$ si y solo si $f \in HK([a,c])$ para cada $c \in (a,b)$ y existe el $\lim_{c\to b^-}(R)\int_a^c fdx$. Además se tiene*

$$(HK)\int_a^b fdx = \lim_{c\to b^-}(R)\int_a^c fdx.$$

**Corolario 8.2.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f es R-integrable en cada subintervalo $[a,c] \subset [a,b]$, donde $c \in (a,b)$, entonces si existe $\lim_{c\to b^-}(R)\int_a^c fdx$ se tiene que $f \in HK([a,b])$ y*

$$(CR)\int_a^b fdx = \lim_{c\to b^-}(R)\int_a^c fdx = (HK)\int_a^b fdx.$$

Con ayuda de este corolario podemos ver mejor que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida vía $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ no es HK-integrable pues si $c \in (0,1)$ es arbitrario se tiene que existe $(R)\int_c^1 \frac{1}{x}dx = -lnc$, mientras que no existe

$\lim_{c\to 0^+}(R)\int_c^1 fdx = +\infty$.

Veamos ahora algunos aspectos del teorema fundamental del cálculo, el cual es en gran parte el origen de toda esta aventura. Recordemos

**Teorema 8.5 (Teorema Fundamental del Cálculo).** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto de $[a,b]$ tal que $f'$ es R-integrable sobre $[a,b]$, entonces se tiene*

$$(R)\int_a^b f'dx = f(b) - f(a).$$

Como ya hemos observado antes, lo resaltable es que se debe tener $f'$ integrable sobre $[a,b]$. En el caso de Lebesgue también se exige tal condición pues se dice: "Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f$ es diferenciable en todo punto de $[a,b]$ y $f'$ es acotada sobre $[a,b]$, entonces $f' \in L^1([a,b])$, esto es, $\int_a^b |f'|dx < \infty$ y se tiene $(L)\int_a^b f'dx = f(b) - f(a)$". Bien, en la versión TFC de Henstock - Kurzweil lo sorprendente es que NO se exige que $f'$ sea integrable .

**Teorema 8.6.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto de $[a,b]$, entonces se tiene $f'$ es HK- integrable y*

$$(HK)\int_a^b f'dx = f(b) - f(a).$$

Remarcamos que en la HK-integral siempre $f'$ es HK-integral: Esto fue una gran ventaja en comparación con las integrales de Riemann y de Lebesgue. Para mayores detalles ver [16], [12] y en particular [4] pag.858. La integral de HK tiene propiedades similares a la integral de Riemann. Así por ejemplo se tiene el

**Teorema 8.7.** *Si $f$ es HK-integrable en $([a,b])$ y $F(x) = (HK)\int_a^x fdt$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $F$ es diferenciable c.t.p sobre $[a,b]$ y se tiene $F'(x) = f(x)$ c.t.p. $x \in [a,b]$*

La integral de HK tiene algunas dificultades como, por ejemplo, si $f$ es HK-integrable, entonces en general no es cierto que $|f|$ lo sea, ver [4]. Por ello, "si $f$ y $|f|$ son HK-integrables entonces se tiene $|(HK)\int_a^b f(x)dx| \leq (HK)\int_a^b |f(x)|dx$", desigualdad que si es cierta en el caso Riemann y Lebesgue. ¿Cómo saber si $|f|$ es HK-integrable sobre $[a,b]$? ... se probó que cuando su integral indefinida F es de variación acotada sobre $[a,b]$, entonces $|f|$ es HK-integrable sobre $[a,b]$. (Esto es una caracterización). También se tiene el siguiente criterio: "Si $f$ y $g$ son HK-integrables en $[a,b]$ y $|f| \leq g$ sobre $[a,b]$ entonces $|f|$ es HK-intesgrable sobre $[a,b]$ y se tiene $|(HK)\int_a^b fdx| \leq (HK)\int_a^b |f|dx \leq (HK)\int_a^b gdx$". Este resultado permite construir un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; así: " $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es llamado absolutamente HK-integrable sobre $[a,b]$ si $f$ y $|f|$ son HK-integrables sobre $[a,b]$". Notación: $L_{HK}([a,b]) = \{f$ absolutamente HK-integrables sobre $[a,b]\}$ . Se verifica que $L_{HK}([a,b])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f \in L_{HK}([a,b])$ si y solo si $f^+$ y $f^-$ son HK-integrables sobre $[a,b]$.(Ver [4]). De este resultado se concluye que "si $f \in L_{HK}([a,b])$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada sobre $[a,b]$ , entonces $fg$ es una función HK-integrable". Así mismo se verifica "si $f \in L^1([a,b])$, entonces $f$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ y se tiene $(L)\int_a^b fd\mu = (HK)\int_a^b fdx$. Además, $L^1([a,b]) \subset L_{HK}([a,b])$ ".

¿Cómo son los resultados de convergencia en el espacio $HK([a,b])$? ... Se sabe que la teoría de Lebesgue es más fuerte que la de Riemann por sus teoremas de convergencia como son el de la convergencia monótona,la convergencia acotada y sobre todo por la convergencia dominada. Tales resultados son válidos en la teoría de la integral de HK. Así se tiene :

**Teorema 8.8 (Teorema de Convergencia Uniforme).** *Si $(f_n)$, $n = 1,2,3,...$, es una sucesión en $HK([a,b])$ la cual converge uniformemente a $f$ sobre $[a,b]$; entonces $f$ es HK-integrable y se tiene (HK)$\int_a^b fdx = \lim_{n\to\infty}$(HK)$\int_a^b f_ndx$.*

**Teorema 8.9 (Teorema de Convergencia Dominado).** *Si $(f_n)$, $n = 1,2,3,...$, es una sucesión en $HK([a,b])$ la cual converge puntualmente a $f$ sobre $[a,b]$ y si $g$ y $h$ son HK-integrables tales que $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $f$ es HK-integrable y (HK)$\int_a^b fdx = \lim_{n\to\infty}$(HK)$\int_a^b f_ndx$.*

**Teorema 8.10 (Teorema de Convergencia Monótona).** *Si $(f_n)$, $n = 1,2,3,...$, es una sucesión monótona en $HK([a,b])$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y si $\lim_{n\to\infty}(HK)\int_a^b f_ndx < +\infty$, entonces $f$ es HK-integrable y se tiene*

$$(HK)\int_a^b fdx = \lim_{n\to\infty}(HK)\int_a^b f_ndx".$$

**Lema 8.1 (Lema de Fatou).** *Si* $(f_n)$, $n = 1, 2, 3, ...$, *es una sucesión en* $HK([a, b])$, *si* $g$ *es HK-integrable sobre* $[a, b]$ *tal que* $g \leq f_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y si* $\liminf_{n\to\infty}(HK)\int_a^b f_n dx < +\infty$, *entonces* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *es HK-integrable y se tiene*

$$(HK)\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to\infty}(HK)\int_a^b f_n dx.$$

Para ver los detalles de estos teoremas ver, por ejemplo, [4] o cualquier libro sobre la HK-integral.

**9. Algunos Comentarios Finales.** Sugerimos ver algunas referencias siguientes: [1], [28], [6], [18], [7], [16], [17], [11] y [20]; en Internet se puede encontrar otras referencias.

(i) Este escrito nos da un visión panorámica de la evolución de la idea de integral,desde Riemann hasta Henstock-Kurzweil; un lector interesado en el tema puede completar su información recurriendo a las referencias dadas arriba.

(ii) Lo presentado podría servir como motivación para que en alguna universidad se puedan estudiar con detalle cada tipo de integral o en conjunto, y así dar como resultado algunas tesis de Maestría o doctorado si el nivel académico así lo permite.

(iii) El surgimiento de la integral de HK ha originado la polémica sobre la enseñanza de la integral. Como sabemos a todo estudiante de ciencias y de letras se les enseña la integral de Riemann, que para situaciones no exigentes podría ser suficiente; y a los estudiantes de matemáticas se le enseña la integral de Lebesgue, aprendizaje que demanda un buen tiempo y esfuerzo .

(iv) También hemos aprendido que tanto la integral de Riemann y la de Lebesgue tienen ciertas limitaciones que la integral de HK las supera, pero ésta tiene aún la dificultad que si $f$ es HK-integrable, $|f|$ no es necesariamente HK-integrable.

(v) ¿ Entonces cuál sería el camino de enseñar la integral en sus distintos niveles? ...; creemos que la introducción de la enseñanza de la integral HK debería tener mayor atención por la sencillez de su definición que no requiere de muchas hipótesis y por la bondad de sus conclusiones.

(vi) En nuestro país la dificultad de tal sugerencia sería que posiblemente pocos profesores universitarios estén informados, a nivel aceptabte, de la integral de HK. Tendría que surgir un proyecto, asumido quizás por el Colegio de Matemáticos, que organice cursos, seminarios, publicaciones, para introducir tal integral. Este artículo está en tal dirección.

(vii) En tanto la enseñanza de la integral de Lebesgue debe seguir enseñándose a los estudiantes de matemáticas, quizás también a los de física y en algunas ramas de ingeniería, dado que en base a tal teoría se han construido teorías matemáticas de gran importancia en la matemática pura, como en la aplicada.

(viii) En los últimos tiempos se ha regresado a investigar a la integral de Riemann en contextos generalizados, ver [30], [28], [1], [26], [11], [20]; entre varias otras referencias que se han publicado últimamente. Esto motiva que podrían surgir algunos proyectos de investigación en algunas universidades de nuestro país.

(ix) Tenemos escrito la Parte III sobre la evolución de la integral a través del tiempo en donde presentamos algunos temas más especializados, pero en forma autosuficiente, y de interés a la cultura matemática.

**Contribuición del autor.** El artículo a sido desarrolla en su integridad por la autora: AO.

**Conflicto de interés.** El autor declara no tener conflicto de interes.

**ORCID and License**
Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

This work is licensed under the Creative Commons - Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

# Referencias

[1] Bartle RG. Return to the Riemann Integral. American Mathematical Monthly. 103.8. 1980.
[2] Bongiorno B. On the $C$-integral, Dpto Mathematics University of Palerme. Arch. 34, 90123. 2002.
[3] Bourbaki N. Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Editorial. Madrid. 1972.

[4] Brito W. Las integrales de Riemann, Lebesgue y Hernstock- Kurzweil[Internet], ULA-Venezuela; [accesado en 19 febrero 2023].Disponible en http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf
[5] Burkill JC. The Lebesgue Integral. Cambridge University Press. London. 1953.
[6] Cross G, Oved S. A new approach to integration. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 114. 1986.
[7] Chatterji SD. Remarques sur l'integrale de Riemann généralisée. Seminaire de Probabilites de Strasbourg. Vol. 30.1996.
[8] Daniell, Percy: A general form of integral. Ann. Math. 1917-18.
[9] Darboux, G: Mémoire Sur les fontions discontinues. Ann. Ecole. Norm. Sup. 1875; 4(2).
[10] Denjoy A. Une extension de l'integrale de M.Lebesgue. Compt. Rend. 1912; 154.
[11] Henstock R. Definitions of Riemann type of the variational integrals. Proc. London Math. Soc. 1961; (3)11.
[12] Herrera JE. La integral de Henstock-Kurzweil[Internet]. Universidad de Panmá. 2005. Disponible en http://up-rid.up.ac.pa/4647/
[13] Katznelson Y. An introduction to harmonic analysis. Dover Public. New York. 1976.
[14] Khinchin A. Sur une extension de l'integrale de M.Denjoy. Compt. Rend.162. 1916
[15] Khinchin A. Sur le procédé d'integration de M.Denjoy. Rec. Math.Soc.Math. Moscow, 1918; 30.
[16] Kurtz D, Swartz Ch. Theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and Mcshane. World Scientific Publ. 2004.
[17] Kurzweil J. Generelized Ordinary Differential equations and continous dependence on a parameter. Czechos. Math. J. 1957; Vol.7. No 3.
[18] Lewis J, Shisha O. The generalized Riemann, domined improper integrals. Journal of Approx. Theory. 1983; 38.
[19] Medvedev FA. Scenes from the history of real functions. Birkhäuser Verlag. Boston. 1991.
[20] Muldowney P. (Editor): Henstock lectures on integration theory. New University of Ulsler. 1970-1971.
[21] Nachbin L. Integral de Haar. Textos de Matemáticas. Instituto de Física e Matemática, Univ. Recife. 1960.
[22] Ortiz A. Aspectos básicos en ecuaciones en derivadas parciales. Notas de Matemática No 3. Dpto. Matem. UNT. 1988.
[23] Ortiz A. La integral, una visión de su evolución a través del tiempo I. Selecciones Matemáticas. Vol 10(1).173-198. Universidad Nacional de Trujillo. 2023.
[24] Pesin IN. Classical and Modern Integration Theories, Academic Press. N.Y. 1970.
[25] Riesz F, Nagy B. Functional analysis. Ungar, New York.1955.
[26] Saab E. Unified integration"by E.J. Mc Shane. 1983. Bulletin of the AMS. 1985; Vol. 13. No 1.
[27] Saks S. Theory of the integral. 2da Edic. Dover Publications, INC. New York. 1964.
[28] Shisha O. The genesis of the generalized Riemann integral. Computers Math. Applic. 1995; Vol. 30. No 3-6.
[29] Thomson B. On VBG functions and the Denjoy- Khinchin integral. Real Analysis. Exchange. 2015/2016; Vol.41(1).
[30] Torchinsky A. Real Variables. U. Indiana. Addison-Wesley. Publis. Comp, 1988.
[31] Wheeden RL, Zygmund A. Measure and integral. An introduction to real analysis. Marcel Dekker. INC.New Yrok. 1977.
[32] Young WH. On the general theory of integration. Phil. Trans. Roy. Soc.London 204A. 1905.
[33] Young WH. On the new general theory of integration. Proc. Roy. London 88A. 1912.
[34] Young WH. Integration with respect to a function of bounded variation. Proc. London. Math. Soc. 1914; 13(2).
[35] Natanson IP. Theory of functions of a real variable, Vols. I-II. Frederick Ungar Publishing. 1955.