Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2023; Vol. 10(2): 339-351.

# Relationship Between the Cantor-Bendixson Derivative and the Algebra of Sets

# Relación de la Derivada de Cantor-Bendixson con el Álgebra de Conjuntos

Andrés Merino and Sebastián Heredia F.

*Received, Nov. 05, 2023;* *Accepted, Dec. 10, 2023;* *Published, Dec. 27, 2023*

How to cite this article:
Merino A. Heredia S . *Relationship Between the Cantor-Bendixson Derivative and the Algebra of Sets*. Selecciones Matemáticas. 2023;10(2):339–351. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.02.10

**Abstract**

*This article provides a detailed analysis of the relationship between the Cantor-Bendixson derivative and set containment, as well as the standard set operations of union and intersection. In particular, it is shown that the Cantor-Bendixson derivative is increasing with respect to set containment and, under suitable hypotheses, generates a decreasing family of sets. On the other hand, we study both the derivative of a union and the derivative of an intersection, under different restrictions on the cardinality of the family of sets being operated on, while taking into account the order of derivative being performed.*

**Keywords** . Cantor-Bendixson derivative; derivative of a set.

**Resumen**

*En el presente artículo se realiza un análisis a detalle sobre la relación de la derivada de Cantor-Bendixson con la contenencia de conjuntos y las operaciones usuales de conjuntos (unión e intersección). En particular, se demuestra que la derivada de Cantor-Bendixson es creciente con respecto a la contenencia de conjuntos y, bajo hipótesis adecuadas, genera una familia decreciente de conjuntos. Por otro lado, se estudia tanto el derivado de una unión, como de una intersección, bajo diferentes restricciones en la cardinalidad de la familia de conjuntos a operar y tomando en cuenta el orden de derivado a realizar.*

**Palabras clave**. Derivada de Cantor-Bendixson; derivado de un conjunto.

**1. Introducción.** En 1870, Georg Cantor, durante su investigación sobre la descomposición única de funciones en series de Fourier, introdujo el concepto del derivado de un conjunto. Esta idea surgió a raíz de un problema planteado por Heine acerca de la unicidad de la representación de una función por series trigonométricas y tenía como objetivo determinar las condiciones necesarias para obtener este resultado en los puntos de discontinuidad de las funciones. Cantor presentó una solución del problema en una serie de artículos publicados entre 1872 y 1883 (ver [1, 2, 3, 4, 5]). Con el tiempo, la definición del derivado de un conjunto se amplió de la mano del concepto de números ordinales, dando lugar a la derivada de Cantor-Bendixson (ver [3]). Dada la importancia de esta operación de conjuntos, es necesario comprender su relación con las operaciones habituales, como la unión y la intersección. Estas relaciones se conocen como el álgebra de la derivada de Cantor-Bendixson.

En algunos libros como [6, 7, 8, 9] y varios artículos como [10, 11, 12, 13] se hace referencia y uso del álgebra de la derivada de Cantor-Bendixson, sin realizar un estudio detallado de sus propiedades. En este trabajo, se presenta un análisis del comportamiento de esta derivada respecto a la contenencia de conjuntos y a las operaciones usuales de conjuntos.

*Escuela de Ciencias Físicas y Matemática, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, Ecuador. **Correspondence author** (aemerinot@puce.edu.ec).
†Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH, Morelia, Michoacán, México (csebastianherediaf@gmail.com).

Se inicia el estudio con la relación de la derivada de Cantor-Bendixson con la contenencia de conjuntos (sección 2), donde, en esencia, se demuestra la monotonía de esta derivada; además, se muestra que, bajo hipótesis adecuadas, esta derivada genera una familia decreciente de conjuntos al ser aplicada reiteradamente sobre un conjunto dado. Posteriormente, se analiza la relación de la derivada de Cantor-Bendixson con el álgebra de conjuntos (sección 3), específicamente, se presenta el desarrollo para las expresiones

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)} \quad \text{y} \quad \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)},$$

donde $\mathcal{A}$ es una familia arbitraria de conjuntos y $\alpha$ es un número ordinal. Para el caso de la intersección, se obtiene un resultado general (sección 3.1); sin embargo, para el caso de la unión, es necesario hacer consideraciones tanto sobre la finitud de $\mathcal{A}$ como de $\alpha$.

Como es usual en la Teoría de Conjuntos, al conjunto de los números naturales se lo representará por $\omega$, ademas, se denotará por **OR** a la clase de todos los números ordinales. Por otro lado, dado un conjunto $A$, en un espacio topológico, el derivado de $A$, notado por $A'$, es el conjunto de todos los puntos límites (o puntos de acumulación) del conjunto $A$; donde un punto límite (o punto de acumulación) de $A$ es un punto $x$ del espacio topológico para el cual, toda vecindad $V$ de $x$ cumple que $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$. Con esto, usando Recursión-Transfinita, tal y como lo formuló Cantor en [3], la definición de derivada de Cantor-Bendixson es:

**Definición 1.1.** *(Derivada de Cantor-Bendixson). Sea $A$ un subconjunto de un espacio topológico. Para un ordinal $\alpha$, definimos el $\alpha$-ésimo derivado de $A$, notado por $A^{(\alpha)}$, como:*

- $A^{(0)} = A$,
- $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})'$*, para todo ordinal* $\alpha$*,*
- $A^{(\alpha)} = \bigcap_{\gamma<\alpha} A^{(\gamma)}$*, para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

**2. Relación de la derivada de Cantor-Bendixson con la contenencia de conjuntos.** Dado un espacio topológico $E$, se tiene que el conjunto $\mathcal{P}(E)$ posee un orden parcial dada por la contenencia. Por otro lado, la derivada de Cantor-Bendixson puede verse como una aplicación de $\mathcal{P}(E)$ en sí mismo. Bajo estas consideraciones, se tiene que esta aplicación es creciente. Este resultado se puede encontrar en [9, p. 25]. A continuación se realiza una demostración a detalle de este hecho.

**Proposición 2.1.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $A$ y $B$ subconjuntos de $E$ tales que $A \subseteq B$. Se tiene que $A' \subseteq B'$.*

*Demostración:* Sea $x \in A'$, por tanto, para toda vecindad $V$ de $x$, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Sea $V$ una vecindad de $x$, como $A \subseteq B$, se tiene que

$$\varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subset (V \setminus \{x\}) \cap B.$$

Por tanto, $x \in B'$, teniendo lo deseado. □

Ahora, se puede generalizar el resultado anterior para la derivada de Cantor-Bendixson de cualquier orden, teniendo la siguiente proposición.

**Corolario 2.1.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $A$ y $B$ subconjuntos de $E$ tales que $A \subseteq B$. Se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, para todo ordinal $\alpha$.*

*Demostración:* Se va a proceder por Inducción Transfinita.

- Se tiene que $A^{(0)} = A \subseteq B = B^{(0)}$, por la hipótesis.
- Ahora, supóngase que para un ordinal $\alpha$, se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, por la Proposición 2.1, se tiene que $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})' \subseteq (B^{(\alpha)})' = B^{(\alpha+1)}$.
- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$, un ordinal límite y supóngase que $A^{(\beta)} \subseteq B^{(\beta)}$ para todo $\beta < \lambda$. Con esto, se sigue que

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} A^{(\beta)} \subseteq \bigcap_{\beta<\lambda} B^{(\beta)} = B^{(\lambda)}.$$

Por lo tanto, se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, para todo ordinal $\alpha$. □

Finalmente, dado un conjunto $A$, de un espacio topológico $E$, se tiene que la aplicación de **OR** en $\mathcal{P}(E)$ que asigna $\alpha \mapsto A^{(\alpha)}$, es una aplicación entre conjuntos parcialmente ordenados. Con esto, si $A$ es un conjunto cerrado, se obtiene que esta aplicación es decreciente. Dicho en otras palabras, se tiene que la familia $(A^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathbf{OR}}$ es una familia decreciente de conjuntos.

**Proposición 2.2.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq E$ cerrado. Se tiene que $(A^{(\alpha)})_{\alpha \in \boldsymbol{OR}}$ es una familia decreciente de subconjuntos cerrados de E, es decir, $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo $\alpha$ y $\beta$ ordinales tales que $\alpha \geq \beta$.*

*Demostración:* Se tiene que, del hecho que $A$ es cerrado, se puede concluir que $(A^{(\alpha)})_{\alpha \in \mathbf{OR}}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $E$ (ver [6, pág. 47] o [14]).

Por otro lado, sea un ordinal $\beta$, procediendo por Inducción Transfinita, se va a demostrar que $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo $\alpha \geq \beta$.

- Se tiene que $A^{(\beta)} \subseteq A^{(\beta)}$.
- Ahora, supóngase que $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$, con $\alpha \geq \beta$, por la Proposición 2.1, se tiene que $(A^{(\alpha)})' \subseteq (A^{(\beta)})'$. Además, como $A^{(\beta)}$ es un conjunto cerrado, se tiene que, $(A^{(\beta)})' \subseteq A^{(\beta)}$, de donde, $A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)} \subseteq (A^{(\beta)})' \subseteq A^{(\beta)}$.
- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite tal que $\lambda > \beta$ y supóngase que $A^{(\delta)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo $\delta < \lambda$, por lo tanto,

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\delta < \lambda} A^{(\delta)} \subseteq A^{(\beta)}.$$

De aquí, $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo $\alpha$ y $\beta$ ordinales tales que $\alpha \geq \beta$. □

Con esto, se tiene, dado un conjunto cerrado $A$ de un espacio topológico $E$,

$$\cdots \subseteq A^{(\alpha+1)} \subseteq A^{(\alpha)} \subset \cdots \subseteq A^{(2)} \subseteq A' \subseteq A.$$

**Observación 2.1.** *Nótese que en la proposición anterior, la hipótesis que el conjunto $A$ sea cerrado es necesario. En efecto, tómese el espacio topológico $\mathbb{R}$ con su topología usual, se tiene que si*

$$A = \left]0, 1\right[,$$

*entonces*

$$A' = [0, 1],$$

*por ende,*

$$A' \nsubseteq A.$$

*Más aún, el mismo ejemplo permite ver que*

$$A^{(\omega+1)} \nsubseteq A^{(\omega)}.$$

*En efecto, se tiene que*

$$\begin{aligned} A^{(\omega)} &= \bigcap_{n \in \omega} A^{(n)} \\ &= A^{(0)} \cap \bigcap_{n \in \omega \smallsetminus \{0\}} A^{(n)} \\ &= \left]0, 1\right[ \cap \bigcap_{n \in \omega \smallsetminus \{0\}} [0, 1] \\ &= \left]0, 1\right[ \cap [0, 1] = \left]0, 1\right[, \end{aligned}$$

*por otro lado,*

$$A^{(\omega+1)} = \left(A^{(\omega)}\right)' = (\left]0, 1\right[)' = [0, 1].$$

**3. Álgebra de la derivada de Cantor-Bendixson.** El álgebra de la derivada de Cantor-Bendixson es utilizada en las demostraciones de varios resultados relevantes en el área de la Teoría descriptiva de conjuntos, como se puede apreciar en [14], sin embargo, en estos tratados se analizan solo casos concretos, necesarios para los objetivos planteados. En esta sección, se presenta un estudio a detalle de todos los casos posibles para la relación de la derivada de Cantor-Bendixson con uniones e intersecciones generalizadas de conjuntos.

**3.1. Derivada de Cantor-Bendixson y la intersección de conjuntos.** Para el estudio de

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)},$$

se presenta primero el caso en que $|\mathcal{A}| = 2$ y $\alpha = 1$, luego de lo cual, se extenderá el resultado para el caso en que $\mathcal{A}$ es cualquier familia de conjuntos y $\alpha = 1$. Finalmente, se generalizará el resultado para cualquier número ordinal.

Se inicia con la demostración del siguiente resultado, cuyo enunciado puede ser encontrado en [6, p. 25].

**Proposición 3.1.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $A$ y $B$ subconjuntos de $E$. Se tiene que:*

$$(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'.$$

*Demostración:* Nótese que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, de la Proposición 2.1, se tiene que $(A \cap B)' \subseteq A'$ y $(A \cap B)' \subseteq B'$, por lo tanto, se concluye que $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$. □

**Observación 3.1.** *Nótese que, en general, no se alcanza la igualdad. En efecto, tomando el espacio topológico $\mathbb{R}$ con su topología usual, se tiene que si*

$$A = \,]0, 1[ \qquad y \qquad B = \,]1, 2[\,,$$

*entonces*

$$A' = [0, 1] \qquad y \qquad B' = [1, 2]\,,$$

*por ende,*

$$(A \cap B)' = \varnothing \qquad y \qquad A' \cap B' = \{1\},$$

*concluyendo, así, que no se cumple la otra inclusión.*

Ahora, se procede a extender el resultado anterior a una intersección arbitraria de conjuntos. El resultado en cuestión se encuentra enunciado en [7, p. 76]. A continuación, se presentará una demostración del mismo.

**Proposición 3.2.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $E$. Se tiene que:*

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)' \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A'.$$

*Demostración:* Sea $x \in \left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)'$, se va a demostrar que, para todo $A \in \mathcal{A}$ y toda $V$ vecindad de $x$, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Sean $A \in \mathcal{A}$ y $V$ una vecindad de $x$, de la hipótesis, se sigue que

$$\varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap \left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap A.$$

Dado que $A \in \mathcal{A}$ y $V$ fueron arbitrarios, se concluye que $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A'$ y, por ende,

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)' \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A'.$$

□

Con esto, se presenta la generalización del resultado anterior.

**Proposición 3.3.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $E$. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que*

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}.$$

*Demostración:* Para demostrar lo deseado se usará Inducción Transfinita.

- Para $\alpha = 0$, el resultado es inmediato.
- Ahora, supóngase que se cumple para $\alpha \in$ **OR**, se va a demostrar que

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha+1)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha+1)}.$$

Utilizando la definición de derivada de Cantor-Bendixon, la hipótesis de inducción y la proposición anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha+1)} &= \left(\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)}\right)' \\ &\subset \left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}\right)' \\ &\subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \left(A^{(\alpha)}\right)' = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supóngase que

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)},$$

para todo $\gamma < \lambda$, se va a demostrar que

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)}.$$

Utilizando la definición de derivada de Cantor-Bendixon y la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)} \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)}\right) \\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{A}}\left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que, para todo $\alpha \in$ **OR**

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}.$$

□

**3.2. Derivada de Cantor-Bendixson y la unión de conjuntos.** Para el estudio de

$$\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)},$$

al igual que en a sección anterior, se presenta primero el caso en que $|\mathcal{A}| = 2$ y $\alpha = 1$. A partir de aquí, se presenta la generalización para $\alpha \in \omega$ y luego se presenta el resultado concerniente a $\alpha$ un ordinal transfinito; en este punto, existe una diferencia cuando los conjuntos iniciales son cerrados o no. Posteriormente, se realiza un análisis similar para cuando $\mathcal{A}$ es una familia finita. Finalmente, se concluye con el caso de que $\mathcal{A}$ sea una familia arbitraria.

El siguiente resultado puede se hallado en [9, p. 25]. Se procede a ofrecer una demostración a detalle de mismo.

**Proposición 3.4.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $A$ y $B$ subconjuntos de $E$. Se tiene que:*

$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

*Demostración:* Sean $x \in (A \cup B)'$ y $V$ una vecindad de $x$, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{o} \qquad (V \setminus \{x\}) \cap B \neq \varnothing,$$

es decir, $x \in A'$ o $x \in B'$, que equivalen a $x \in A' \cup B'$. De donde, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Por otro lado, como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, utilizando la Proposición 2.1, se sigue que $A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)'$, por lo tanto, se concluye que $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. □

Usando la proposición anterior, se va a generalizar el resultado para todo derivado finito.

**Proposición 3.5.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $A$ y $B$ subconjuntos de $E$. Para todo $n \in \omega$, se tiene que:*

$$(A \cup B)^{(n)} = A^{(n)} \cup B^{(n)}.$$

*Demostración:*

Se usará Inducción Finita.

- Para $n = 0$, el resultado es inmediato.
- Ahora, supóngase que se cumple para $n \in \omega$, se va a demostrar que

$$(A \cup B)^{(n+1)} = A^{(n+1)} \cup B^{(n+1)}.$$

Usando la hipótesis de inducción y la Proposición 3.4, se sigue que

$$\begin{aligned}(A \cup B)^{(n+1)} &= \left((A \cup B)^{(n)}\right)' \\ &= \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)' \\ &= \left(A^{(n)}\right)' \cup \left(B^{(n)}\right)' \\ &= A^{(n+1)} \cup B^{(n+1)}.\end{aligned}$$

Con esto, se demuestra que $(A \cup B)^{(n)} = A^{(n)} \cup B^{(n)}$, para todo $n \in \omega$. □

Ahora, al pasar al caso transfinito, en general, no se mantiene la igualdad. En este caso, solo se tiene una contenencia y, más adelante, se verá que la igualdad se alcanza bajo la hipótesis de que los dos subconjuntos sean cerrados.

**Proposición 3.6.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $A$ y $B$ subconjuntos de $E$. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que:*

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}.$$

*Demostración:* Se va a proceder por Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración de la Proposición 3.5, se tiene que se cumple la base de la inducción y el paso inductivo.
- Por último, para el paso transfinito, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supóngase que

$$A^{(\gamma)} \cup B^{(\gamma)} \subseteq (A \cup B)^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, se va a demostrar que

$$A^{(\lambda)} \cup B^{(\lambda)} \subseteq (A \cup B)^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned}A^{(\lambda)} \cup B^{(\lambda)} &= \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}\right) \cup \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} B^{(\gamma)}\right) \\ &\subset \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(A^{(\gamma)} \cup B^{(\gamma)}\right) \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} (A \cup B)^{(\gamma)} = (A \cup B)^{(\lambda)}.\end{aligned}$$

Con esto, se demostró que $A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}$, para todo ordinal $\alpha$. □

**Observación 3.2.** *Nótese que, en la Proposición 3.6, la igualdad no necesariamente se cumple. En efecto, del Teorema* $2{,}1$ *dado por [14], existe* $K \subseteq ]-1, 0]$ *compacto y numerable tal que* $K^{(\omega)} = \{0\}$*. Así, tómese* $A = K \setminus \{0\}$ *y* $B = \{0\}$*; se tiene que* $B^{(\omega)} = \varnothing$*, por otro lado*

$$A^{(\omega)} = (K \setminus \{0\})^{(\omega)} \subseteq K^{(\omega)} = \{0\},$$

*pero* $0 \notin A$*, por ende,* $A^{(\omega)} = \varnothing$*. De esta forma,* $A^{(\omega)} \cup B^{(\omega)} = \varnothing$ *y* $(A \cup B)^{(\omega)} = K^{(\omega)}$*, teniendo que no se da la igualdad.*

La igualdad se alcanza cuando los subconjuntos son conjuntos cerrados, como se verá a continuación.

**Proposición 3.7.** *Sean* $(E, \tau)$ *un espacio topológico* $A$ *y* $B$ *subconjuntos cerrados de* $E$*. Para todo* $\alpha \in$ ***OR****, se tiene que*

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} = (A \cup B)^{(\alpha)}.$$

*Demostración:* De la Proposición 3.6, se sigue que para todo $\alpha \in$ **OR**

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}.$$

Ahora, para la otra contenencia, procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración de la Proposición 3.5, se tiene que se cumple la base de la inducción y el paso inductivo.

Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

$$(A \cup B)^{(\gamma)} \subseteq A^{(\gamma)} \cup B^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, se va a demostrar que

$$(A \cup B)^{(\lambda)} \subseteq A^{(\lambda)} \cup B^{(\lambda)}.$$

Sea $z \in (A \cup B)^{(\lambda)}$, por reducción al absurdo, supóngase que $z \notin A^{(\lambda)}$ y $z \notin B^{(\lambda)}$, por ende, existen $\gamma_1, \gamma_2 \in$ **OR** tales que $\gamma_1 < \lambda$, $\gamma_2 < \lambda$, $z \notin A^{(\gamma_1)}$ y $z \notin B^{(\gamma_2)}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\gamma_2 \leq \gamma_1$, por lo tanto, de la Proposición 2.2, como $B$ es cerrado, se tiene que $B^{(\gamma_1)} \subseteq B^{(\gamma_2)}$; con esto, $z \notin A^{(\gamma_1)} \cap B^{(\gamma_1)}$, lo que contradice el hecho que $z \in (A \cup B)^{(\lambda)}$ (en el caso que $\gamma_1 < \gamma_2$, razona de manera equivalente usando la hipótesis de que $A$ es cerrado). Con esto, se ha demostrado que, para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} = (A \cup B)^{(\alpha)}.$$

□

Ahora, ya que se repasó el comportamiento de la derivada de Cantor-Bendixson para dos subconjuntos, se seguirá el mismo camino para una cantidad finita de subconjuntos.

**Proposición 3.8.** *Sean* $(E, \tau)$ *un espacio topológico y* $\{A_k\}_{k=0}^{n}$*, con* $n \in \omega$*, una familia finita de subconjuntos de* $E$*. Se tiene que:*

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=0}^{n} A_k',$$

*Demostración:* Se usará Inducción Finita.

- Si $n = 0$, el resultado se tiene de inmediato.
- Ahora, supóngase que se cumple para $n \in \omega$, se va a demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)' = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k'.$$

De la hipótesis de inducción y usando la Proposición 3.5, se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)' &= \left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right)' \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)' \cup A_{n+1}' \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k'\right) \cup A_{n+1}' = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k'.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=0}^{n} A_k'.$$

□

Nuevamente, usando Inducción Finita, se va a generalizar el resultado anterior, para el caso de ordinales finitos.

**Corolario 3.1.** *Sean $(E,\tau)$ un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^n$, con $n \in \omega$, una familia finita de subconjuntos de $E$. Para todo $m \in \omega$, se tiene que:*

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m)}.$$

*Demostración:* Usaremos Inducción Finita sobre $m$.

- Si $m = 0$, se tiene lo deseado.
- Ahora, supóngase que se cumple para $m \in \omega$, se va a demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m+1)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m+1)}.$$

De la hipótesis de inducción y usando la Proposición 3.8, se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m+1)} &= \left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)}\right)' \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m)}\right)' \\ &= \bigcup_{k=0}^{n} \left(A_k^{(m)}\right)' = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que, para todo $m \in \omega$

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m)}.$$

□

Como en el caso precedente, al realizar el análisis con ordinales transfinitos, la igualdad se pierde y se tiene solo una contenencia.

**Corolario 3.2.** *Sean $(E,\tau)$ un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^n$, con $n \in \omega$, una familia finita de subconjuntos de $E$. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que:*

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)}.$$

*Demostración:* Sea $n \in \omega$, se procederá por Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del Corolario 3.1, se tiene que se cumple la base de la inducción y el paso inductivo.
- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supóngase que

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)} \subset \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, se va a demostrar que

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\lambda)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)} &= \bigcup_{k=0}^{n}\left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A_k^{(\gamma)}\right)\\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)}\right)\\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\gamma)} = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)}.\end{aligned}$$

Con esto, se demostró que $\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)}$, para todo ordinal $\alpha$. □

De igual forma, la igualdad se cumple cuando se tiene una cantidad finita de conjuntos cerrados.

**Proposición 3.9.** *Sean $(E,\tau)$ un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^{n}$, con $n \in \omega$, una familia finita de subconjuntos cerrados de $E$. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que:*

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)} = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)}.$$

*Demostración:* Sea $\alpha \in$ **OR**, nuevamente, se procederá por inducción finita sobre $n$.

- Si $n = 0$, el resultado se tiene de inmediato.
- Ahora, supóngase que se cumple para $n \in \omega$, se va a demostrar que

$$\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k^{(\alpha)} = \left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)^{(\alpha)}.$$

Nótese que $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ es cerrado, al ser la unión finita de cerrados. Con esto, de la hipótesis inductiva y de la Proposición 3.7, se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)^{(\alpha)} &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cup A_{n+1}\right)^{(\alpha)}\\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)} \cup A_{n+1}^{(\alpha)}\\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}\right) \cup A_{n+1}^{(\alpha)} = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

□

Ahora, siguiendo la línea descrita al inicio de la sección, se va a demostrar algunas proposiciones relacionadas al comportamiento del derivado de un conjunto usando uniones arbitrarias. El enunciado de esto se puede localizar en [7, p.77], a continuación se ofrece una demostración detallada del mismo.

**Proposición 3.10.** *Sean $(E,\tau)$ un espacio topológico, $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $E$. Se tiene que*

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A' \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)'.$$

*Demostración:* Sea $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A'$; con esto, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A'$, se va a demostrar que para toda $V$ vecindad de $x$, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) \neq \varnothing.$$

Sea $V$ una vecindad de $x$, como $x \in A'$, se sigue que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing,$$

de ahí que

$$\varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap \left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right),$$

dado que $V$ fue arbitrario, se tiene que $x \in \left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)'$ y, por ende,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' \subseteq \left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)'.$$

□

**Observación 3.3.** *Nótese que para la unión, la otra contenencia no necesariamente se cumple, incluso si partimos de una familia arbitraria de conjuntos cerrados, pues, tómese*

$$\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\},$$

*se tiene que*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}' = \varnothing,$$

*por otro lado,*

$$\left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)' = \left( \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \right)' = \mathbb{R}' = \mathbb{R}.$$

*De igual forma, en general, en el caso numerable tampoco se da la otra inclusión. En efecto, tomando $A_n = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ para todo $n \in \omega$, se tiene que*

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n' = \bigcup_{n \in \omega} \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}' = \varnothing.$$

*Por otro lado,*

$$\left( \bigcup_{n \in \omega} A_n \right)' = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \omega \right\}' = \{0\},$$

*teniendo que no se da la igualdad.*

Se va a extender el resultado anterior para todo derivado finito, es decir, se va a demostrar que para todo $m \in \omega$ se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.3.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $E$. Para todo $m \in \omega$, se tiene que*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(m)} \subseteq \left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(m)}.$$

*Demostración:* Se usará Inducción Finita.

- Si $m = 0$, se tiene lo deseado.
- Ahora, supóngase que se cumple para $m \in \omega$, se va a demostrar que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(m+1)} \subseteq \left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(m+1)}.$$

De la hipótesis de inducción, junto con la Proposición 3.10, se tiene que

$$\begin{aligned}\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m+1)} &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (A^{(m)})' \\ &\subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m)}\right)' \\ &\subseteq \left(\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m)}\right)' = \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que, para todo $m \in \omega$

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m)}.$$

□

Con todo lo antes hecho, surge una pregunta natural: ¿Se puede generalizar los resultados anteriores para la derivada de Cantor-Bendixson? La respuesta es sí, se va a extender los resultados a la derivada de Cantor-Bendixson, para ello, se usará Inducción Transfinita.

**Proposición 3.11.** *Sean $(E, \tau)$ un espacio topológico, $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $E$. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que*

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)}.$$

*Demostración:* Se usará Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del Corolario 3.3, se tiene que se cumple la base de la inducción y el paso inductivo.
- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supóngase que

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)},$$

para todo $\gamma < \lambda$, se va a demostrar que

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis de inducción, se sigue que

$$\begin{aligned}\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)} &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}\right) \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)}\right) \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)} = \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)}.\end{aligned}$$

□

## 4. Conclusiones.

- La relación de la derivada de Cantor-Bendixson con la contenencia de conjuntos depende de si el conjunto es cerrado o no, en caso de no serlo, se tiene problemas con el primer derivado y con los derivados de orden un ordinal límite como $\omega$.
- En general, se tiene que el derivado de la intersección está contenido en la intersección de los derivados, sin importar el orden de derivación ni la cantidad de conjuntos a intersecar. Se mostró ejemplos de que la igualdad no se cumple.

- En general, se tiene que la unión de los derivados está contenida en el derivado de la unión. Sin embargo, en este caso, existe un mejor comportamiento bajo ciertas hipótesis.
- Sin tener en cuenta la topología de los conjuntos, se tiene que la igualdad entre el derivado de la unión y la unión de los derivados se alcanza en los casos que se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Relación entre $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}$ y $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)}$.

| | $\alpha = 1$ | $\alpha \in \omega$ | $\alpha \geq \omega$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert\mathcal{A}\rvert = 2$ | $=$ | $=$ | $\neq$ |
| $\mathcal{A}$ finito | $=$ | $=$ | $\neq$ |
| $\mathcal{A}$ infinito | $\neq$ | $\neq$ | $\neq$ |

- Si se considera que los conjuntos a unir son cerrados, se tiene que la igualdad entre el derivado de la unión y la unión de los derivados se alcanza en los casos que se muestra en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Relación entre $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}$ y $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)}$, cuando la familia $\mathcal{A}$ está compuesta por cerrados.

| | $\alpha = 1$ | $\alpha \in \omega$ | $\alpha \geq \omega$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert\mathcal{A}\rvert = 2$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| $\mathcal{A}$ finito | $=$ | $=$ | $=$ |
| $\mathcal{A}$ infinito | $\neq$ | $\neq$ | $\neq$ |

**Contribuciones del autor.** Todos los autores participaron, en partes iguales, en la concepción del manuscrito y en su elaboración, diseño y escritura.

**Conflictos de intereses.** Los autores declaran no tener conflicto de intereses con respecto al contenido de este artículo.

## ORCID and License

Andrés Merino https://orcid.org/0000-0002-5404-918X
Sebastián Heredia F. https://orcid.org/0000-0003-0604-1244



# Referencias

[1] Cantor G. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathematische Annalen. 1872;5:123-32.
[2] Cantor G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten I. Mathematische Annalen. 1879;15:1-7.
[3] Cantor G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten II. Mathematische Annalen. 1880;17:355-8.
[4] Cantor G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten III. Mathematische Annalen. 1882;20:113-21.
[5] Cantor G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten IV. Mathematische Annalen. 1883;21:51-8.
[6] Engelking R. General Topology. Warszawa: PWN; 1977.
[7] Kuratowski K. Topology: Volume I. New York: Academic Press; 1966.
[8] Sierpiński W. Introduction to General Topology. Canadá: University of Toronto Press; 1934.
[9] Pervin W. Foundations of General Topology. New York: Academic Press; 1964.
[10] Moore G. The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. Historia Mathematica. 2008;35(3):220-41.
[11] Álvarez Samaniego B, Merino A. Some properties related to the Cantor-Bendixson derivative on a polish space. New Zealand Journal of Mathematics. 2020;50(2):207-18.

[12] Chaber J, Pol R. On the Cantor-Bendixson derivative, resolvable ranks, and perfect set theorems of A. H. Stone. Israel Journal of Mathematics. 1999;110:103–123.

[13] Higgs D. Iterating the Derived Set Function. The American Mathematical Monthly. 1983;90(10):693-7.

[14] Álvarez-Samaniego B, Merino A. A primitive associated to the Cantor-Bendixson derivative on the real line. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2016;41:1-33.