Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2023; Vol. 10(1): 173-198.

REVIEW

The integral: a vision of its evolution through time I

La integral: una visión de su evolución a través del tiempo I

Alejandro Ortiz Fernández

A la memoria del Profesor José Ampuero, por su amistad que me brindó y por sus enseñanzas de la matemática.

Received, Feb. 02, 2023; *Accepted, May. 20, 2023;* *Published, Jul. 27, 2023*

How to cite this article:
Ortíz F. *La integral, una visión de su evolución a través del tiempo I*. Selecciones Matemáticas. 2023;10(1):173–198.
http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2023.01.16

Abstract

This article is the first part of one that has three parts. In the first one we present a vision of the evolution of the idea of integral, from ancient Greece to the Lebesgue integral. In the second part we will present how the Riemann integral has been investigated towards a unified theory of the integral.

Keywords . Integral of Cauchy, integral of Riemann, integral of Stieltjes, integral of Dirichlet, measure of Borel, measure of Lebesgue.

Resumen

El presente artículo es la primera parte de uno que tiene tres partes. En la primera presentamos una visión de la evolución de la idea de integral, desde la antigua Grecia hasta la integral de Lebesgue. En la segunda presentaremos como la integral de Riemann ha sido investigada hacia una teoría unificada de la integral.

Palabras clave. Integral de Cauchy, integral de Riemann, integral de Stieljes, integral de Dirichlet, medida de Borel, medida de Lebesgue.

1. Introducción y Antecedentes. "Medir", una palabra familiar a todos nosotros, desde tiempos antiquísimos hasta la actualidad; es común saber cuánto mide un objeto, la distancia de una ciudad a otra. Poco a poco se medían cosas más complicadas en su forma; así culturas antiguas como la babilónica (más o menos 1900 años a.C.) y la egipcia (alrededor del 3100 a.C.) ya sabían calcular áreas de figuras geométricas elementales, como el cuadrado, el rectángulo y otras figuras. Así surgió la geometría en esos tiempo muchísimos años antes de Cristo. En los papiros de Moscú, 1850 a.C., y del Rhind, 1650 a.C.; de Egipto, se han encontrado diversos problemas de aritmética y de geometría en donde vemos que sabían como medir o encontrar áreas y volúmenes de figuras geométricas como triángulos isósceles, cilindros, prismas; conocían que la razón entre el área del círculo y su circunferencia es igual al área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro. Para calcular el volumen de una pirámide truncada con base cuadrada de lado a, de cuadrado superior de lado b y altura h, usaban la fórmula $v = \frac{h(a^2+ab+b^2)}{3}$; observemos que si $b = 0$ se obtiene el volumen de la pirámide.

Así mismo, en la antigua cultura babilónica encontramos, vía la tablilla Plimpton 322, que ellos conocían un conjunto de reglas geométricas prácticas, como calcular el área de un rectángulo, del triangulo isósceles, del área de un trapezoide así como calcular el volumen de un prisma recto con base trapezoidal.

*Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. (jortiz@pucp.edu.pe).

Sabían que la longitud de una circunferencia es tres veces la longitud del diámetro; el valor de π es aproximadamente igual a $3\,1/8$. Conocieron, en forma práctica, el teorema de Pitágoras. Como observamos, en estas dos culturas, la Egipcia y la babilónica, la matemática llegó a un buen estado de evolución pues además ellos conocieron reglas algebraicas que aún hoy se enseñan; además conocían una aritmética práctica. Como sabemos, luego de un largo tiempo de existencia, estas culturas llegaron a su fin y surgiría luego una gran cultura, la Griega.

En efecto, en Grecia se produjo el milagro del surgimiento de profundos pensadores que contribuyeron a la creación de un ambiente de pensamiento, reflexión y creación de teorías que perduraron en el tiempo. Y la cuestión de medir cosas estuvo dentro de esas inquietudes. Tales de Mileto (¿640-550?) fue el primer geómetra griego quien hizo notables aportes a la matemática; joven aún estuvo en Egipto donde se nutrió de los conocimientos de los sacerdotes. Haciendo uso de un ingenioso argumento geométrico, Tales calcula la altura de la mayor de las Pirámides; es famoso por dar la prueba de muchos resultados prácticos de las anteriores culturas´como: todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto; la medida de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados. Tales fue uno de los primeros filósofos que razonó con una mentalidad matemática, explicaba las cosas vía una razón lógica. Luego tenemos a Pitágoras, llamado el "filósofo del número", quien impulsaría la filosofía matemática a altos niveles pues la Escuela Pitagórica prueba el famoso teorema, llamado de Pitágoras y que conduciría a una gravísima crisis en sus fundamentos y que perduraría hasta el siglo XIX: llegaron al infinito. Por otro lado, Hipócrates de Quíos contribuyó al problema de medir figuras cada ves más complejas. En esa época hubo el famoso problema de "la cuadratura del círculo"que consistía en construir un cuadrado que tenga igual área a la de un círculo dado. Tal construcción solo debía realizarse con regla y compás. Hipócrates estudió este problema, intentó resolverlo pero no tuvo éxito; sí lo tuvo cuando resolvió la "cuadratura de las Lúnulas o Lunas":

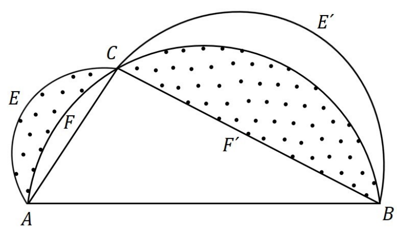


Figura 1.1: Cuadratura de Lúnulas.

"La suma de las áreas de las lúnulas $AECF$ y $BE'CF'$ es equivalente al área del triángulo rectángulo ACB".

Este resultado nos dice que la parte sombreada es cuadrable ya que todo triángulo lo es, es decir se tiene la cuadratura del triángulo. Remarcamos que cuadratura del círculo forma parte de los tres famosos problemas de la antigüedad; los otros dos son: "la duplicación del cubo", que consiste en construir la arista de un cubo que tenga el doble de volumen de otro cubo dado, y "la trisección de ángulo arbitrario", que consiste en dividir un ángulo dado cualquiera en tres partes iguales (observamos que existen ángulos que pueden ser trisectados). Enfatizamos que se pide la solución de estos problemas usando solo regla y compás. Se probó que en tales condiciones estos tres problemas son insolubles.

El siguiente matemático griego en contribuir en el progreso de la matemática fue Euclides quien perteneció a la Escuela de Alejandría y escribió su famosa obra "Los Elementos" que fue un conjunto de 13 libros sobre geometría y aritmética; en esta obra se reúne escritos e investigaciones hechos por sus predecesores y contemporáneos; por la metodología usada en su redacción es una obra histórica muy original y la enseñanza de sus contenido ha perdurado a través del tiempo, hasta nuestros días. En esta obra Euclides ataca el problema de medir o hallar el área y volumen de figuras geométricas clásicas. Es oportuno remarcar sobre el método del agotamiento o exhaustivo en su relación con los primeros problemas que ocurrieron en la historia del cálculo cuando se tuvo que calcular áreas, volúmenes y longitud de arcos. Este método es atribuido a Eudoxio y es una generalización de la teoría de las proporciones. El ejemplo histórico dado por Eudoxio aparece en el libro XII de Los Elementos y consiste en aproximar el área del círculo vía la de polígonos regulares inscritos y circunscritos. Se verifica que: "la diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede hacerse tan pequeño como se desee". Este método fue muy eficaz para obtener algunas cuadraturas, como lo obtuvo Arquímedes para calcular el área de un segmento parabólico, aun cuando ya Euclides usa el método de aproximación para obtener algunas áreas. De esta manera, en la antigua Grecia estuvieron los pioneros del cálculo integral sobre todo la contribución del gran matemático

Arquímedes, quien prueba la proposición:

Lema 1.1. *El área de cualquier círculo es igual al área del triángulo rectángulo en el cual uno de los lados que forma el ángulo recto es igual al radio y el otro es la circunferencia asociada al círculo.*

Demostración: Arquímedes comienza con un círculo con centro O, radio r y circunferencia C; y con un triángulo rectángulo teniendo como base la longitud de C y altura de longitud r. Sea $A =$ área del círculo y $T =$ área del triángulo. Entonces la tesis es probar que $A = T$. Probado esto se tiene:
$A = \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}r2\pi r = \pi r^2$, como ahora sabemos.

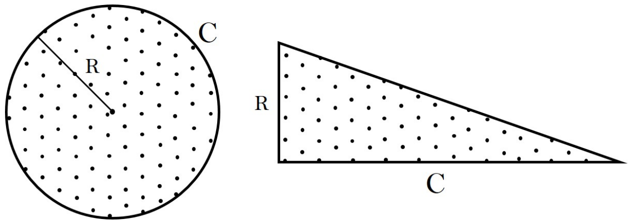


Figura 1.2: Teorema de Arquímedes.

Bien, Arquímedes ya conocía que $T = \frac{1}{2}rC$ y por reducción al absurdo supone que $A > T$. Entonces $A - T$ es una cantidad positiva; además sabía que inscribiendo un cuadrado en su círculo y repitiendo el argumento vía bisección de sus lados, él podía llegar a un polígono regular inscrito en el círculo cuya área difiere del área del círculo es una magnitud menor que el número positivo $A-T$. Esto es, Área del polígono inscrito $< A - T$. Luego, $T <$ área del polígono inscrito.

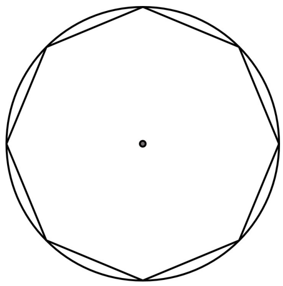


Figura 1.3: Aproximación del área del círculo.

Ahora se observa (ver figura) que el perímetro P del polígono es menor que C, y que $a < r$ (a apotema). Luego, área del polígono inscrito $= \frac{1}{2}aP < \frac{1}{2}rC = T$.

De esta manera Arquímedes llega a una contradicción pues arribó a: $T <$ área del polígono inscrito y $T >$ área del polígono inscrito. De esta manera $A > T$ no es posible.

Supongamos ahora que $A < T$.

De esta manera, Arquímedes asume que podemos considerar $T-A$ como el exceso del área del triángulo sobre la del círculo. Por otro lado, se sabe que se puede circunscribir un polígono regular tal que el área del "polígono menos círculo" sea menor que $T - A$. De esta manera, área del polígono circunscrito $-A <$

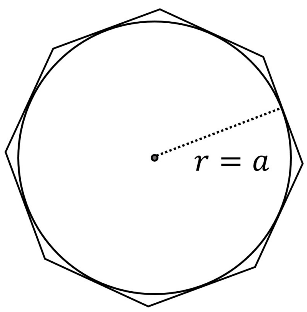


Figura 1.4: Demostración del teorema de Arquímedes.

$T - A$.

Luego, área del polígono circunscrito $< T$. Pero, $r = a$ y $P > C$; entonces, área del polígono circunscrito $= \frac{1}{2}aP > \frac{1}{2}rC = T$.

De esta manera se llega a otra contradicción. Luego $A = T$. $\square$

Veamos otro famoso problema de cuadratura, también debido a Arquímedes.

La Cuadratura de la Parábola: "Encontrar el área de un segmento parabólico oblicuo ABC, cortado por la cuerda AC, donde la tangente en B es paralela a AC".

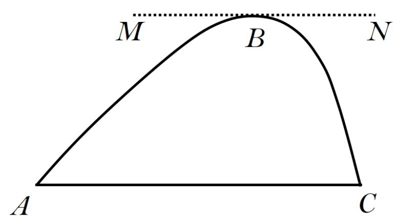


Figura 1.5: Cuadratura de la Parábola.

Solución. Por hipótesis: $MBN//AC$.

Plan: construir una sucesión de figuras "agotadoras"$(A_n)_{n=1,2,...}$.

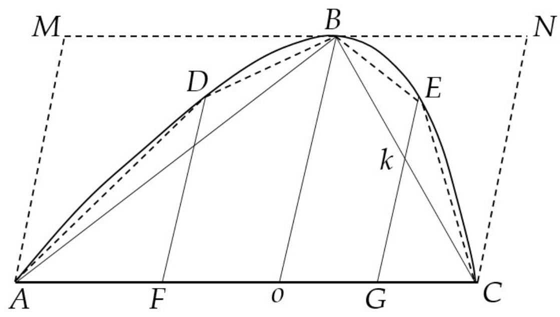


Figura 1.6: Demostración de la cuadratura de la parábola.

Por construcción, $A_1 = \triangle ABC$.

A_2 es construido vía: $A_2 = \triangle ABC + \triangle ADB + \triangle BCE$ ¿Cómo se construyen $\triangle ADB$ y $\triangle BCE$? ...

Se divide AC en 4 partes iguales y se trazan $FD//OB$ y $GE//OB$. Análogamente se construyen $A_3, A_4, \ldots, A_n$.

Lema 1.2. *Se tiene*

$$|\triangle ABC| = 4(|\triangle ADB| + |\triangle BEC|)$$

donde en general $|\triangle ABC|$ significa "área"del $\triangle ABC$.

Demostración: Tomemos OB y MN respectivamente como los ejes x e y de un sistema oblícuo de coordenadas. Las coordenadas del punto $E\left(\xi, \frac{1}{2}y\right)$ satisfacen la condición $E\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = m\xi$, de donde

$$\xi = \frac{y^2}{4m}\,,\; GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3y^2}{4m} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}OB.$$

Desde que $GK = \frac{1}{2}OB$, tenemos

$$KE = \frac{1}{4}OB \quad \text{y} \quad GK = 2KE.$$

Luego podemos comparar las áreas de tales triángulos

$$|\triangle CKG| = 2|\triangle KCE| = |\triangle BCE|,$$

$$|\triangle OBC| = 4|\triangle GKC| = 4|\triangle BCE|.$$

En forma análoga se obtiene la relación:

$$|\triangle AOB| = 4|\triangle ABD|.$$

Por lo tanto,

$$|\triangle OBC| + |\triangle AOB| = 4(|\triangle BCE| + |\triangle ABD|),$$

lo que prueba el lema. □

Por otro lado, si $|A_1| = |\triangle|$, entonces
$|A_2| = |\triangle| + \frac{1}{4}|\triangle|$,
$|A_3| = |\triangle| + \frac{1}{4}|\triangle| + \left(\frac{1}{4}\right)^2 |\triangle|$
$\ldots$,
$|A_n| = |\triangle| + \frac{1}{4}|\triangle| + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |\triangle|$.

Lema 1.3. *La sucesión $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ "agota" (realmente) el segmento parabólico, esto es, se tiene:*

$$S - |A_n| < \varepsilon,$$

donde $n = n(\varepsilon)$ y S denota el área del segmento parabólico oblícuo ABC.
Demostración: Circunscribamos el paralelogramo $AMNC$, en el cual $AM//NC//BO$. Tenemos $|A_1| = \frac{1}{2}S_{AMNC}$ donde S_{AMNC} denota el área del paralelogramo $AMNC$.

Pero $S < S_{AMNC}$, luego $|A_1| > \frac{1}{2}S$ y $S - |A_1| < \frac{1}{2}S$.

Así, el triángulo A_1 "agotó" más de la mitad del área S y las figuras siguientes agotarán más de la mitad de los correspondientes restos del área S. □

Por lo tanto se satisface el

Lema 1.4 (Lema Fundamental del Método Exhaustivo). *Si de una magnitud dada se quita una parte mayor que su mitad, luego se vuelve a substraer una y otra vez,* **entonces** *el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera*

Ahora busquemos el $limite$ de la sucesión de las figuras inscritas. Arquímedes usa el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea*

$$S = |A| + |B| + |C| + |D| + |E|$$

tal que

$$|A| : |B| = |B| : |C| = |C| : |D| = |D| : |E| = 4 : 1.$$

Entonces $S = \frac{4}{3}|A| - \frac{1}{3}|E|$.

Demostración: Por hipótesis, $|B| = \frac{1}{4}|A|$, $|C| = \frac{1}{4}|B|$, $|D| = \frac{1}{4}|C|$ y $|E| = \frac{1}{4}|D|$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}S &= \frac{4}{3}(|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) \\
&= \frac{4}{3}|A| + \frac{4}{3}(|B| + |C| + |D| + |E|) \\
&= \frac{4}{3}|A| + \frac{1}{3}(|A| + |B| + |C| + |D|) \\
&= \frac{4}{3}|A| + \frac{1}{3}(|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) - \frac{1}{3}|E|,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{4}{3}S = \frac{4}{3}|A| + \frac{1}{3}S - \frac{1}{3}|E|.$$

Así, $S = \frac{4}{3}|A| - \frac{1}{3}|E|$. □

Nota 1.1. *El teorema puede ser extendido a cualquier número de sumandos. Usando el teorema 1.1., Arquímedes llega a la igualdad:*

$$|A_n| = |\triangle| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k}|\triangle| = \frac{4}{3}|\triangle| - \frac{1}{3}\frac{|\triangle|}{4^{n-1}}.$$

Como el substraendo puede ser hecho tan pequeño como se quiera, Arquímedes afirma que $S = \frac{4}{3}|\triangle|$.

Conclusión. $S = \frac{4}{3}|\triangle ABC|$, que es la respuesta al problema planteado. □

Como podemos ver, en la antigua Grecia hubo contribuciones significativas, ingeniosas y que sirvieron para que muchos años después los matemáticos continuaran con tales investigaciones. Así, los siglos XVII y XVIII fueron tiempos de grandes conquistas en la ciencia y en la tecnología; en el XVII Napier introduce los logaritmos, se codifica el álgebra; Desargues y Pascal investigan la geometría pura; Fermat estudia la teoría de números, las probabilidades y la geometría analítica. Como sabemos, desde tiempos atrás existían problemas matemáticos como trazar una tangente a una curva, obtener la velocidad y la aceleración de un cuerpo, obtener el máximo o el mínimo de una función; como obtener la longitud de una curva, calcular las áreas de regiones limitadas por curvas, hallar volúmenes y centros de gravedad de cuerpos geométricos, ... Todas estas cuestiones, y otras, fueron investigadas por los matemáticos de este siglo, y el siguiente. Así en el período de 50 años, de 1637 a 1687, se hicieron contribuciones importantes como la "Geometría"de Descartes; Fermat (1629) y Descartes (1637) introducen la geometría analítica. Todas estas investigaciones culminaron, en una primera etapa, con la creación del cálculo infinitesimal por I. Newton (1666, 1684) y G. Leibniz (1673, 1675).

La creación del cálculo infinitesimal fue un acontecimiento que marcó fronteras en la historia de la humanidad; fue el inicio de una ciencia que habría de contribuir al surgimiento de la tecnología, la cual aportaría bienestar a las sociedades de todas las épocas. Newton fue un gran genio en la filosofía natural, su enfoque del cálculo fue para tener una herramienta matemática y así estudiar al universo creando las leyes fundamentales para el movimiento de los astros. Leibniz fue el filósofo y su enfoque fue poder tener un lenguaje universal para entender a este mundo y su exterior. Pero, ellos pudieron hacer, lo que hicieron, gracias a las investigaciones de precursores que poco a poco fueron clarificando tales problemas expuestos, así como de otros nuevos. Entre otros, mencionemos B. Cavalieri quien estudió a los infinitésimos lo que fue el germen del cálculo diferencial e integral; calculó el área de una elipse y conoció la integral $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$ J. Kepler se interesó por los infinitos infinitésimos para determinar el volumen de un sólido; nos legó sus notables leyes cósmicas. Así mismo J. Wallis, considerado el más importante matemático antes de Newton, publicó sobre la geometría analítica y sobre el cálculo; estableció $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}\right)$. Calculó el área de regiones limitadas por el eje x, una curva; así, si $y = (1 - x^2)^0$, el área es x; si $y = (1 - x^2)^1$, el área es $x - \frac{1}{3}x^3$; si $y = (1 - x^2)^2$, el área es $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$. J. Gregory nos legó la integral: $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$. El científico Ch. Huygens calcula la longitud de un arco de cisoide; calculó áreas y volúmenes, como el área de un segmento de paraboloide de revolución. Por otro lado, E. Torricelli establece que $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, n \neq 1$, entre otros notables precursores de cálculo infinitesimal.

El lector interesado en ampliar su información respecto al contenido de esta introducción y antecedentes puede consultar algún libro sobre historia de la matemática; en particular sugerimos consultar: [13], [9], [17, 18, 19, 20, 21] [22], [6].

2. La Integral: una Visión.

2.1. Fourier, su impacto en la integral. La idea de integral, tal como la conocemos en sus distintos niveles, ha pasado por diferentes etapas; ella está muy vinculada a las primeras concepciones de la noción de función y a los esfuerzos de los matemáticos de fines del siglo XVIII y del siglo XIX (principalmente) por rigorizar las ideas matemáticas. La obra de Fourier juega un rol fundamental en esta evolución. Como sabemos los coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx\,,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$$

asociados a una función f, fueron tratados en sus inicios mas con un criterio intuitivo que formal; es oportuno remarcar que las pruebas dadas por Fourier carecían de rigor analítico (muchas ideas fundamentales eran vagas en esa época, inicios del siglo XIX); sin embargo, la obra de esta gran matemático francés encerraba mensajes importantísimos.

Integramos funciones, luego la idea que tengamos de éstas implicará la noción de integral. Desde los orígenes del cálculo diferencial e integral, el teorema fundamental:

$$\text{“}F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ implica } F'(x) = f(x)\text{”}$$

jugó un papel fundamental en el desarrollo del cálculo. En tal teorema existen cuestiones delicadas por investigarse. Así fue hecho; estos esfuerzos llevaron a los matemáticos del siglo XVIII a la investigación sobre las diferentes clases de funciones. En esta dirección la obra de Euler es vital; él ya poseía una noción general de función: "una curva que es cortada en un único punto por cualquier paralela al eje y, define una función $y = f(x)$".

Sin embargo, tenía algunas imprecisiones; así, para Euler la función cuyo gráfico es es discontinua en

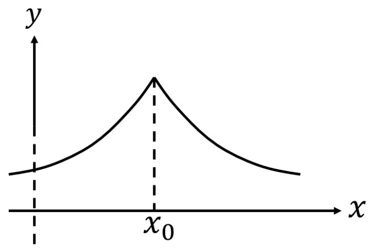


Figura 2.1: Función discontinua según Euler.

el punto x_0.

A mediados del siglo XVIII un problema de la física-matemática llamó la atención de los investigadores; era el problema de la cuerda vibrante. En 1747, d'Alembert publica un trabajo al respecto obteniendo una representación para la solución general. Euler también estudia el problema mencionado; es conocida la polémica entre ambos matemáticos para establecer el tipo de funciones que deben considerarse en el estudio de la cuerda vibrante. Esta vía nos conducirá a las series trigonométricas. Daniel Bernoulli considera el movimiento de la cuerda vibrante como una superposición de vibraciones armónicas simples en donde surgen las funciones seno y coseno. Una vibración es una función del tiempo cuyo gráfico es una onda de la forma

Figura 2.2: Una onda periódica.

Fue establecido que la función $u_n(x,t) = sen(\frac{n\pi x}{L})cos(\frac{n\pi t}{L})$ es una solución de la ecuación de la onda $u_{xx} - u_{tt} = 0$ y que al superponer estas ondas obtenemos una serie trigonométrica de la forma,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Asociado a esta cuestión está la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, donde f es una función conocida.

De este modo obtendríamos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, es decir, una "arbitraria" función $f(x)$ es representada en términos de la función seno; algo sorprendente en aquella época. Observemos que si $L = \pi$, y considerando (hoy sabemos) que $\{sen(nx), cos(mx)\}$ es una familia ortogonal respecto al producto interno $\int sen(nx)cos(mx)dx$, obtendríamos el coeficiente de Fourier $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$, ya mencionado al inicio de esta exposición.

Esos usos de la integral, y otros, fueron las motivaciones para investigar una noción más rigurosa de tal idea. Dirichlet, estudiando la obra de Fourier, define la noción general de función como actualmente la entendemos. Esto ayudó al estudio de la integral. Augustín Cauchy es el matemático a partir de quien la definición de integral se hace analítica y rigurosa; en realidad, antes de él no existía tal definición, era tan solo una idea intuitiva relacionada a las áreas.

2.2. La integral de Cauchy. Con Cauchy se inicia la rigorización del análisis; él ya consideraba las funciones continuas tal como hoy las entendemos, así como la integral de dichas funciones. Adopta la notación $\int_a^b f(x)dx$, ya usada por Fourier, tal símbolo es el límite de sumas del tipo $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, con los conocidos argumentos. Cauchy prueba que existe el citado límite bajo ciertas condiciones, lo que constituye un hecho fundamental, pues se basa en principios de los números.

La integral de Cauchy posee algunas limitaciones, sobre todo cuando se integra funciones discontinuas. Al respecto, Dirichlet parece pensar que la integrabilidad de funciones es algo muy ligado al hecho de que los puntos de discontinuidad no estén "muy aglomerados", y que mas bien estén distribuidos "ralamente".

Así es como plantea su conocida función

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x \text{ es racional} \\ b, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases},$$

para la cual la integral de Cauchy es insuficiente. Pensemos que esta función debe haber sido algo "raro" en tal época y quizás de poco interés en el ambiente de entonces. Consideramos $a \neq b$.

Así, la noción de integral requería de posteriores investigaciones; entra en escenario un gran matemático, B. Riemann.

2.3. La integral de Riemann. La idea de Riemann es usar aproximaciones, en la siguiente forma:

Sean $\overline{f_i}$ y $\underline{f_i}$ el supremo y el ínfimo de $f(x)$ que asumimos acotada en el intervalo (x_{i-1}, x_i). Así la suma $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ está comprendida entre $\underline{S} = \sum \underline{f_i}(x_i - x_{i-1})$ y $\overline{S} = \sum \overline{f_i}(x_i - x_{i-1})$. Entonces, Riemann prueba que la definición de Cauchy es aplicable si $\overline{S} - \underline{S} = \sum(\overline{f_i} - \underline{f_i})(x_i - x_{i-1})$ converge a cero si la norma de la partición de $[a,b]$ es cada vez más pequeña. Remarcamos que por definición, la norma de una partición es la mayor de las longitudes $|x_i - x_{i-1}|$.

Un criterio importante de integrabilidad, debido a Riemann, establece que "f es integrable si y solo si dados los reales $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición con norma $< \delta$, la suma de las longitudes de los intervalos (x_{i-1}, x_i), en donde la oscilación $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ es $\geq \sigma$, es menor que ε". Lo notable de esta idea es que tal condición no solo es satisfecha por las funciones continuas y monótonas, si no también por funciones que tienen un conjunto de discontinuidad denso. Al respecto, en 1875, H. J. Smith dio el primer ejemplo de una función no integrable según Riemann, y cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es "disperso". Todos estos resultados fueron grandes avances en la noción de integral. El trabajo de Riemann fue publicado en 1867, después de su muerte. Su integral fue aceptada por la comunidad matemática (aún se la enseña en nuestros días) y estimuló el estudio de ideas mas profundas en la recta y en la teoría de funciones de variable real.

2.4. Los Conjuntos y la integral. Los nombres de Weierstrass, du Bois-Reymond, Dirichlet, Hölder, Hankel, Dini y Cantor están dentro de los que contribuyeron al desarrollo del análisis a mediados del siglo -XIX. Dirichlet y Hölder extienden la teoría de la integral a las funciones no acotadas. Es conveniente remarcar que en la condición de integrabilidad dada por Riemann, ya aparece la idea de "medir" conjuntos, de medir los conjuntos de puntos de discontinuidad de una función. Acá están los albores de la teoría de la medida, que se desarrollaría 30 años después.
Así mismo, en su memoria sobre la integral, Riemann considera también series trigonométricas de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n sen(nx) + b_n cos(nx))\,,\ x \in [-\pi, \pi] \tag{2.1}$$

donde los coeficientes a_0, a_n, b_n, son arbitrarios, no necesariamente los coeficientes de Fourier de alguna función f. Precisamente por su preocupación en la obra de Fourier, Riemann encontró una de sus motivaciones para el estudio de la integral. Aprovechemos esta circunstancia para mencionar que el análisis de esa serie ha de plantear algunas delicadas cuestiones. Si la serie (2.1) converge uniformemente a f, integrando término a término, obtenemos precisamente los coeficientes de Fourier de f, pero recordemos que asumimos que ellos eran arbitrarios; es decir, no tendríamos la unicidad de los coeficientes de la serie. Al respecto Heine plantea la cuestión: ¿Cómo debilitar la convergencia uniforme y tener la unicidad de los coeficientes? Heine asume la hipótesis de que la serie trigonométrica de f solo converja uniformemente en ciertos subintervalos de $[-\pi, \pi]$ y tenga solo un número finito de puntos de discontinuidad.

Heine entusiasmó a G. Cantor, un joven matemático que llegaba a Halle (1869), para que investigara el problema de la unicidad de los coeficientes de (2.1). Complicados argumentos le llevaron a desarrollar una teoría de los números reales. Cantor define una serie de conceptos, hoy familiares a los estudiantes de matemática (punto límite, vecindad de un punto, conjunto derivado, ...). Si E es un conjunto, su conjunto derivado E' es el conjunto de todos los puntos límites de E; recordemos que x_0 es un punto límite de E si toda vecindad de x_0 contiene infinitos puntos de E. El segundo conjunto derivado E'' de E es definido como el conjunto derivado de E'; y así, el $k-$ésimo conjunto derivado $E^{(k)}$ de E es el conjunto derivado de $E^{(k-1)}$. Cantor prueba un teorema general de unicidad, que dice : "si la serie $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n sen(nx) + b_n cos(nx))$ se anula para todos los valores de $x \in [-\pi, \pi]$, excepto para aquellos que corresponden a un subconjunto E tal que $E^{(k)}$ es vacío para algún k, entonces todos sus coeficientes son nulos". De esta manera Cantor es motivado a estudiar sistemáticamente "conjuntos", y la matemática se beneficiará con una revolucionaria teoría.

2.5. La medida de Borel y de Lebesgue. Podemos apreciar que los esfuerzos en pos de comprender los aspectos esenciales de la integral llevan a considerar argumentos cada vez mas refinados, en los cuales las ideas de Cantor (y su teoría de conjuntos) es fundamental; el concepto de "medida" de un conjunto va tomando su propia evolución. Sin embargo la idea de medida aun tenía defectos. Emile Borel (1871-1956) ha de contribuir hacia la teoría de la medida. Usando el hecho que: "todo conjunto abierto E de IR es la unión de la familia enumerable de sus componentes (intervalos abiertos, disjuntos dos a dos)", define la medida de E como la suma de las longitudes de sus componentes. Luego, en forma mas amplia considera, los ahora llamados conjuntos de Borel, conjuntos que son obtenidos de los conjuntos abiertos aplicando reiteradamente las operaciones de unión e intersección a un número enumerable de tales conjuntos. Explica que para estos conjuntos se puede definir una medida que tenga la propiedad de aditividad completa: "si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos de Borel, disjuntos dos a dos, entonces la medida de la unión $\cup E_n$, (que asumimos acotada) es igual a la suma de las medidas de E_n".

Así comienza un período nuevo en el análisis matemático; en los argumentos se usan aspectos conjuntistas y topológicos (conjuntos abiertos, cerrados y las diversas definiciones que ahora son familiares). Por esta época, primeros años del siglo XX, aparecen las contribuciones de Henri Lebesgue (1875- 1941) con quien se consolida la teoría de la medida de conjuntos. Por su importancia, digamos algunos breves palabras sobre la personalidad de este gran matemático francés. Nace en un hogar de limitados recursos económicos, pero su padre le supo dar el apropiado ambiente de estudio para que el niño mostrara sus dotes de inteligencia. En 1894 ingresa a la Escuela Normal en París, en donde da muestras de su capacidad inventiva respecto a ciertos clásicos problemas en geometría. Alrededor de 1897 comienza a concebir su tesis de doctorado: “Integral, Longitud, Área”, justo cuando el ambiente matemático estaba cargado de ideas innovadoras.

En su revolucionario trabajo, Lebesgue expone una nueva teoría de la integral, la que supera las dificultades existentes; introduce una nueva concepción de como determinar la medida de un conjunto. Fue un trabajo simple en su formulación pero muy profundo en su significado y en sus proyecciones; sin embargo, esta contribución no fue aceptada del todo por las autoridades matemáticas de entonces. En 1902 sustenta su notable tesis, con la que se inicia una nueva etapa en la evolución del análisis matemático, y en la matemática en general. En 1904 hace una exposición didáctica de sus ideas en sus célebres “lecciones sobre la integración y el cálculo de funciones primitivas”.

El gran mensaje de sus ideas fue reconocido pronto; surgen nuevas teorías basadas en la noción de medida y de la integral. Lebesgue fue un científico de carácter modesto; llevaba una vida simple, dedicada a su gran obra. Quienes conocieron a Lebesgue se refieren a su gran espíritu humano; poco hablaba de la grandiosidad de su teoría. Merecidamente recibió el homenaje de los círculos matemáticos. Tuvo una gran sensibilidad por la enseñanza de la matemática básica. Lebesgue muere el 26 de julio de 1941.

2.6. La integral de Lebesgue. Volvamos a pensar en la integral de Riemann. Si la norma de la partición $\{(x_i, x_{i+1})\}$ es arbitrariamente pequeña, las oscilaciones $\overline{f}_i - \underline{f}_i$ se hacen mas pequeñas.

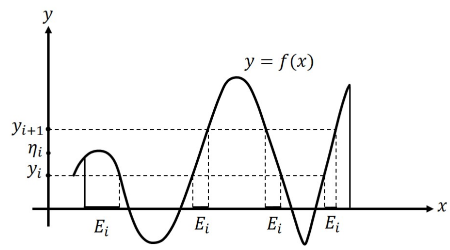


Figura 2.3: Idea de Lebesgue sobre la integral.

Cuando f es uniformemente continua en (x_i, x_{i+1}) y $\overline{S} - \underline{S}$ tenderá a cero solo cuando existan “algunos puntos de discontinuidad”. Esto no ocurrirá necesariamente con funciones discontinuas en todo el intervalo, como la función de Dirichlet, por ejemplo. Lebesgue ha de cambiar la estrategia. Guiado por la idea de agrupar los valores de la función que sean pocos diferentes de $f(x)$, no subdivide (a, b) sino el intervalo $(\underline{f}, \overline{f})$, donde los extremos son el ínfimo y el supremo de $f(x)$ en (a, b).
Sea $\{(y_i, y_{i+1})\}$ un subintervalo en esta partición, donde consideramos $y_{i+1} - y_i < \varepsilon$ para todo i, con $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente pequeño. Ahora tomamos los $f(x)$ tales que $y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}$. Así tenemos el conjunto $E_i = \{x/y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}\}$ (en el caso de la función de la figura adjunta, E_i es formada por cuatro intervalos). Es conveniente remarcar que para funciones demasiadas arbitrarias (funciones medibles) el conjunto E_i puede ser muy complicado, pero esto no perturba la simplicidad de la teoría. Así mismo notemos que E_i juega el papel de (x_i, x_{i+1}) en la definición de la integral de una función continua; E_i nos permite conocer los x que dan a $f(x)$ valores pocos diferentes. Además, los E_i's son conjuntos disjuntos dos a dos.

Tomemos ahora un número real η_i cualquiera tal que $y_i \leq \eta_i \leq y_{i+1}$, entonces los valores de $f(x)$ para $x \in E_i$ son tales que $|f(x) - \eta_i| < \varepsilon$.

Remarquemos que η_i juega el papel de $f(\xi_i)$ en la integral de Cauchy. Aun, Lebesgue se propone definir la medida $|E_i|$ del conjunto E_i, concepto que ha de reemplazar a la medida $|x_{i+1} - x_i|$ del intervalo (x_i, x_{i+1}). Luego considera la suma $S = \sum \eta_i |E_i|$.

En términos mas formales restablezcamos el anterior argumento en la siguiente forma. Por simplicidad asumamos $f \geq 0$ (una función medible) definida sobre un conjunto E (medible). Sea la partición $\Gamma = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_i < \ldots\}$ donde $y_i \to +\infty$. Sea la norma $|\Gamma| = Sup_i |y_{i+1} - y_i|$ y consideremos el conjunto $E_i = \{x/y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}\}$. Los E_i's son disjuntos. Pongamos $e_i = |E_i|$ y sean las sumas de Lebesgue (inferior y superior respectivamente).

$$s_\Gamma = \sum_{i=0}^{\infty} e_i y_i \, , \; S_\Gamma = \sum_{i=0}^{\infty} e_i y_{i+1} \, .$$

Si $|\Gamma| \to 0$, se prueba que $s_\Gamma \to \int_E f$ y $S_\Gamma \to \int_E f$. El valor común es llamado la integral de Lebesgue.

El objetivo de esta sección es motivar como la teoría de conjuntos surgió en el trabajo de Cantor; como hemos visto, ella fue construida al estudiarse la unicidad de los coeficientes de Fourier. En la próxima sección veremos una presentación más detallada de la integral de Lebesgue. Mucho se ha escrito sobre las integrales vistas anteriormente, se sugiere visitar la biblioteca de Ciencias - PUCP; sugerimos las siguientes fuentes: [26],[14],[11], [13], [3], [7],[22], [16], [8], [2], [1], [23],[24], [25], [[17, 18, 19, 20, 21] [12], [6], [10],[15]. En estas fuentes el lector podrá encontrar distintas rutas que convergen a la idea de integral.

3. Breve Presentación Comentada de la Integral de Lebesgue.

3.1. Ideas Previas. Despues de haber estudiado a la integral de Riemann todo estudiante de ciencias pasa a estudiar a la integral de Lebesgue (esto es una tradición), donde hay diferentes enfoques de hacerlo. En esta sección presentamos una versión auto suficiente de la integral de Lebesgue. Damos algunas tareas que un lector interesado pueda realizar; en general es suficiente leerlas y comprenderlas pues complementa el texto.

Las dos ideas fundamentales del cálculo son: la derivada y la de integral. Con la primera idea se puede, por ejemplo, determinar la rapidez de un vehículo a partir de la distancia; con la segunda se invierte la situación: se determina la distancia a partir de la rapidez. Históricamente ambas ideas fueron el punto de partida de progreso de las ciencias físicas y del análisis matemático.

Es muy usual asociar a la idea de integral solamente el problema del área de un conjunto en el plano. Sin embargo, la idea de integral se puede motivar con otro tipo de problema, como el de encontrar la masa de una cuerda de longitud y densidad conocidas, el de determinar la distancia recorrida por un vehículo conociendo su velocidad y durante un tiempo determinado, el determinar el volumen de una pirámide, etc.

La formulación de la idea de integral (en la forma como la aprendemos en los cursos del cálculo) fue hecha en el siglo XIX. Cauchy dio la definición rigurosa de integración de funciones continuas. En 1854, Riemann extendió esta idea a la clase de funciones limitadas. La integral de Riemann, si bien es cierto funciona bien para una gran variedad de funciones, tiene sus limitaciones lo que la hace insuficiente en ciertas situaciones “no raras”. Por ejemplo

- La función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0\,, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ no es integrable según Riemann, en cualquier intervalo $[a, b]$.
- Sea el intervalo $I = [0, 1]$ y tomemos los números racionales $r_1, r_2, \ldots, r_m$ en I. Definamos la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } x = r_m \text{ para } m = 1, 2, \ldots, n \\ 0\,, & \text{para los demás } x. \end{cases} \tag{3.1}$$

  Se observa que $f_n(x)$ es integrable según Riemann en I para cada n. Sin embargo, su límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0\,, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ no lo es.
- Sea $I = [0, 1]$. Definamos la sucesión $\{f_n(x)\}$, donde $f_n(x) = \begin{cases} n\,, & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0\,, & \text{para otros } x \end{cases}$.

Observamos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y que $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$, de donde concluimos que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$, es decir, no se puede intercambiar límites.

Todas estas situaciones (y otras) son clarificadas con la teoría de la medida de H. Lebesgue, quien en 1902 proporcionó una nueva forma de integración extendiendo a la integral de Riemann. Esta integral es a su vez generalizada con la integral de Stieltjes (1894). Así, de un modo general tendríamos la integral de Stieltjes-Lebesgue.

3.2. La Integral de Riemann. Trabajaremos con funciones $f : [a, b] \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, las cuales asumiremos que son limitadas sobre $I = [a, b]$. (Si f es continua entonces esa hipótesis es obvia, ¿por qué?).

Llamemos $M = sup_{x\in I} f(x)$ y $m = inf_{x\in I} f(x)$. El conjunto de números $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ es llamado una partición P de I.
Tal partición determina en I una familia finita de subintervalos I_k, cada uno de longitud $x_k - x_{k-1}$. La norma de P es por definición $||P|| = max_P\{x_k - x_{k-1}\}$.
Definamos ahora las sumas inferior y superior de f sobre I, de acuerdo a una partición P. Por definición,

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \text{ (suma inferior)},$$

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \text{ (suma superior)},$$

donde $M_k = \sup_{x\in I_k} f(x)$ y $m_k = \inf_{x\in I_k} f(x)$.

Tarea 3.1. *Verificar que $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$. Dadas las particiones $P : \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $P' : \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$ de $[a, b]$; decimos que P' es más fina que P (P' un refinamiento de P) si todo elemento de P está en P' (si*

$x_k \in P$ entonces él aparece con la notación x'_j en P'). En otras palabras P' es construida agregando más puntos a P.

Tarea 3.2. *Si P' es más fina que P, entonces $\overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f)$ y $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$. Verifique graficamente tales desigualdades.*

Ejemplo 3.1. *Si P y P' son dos particiones arbitrarias de I, entonces $\underline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f)$.*

Solución. Sea P'' el refinamiento común a P y P' (¿como la construye?). Entonces, $\underline{S}_{P'}(f) \leq \underline{S}_{P''}(f) \leq \overline{S}_{P''}(f) \leq \overline{S}_P(f)$.

Definición 3.1. *Integral superior de Riemann de f sobre $[a,b] = \text{ínf}\, \overline{S}_p(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.*
Integral inferior de Riemann de f sobre $[a,b] = \sup \underline{S}_p(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$.
Decimos que f es integrable según Riemann sobre I si $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Este valor común es llamado la integral (definida) de f sobre I, y es denotado por $\int_a^b f(x)dx$.

Ejemplo 3.2. *La función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0\,, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ es una función no integrable según Riemann en $[a,b]$.*

Solución. Para cualquier partición P es claro que $m_k = 0$ y $M_k = 1$, luego $\overline{\int_a^b} f(x)dx = (b-a)$ y $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$.

Ejemplo 3.3. *Si $I = [2,5]$ y $f(x) = 4 \forall x \in I$, ¿es f integrable sobre I? si lo fuera, calcular $\int_a^b f(x)dx$.*

Tarea 3.3. *Para cada n, calcular $\int_0^1 f_n(x)dx$, donde f_n es la función definida según (3.1) dado en la introducción de esta sección.*

Ejemplo 3.4. *Si f es monótona sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre tal intervalo.*

Solución. Suponga que f fuera no-decreciente (en forma análoga se haría si f fuera no-creciente). Para cualquier P tenemos:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq ||P|| \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = ||P|| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = ||P|| \left[f(b) - f(a) \right].$$

Si $f(b) = f(a)$, se tiene $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Si $f(b) \neq f(a)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Luego si $||P|| < \delta$ se tendrá $0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \varepsilon$, de donde se tiene la integrabilidad de f sobre $[a,b]$.

Tarea 3.4. *Si f es continua sobre $I = [a,b]$, entonces f es integrable en tal intervalo.*

Ejemplo 3.5. *f es integrable sobre $I = [a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ una partición P tal que $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon$.*

Solución.

C.N. Sea f integrable sobre I, luego por definición $\int_a^b f(x)dx = \text{ínf}\, \overline{S}_P(f)$ lo que implica $\exists P'$ tal que $\overline{S}_{P'}(f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$. También $\int_a^b f(x)dx = sup \underline{S}_P(f)$ de donde $\exists P''$ tal que $\underline{S}_{P''}(f) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$. Sea P el refinamiento común a P' y P'', entonces tales desigualdades implican $\overline{S}_p(f) - \underline{S}_p(f) < \varepsilon$.

C.S.

Claramente, $0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}_p(f) - \underline{S}_p(f) < \varepsilon$, de donde (desde que ε es arbitrario) $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ y así f es integrable sobre I.

Tarea 3.5. *Sea f continua sobre $I = [a,b]$ y suponga que $\int_a^x f(t)dt = x$ para $\forall x \in I$. Encontrar f y a.*

3.3. La Integral de Riemann - Stieltjes. Vamos a presentar una generalización de la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$. En esta definición interviene una función, la f. Consideremos ahora dos funciones f y α; estudiaremos integrales de la forma $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, llamada integral de Riemann - Stieltjes. ¿por qué esta es una generalización de aquella? basta observar que si $\alpha(x) = x$, la integral de Riemann Stieltjes se convierte en una integral de Riemann. Mas generalmente, si $\alpha(x)$ fuera continuamente derivable, entonces $d\alpha(x) = \alpha'(x)dx$ y se tiene $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ (siendo esta una integral de Riemann). Sin embargo $\alpha(x)$ puede ser no diferenciable ni aún continua, siendo en este caso la situación interesante por su aplicación en ciertos problemas físicos de distribución de masas, así como en problemas de la teoría de probabilidades.

Sea α una función monótona creciente sobre $I = [a, b]$ (y por lo tanto α es limitado sobre I, ¿por qué?). En forma análoga a lo hecho anteriormente, se consideran las sumas inferior y superior:

$$\underline{S}_P(f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})],$$

$$\overline{S}_P(f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})],$$

donde f es una función limitada sobre I. Consideremos también

$$\begin{cases} \text{integral superior de Riemann-Stieltjes} \\ \text{de } f \text{ con respecto a } \alpha \text{ sobre } I \end{cases} = \text{ínf}\overline{S}_P(f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \ ,$$

$$\begin{cases} \text{integral inferior de Riemann-Stieltjes} \\ \text{de } f \text{ con respecto a } \alpha \text{ sobre } I \end{cases} = \sup\underline{S}_P(f, \alpha) = \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \ .$$

Definición 3.2. *f es integrable según Riemann-Stieltjes con respecto a α sobre I, si $\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) = \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$. Escribiremos $f \in R(\alpha)$.* Al valor común $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ llamaremos la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α sobre $I = [a, b]$.

De un modo análogo a lo hecho en el ejemplo 5 se tiene.

Tarea 3.6. *$f \in R(\alpha)$ sobre $I = [a, b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists$ una partición P tal que $\overline{S}_P(f, \alpha) - \underline{S}_P(f, \alpha) < \varepsilon$.*

De un modo diferente (pero equivalente) podemos definir la integral de Riemann-Stieltjes. Sean f y α dos funciones definidas y limitadas sobre $[a, b] = I$. Sea la partición P de I y considere la suma

$$S_P(f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \text{ donde } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \ .$$

Definición 3.3. *Si existe $\lim_{||P|| \to 0} S_P = S$, decimos que $f(x)$ es integrable sobre I con respecto a la función $\alpha(x)$. El límite S es denotado con $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ y es llamado la integral de Riemann-Stieltjes.*

Tarea 3.7. *Si $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ existe y es igual a S, entonces las integrales $\int_a^b [cf(x)]d\alpha(x)$ y $\int_a^b f(x)d[c\alpha(x)]$ existen y ambas son iguales a cS, donde c es una constante.*

Ejemplo 3.6.

(a) Si $\int_a^b f_1 d\alpha$ y $\int_a^b f_2 d\alpha$ existen, entonces $\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$.

(b) Si $\int_a^b f d\alpha_1$ y $\int_a^b f d\alpha_2$ existen, entonces $\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$.

Solución. Todo ello sigue directamente aplicando la definición.

Ejemplo 3.7. *Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y α una función "escalón", con puntos de discontinuidad en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ y saltos $d_1, d_2, \ldots, d_k$.*
Entonces $\int_a^b f d\alpha = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)d_i$.

Solución. Tenemos $\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] =$ (considerando que la partición P incluye a los ξ_i's)$= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)[\alpha(\xi_i^+) - \alpha(\xi_i^-)] = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)d_i$.

3.4. Funciones de Variación Acotada. Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Para toda partición $P : \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de I, consideremos el número $V_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$.

Sea $V(f) = supV_P(f)$. En general tenemos $V \leq \infty$, y es llamado la variación total de f en I. Diremos que f es una función de variación acotada sobre I si $V < \infty$.

Ejemplo 3.8. *Si f es monótona sobre I, entonces f es de variación acotada sobre I.*

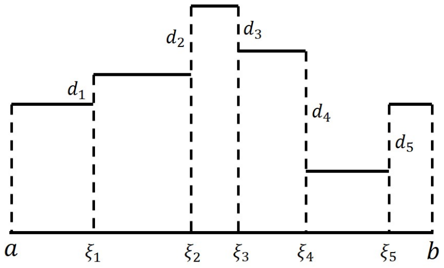


Figura 3.1: La Función escalón

Solución. Si f es creciente (análogo para f decreciente), tenemos

$$V_P = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a)$$

y por lo tanto $V = supV_P < \infty$.

Ejemplo 3.9. *(no toda función continua es de variación acotada) Si f es continua en I tal que f' es limitada en I, entonces f es de variación acotada sobre I.*

Solución. Por el teorema del valor medio,

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq A \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = A(b-a)$$

luego $V = supV_P = A(b-a) < \infty$.

Ejemplo 3.10. *Si f es de variación acotada sobre I, entonces f es acotada sobre I. Mas concretamente, si $V_P \leq M$ para $\forall P$ entonces $|f(x)| \leq |f(a)| + M, x \in (a,b)$.*

Solución. Sea $x \in (a,b)$ y consideremos la partición particular $P = \{a, x, b\}$. Entonces, $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M$, lo que implica $|f(x) - f(a)| \leq M$ ó $|f(x)| \leq |f(a)| + M$. [Observe que también podríamos haber usado el otro sumando].

Existen funciones continuas que no son de variación acotada.

Ejemplo 3.11. *La función continua $f(x) = \begin{cases} xcos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \text{ para } x \neq 0 \\ 0 \text{ para } x = 0 \end{cases}$ no es de variación acotada en $I = [0,1]$.*

Solución. $f(x)$ es en efecto continua ya que para $x \neq 0$, f es el producto de dos funciones continuas; para $x = 0$ se tiene: dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (tome $\delta = \varepsilon$) tal que para $|x - 0| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(0)| = \left|xcos\left(\frac{\pi}{2x}\right) - 0\right| = |x| \left|cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) - 0\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$.
f no es de variación acotada: dada la partición $\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$. Luego se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(x_{2n}) - f(x_{2n-1})| \\
&= \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \ldots + \left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \left|\pm\frac{1}{2n} - 0\right| + \left|0 \pm \frac{1}{2n}\right| + \ldots + \left|-\frac{1}{2} - 0\right| + \left|0 + \frac{1}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2} + 1.
\end{aligned}$$

Suma que es arbitrariamente grande cuando $n \to \infty$, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Tarea 3.8. *Si f y g son funciones de variación acotada y c es una constante. Probar que $cf(x)$ y $f+g$ son de variación acotada. Verifique que $V(cf) = |c|V(f)$ y $V(f+g) \leq V(f) + V(g)$.*

Ejemplo 3.12. *Si f y g son funciones de variación acotada, entonces también lo es fg.*

Solución. Pongamos $h = fg$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|h(x_i) - h(x_{i-1})| &= |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\leq |f(x_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})||f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&\leq M|g(x_i) - g(x_{i-1})| + N|f(x_i) - f(x_{i-1})|
\end{aligned}$$

(desde que f y g son limitadas). Luego se tiene que $V_P(h) \leq MV_P(g) + NV_P(f)$ lo que implica la tesis.

Ejemplo 3.13. *f es una función de variación acotada en $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f = f_1 - f_2$, donde f_1 y f_2 son funciones no-decrecientes en $[a,b]$.*

Solución.

C.N. Sea f de variación acotada en $[a,b]$. Defina

$$f_1(x) = \begin{cases} V[a,x] & \text{variación total de } f \text{ en } [a,x] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} ;\ f_2(x) = f_1(x) - f(x)$$

Decimos que f_1 y f_2 son funciones no-decrecientes en $[a,b]$. En efecto, sean $a < x < y < b$, entonces $V[a,y] = V[a,x] + V[x,y]$ ó $f_1(y) = f_1(x) + V[x,y]$, pero siendo $V[x,y] \geq 0$, se tiene $f_1(x) \leq f_1(y)$. Si tuviéramos $a = x < y < b$ se tendría $f_1(x) = 0 = V[a,y] = f_1(y)$. Así f_1 es no-decreciente.

Por otro lado, si $a \leq x < y \leq b$ se tiene $f_2(y) - f_2(x) = f_1(y) - f(y) - f_1(x) + f(x) = f_1(y) - f_1(x) - [f(y) - f(x)] = V[x,y] - [f(y) - f(x)] \geq V[x,y] - |f(y) - f(x)| \geq V[x,y] - V[x,y] = 0$, es decir $f_2(x) \leq f_2(y)$. Finalmente, es claro que $f = f_1 - f_2$.

C.S. Si $f = f_1 - f_2$, donde f_1 y f_2 son funciones no-decrecientes, sabemos que f_1 y f_2 son de variación acotada (ejemplo 8), luego f es de variación acotada (ejercicio 12).

Ejemplo 3.14. *Si f es continua en $[a,b]$ y α es de variación limitada en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ existe.*

Solución. Si α es de variación limitada entonces $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, con α_1 y α_2 no-decreciente. Luego, $\int_a^b fd\alpha = \int_a^b fd\alpha_1 - \int_a^b fd\alpha_2$, lo que implica que es suficiente estudiar la existencia de $\int_a^b fd\alpha$ cuando α es no-decreciente. Además podemos asumir que α es no constante ya que si lo fuera se tendría $\int_a^b fd\alpha = 0$. ¿porqué?. Luego podemos escribir $c = 2[\alpha(b) - \alpha(a)] > 0$. Como f es uniformemente continua en $[a,b]$, tenemos que dado $\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que para $\forall\ x, y \in [a,b]$ con $|x - y| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{c}$. Sea P_ϵ una partición de $[a,b]$ tal que $||P_\epsilon|| < \delta$ y sea P otra cualquier partición más fina que P_ϵ (asi $||P|| \leq ||P_\epsilon|| < \delta$). Entonces,

$$\overline{S_p} - \underline{S_p} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} sup|f(x) - f(y)|[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

donde $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$, y asi se tiene $|x-y| < x_k - x_{k-1} \leq ||P|| < \delta$, lo que implica $sup|f(x)-f(y)| \leq \frac{\epsilon}{c}$. Así finalmente, $\overline{S_p} - \underline{S_p} \leq \frac{\epsilon}{c}[\alpha(b) - \alpha(a)] = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ lo que implica la existencia de $\int_a^b fd\alpha$.

En las hipótesis del ejemplo 14, defina la función $F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t)$ si $x \in [a,b]$. Entonces se verifica que: F es de variación limitada; todo punto de continuidad de α es también punto de continuidad de F; existe la derivada $F'(x)$ en cada punto $x \in [a,b]$ en el que $\alpha(x)$ existe y se tiene $F'(x) = f(x)\alpha'(x)$.

Veamos ahora el siguiente interesante

Ejemplo 3.15. *Sea g una función con derivada g' continua en el intervalo $S = [c,d]$.*

Sea f continua en $g(S)$ y sean $a = g(c)$, $b = g(d)$. Pongamos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ si $x \in g(S)$. Entonces, para cada $x \in S$ la integral $\int_0^x f[g(t)]g'(t)dt$ existe y tiene el valor $F[g(x)]$. En particular se tiene, $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)dt$.

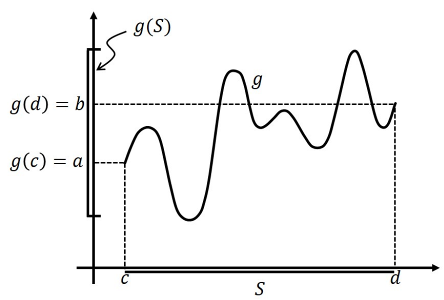


Figura 3.2: Visualización del ejemplo 3.15.

Solución. La existencia de la integral en cuestión, está garantizada por hipótesis.
Pongamos $G(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt$, $x \in S$. Por lo dicho anteriormente, $G'(x) = f[g(x)]g'(x)$; por otro lado, $F'(x) = f[g(x)]g'(x)$ (ya que $F'(x) = f(x)$). Luego, $(G(x) = F[g(x)])' = 0$, de donde $G(x) = F[g(x)]$ es una constante. Pero, para $x = c$ se tiene $G(c) = 0$ y $F[g(c)] = F(a) = 0$, asi que esa constante debe ser cero y de esa manera $G(x) = F[g(x)]$ o $\int_c^x f[g(t)]g'(t)dt = F[g(x)]$. Finalmente, si $x = d$ se tiene $G(d) = F[g(d)] = F(b)$, esto es, $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f[g(t)]g'(t)dt$.

3.5. El Teorema del Valor Medio. El anterior ejemplo es considerado como un teorema de cambio de variable. Consideremos ahora un resultado análogo. Sea f una función limitada definida sobre $[a, b]$ tal que existe $\int_a^b f(x)dx$. Para $x \in [a, b]$ pongamos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Ejemplo 3.16. *$F(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$. Si f es continua en $x_0 \in [a, b]$ entonces F es diferenciable en x_0 y se tiene $F'(x_0) = f(x_0)$.*

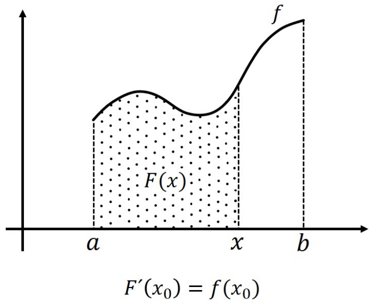


Figura 3.3: Visualización del ejemplo 3.16.

Solución. En realidad F es uniformemente continua sobre $[a, b]$, $|f(x)| \leq c$ se tiene $a \leq x < y \leq b$, $|f(x)| \leq c$ se tiene $|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq c(y - x) \leq$ [dado $\epsilon > 0$ considere $|y - x| < \frac{\epsilon}{c}] \leq \epsilon$.
Para la segunda parte hay que verificar que $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \epsilon$, lo que sigue usando la definición de $F(x)$ y del hecho de que $f(x)$ es continua en x_0.

Ejemplo 3.17. *(Teorema Fundamental del Cálculo Integral).*
Sea $F(x)$ diferenciable en $[a, b]$. Si $F'(x) = f(x)$ y si existe $\int_a^b f(x)dx$ se tiene entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Solución. Por el teorema de valor medio, se tiene $F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f(t_i)$ donde $P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ es una partición de $[a, b]$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Luego, $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \longrightarrow_{||P||\to 0} \int_a^b f(x)dx$. Como se observará en ambos anteriores ejemplos se ha considerado $\alpha(x) = x$. Volvamos al caso general de la integral de Stieltjes. Veremos ahora que f y α pueden ser intercambiados (integración por partes).

Ejemplo 3.18. *Si $f \in R(\alpha)$ sobre $[a, b]$ se tiene también $\alpha \in R(f)$ sobre $[a, b]$ y $\int_a^b \alpha(x)df(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)d\alpha(x)$, donde en general $h(x)|_a^b = h(b) - h(a)$.*

Solución. Sea la partición $P_1 : a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Como es usual, tome los puntos $t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n$ tales que $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Ello determina la partición $P_2 : a = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = b$. Tenemos, $S_{f_1}(\alpha, f) = \sum_{i=1}^h \alpha(t_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] =$ (simple verificación) $= f(x)g(x)|_a^b - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_{i-1})[g(t_i) - g(t_{i-1})]$, de donde tomando límite se tiene la tesis (observe que $||P_1|| \to 0$ implica $||P_2|| \to 0$).

Ejemplo 3.19. *(Primer Teorema del Valor Medio). Sea $\alpha(x)$ no-decreciente, $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Pongamos $M = sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Entonces, $\exists\, k \in [m, M]$ tal que $\int_a^b fd\alpha = k\int_a^b d\alpha = k[\alpha(b) - \alpha(a)]$.*

Solución. Si α es función constante, entonces $\int_a^b fd\alpha = 0 = k[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Consideremos entonces α no constante. Tenemos: $m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \underline{\int_a^b} fd\alpha = \int_a^b fd\alpha = \overline{\int_a^b} fd\alpha \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$, de donde $m \leq \frac{\int_a^b fd\alpha}{\alpha(b)-\alpha(a)} \leq M$. Luego, basta poner $k = \frac{\int_a^b fd\alpha}{\alpha(b)-\alpha(a)}$.

Corolario 3.1. *Si $\alpha(x)$ es no-decreciente y f es continua sobre $[a, b]$, entonces $\exists\, x_0 \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fd\alpha = f(x_0)[\alpha(b) - \alpha(a)]$.*

En efecto, Tomemos $k \in [m, M] = f([a, b])$ y por la continuidad de f existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $k = f(x_0)$, luego aplique el anterior ejemplo.

Segundo Teorema del Valor Medio. Si f es una función no-decreciente y α es continua sobre $[a, b]$, entonces $\exists\, x_0 \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fd\alpha = f(a)[\alpha(x_0) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x_0)]$.

3.6. Conjuntos Medibles.. En esta sección pretendemos hacer una exposición sucinta de los aspectos geométricos y analíticos de la teoría de la medida, incluyendo una presentación de las ideas de medida de un conjunto, función medible e integral de Lebesgue. Con estos tres conceptos se pretende extender la idea de:

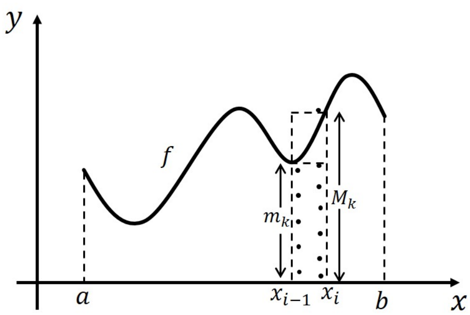
conjunto abierto a ....conjunto medible
función continua a ....función medible
integral de Riemann a.......... integral de Lebesgue.

La teoría de la medida fue iniciada por el matemático francés Henri Lebesgue, quien al inicio del siglo XX (1902) sustentó su tesis: “Integral, Longitud, área”, introduciendo una nueva idea de integral, la que supera a la Riemann, ya que aclara los defectos que tiene ésta. Además es más manejable y aplicable a los distintos sectores del análisis y de la mátematica en general.

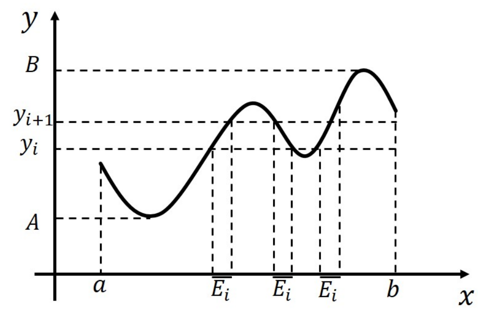
Al inicio de la anterior sección propusimos tres ejemplos a fin de observar como la integral de Riemann tiene algunos limitaciones substanciales. Asi la función de Dirichlet no es integrable; el limite de una sucesión de funciones integrales, no es necesariamente integrable; el intercambio de límite no es permitido. Indudablemente que todo esto no resta la gran importancia que tuvo y tiene aún la integral de Riemann, cuyo autor fue un gran matemático de gran agudeza y profundidad al enfocar los problemas que atacó Riemann se caracterizó por ver los problemas del análisis con una gran dosis de geometría. Aún más, en la integral de Riemann están las ideas primarias y fundamentales de la integral. Es conveniente remarcar que siempre las ideas “nuevas” han tenido un sustento sustancial en la ideas “viejas”; es una continua superación de las limitaciones o inconvenientes de lo hecho, lo que ha llevado a la matemática (y a la ciencia en general) al estado actual (gran expansión de teorías en muchas direcciones).

Es familiar asociar a la noción de integral la idea de área. Asi $\int_a^b f(x)dx$ se la interpreta como el área de una región.

¿como se determina tal área? Veamos gráficamente los puntos de vistas de Riemann y de Lebesgue.



(a) **Idea de Riemann**: partir el intervalo $[a, b]$ sobre el eje $-x$, y formar sumas de la forma $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ y $\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$.



(b) **Idea de Lebesgue**: partir el intervalo $[A, B]$ sobre el eje $-y$, y formar sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} y_i|E_i|$ y $\sum_{i=1}^{n} y_{i+1}|E_i|$.

Veremos después que la idea de Lebesgue es más conveniente. Desde ya podemos observar que parte de la ventaja está en el hecho de que las sumas de Lebesgue son construidas en base a la idea de medida ó “área”de un conjunto ($|E_i|$ =medida de conjunto E_i). En particular E_i podría ser un conjunto enumerable y como veremos, tener medida cero.

3.6.1. Conjuntos Medibles.. [La Idea del Area de una Figura Plana]. Desde la antigüedad ha preocupado a los matemáticos el problema del área de una figura plana. Los griegos supieron calcular el área (y el volumen) de muchas regiones encerradas por polígonos regulares. Euclides, en sus Elementos, considera fórmulas y propiedades de áreas de figuras como el círculo. En esos resultados está ya el germen de la idea de número irracional; así ellos conocieron que la razón entre las áreas de dos círculos es igual a la razón entre los cuadrados de sus radios; que la longitud de la circunferencia dividido por el diámetro del respectivo círculo es una constante (constante que es llamada π). En realidad los griegos estuvieron cerca al cálculo integral, al menos usaron el método de aproximar una figura dada, cuya área se busca, por medio de figuras cuya área es fácil determinar. El mayor problema que tuvieron los griegos fue el límite (tal como ahora hacemos); si no hubiera sido por las aplicaciones de esta idea [que llevó a grandes discusiones entre los filósofos y matemáticos de la época; y que aún en nuestros días es motivo de algunas incredulidades] ellos hubieran llegado mucho más lejos...?

Por comodidad trabajaremos en el plano, este tiene algunas ventajas en la intuición geométrica de la que expondremos, pero todo ello funciona si trabajamos en la recta ó en espacios de mayores dimensiones ($\mathbb{R}^n$).

Sea el rectángulo $I = \{x_i/a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2\}$.

Sabemos que el área de I ó medida de I es dado por $|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - _2)$. En algún caso (caso degenerado) podría suceder que $b_1 = a_1$ ó $b_2 = a_2$; de ser así tendremos $|I| = 0$. Así, en general tenemos $|I| \geq 0$. De otro lado es claro que si I_1, I_2 son dos rectángulos tal que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, entonces se tendrá $|I_1 \cup I_2| = |I_1| + |I_2|$. De un modo general, si $\{I_i\}_{i=1,2,...,m}$ es una familia de rectángulos, disjuntos dos a dos, entonces $|\bigcup_{i=1}^{m}| = \sum_{i=1}^{m} |I_1|$.

Observe también que si I_1 y I_2 son dos rectángulos congruentes, entonces $|I_1| = |I_2|$.

La siguiente etapa consiste en considerar conjuntos en el plano que pueden ser representados como la unión de un número finito de rectángulos, disjuntos dos a dos. Tales conjuntos se llaman conjuntos **elementales**.

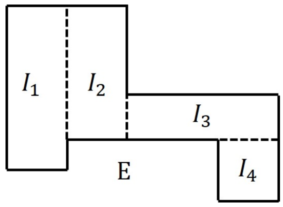


Figura 3.5: E es un conjunto elemental.

El conjunto E (que se muestra en la figura de la derecha), es elemental ya que $E = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. Observe que tal descomposición no es única. En realidad existen muchas formas de representar E como unión de rectángulos, disjuntos dos a dos. Pero ello no es inconveniente para definir su medida ó área.

Por definición, si $E = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ es un conjunto elemental, entonces $|E| = \sum_{i=1}^{m} |I_i|$.

Tarea 3.9. *Si tuviéramos otra representación para E, $E = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$; pruebe que $\sum_{i=1}^{m} |I_i| = \sum_{j=1}^{m} |I_j|$.*

Consecuencias.

(a) Si E es un conjunto elemental, entonces $|E| \geq 0$.

(b) Si $E_1, E_2, ..., E_p$ son conjuntos elementales, entonces $\left|\bigcup_{j=1}^{p} E_i\right| \leq \sum_{j=1}^{p} |E_i|$.

Si ellos fueran disjuntos dos a dos, entonces $\left|\bigcup_{j=1}^{p} E_i\right| = \sum_{j=1}^{p} |E_i|$

Tarea 3.10. *Pruebe (a) y (b).*

3.7. La Medida de Lebesgue. . Sea A un conjunto limitado en el plano. [Por un proceso de limite, esa condición puede ser relajada a un conjunto arbitrario]. Sea $S = \{I_k\}$, una familia de rectángulos, la cual es un cubrimiento de A.

Pongamos $|S| = \sum_k |I_k| \geq 0$.

Indudablemente que $|S|$ es mayor que la podríamos llamar el área ó medida de A. También sentimos que si los rectángulos fueron cada vez más pequeños, entonces $|S|$ es a su vez más pequeño y la aproximación a tal "área" es más óptimo. Esto nos sugiere tomar: ínf $|S|$, donde el ínfimo es sobre todos los cubrimientos de A. Por definición la **medida exterior de Lebesgue de** A, denotada con $|A|_e$, es $|A|_e = inf|S|$, donde $S = \{I_k\}$ con $A \subset \bigcup_k I_k$. Consecuencias:

(a) $|A|_e \geq 0$;

(b) para cualquier sucesión $\{A_k\}$ de conjuntos en el plano se tiene $|\bigcup_k A_k|_e \leq \sum_k |A_k|_e$; la desigualdad es debido a que los conjuntos no necesariamente son disjuntos dos a dos, así que hay partes que se repiten a la hora de sumar áreas de rectángulos. ¿cuándo tendremos $|\bigcup_k A_k|_e = \sum_k |A_k|_e$?

(c) Si $A = I$ es un rectángulo, entonces un cubrimiento de A es tener la familia de rectángulos formado por solo I; además, asi se obtiene el ínfimo de $|S|$.

Luego $|I|_e = |I|$.

Definición 3.4. *Diremos que un conjunto A es* **medible** *según Lebesgue si para todo $\epsilon > 0$, $\exists$ un conjunto abierto G tal que*

$$A \subset G \quad y \quad |G - A|_e < \epsilon$$

Si A es medible, pondremos $|A|_e = |A| =$ medida de A.

Consecuencias.

(1) Todo conjunto abierto A es medible (en este caso tome $G = A$).

(2) Si $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ son medibles entonces también lo son $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(3) Si A es medible entonces su complemento $\mathcal{C}A$ es también medible [como A es limitado podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que A está contenido en un cierto rectángulo R, y el complemento $\mathcal{C}A$ es tomado con respecto a este rectángulo (que no es único)].
Corolario. Todo conjunto cerrado es medible.

(4) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos medibles y disjuntos, y $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ entonces

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$$

(5) Si $A \subset B$ y ambos son medibles, entonces

$$|B - A| = |B| - |A|$$

También $|A| \leq |B|$.

(6) Si tenemos $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ donde cada uno de tales conjuntos son medibles, y si $A = \bigcup_n A_n$, entonces se tiene

$$|A| = \lim_{n\to\infty} |A_n|.$$

Si $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, todos medibles tal que $|A_n| < \infty$ para algún n; si $A = \bigcap_n A_n$ se tiene también $|A| = \lim_{n\to\infty} |A_n|$.

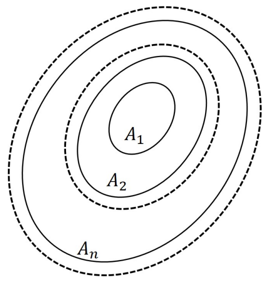


Figura 3.6: Idea de límite para determinar $|A|$.

Otra Alternativa.
Dado el conjunto limitado A, podemos considerar (sin pérdida de generalidad) que A esté contenido en el cuadrado unitario $R = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Si de un modo general A es un conjunto limitado cualquiera, entonces cuadriculamos el plano con los cuadrados unitarios $R_{ij} = \{(x, y)/i \leq x \leq i+1, j \leq y \leq j+1\}$. Luego tomemos $A \cap R_{ij} = A_{ij}$. Es cierto que $A = \bigcup_{i,j} A_{ij}$ y que A_{ij} está contenido en un cuadrado unitario. Así, diríamos que A es medible si A_{ij} es medible $\forall i_{ij}$ y pondríamos $|A| = \sum_{i,j} |A_{ij}|$ siempre que esta serie sea convergente.

Consideremos $A \subset R$. Veamos la otra alternativa. Sea $|A|_e$ la medida exterior de A [no está demás remarcar que la medida exterior de un conjunto limitado siempre existe]. Es obvio que $|R| = 1$. Considere el complemento de A (con respecto a R), $\mathcal{C}A$. Tome $|\mathcal{C}A|$. ¿qué significado gráfico tiene $|\mathcal{C}A|_e$?¿cómo lo relaciona con A?.

Tome $|R| - |\mathcal{C}A|_e$ ó $1 - |\mathcal{C}A|_e$ ¿qué significado daría Ud. a esta cantidad?

Definición 3.5. *Dado un conjunto A, definimos su* **medida interior** $|A|_i$ *al número* $|A|_i = 1 - |\mathcal{C}A|_e$.

Tarea 3.11. $|A|_i \leq |A|_e$.

Definición 3.6. *Diremos que un conjunto A es* **medible** *según Lebesgue, si* $|A|_i = |A|_e$. *El valor común se llama* **medida** *de A y es denotado con* $|A|$.

Otras Consecuencias.

(7) Si A es un rectángulo; entonces A es medible y $|A| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

(8) Un resultado es: "todo conjunto abierto limitado en el plano es la unión enumerable de rectángulos cerrados disjuntos". Así, si G es un conjunto abierto, $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ donde $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$. Luego podemos decir nuevamente que todo conjunto abierto es un conjunto medible. Pongamos $|G| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |R_i|$.

Conjuntos de Medida Nula.
Si A es un conjunto vacío, convendremos en considerar $|A| = 0$. En otras palabras $|\emptyset| = 0$. Sin embargo, existen conjuntos no vacíos B tal que se tiene $|B| = 0$.

Ejemplo 3.20. *Sea E un conjunto reducido a un punto, $E = \{a\}$. Verificar que $|E| = 0$.*

Solución. Al construir $|E|_e$ sentimos la sensación que podemos considerar rectángulos (en el cubrimiento S de E) de lados tan pequeños como se quiere. Notemos que podríamos considerar un solo rectángulo en este cubrimiento y luego ir reduciendo sus lados. En otras palabras podemos tomar rectángulos de lados de longitud $\sqrt{\epsilon}$ y por tanto $|R_i| = \epsilon$. De ello concluimos que $|E|_e = 0$. Por otro lado, $\mathcal{C}E$ es todo el cuadrado unitario menos el punto a, ¿qué podemos decir de $|\mathcal{C}E|$? sentimos que $|\mathcal{C}E|_e = 1$; así es en efecto. Luego, $|E|_i = 1 - |\mathcal{C}E|_e = 0$. $\therefore$ E es medible con $|E| = |E|_e = |E|_i = 0$.

El mismo argumento puede ser usado para probar que todo conjunto finito es medible y su medida es cero.

Tarea 3.12. *Si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ pruebe que A es medible y $|A| = 0$. En esta ruta se pueden encontrar conjuntos más "grandes" y que tienen aún medida cero ó nulo. Se verifica que todo conjunto enumerable es medible y que tiene medida nula. Si quitamos la condición de ser A limitado (lo que es posible) tendremos que:*

(a) el conjunto de lo números naturales y el de los números enteros son conjuntos medibles con medida cero.

(b) el conjunto $\mathbb{Q}$ de lo números racionales es medible y $|\mathbb{Q}| = 0$; este resultado, a diferencia de (a), es un tanto inesperado ya que $\mathbb{Q}$ es denso en la recta y podríamos esperar otra cosa. Por ejemplo, tome todos los números racionales en $[0, 1]$. Por la cantidad de este conjunto en $[0, 1]$ podríamos poner que su medida es 1.

¿Podrá un conjunto no enumerable tener medida nula? Acá la intuición no puede fallar. Se sabe que el conjunto de Cantor C es un conjunto perfecto y por tanto no enumerable. Además, C es un conjunto de medida nula!

Nota 3.1.

1. *Uno podría pensar que si un conjunto A es de medida nula, entonces no tiene importancia ó utilidad alguna. Esto es falso ya que estos conjuntos juegan un papel muy importante en la teoría de funciones y de la integral.*

   Por ejemplo, es usual identificarse a dos funciones "diferentes"si ellas difieren justamente sobre un conjunto de medida nula.

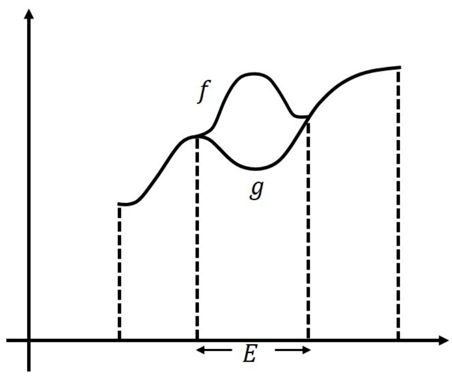
   

   Figura 3.7: $f = g$, salvo E donde $|E| = 0$.

   Así en el gráfico 3.7, si E es de medida nula, $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in E$ y solo para esos puntos. Entonces $f = g$, salvo E.
2. *En el plano, todo conjunto A formado por todos los puntos sobre una curva (ó segmento de recta) es un conjunto de medida nula. Esto nos permite decir que el rectángulo cerrado. $\{(x, y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ tenga la misma medida que el rectángulo $\{(x, y)/a < x < b, c < y < d\}$.*

   De un modo general, la medida del conjunto A con su curva frontera es igual a la medida de A sin tal curva.
3. *La clase de los conjuntos medibles extiende a la clase de los conjuntos abiertos (base en el estudio de la topología del plano). Vimos que la definición de conjunto medible implica de inmediato que todo conjunto abierto es medible (y de ello se deduce que los cerrados también lo son, así como las combinaciones con estos conjuntos). Pero en todos esos conjuntos pensamos que son de la forma general*  *Pero hemos visto que la clase de los conjuntos medibles incluye también a conjunto de la forma* *, y de muchas otras formas.*
4. *(Existencia de conjuntos no medibles según Lebesgue). Por lo dicho anteriormente, la clase de los conjuntos medibles según Lebesgue es muy amplia. Sin embargo, ¿todo conjunto es medible? La*

respuesta es negativa. Se puede construir conjuntos no medibles ($||_e \neq ||_i$); aún más, la clase de estos conjuntos no medibles es muy grande. Felizmente, la mayoría de los conjuntos que aparecen en el análisis que estudiamos, son medibles según Lebesgue.

3.8. Funciones Medibles. Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua $\Leftrightarrow$ para todo abierto U en $\mathbb{R}^2$ tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$. Si con las funciones medibles se pretende extender a la clase de funciones continuas, una definición análoga (en su estructura) es deseable. Esto es lo que se hará. Observamos que en la equivalencia anterior podemos reemplazar la palabra abierto por medible (¿porque?).

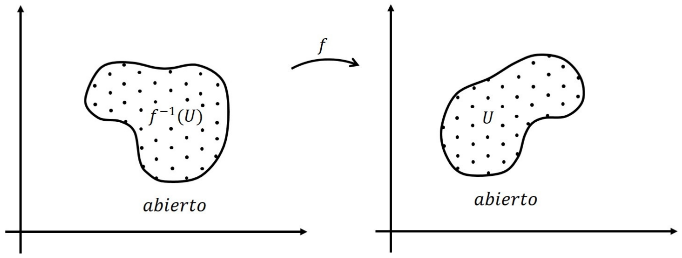


Figura 3.8: f es una función continua.

Pero, hay mas conjuntos medibles que conjuntos abiertos, así que la equivalencia sería cierto a medias. Esto precisamente exige ampliar a la clase de las funciones continuas.

Consideremos funciones de la forma $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ donde A es un conjunto medible. Sea y un número real finito; construyamos el conjunto $E(y) = \{x \in A/f(x) > y\}$.

Definición 3.7. *Decimos que f es una función medible si $E(y)$ es un conjunto medible para todo y.*

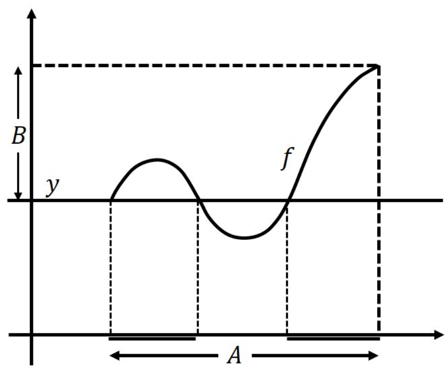


Figura 3.9: f es función medible.

Aclaración. Por costumbre (“ mala costumbre”) uno siempre hace el gráfico de una función continua; pero en general ello no es así (por ejemplo) dibuje la función “escalera”).

Veamos que está significando la definición. En ella está escondida la idea que hemos motivado antes. Así mirando la figura concluimos que $E(y) = f^{-1}(B)$. La definición dice que f es medible si $E(y)$ es medible, pero ¿quién es B, en este caso f es continua? es un intervalo ó rectángulo en $\mathbb{R}^1$, y por tanto B es medible. En otras palabras podemos decir (para este caso) que f es medible $\Leftrightarrow$ para B medible en $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible en $A \subset \mathbb{R}^2$. ¿Cómo es si f no es continua?

Ejemplo 3.21. *Sea la función escalera f definida sobre $A = [0, 4]$, y sea y tal como la figura. En este caso, $E(y) = \{x \in A/f(x) > y\} = [2, 4)$ y $B = \{2, 3\}$. Observamos que tanto B como $E(y)$ son conjuntos medibles y $E(y) = f^{-1}(B)$. Y podemos decir que la función “escalera.es una función medible (que no es continua).*

Observación 3.1. *Debemos remarcar que la definición de f medible exige $E(y)$ medible para todo y. No basta que para algunos y, $E(y)$ sea medible. Al variar y, los dos casos límites para $E(y)$ son:*

(i) $E(y) = \emptyset$, y $E(y)$ es medible, ¿cuándo ocurre esto?

(ii) $E(y) = A$, y $E(y)$ es medible, pues asumimos A medible, ¿cuándo ocurre esta situación?

Consecuencias.

(1) Toda función continua es medible.

Tarea 3.13. *Pruebe (1).*

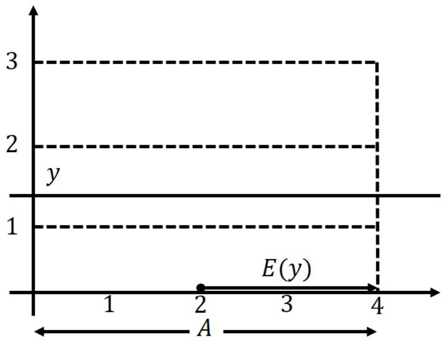


Figura 3.10: Función escalera.

(2) Existen funciones no continuas que son medibles (la función "escalera"). Todo ello nos permite entender que la clase de las funciones medibles es más amplia que la de las continuas.
Ejemplo 3.22. *Considere la función característica $\mathcal{X}_A$ de un conjunto $A \subset X$ (la recta o el plano).* $\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & ...x \in A \\ 0 & ...x \in X - A \end{cases}$. *Entonces $\mathcal{X}_A$ es medible $\Leftrightarrow$ A es medible.*
Solución. Observe que

$$\{x/\mathcal{X}_A(x) > y\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \geq 1 \\ A & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Si $f(x) = g(x)$ c.t.p. [esto significa que el conjunto de puntos donde las funciones no coinciden tienen medida nula] en A. Si f es medible, verifique que g también lo es.
(3) Si f y g son funciones medibles y c es una constante, entonces $f + c$, cf, $f + g$, f^2, fg, $\frac{f}{g}(g \neq 0)$ son también funciones medibles.
(4) Si $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... son funciones medibles, entonces $\overline{f}(x) = \sup_n\{f_n(x)\}$ y $\underline{f}(x) = \text{ínf}_n\{f_n(x)\}$ también lo son.
(5) Si f es medible, entonces también lo son $f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\text{máx}\{f(x), 0\}$.
(6) Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces también son funciones medibles: $\text{lím sup}_{n\to\infty} f_n(x)$ y $\text{lím inf}_{n\to\infty} f_n(x)$.
(7) Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones medibles tal que $\text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ en A, entonces $f(x)$ es una función medible.
(8) Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones medibles sobre A Pongamos $B = \{x \in A/f_n(x)$ converge $\}$. Se tiene que B es un conjunto medible.

Tarea 3.14. *(Opcional). Verifique (3).*

3.9. La Integral de Lebesgue. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible y $f : A \to \mathbb{R}^1$ una función medible. Supongamos $f \geq 0$; el caso general de signo arbitrario sigue considerando la descomposición $f = f^+ - f^-$ donde $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ y $f^-(x) = (-f(x), 0)$ [haga los gráficos de estas funciones y verifique que tal descomposición]. Observe que $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$. Definimos:

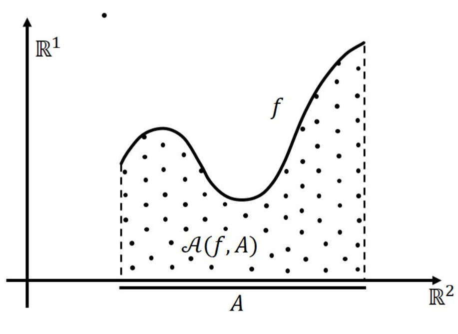


Figura 3.11: Área de f.

área de f= $\mathcal{A}(f, A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 / x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Aún cuando la noción de área en este contexto es un conjunto y no un número, ello no debe llevarnos a confusiones.
gráfico de f= $\Gamma(f, A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 / x \in A, y = f(x)\}$.

Definición 3.8. *Si el conjunto $\mathcal{A}(f, A)$ es medible en $\mathbb{R}^3$, definimos* **la integral de** f **sobre** A *siendo la medida de tal conjunto. Simbólicamente escribimos $|\mathcal{A}(f, A)|_{\mathbb{R}^3} = \int_A f(x)dx$. Observemos que $0 \leq \int_A f(x)dx \leq \infty$ (ya que podría suceder $|\mathcal{A}(f, A)| = \infty$). Si $|\mathcal{A}(f, A)| < \infty$ decimos que f es una* **función integrable** *según Lebesgue y escribiremos $f \in L(A)$.*

Lema 3.1. *Si $f(x) = c > 0$ sobre A, entonces $\mathcal{A}(f, A)$ medible y $\int_A f dx = c|A|$.*

Solución. Asumimos $f(x) < \infty$ y $|A| < \infty$ (ya que en los casos extremos $f(x) = \infty$ y $|A| = 0$ ó $f(x) = 0$ y $|A| = \infty$ se pondrá por definición $\int_A f dx = 0$). Sea:

(i) A **un rectángulo**. Entonces $\mathcal{A}(f, A)$ es un rectángulo en $\mathbb{R}^3$ y $\int_A f dx$ es el volumen familiar $c|A|$.

(ii) A **un conjunto abierto**. En este caso tenemos $A = \bigcup_k I_k$ donde $\{I_k\}$ es una familia de rectángulos parcialmente cerrados, disjuntos y por lo tanto tenemos $\mathcal{A}(f, A) = \bigcup_k \mathcal{A}(f, I_k)$ donde los $\mathcal{A}(f, I_k)'s$ son disjuntos. Además

$$\left|\bigcup_k \mathcal{A}(f, I_k)\right|_{\mathbb{R}^3} = \sum_k |\mathcal{A}(f, I_k)|_{\mathbb{R}^3} = \sum_k \int_{I_k} f dx = (\text{caso (1)}) = \sum_k c|I_k| = c|A|.$$

(iii) $|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$. En esta situación cubramos A con un conjunto abierto G tal que $|G| < \epsilon$. Entonces [considerando que en general si $X \subset Y$ entonces $\int_X f dx \leq \int_Y f dx$, lo que sigue de la definición de integral]: $\int_A f dx \leq \int_G f dx = c|G| < c\epsilon$, de donde $\int_A f dx = 0 = c|A|$. ¿ Donde se usó (ii)?

(iv) A **es un conjunto** G_δ. Esto significa que A es una intersección enumerable de conjuntos abiertos. Así, $A = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n \cap ...$, pero (sin pérdida de generalidad) podemos asumir que $G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_n \supset ...$ (en caso contrario construya $G_1' = G_1, G_2' = G_1 \cap G_2$, ..., etc). Entonces tenemos $\mathcal{A}(f, A) = \bigcap_k \mathcal{A}(f, G_k)$ y $|\mathcal{A}(f, A)| = \text{lím}_{k\to\infty} |\mathcal{A}(f, G_k)| = \text{lím}_{k\to\infty} c|G_k| = c|A|$

(v) A **es medible**. En este caso usamos la siguiente caracterización: "A es medible $\Leftrightarrow A = H - Z$, donde H es un conjunto G_δ y $|H| = 0$". Luego, $\mathcal{A}(f, A) = \mathcal{A}(f, H) - \mathcal{A}(f, Z)$ Y $|\mathcal{A}(f, A)| = |\mathcal{A}(f, H)| - |\mathcal{A}(f, Z)|$ =(considerando que $\mathcal{A}(f, Z) = 0$)= $|\mathcal{A}(f, H)| = c|H| = c|A|$ ¿porqué?

Definición 3.9. Función Simple. *Una función f definida sobre A es llamada* **simple** *si $f(A_i) = a_i$, a_i es una constante, donde $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. [la función "escalera" es una función simple].*

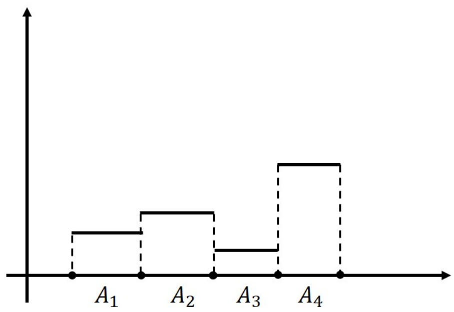


Figura 3.12: Una función simple.

Tarea 3.15. *Si f es simple sobre A verifique que $f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$ donde $\mathcal{X}_{A_i}$ es la función característica de A_i.*

Lema 3.2. *Si f es simple sobre un conjunto medible A entonces existe $\int_A f dx$ y se tiene $\int_A f dx = \sum_{i=1}^k a_i |A_i|$.*

Solución. Observe que si f es simple entonces f es medible, (¿porqué?), lo que implica que A_i sea medible $\forall\ i = k$. Luego, $\mathcal{A}(f, A) = \mathcal{A}(f, \bigcup_i A_i) = \bigcup_i \mathcal{A}(f, A_i)$, de donde $|\mathcal{A}(f, A)| = \sum_{i=1}^k |\mathcal{A}(f, A_i)| = \sum a_j |A_j|$ (por lema 1). Esto es, $\int_A f dx = \sum_{i=1}^k a_i |A_i|$.

Teorema 3.1. *Si f es una función medible sobre un conjunto medible A, entonces $\mathcal{A}(f, A)$ es un conjunto medible en $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, bajo esas hipótesis, existe la integral de Lebesgue $\int_A f dx$ y la definición dada adquiere consistencia.*

Solución. Usamos el siguiente resultado: "si f es una función medible sobre A, entonces $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$, donde f_n es una función simple sobre A. Además, como asumimos $f \geq 0$, podemos tomar $\{f_n\}$ creciente". Asimismo se verifica que "$|\Gamma(f, A)|_{\mathbb{R}^3} = 0$".

Considere $\lim f_n = f$ donde f_n es simple y la sucesión $\{f_n\}$ es creciente. Entonces se tiene $\mathcal{A}(f,A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(f_n,A) \cup Z$, donde $Z \subset \Gamma(f,A)$ y $\therefore |Z| = 0$. Por lo tanto existe $|\mathcal{A}(f,A)|$ ya que $\mathcal{A}(f,A)$ es la reunión enumerable de conjuntos medibles mas un conjunto de medida nula.

Tarea 3.16. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *pruebe que* $\int_A f dx \leq \int_A g dx$.

Tarea 3.17. *Si* $0 \leq f \leq M$ *sobre A, entonces* $\int_A f dx \leq M|A|$.

Ejemplo 3.23. *Si* $A = \bigcup_j A_j$ *donde* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *entonces* $\int_A f dx = \sum_j \int_{A_j} f dx$.

Solución. $\mathcal{A}(f,A) = \mathcal{A}(f, \bigcup_j A_j) = \bigcup_j \mathcal{A}(f,A_j)$, de donde $|\mathcal{A}(f,A)| = \sum_j |\mathcal{A}(f,A_j)| = \sum_j \int_{A_j} f dx$.

Ejemplo 3.24. *Sea* $f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_k(x) \leq ...$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. *Entonces* $\int_A f dx = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k dx$. *En otras palabras es permitido el intercambio de límite* $\int_A \lim_{k\to\infty} f_k dx = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k dx$.

Solución. Se tiene $\mathcal{A}(f,A) = \bigcup_k \mathcal{A}(f_k,A) + Z$, donde $Z \subset \Gamma(f,A)$. Luego, $\int_A f dx = |\mathcal{A}(f,A)| = \lim_{k\to\infty} |\mathcal{A}(f_k,A)| = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k dx$ [Es conveniente que el lector haga un gráfico a fin de interpretar este resultado].

Ejemplo 3.25. $\int_A (f+g) dx = \int_A f dx + \int_A g dx$.

Solución.

1° **Supongamos f y g funciones simples.**
Para f asumamos la descomposición de A: A_1, A_2, ..., A_k con valores a_1, a_2, ..., a_k.
Para g asumamos la descomposición de B: B_1, B_2, ..., B_m con valores b_1, b_2, ..., b_m.
De esta manera $f+g$ toma los valores $a_i + b_j$ sobre $A_i \cap B_j$. Luego tenemos $\int_A (f+g) dx = \sum_{i=1,...,k j=1,...,m} (a_i+b_j)|A_i \cap B_j| = \sum_{i=1,...,k} a_i \sum_{j=1,...,m} |A_i \cap B_j| + \sum_{j=1,...,m} b_j \sum_{i=1,...,k} |A_i \cap B_j| = \sum_i a_i |A_i| + \sum_j b_j |B_j| = \int_A f dx + \int_A g dx$.

2° **f y g son medibles arbitrarios**. Se tiene $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$, donde f_n y g_n son simples y las sucesiones son crecientes. Entonces $f + g = \lim(f_n + g_n)$ y por el ejemplo 5 tenemos $\int_A (f+g) dx = \lim_{n\to\infty} \int_A (f_n+g_n) dx = \lim_{n\to} \int_A f_n dx + \lim_{n\to} \int_A g_n dx = \int_A f dx + \int_A g dx$.

Corolario 3.2. $\int_A \sum_{j=1}^{n} f_j dx = \sum_{j=1}^{n} \int_A f_j dx$. De un modo más general tenemos el siguiente intercambio de límite.

Ejemplo 7. $\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k dx$.

Solución. Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ y $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ entonces $s_1(x) \leq s_2(x) \leq ... \leq s_k(x) \leq ... \to f(x)$, luego por ejemplo 5, $\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k dx = \int_A f dx = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n dx = \lim_{n\to} \int_A \sum_{k=1}^{n} f_k dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k dx$.

Lema de Fatou. Si $f_n \geq 0$, $\int_A f_n dx \leq M$, $\forall n$ y $f_n \to f$ a.e. (salvo en un conjunto de medida nula). Entonces se tiene $\int_A f dx \leq M$. Mas generalmente, si $f_n \geq 0$ y $\int_A f_n dx \leq M$, $\forall n$, entonces $\int_A \lim_{n\to\infty} f_n dx \leq M$.

Este lema usaremos en la prueba del teorema más importante de la integral de Lebesgue

Teorema 3.2. El Teorema Dominado de Lebesgue.*Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles tales que* $0 \leq f_n(x) \leq \varphi(x)$, *con* $\varphi(x) \in L(A)$. *Si* $f_n(x) \to f(x)$ *a.e., entonces* $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dx = \int_A f dx$. *Esto es, vale el intercambio de límites* $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n dx$.

Solución. El lema de Fatou implica $\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n dx$, de donde considerando la hipótesis $\int_A f dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n dx$. $(*)$

Por otro lado, desde que $\varphi - f_n \leq 0$ por Fatou tenemos $\int_A (\varphi - f) dx = \int_A \lim(\varphi - f_n) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A (\varphi - f_n) dx = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_A \varphi dx - \int_A f_n dx \right) = \int_A \varphi dx - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n dx$, de donde $\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n dx \leq \int_A dx$ $(**)$.

De $(*)$ y $(**)$ se tiene $\int_A f dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n dx \leq \int_A f dx$, de donde $\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n dx = \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dx = \int_A f dx$.

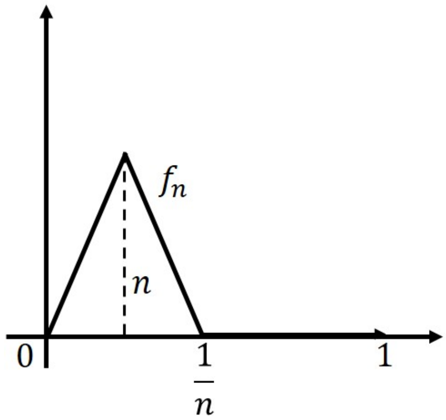
Observación. La condición $f_n \leq \varphi, \in L(A)$, es esencial, ya que si f_n es definida según la figura, entonces vemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Pero (con $A = [0,1]$) $\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dx \neq \int_A \lim_{n\to\infty} f_n dx = 0$.

El caso de f de signo arbitrario. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ medible y f medible sobre A de signo arbitrario. Como dijimos $f = f^+ - f^-$ donde $f^+(x) = sup(f(x), 0)$, $f^-(x) = sup(-f(x), 0)$. Se define la integral de Lebesgue $\int_A f dx$ siendo: $\int_A f(x) dx = \int_A f^+(x) dx - \int_A f^-(x) dx$, siempre que estas dos integrales no sean infinitas al mismo tiempo. [observe que $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$ y tenemos la teoría anterior].

Consecuencia Importante. $\int_A f dx < \infty \Leftrightarrow \int_A f^+ dx < \infty$ y $\int_A f^- dx < \infty \Leftrightarrow \int_A (f^+ + f^-) dx < \infty \Leftrightarrow \int_A |f| dx < \infty$. **Conclusión**. f es integrable sobre $A \Leftrightarrow |f|$ es integrable sobre A.

Nota 3.2. *Para este caso general se puede probar los resultados establecidos en el caso* $f \geq 0$ *(y otros resultados que no hemos mencionado).*

Otra Presentación de la Integral de Lebesgue. Sea f una función medible, que asumimos $f \geq 0$ por simplicidad, y definida sobre un conjunto medible A. Se desea dar un significado (geométrico) de $\int_A f dx$. A diferencia de lo hecho por Riemann, Lebesgue considera una partición $P = \{y_0 = 0 < y_1 < y_2 < ... < y_n < ...\}$ del eje $-Y$.



h!

Figura 3.13: $f_n \leq \varphi$, $\varphi \in L(A)$ es esencial.

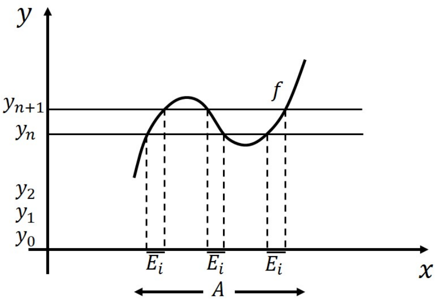


Figura 3.14: Visión de la Integral de Lebesgue.

[Estamos considerando que f no es necesariamente limitado]. Consideremos la norma $||P|| = \sup_n (y_{n+1} - y_n)$. Para $\forall n$, formamos el conjunto $E_n = \{x \in A / y_n \leq f(x) < y_{n+1}\}$. Estos conjuntos son disjuntos entre si. Construyamos ahora las sumas inferior y superior de Lebesgue, $\underline{S_P} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n |E_n|$ y $\overline{S_P} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} |E_n|$.

Se tiene el siguiente

Teorema 3.3. $\lim_{||P|| \to 0} \underline{S_P} = \int_A f dx = \lim_{||P|| \to 0} \overline{S_P}$ *siempre que* $|A| < \infty$.

Nota 3.3. *El hecho de que en las sumas inferior y superior se considere la medida del conjunto* E_n*, está lo importante de la definición de Lebesgue, a diferencia con la idea de Riemann.*

A esta altura ya podemos comprender porqué la integral de Lebesgue es más amplia. Esta no funciona para toda función medible como ya hemos visto al tener la función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ es racional} \\ 0 & x \text{ es irracional} \end{cases}$, la que no es integrable según Riemann [en esta parte es bueno meditar en el contenido del Teorema 3: " si f es medible entonces existe la integral de Lebesgue $\int_A f dx$"]. La dificultad con la función de Dirichlet, según Riemann, se debe a que el número de puntos de discontinuidad de f es "muy numeroso". Al considerar la suma $\sum f(\epsilon_i)(x_{i+1} - x_i)$ lo que se hace es considerar valores de f para x_s' muy cercanos, además la diferencia de tales valores debe ser también pequeño. Esto es factible hacerse para funciones continuas ó para funciones cuyos puntos de discontinuidad no sea "muy numeroso"(lo que no ocurre con la función de Dirichlet). En cambio con la integral de Lebesgue los puntos $x \in A$ son agrupados, no por su cercanía, sino por la cercanía de los valores de la función en esos puntos (en el eje $-Y$). (Esto es lo esencial!). Además la noción de medida se puede formular en términos abstractos y se tiene la integral de Lebesgue para funciones en espacios muy generales, en donde ya la integral de Riemann no tiene sentido alguno.

Tarea 3.18. *Si* f *es la función de Dirichlet sobre* $[0, 1]$ *existe la integral de Lebesgue* $\int_{[0,1]} f dx$ *y su valor es cero.*

[Sugerencia: Si $E = \{x/x$ racional en $[0, 1]\}$ observe que $f(x) = \mathcal{X}_E(x)$, $x \in [0, 1]$. Además $|E| = 0$].

La integral de Lebesgue es una extensión de la de Riemann, entre ellos existe la siguiente comparación: "si la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ existe, entonces f es integrable según Lebesgue sobre $[a, b]$ y se tiene $\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$".

4. Algunos Comentarios Finales. . Desde la época de Newton y de Leibniz la idea de integral contribuyó mucho en la interpretación de algunas leyes físicas y filosóficas. No olvidemos que Arquímedes, en la lejana Grecia, ya tuvo la idea, y la usó, de esta importante noción matemática. En el siglo XVIII, aún con los defectos de rigor que tenía el cálculo, la integral contribuyó mucho en las investigaciones sobre los fenómenos naturales y así llegamos a inicios del siglo XIX cuando el trabajo de Fourier sobre las series trigonométricas contribuyó aún más a clarificar las nociones de función y de integral, entre otras ideas. A. Cauchy fue el primero en dar consistencia a la noción de integral para funciones continuas; luego B. Riemann dio un paso más, al considerar funciones limitadas discontinuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, donde el conjunto de puntos de discontinuidad tienen medida cero. Desde la época de Newton un problema fue establecer la relación entre la derivada y la integral, lo que fue conseguido con el célebre teorema fundamental del cálculo: “si para la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ existe $F'(t)$ y $F'(t) = f(t)$, donde $f(t)$ es integrable, entonces $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$”.

Observemos algo esencial: la integrabilidad de la derivada $F'(t)$ es inevitable! ; esto motivaría nuevas investigaciones para considerar una integral donde este requisito sea alcanzado de una forma natural. La integral de **Henstock-Kurzweil** es la integral que resuelve este problema, la que presentaremos en la parte II de este artículo, entre otras propuestas de integrales en diferentes contextos.

Mucho se ha escrito sobre la integral de Riemann y de Lebesgue; el lector interesado en ver mayores detalles sobre este tema, y otros, pueden consultar [26],[25], [14], [22], [5], [12], [10], [15], [17],[18]. El lector es invitado a visitar la Biblioteca de Ciencias-PUCP para mayores fuentes.

Nota 4.1. *En la* **parte II** *se estudian las ideas y métodos de las integrales de Darboux, Young, Lebesgue-Stieltjes, Radon, Denjoy, Perron, Daniell, Haar y Kurzweil-Henstock.*
En la **parte III** *(en elaboración) se presentarán una visión de la integral de McShane, la C-integral, la integral de Bochner, la integración abstracta, la integral sobre variedades, la integral de Riemann: una visión moderna.*

ORCID and License
Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] Aleksandrov A, Kolmogorov A, Laurentiev M. La Matemática: su contenido, métodos y significado. Vol 3. Madrid: Alianza Editorial; 1973.
[2] Apostol T. Mathematical Analysis. Addison-Wesley Publishing Company; 1957.
[3] Avila G. Evolução dos conceitos de função e de integral. Matemática Universitaria. Soc. Bras. de Matem. No.1; 1985.
[4] Bárcenas D. La integral de Lebesgue un poco más de cien años después. Boletín Asociación Matemática Venezolana. 2006;Vol XIII.
[5] Bourbaki N. Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Editorial; 1972.
[6] Burton D. The history of mathematical. An introduction. McGraw Hill; 2006.
[7] Courant R, Robbins H. ¿Qué son las matemáticas?. Fondo de Cultura Económica; 2010.
[8] Fulks W. Advanced Calculus. An introduction to analysis. John Wiley; 1962.
[9] González PM. Arquímedes y los orígenes del cálculo integral. Ciencia Abierta. 2008; 24.
[10] De Guzmán M, Rubio B. Integración: teoría y técnicas. Edit. Alhambra; 1979.
[11] Hawking S. Dios creó los números. Crítica; 2010.
[12] Jahnke H. A history of analysis. History of Mathematics. Vol. 24. AMS; 2003.
[13] Kline M. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial; 2012.
[14] Medvedev F. Scenes from the history of real functions. Birkhäuser Verlag; 1991.
[15] Natanson I. Theory of functions of a real variable. Vol. I-II. Frederick Ungar Publishing Co.; 1961. Dover Pub; 2016.
[16] Navarrete H. Teoría de la medida. En: Grandes ideas de la matemática. Eslovenia; 2019.
[17] Ortiz A. Algunas ideas sobre la génesis del cálculo infinitesimal. Selecciones Matemáticas. 2021; Vol.8(1):173-195.
[18] Ortiz A. Algunas ideas sobre la evolución del análisis matemático real. Selecciones Matemáticas. 2021Vol.8(1):196-217.
[19] Ortiz A. La Matemática a través de clásicas áreas. Edición previa; PUCP-UNT Vols. 2 y 3. 2016-2017.
[20] Ortiz A. Análisis real-funcional. Notas de Matemáticas No1. Universidad Nacional de Trujillo. Perú. 1986.
[21] Ortiz A. Historia de la Matemática. La Matemática en la antigüedad. Vol. 1. UNT-PUCP. Lima. Perú. 2005.
[22] Saks S. Theory of the integral. 2nd ed. Dover Publications, INC; New York; 1964.
[23] Stahl S. Real analysis. A historical approach. John Wiley, Sons; New York; 1999.
[24] Torchinsky A. Problems in real and functional analysis. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 166. AMS; 2015.
[25] Torchinsky A. Real variables. Addison-Wesley Publishing Company; N.Y.; 1988.
[26] Wheeden RL, Zygmund A. Measure and integral. An introduction to real analysis. Marcel Dekker, INC; N.Y.; 1977.