



Hopf bifurcation in an autonomous prey-predator system with logistic growth and Holling type II functional response

Bifurcación de Hopf en un sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II

Danny Estefany Paz Vidal^{ID} and Joan Esteban Salazar Gordillo^{ID}

Received, Jun. 18, 2023;

Accepted, Aug. 30, 2023;

Published, Dec. 27, 2023



How to cite this article:

Paz Vidal D, Salazar G. J. *Hopf bifurcation in an autonomous prey-predator system with logistic growth and Holling type II functional response*. *Selecciones Matemáticas*. 2023;10(2):444-461. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2023.02.16>

Abstract

The autonomous prey-predator system with logistic growth and Holling type II functional response, which describes the population dynamics of two species. In this study, the equilibrium points of the system (1.1) were identified. Two saddle-node points and one non-trivial P_3 equilibrium point were found. For this latter point, the conditions were determined for the Jacobian matrix of (1.1), evaluated at P_3 , to have a pair of purely complex eigenvalues (necessary condition for the Hopf bifurcation). Through this analysis, values c_0, δ_0, k_0 were found that satisfied these conditions. Subsequently, each of these values is considered as a bifurcation parameter value, and the remaining two are considered as control parameters, under the assumptions of the normal form theorem for the Hopf bifurcation, it's concluded that by varying these values slightly, the system undergoes the Hopf bifurcation. Finally, the first Lyapunov coefficient was calculated to determine the conditions under which the system exhibits supercritical, subcritical, and degenerate Hopf bifurcation.

The analysis was supported by using MAPLE and MATLAB software, which enabled graphical visualization of the obtained results.

Keywords . Dynamical system, Hopf bifurcation, equilibrium point, Hartman-Grobman theorem, phase portrait, logistic curve, Holling type II functional response.

Resumen

El sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II describe la dinámica poblacional de dos especies. En este estudio se identifican los puntos de equilibrio del sistema (1.1), encontrando dos puntos silla-nodo y un punto de equilibrio P_3 no trivial. Se determina las condiciones para que la matriz jacobiana de (1.1), evaluada en P_3 , tenga un par de valores propios complejos puros que es la condición necesaria para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf; lo cual permite encontrar los valores c_0, k_0, δ_0 que cumplen esta condición. Se considera cada uno de estos valores como parámetro de bifurcación, y bajo las hipótesis del teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf, se concluye que para cada uno de los valores c_0, k_0, δ_0 el sistema (1.1) es topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf. Por último, se calcula el primer coeficiente de Lyapunov para determinar el tipo de bifurcación de Hopf (supercrítica, subcrítica y degenerada) que admite el sistema en cada uno de los casos.

Para respaldar los resultados teóricos encontrados se usa MAPLE y MATLAB, los cuales permiten confrontar los resultados. En particular, el uso de MATLAB permitió visualizar los resultados de forma

*Universidad del Cauca, Colombia. **Correspondence author** (danistephanie@unicauca.edu.co).

†Universidad del Cauca, Colombia. (joansalg@unicauca.edu.co).

gráfica. Palabras clave. Sistema dinámico, bifurcación de Hopf, punto de equilibrio, teorema de Hartman-Grobman, retrato fase, curva logística, respuesta funcional de Holling tipo II.

1. Introduction. Desde el siglo XX, las matemáticas empezaron a ser aplicadas en diversos campos, especialmente en la biología, despertando gran interés en la comunidad científica [1]. Los modelos matemáticos son especialmente útiles para estudiar el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos, es decir, fenómenos que evolucionan con el tiempo. Estos sistemas pueden clasificarse como discretos o continuos, y estos últimos son modelados por ecuaciones diferenciales (que involucran parámetros reales).

La bifurcación de Hopf es aplicada en física, biología, química y otros campos científicos y es un tipo de bifurcación muy importante en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos, ya que se caracteriza por el cambio de estabilidad de un punto de equilibrio (atractor o repulsor) cuando se perturba un parámetro (de bifurcación) del sistema y además, permite estudiar el comportamiento de las soluciones periódicas aisladas (ciclos límites). En particular, es de gran interés en la dinámica de poblaciones, donde las interacciones entre las especies pueden dar lugar a ciclos límites que representan oscilaciones[2].

El enfoque de este trabajo está en el estudio de sistemas dinámicos continuos, especialmente en el sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II. Dicho modelo descrito en (1.1), el sistema es modelado por un par de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{cx_1x_2}{1+x_1} \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta x_2 + \frac{cx_1x_2}{1+x_1}, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde c, k, δ son parámetros positivos y $x_1(t), x_2(t)$ representan las densidades poblacionales de presas y depredadores respectivamente en el instante t , respectivamente, y, δ, c, k son parámetros positivos, los cuales representan la interacción de las especies mencionadas: k es la capacidad de carga del entorno para la presa, δ es la tasa natural de muerte del depredador, c es la eficiencia de la caza de los depredadores y $\frac{x_1}{1+x_1}$ representa la respuesta funcional del depredador a la densidad de presas [3] y [4].

En el análisis cualitativo los parámetros k, c son especialmente importantes; el parámetro c representa la capacidad de los depredadores para capturar y consumir presas, y está relacionada con la tasa de encuentro y la tasa de consumo de presas por parte de los depredadores. Un valor alto de c indica que los depredadores son más eficientes para capturar presas, mientras que un valor bajo indica una menor eficiencia de caza. La eficiencia de caza es importante porque determina la tasa a la cual los depredadores pueden reducir la población de presas. Si los depredadores son ineficientes para cazar, es posible que las presas se multipliquen sin control y agoten rápidamente los recursos disponibles, lo que podría llevar a una disminución de ambas poblaciones. El parámetro k representa el tamaño máximo de la población de presas que el ecosistema puede mantener en equilibrio a largo plazo, teniendo en cuenta todos los recursos disponibles. Si la población de presas excede la capacidad de carga, los recursos pueden escasear y las presas pueden morir por falta de alimento, afectando por consiguiente a la población de depredadores. .

El análisis de (1.1) puede revelar comportamientos interesantes, como ciclos límites, es decir, fluctuaciones periódicas¹, estabilidad de los puntos de equilibrio y bifurcaciones, lo que ayuda a comprender mejor la dinámica de los ecosistemas y las sugerencias para la conservación de las especies. El objetivo de este estudio es resaltar la importancia del análisis cualitativo de este sistema presa-predador. Se buscarán las condiciones bajo las cuales el sistema experimenta una bifurcación de Hopf. Para lograr esto, cada parámetro del sistema se considerará como un parámetro de bifurcación, mientras los dos restantes serán considerados parámetros de control, y se analizarán las condiciones necesarias para que en cada caso este sistema esté sujeto a dicha bifurcación. El estudio cualitativo de este modelo proporciona información valiosa para comprender cómo las perturbaciones en el entorno y los cambios en los parámetros pueden afectar a las poblaciones de presas y depredadores. Es así que estudiar la presencia y estabilidad de estos ciclos es esencial para comprender los patrones de oscilación y cómo pueden influir en la dinámica del ecosistema, contribuyendo a una mejor comprensión de la estabilidad y evolución de las poblaciones en el mismo.

A lo largo de este trabajo, se utilizará el análisis cualitativo, como el análisis de estabilidad, el cálculo de puntos de equilibrio y la teoría de bifurcaciones, y el software MATLAB será de apoyo, para mostrar a través de los retratos de fases el análisis obtenido sobre la dinámica de este sistema. Este análisis permitirá identificar para qué valores de los parámetros en (1.1) se producen cambios significativos en la dinámica de las poblaciones.

Para llevar a cabo los objetivos propuestos se expondrán conceptos de la teoría de sistemas dinámicos y bifurcación de Hopf, estos han obtenidos principalmente de [5] y [6].

¹ Patrón de variación que se repite de manera regular y predecible a lo largo del tiempo

2. Preliminares. Teorema 2.1 (Traza-Determinante).

Sea $X = \mathbb{R}^2$ y el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in X, \tag{2.1}$$

para determinar el equilibrio del sistema, sea $\Delta = \det(A)$ y $\sigma = \text{tr}(A)$. Su ecuación característica está dado por

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad \text{con valores propios} \quad \lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}.$$

De $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\Delta = \lambda_1\lambda_2$:

1. Si $\Delta < 0$, entonces (2.1) tiene un punto silla-nodo en el origen.
2. Si $\Delta > 0$ y $\sigma^2 - 4\Delta \geq 0, \sigma \neq 0$, entonces (2.1) tiene un nodo en el origen.
3. Si $\Delta > 0$ y $\sigma^2 - 4\Delta < 0, \sigma \neq 0$ entonces (2.1) tiene un foco en el origen.
4. Si $\Delta > 0$ y $\sigma = 0$, entonces (2.1) tiene un centro en el origen.

Se tiene en 2 y 3 estabilidad (resp. inestabilidad) en x^* si $\sigma < 0$ (resp. $\sigma > 0$).

Definición 2.1 (Sistemas topológicamente equivalentes).

Sea $E \subset X = \mathbb{R}^n$ y los sistemas autónomos

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in E, \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = G(x), \quad x \in E, \tag{2.3}$$

con $F, G \in C^1(E)$, con flujo φ_t y ϕ_t respectivamente. Se dice que (2.2) y (2.3) son topológicamente equivalentes en el equilibrio $x^* = \mathbf{0}$ si existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$, donde U y V son abiertos que contienen al origen, tal que $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y los dos sistemas dinámicos conservan la estabilidad y dirección de las órbitas alrededor de los puntos de equilibrio. Es decir, si una trayectoria se dirige de x_1 a x_2 en U , entonces su imagen bajo H se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V .

$$H(\varphi(x_0)) = \phi(H(x_0)), \quad x(t_0) = x_0 \in U \subset X, t_0 \in I(x_0).$$

Es decir las curvas solución de los sistemas, parametrizadas por el tiempo, conservan la dirección de flujo.

Definición 2.2 (Sistemas orbitalmente equivalentes).

Los sistemas autónomos (2.2) y (2.3) con $x, y \in X = \mathbb{R}^n$ son orbitalmente equivalentes si existe una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave (diferenciable) y positiva ($u(x) > 0$), tal que

$$F(x) = u(x)G(x), \quad \forall x \in X.$$

Teorema 2.2 (Forma normal de la bifurcación de Hopf).

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Suponga que existe un punto $x^* \in \mathbb{R}^2$ y un parámetro α_0 tal que

H.1 (Condición de equilibrio)

$$F(x^*, \alpha_0) = \mathbf{0}.$$

H.2 (Condición de bifurcación)

$$A(\alpha_0) = DF(x^*, \alpha_0),$$

tiene un par de valores propios imaginarios puros.

H.3 (Condición de transversalidad)

$$\frac{d}{d\alpha}(\text{Re}(\lambda(\alpha)))|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

donde $\lambda(\alpha)$ es un valor propio de $DF(x^*)$.

Tesis: Existe un cambio de coordenadas y parámetros que transforma al sistema en

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \beta x_1 - x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_1, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \beta x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Lema 2.1. Al introducir la variable compleja $z = x_1 + ix_2$, el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\alpha)\mathbf{x} + \hat{F}(\mathbf{x}, \alpha), \quad A(\alpha) = DF(\mathbf{x}^*, \alpha); \quad \alpha = 0 \quad (2.6)$$

puede ser escrito para $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño como una sola ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

donde $g = o(|z|^2)$ es una función suave de (z, \bar{z}, α) , dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle \mathbf{p}(\alpha), \hat{F}(z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha), \alpha) \rangle,$$

y \mathbf{p}, \mathbf{q} son vectores propios asociados a los valores propios de $\lambda(\alpha), \bar{\lambda}(\alpha)$ de $A(\alpha)$.

Demostración: Sea la matriz jacobiana $A(\alpha)$ en (2.10) con valores propios complejos

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha).$$

Sea $\mathbf{q}(\alpha) = (q_1(\alpha), q_2(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$ el vector propio correspondiente al valor propio $\lambda(\alpha)$

$$A(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) = \lambda(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \quad (2.7)$$

y

$$A(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \quad (2.8)$$

y sea $\mathbf{p}(\alpha) = (p_1(\alpha), p_2(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$ el vector propio de la matriz transpuesta $A^T(\alpha)$ correspondiente al valor propio $\bar{\lambda}(\alpha)$,

$$A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha). \quad (2.9)$$

Como $A(\alpha)$ y $A^T(\alpha)$ tienen la misma traza y determinante se tiene que su ecuación característica coincide, por tanto $\lambda(\alpha), \bar{\lambda}(\alpha)$ son los valores propios de ambas matrices.

Ahora, por definición de producto interno en \mathbb{C}^2 se tiene que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2.$$

Si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ entonces \mathbf{p} es un vector propio de $A(\alpha)$ asociado a $\bar{\lambda}$, esto es

$$A(\alpha)\mathbf{p}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha). \quad (2.10)$$

De sumar (2.9) y (2.10) se tiene que

$$(A + A^T)\mathbf{p}(\alpha) = 2\bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha).$$

De donde $2\bar{\lambda}(\alpha)$ es un valor propio asociado a $A + A^T$. Esto es una contradicción puesto que $A + A^T$ es simétrica de valores reales, por tanto sus valores propios son reales. Luego $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \neq 0$, así es posible normalizar \mathbf{p} respecto a \mathbf{q} , esto es

$$\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle = 1$$

Ahora, cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado de manera única, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño como $\mathbf{x} = z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha)$ con $z = \langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}$.

En efecto

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle &= \langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = z + \bar{z}\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle, \end{aligned}$$

puesto que $\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle = 1$. Se verificará que $\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = 0$.

De (2.9), (2.8) se tiene respectivamente

$$\mathbf{p}(\alpha) = \frac{A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}, \quad \bar{\mathbf{q}}(\alpha) = \frac{A(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}.$$

Así

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle &= \left\langle \frac{A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}, \frac{A(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle \bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \frac{\bar{\lambda}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\left(1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}\right) \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = 0.$$

Como $\lambda(\alpha) \neq \bar{\lambda}(\alpha)$, para $\|\alpha\|$ suficientemente pequeño, entonces

$$\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = 0, \quad \text{luego} \quad \langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Finalmente de (2.10) y $z = \langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{x} \rangle$ se tiene que una variable compleja z satisface

$$\dot{z} = \langle \mathbf{p}(\alpha), \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} + \hat{F}(\mathbf{x}, \alpha) \rangle = \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), \hat{F}(\mathbf{x}, \alpha) \rangle.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)[z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha)] \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)z\mathbf{q}(\alpha) + A(\alpha)\bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)z\mathbf{q}(\alpha) \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{z}\bar{\lambda}(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), \lambda(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \rangle \\ &= z\lambda(\alpha)\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z. \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle \mathbf{p}(\alpha), \hat{F}(z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha), \alpha) \rangle.$$

Ahora la expansión de Taylor de $g(z, \bar{z}, \alpha)$ alrededor de $(0, 0, \alpha)$ es dada por

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, \alpha) &= \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l = \frac{1}{2!} g_{20}(\alpha) z^2 + g_{11}(\alpha) z\bar{z} + \frac{1}{2!} g_{02}(\alpha) \bar{z}^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} g_{30}(\alpha) z^3 + \frac{1}{2!} g_{21}(\alpha) z^2 \bar{z} + \frac{1}{2!} g_{12}(\alpha) z \bar{z}^2 + \frac{1}{3!} g_{03}(\alpha) \bar{z}^3 + O(|z|^4), \end{aligned}$$

donde

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle \mathbf{p}(\alpha), \hat{F}(z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha), \alpha) \rangle|_{z=0}, \quad \text{para} \quad k+l \geq 2, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

Suponiendo que en $\alpha = 0$, $\mathbf{x}^* = 0$ la función $\hat{F}(\mathbf{x}, \alpha) = (\hat{F}_1(\mathbf{x}, \alpha), \hat{F}_2(\mathbf{x}, \alpha))^T$ en (2.10) se puede representar de la forma

$$\hat{F}(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2} B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^4),$$

con $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ y $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ funciones multilineales simétricas de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

En coordenadas

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k \quad i = 1, 2.$$

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

De este modo, según el Lema, la función g se puede escribir así

$$g(z, \bar{z}, 0) = \langle \mathbf{p}, \frac{1}{2}B(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) + \frac{1}{6}C\dots \rangle,$$

donde se denota $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$ y $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$. Ahora

$$B(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) = z^2 B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + z\bar{z}B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + \bar{z}zB(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}).$$

Como B es simétrica se tiene que $B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = B(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. Luego,

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, 0) &= \langle \mathbf{p}, \frac{1}{2} [z^2 B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + 2z\bar{z}B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + \bar{z}^2 B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}})] + \dots \rangle \\ &= \frac{1}{2} z^2 \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle + z\bar{z} \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle + \frac{1}{2} \bar{z}^2 \langle \mathbf{p}, B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle + \dots \end{aligned}$$

De este modo, los términos cuadráticos en

$$g(z, \bar{z}, 0) = g_{11}(0)z\bar{z} + \frac{1}{2!} [g_{20}(0)z^2 + g_{02}(0)\bar{z}^2] + \frac{1}{2!} [g_{21}(0)z^2\bar{z} + g_{12}(0)z\bar{z}^2] + \dots$$

pueden ser expresados por las fórmulas

$$g_{20} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle, \quad g_{11} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle, \quad g_{02} = \langle \mathbf{p}, B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle.$$

Cálculos similares con

$$C(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) = z^3 C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) + 3z^2\bar{z}C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + 3z\bar{z}^2 C(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) + \bar{z}^3 C(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}})$$

muestran que

$$g_{21} = \langle \mathbf{p}, C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle.$$

□

Teorema 2.3 (Kuznetsov).

Sea el sistema autónomo (2.10), donde $\widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha)$ tiene una expansión de Taylor en $\mathbf{x}^* = 0$ de la forma

$$\widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^4),$$

con $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ funciones multilineales con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y $A(\alpha) = DF(\mathbf{x}^*, \alpha)$ con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ en el parámetro de bifurcación $\alpha_0 = 0$. La función real $l_1(\alpha_0)$ es llamada primer coeficiente de Lyapunov, donde este coeficiente real en el parámetro de bifurcación α_0 puede ser calculado por la fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} Re(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0 g_{2,1}).$$

El primer coeficiente de Lyapunov (l_1) permitirá establecer, la clasificación de la Bifurcación de Hopf en Supercrítica, Subcrítica y Degenerada de (2.4).

- Si $l_1(0) = 0$, entonces se llama bifurcación de Hopf degenerada.
- Si $l_1(0) < 0$, entonces se produce una bifurcación de Hopf supercrítica.
- Si $l_1(0) > 0$, se produce una bifurcación de Hopf subcrítica.

Teorema 2.4 (De Poincaré, Andronov, Hopf).

Sea el sistema (2.4) de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ con \mathbf{x}^* un punto de equilibrio y $A = DF(\mathbf{x}^*)$

H.1. (Condición de bifurcación)

Los valores propios de A son imaginarios puros en $\alpha = \alpha_0$.

H.2 . (Condición de transversalidad)

$$\frac{d}{d\alpha} Re(\lambda_{1,2}, \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} > 0.$$

H.3. El punto \mathbf{x}^* es asintóticamente estable cuando $\alpha = \alpha_0$.

Tesis: El sistema tiene un ciclo límite para todo $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + r)$ para algún $r > 0$. [?]

3. Análisis del sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II.

3.1. Sistema orbitalmente equivalente. Multiplicando $(1 + x_1)$, $x_1 > 0$, a derecha y a izquierda de cada ecuación de (1.1) y haciendo la sustitución en la variación en el tiempo $dt = (1 + x_1)d\tau$, se obtiene el sistema orbitalmente equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1(1 + x_1) \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - cx_1x_2, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta(1 + x_1)x_2 + cx_1x_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

El análisis se hará, por simplicidad, al sistema (3.1). Se considerará a $c > \delta$.

Se estudiará el caso donde cada parámetro (δ, c, k) será parámetro de bifurcación y los restantes serán parámetros de control. Se clasificará topológicamente cada punto de equilibrio del sistema, se hallará el valor de cada parámetro para que exista una bifurcación de Hopf y el coeficiente de Lyapunov para clasificar su tipo.

3.2. Puntos de equilibrio del sistema. En primer lugar se debe hallar los puntos de equilibrio del sistema (3.1), igualando cada una de las ecuaciones diferenciales a cero.

$$F_1(x_1, x_2) = x_1(1 + x_1) \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - cx_1x_2 = 0. \tag{3.2}$$

$$F_2(x_1, x_2) = -\delta(1 + x_1)x_2 + cx_1x_2 = 0. \tag{3.3}$$

Así se obtienen los puntos de equilibrio

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (k, 0), \quad P_3 = \left(\frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2}\right).$$

3.3. Matriz jacobiana y clasificación topológica de cada punto de equilibrio. La matriz jacobiana del sistema (3.1) está dada por

$$DF(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 - cx_2 + 2x_1 \left(1 - \frac{1}{k}\right) - 3x_1^2 \left(\frac{1}{k}\right) & -cx_1 \\ x_2(c - \delta) & x_1(c - \delta) - \delta \end{bmatrix}$$

Al evaluar cada punto de equilibrio en la matriz jacobiana se puede clasificar topológicamente su estabilidad en el sistema linealizado.

1. **En el punto $P_1 = (0, 0)$**

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}.$$

Con valores propios

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\delta < 0$$

Así $P_1 = (0, 0)$ es un punto silla-nodo (inestable). En P_1 no ocurre una Bifurcación de Hopf.

2. **En el punto $P_2 = (k, 0)$**

$$DF(k, 0) = \begin{bmatrix} -1 - k & -ck \\ 0 & k(c - \delta) - \delta \end{bmatrix}.$$

Con valores propios

$$\lambda_1 = -(1 + k) < 0, \quad \lambda_2 = k(c - \delta) - \delta.$$

Así $P_2 = (k, 0)$ es un punto silla-nodo (inestable) si $k > \frac{\delta}{c - \delta}$. En P_2 no ocurre una Bifurcación de Hopf.

3. En el punto P_3

$$A = DF(P_3) = \begin{bmatrix} \frac{\delta(kc - \delta k - \delta - c)}{k(c - \delta)^2} & \frac{-c\delta}{c - \delta} \\ 1 - \frac{\delta}{k(c - \delta)} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Si se denota $(\sigma) = tr(A)$ y $(\Delta) = det(A)$, entonces los valores propios de A son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}, \tag{3.5}$$

donde

$$\sigma = \frac{\delta(kc - \delta k - \delta - c)}{k(c - \delta)^2}, \tag{3.6}$$

$$\Delta = \frac{c\delta}{(c - \delta)^2} \frac{[k(c - \delta) - \delta]}{k}. \tag{3.7}$$

Si

$$\sigma = tr(A) = 0, \quad y \quad \Delta = det(A) > 0, \quad \text{con } k > \frac{\delta}{c - \delta}; c > \delta$$

se garantiza la existencia de valores propios imaginarios puros.

Luego, de (3.6), $\sigma = 0$ implica que $kc - \delta k - \delta - c = 0$, de aquí se tiene que

$$c = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1} \quad \text{ó} \quad \delta = \frac{c(k - 1)}{k + 1} \quad \text{ó} \quad k = \frac{c + \delta}{c - \delta}. \tag{3.8}$$

Ahora se estudiarán tres casos en donde en cada uno de estos se tomará cada valor del parámetro obtenido en (3.8) como valor de bifurcación y se demostrará la existencia de la bifurcación de Hopf al variar estos.

4. Caso I: Se considera a c parámetro de bifurcación y (δ, k) parámetros de control. El análisis empieza considerando a c parámetro de bifurcación y a (δ, k) como los parámetros de control (fijos) del sistema.

De (3.8) se considera a

$$c = c_0 = \frac{\delta(k + 1)}{(k - 1)}, \quad k > 1.$$

Se considera a $k > 1$ puesto que no tiene sentido puntos de equilibrio negativos o parámetros negativos al hablar de interacción de poblaciones en sistemas dinámicos.

De (3.5) se tienen los valores propios en términos del parámetro c

$$\lambda_{1,2}(c) = \frac{\sigma(c) \pm \sqrt{\sigma^2(c) - 4\Delta(c)}}{2}.$$

Se considera a

$$\mu(c) = \frac{\sigma(c)}{2} = 0, \quad \omega(c) = \frac{\sqrt{4\Delta(c) - \sigma^2(c)}}{2}.$$

Se empieza demostrando que en el punto P_3 y en el parámetro $c = c_0$ la matriz jacobiana $A(c_0)$ en (3.4) tiene valores propios imaginarios puros, como condición necesaria para la bifurcación de Hopf (*condición de equilibrio y de bifurcación*), luego, para el análisis de la Bifurcación de Hopf en el sistema se necesita verificar que se cumple la *condición de transversalidad* (Teorema de la Forma Normal de la Bifurcación de Hopf).

H.1. (Condición de equilibrio)

Para $\mathbf{x}^* = P_3$ y $c = c_0 = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1}$ se tiene que

$$F(\mathbf{x}^*, c_0) = 0.$$

H.2. (Condición de Bifurcación)

La matriz jacobiana en el punto P_3 con $c = c_0$ es

$$A(c_0) = DF(\mathbf{x}^*, c_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\delta(1+k)}{2} \\ \frac{k+1}{2k} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Con valores propios

$$\lambda_{1,2}(c_0) = \pm \omega(c_0)i, \quad \omega(c_0) = \frac{(k+1)}{2} \sqrt{\frac{\delta}{k}} > 0. \tag{4.2}$$

H.3. (Condición de transversalidad)

Al derivar a $\mu(c) = \frac{\sigma(c)}{2}$ respecto al parámetro c se obtiene

$$\dot{\mu}(c) = \frac{\delta}{2} \left[\frac{k(\delta - c) + 3\delta + c}{k(c - \delta)^3} \right].$$

Evaluada en $c = c_0$ se obtiene que

$$\dot{\mu}(c_0) = \frac{(k-1)^3}{8\delta k} > 0, \quad k > 1.$$

T: Así, con $c = c_0$ el sistema (3.1) es topológicamente equivalente a la forma normal de la Bifurcación de Hopf \square

Ahora en $c = c_0$ el punto de equilibrio P_3 toma el valor

$$P_3(c_0) = \left(\frac{k-1}{2}, \frac{k^2-1}{4k\delta} \right).$$

De (3.6)

$$\sigma(c) = \frac{\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{k(c-\delta)^2}.$$

Se tiene que $\sigma(c) < 0$ para $c < c_0$ y $\sigma(c) > 0$ para $c > c_0$, así $P_3(c_0)$ es inestable para $c > c_0$ y es asintóticamente estable para $c < c_0$. $P_3(c_0)$ es punto centro y de bifurcación.

Ahora, trasladando el punto de equilibrio

$$P_3 = \left(\frac{\delta}{c-\delta}, \frac{1}{c-\delta} - \frac{\delta}{k(c-\delta)^2} \right),$$

al punto en el origen ($\xi = (0, 0)$) por el cambio de variables

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\delta}{c-\delta}, \quad x_2 = \xi_2 + \frac{1}{c-\delta} - \frac{\delta}{k(c-\delta)^2}.$$

Se transforma el sistema (3.1) en

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \left(\frac{\delta[k(c-\delta) - c - \delta]}{k(c-\delta)^2} \right) \xi_1 - \left(\frac{c\delta}{c-\delta} \right) \xi_2 + \left(\frac{k(c-\delta) - c - 2\delta}{k(c-\delta)} \right) \xi_1^2 - \left(\frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left(1 - \frac{\delta}{k(c-\delta)} \right) \xi_1 + (c-\delta)\xi_1\xi_2 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Sustituyendo $c = c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}$ en (4.3) se obtiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \left(\frac{-\delta(k+1)}{2} \right) \xi_2 + \left(\frac{1-k}{2k} \right) \xi_1^2 - \left(\frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - \left(\frac{\delta(k+1)}{k-1} \right) \xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left(\frac{k+1}{2k} \right) \xi_1 + \left(\frac{2\delta}{k-1} \right) \xi_1\xi_2 \end{cases}. \tag{4.4}$$

Así el sistema (4.4) se representa de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(c_0)\boldsymbol{\xi} + \hat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0), \quad \hat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0) = (\hat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, c_0), \hat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, c_0))^T,$$

donde

$$\hat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, c_0) = \left(\frac{1-k}{2k}\right)\xi_1^2 - \left(\frac{1}{k}\right)\xi_1^3 - \left(\frac{\delta(k+1)}{k-1}\right)\xi_1\xi_2, \quad \hat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, c_0) = \left(\frac{2\delta}{k-1}\right)\xi_1\xi_2.$$

El sistema (4.4) se puede representar además como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(c_0)\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{6}C(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}),$$

donde las funciones multilineales B, C toman en $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ y los vectores bidimensionales

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2)^T,$$

los valores

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-k}{k}\right)x_1y_1 - \left(\frac{\delta(k+1)}{k-1}\right)(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \left(\frac{2\delta}{k-1}\right)(x_1y_2 + x_2y_1) \end{bmatrix}.$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{6}{k}\right)x_1y_1z_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.1. Primer Coeficiente de Lyapunov. Ya con $c = c_0$ como parámetro de bifurcación del sistema, se procede a determinar qué tipo de bifurcación de Hopf el sistema admite. Se debe calcular el coeficiente de Lyapunov del sistema. Esta parte del trabajo se basa en aplicar el lema y la ecuación para el cálculo del coeficiente de Lyapunov enunciados.

Para el cálculo de vectores propios se plantea

$$A(c_0)\mathbf{q} = \lambda_1\mathbf{q} \quad \text{y} \quad A^T(c_0)\mathbf{p} = \lambda_2\mathbf{p},$$

donde

$$A^T(c_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k+1}{2k} \\ -\frac{\delta(k+1)}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Un vector propio $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2$ asociado a

$$\lambda_1 = i\omega(c_0) = \frac{(k+1)}{2}\sqrt{\frac{\delta}{k}}i$$

de $A(c_0)$ en (4.1) es

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \left(\sqrt{\delta k}i, 1\right)$$

y un vector propio $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ asociado a

$$\lambda_2 = -i\omega(c_0) = -\frac{(k+1)}{2}\sqrt{\frac{\delta}{k}}i$$

de $A^T(c_0)$ en (4.5) es

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \left(\sqrt{\frac{1}{k\delta}}i, 1\right)$$

Si se considera a

$$p = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{k\delta}}i, 1\right)$$

se tiene que

$$\langle p, q \rangle = 1, \quad \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Ahora en los vectores p, q, \bar{p}, \bar{q} se obtiene que el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$L_1(c_0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0g_{2,1}) = -\delta < 0, \quad \delta > 0.$$

Se tiene que $L_1(c_0) < 0$, así ocurre una *bifurcación de Hopf supercrítica* al variar $c = c_0$.

4.2. Retrato de fase: Bifurcación de Hopf Supercrítica.

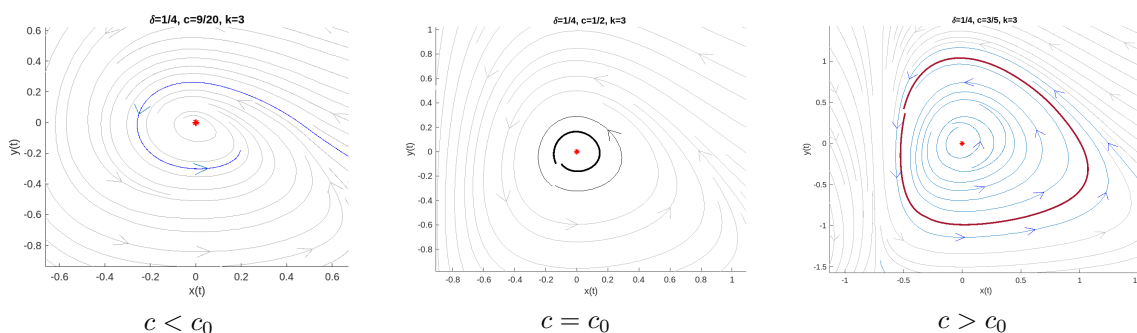


Figura 4.1: Caso I- P_3 trasladado al origen

5. Caso II: Se considera a k parámetro de bifurcación y (δ, c) parámetros de control. De (3.8) se considera a

$$k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}.$$

Se empieza demostrando que en el punto P_3 y en el parámetro $k = k_0$ la matriz jacobiana $A(k_0)$ tiene valores propios imaginarios puros, como condición necesaria para la bifurcación de Hopf (*condición de equilibrio y de bifurcación*), luego, para el análisis de la Bifurcación de Hopf en el sistema se necesita verificar que se cumple la *condición de transversalidad* (Teorema de la Forma Normal de la Bifurcación de Hopf).

H.1. (Condición de equilibrio)

En $x^* = P_3$ y $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ se verifica que

$$F(x^*, k_0) = 0.$$

H.2. (Condición de Bifurcación)

La matriz jacobiana A con $k = k_0$ es

$$A(k_0) = DF(x^*, k_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-c\delta}{c - \delta} \\ \frac{c}{c + \delta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Con valores propios

$$\lambda_{1,2}(k_0) = \pm\omega(k_0)i \quad \text{donde} \quad \omega(k_0) = \sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}} > 0. \tag{5.1}$$

H.3. (Condición de transversalidad)

Al derivar $\mu(k) = \frac{\sigma(k)}{2}$ respecto a k se tiene

$$\dot{\mu}(k) = \frac{\delta(\delta + c)}{2k^2(c - \delta)^2}.$$

En $k = k_0$,

$$\dot{\mu}(k_0) = \frac{\delta}{2(c + \delta)} > 0$$

T: Así el sistema (3.1) en $k = k_0$ es topológicamente equivalente a la forma normal de la Bifurcación de Hopf. \square

En $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ el equilibrio P_3 toma el valor

$$P_3(k_0) = \left(\frac{\delta}{c - \delta}, \frac{c}{c^2 - \delta^2} \right).$$

De (3.6)

$$\sigma(k) = \frac{\delta[k(c - \delta) - (c + \delta)]}{k(c - \delta)^2}, \tag{5.2}$$

se tiene que $\sigma(k) < 0$ para $k < k_0$ y $\sigma(k) > 0$ para $k > k_0$, así el punto de equilibrio $P_3(k_0)$ es inestable para $k > k_0$ y asintóticamente estable para $k < k_0$. El punto $P_3(k_0)$ es punto de bifurcación.

De sustituir $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ en (4.3) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = - \left(\frac{c\delta}{c - \delta} \right) \xi_2 - \left(\frac{\delta}{c + \delta} \right) \xi_1^2 - \left(\frac{c - \delta}{c + \delta} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \left(\frac{c}{c + \delta} \right) \xi_1 + (c - \delta) \xi_1\xi_2. \end{cases} \tag{5.3}$$

Así el sistema (5.3) se representa de la forma

$$\dot{\xi} = A(k_0)\xi + \widehat{F}(\xi, k_0), \quad \widehat{F}(\xi, k_0) = (\widehat{F}_1(\xi, k_0), \widehat{F}_2(\xi, k_0))^T,$$

donde

$$\widehat{F}_1(\xi, k_0) = - \left(\frac{\delta}{c + \delta} \right) \xi_1^2 - \left(\frac{c - \delta}{c + \delta} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2, \quad \widehat{F}_2(\xi, k_0) = (c - \delta) \xi_1\xi_2.$$

El sistema (5.3) se puede representar además como

$$\dot{\xi} = A(k_0)\xi + \frac{1}{2}B(\xi, \xi) + \frac{1}{6}C(\xi, \xi, \xi),$$

donde las funciones multilineales B, C , en $\xi = (0, 0)$, toman en los vectores bidimensionales

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2)^T,$$

los valores

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left(\frac{2\delta}{c + \delta} \right) x_1y_1 - c(x_1y_2 + x_2y_1) \\ (c - \delta)(x_1y_2 + x_2y_1) \end{bmatrix}.$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} - \frac{6(c - \delta)}{c + \delta} x_1y_1z_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.1. Primer Coeficiente de Lyapunov. Ya con $k = k_0$ como parámetro de bifurcación, se procede a determinar qué tipo de Bifurcación de Hopf ocurre. De manera análoga al caso (1), se debe calcular el coeficiente de Lyapunov del sistema.

Para el cálculo de los vectores propios se plantea

$$A(k_0)\mathbf{q} = \lambda_1\mathbf{q} \quad \text{y} \quad A^T(k_0)\mathbf{p} = \lambda_2\mathbf{p},$$

donde

$$A^T(k_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{c + \delta} \\ \frac{-c\delta}{c - \delta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vector propio $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2$ asociado a

$$\lambda_1 = i\omega(k_0) = \sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}}i,$$

en $A(k_0)$ es

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \left((c + \delta)\sqrt{\frac{\delta}{c^2 - \delta^2}}i, 1 \right)$$

y un vector \mathbf{p} asociado a

$$\lambda_2 = -i\omega(k_0) = -\sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}}i,$$

de $A^T(k_0)$ es

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \left(\sqrt{\frac{c - \delta}{\delta(c + \delta)}}i, 1 \right).$$

Si se considera a

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{c - \delta}{\delta(c + \delta)}}i, 1 \right)$$

se tiene que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0.$$

Así en los vectorios propios $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$ se obtiene que el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$L_1(k_0) = \frac{1}{2\omega_0} Re (ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0g_{2,1}) = -\delta < 0, \quad \delta > 0.$$

Se tiene que $L_1(k_0) < 0$, esto implica que ocurre una *bifurcación de Hopf supercrítica*, al variar $k = k_0$.

5.2. Retrato de fase: Bifurcación de Hopf Supercrítica.

6. Caso III: Se considera a δ parámetro de bifurcación y (c, k) parámetros de control. De manera análoga a los dos casos anteriores, se muestra que en el punto P_3 y en el parámetro

$$\delta = \delta_0 = \frac{c(k - 1)}{k + 1}, \quad k > 1,$$

la matriz jacobiana $A(\delta_0)$ tiene valores propios imaginarios puros, como condición necesaria para la bifurcación de Hopf y para el análisis de la Bifurcación de Hopf en el sistema se necesita verificar que se cumple la *condición de transversalidad*.

H.1. (Condición de equilibrio)

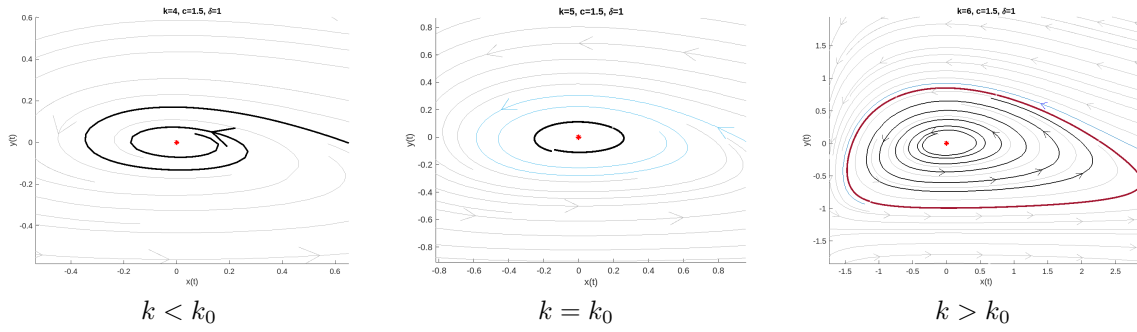


Figura 5.1: Caso II- P_3 trasladado al origen

En $\mathbf{x}^* = P_3$ y $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$ se cumple que

$$F(\mathbf{x}^*, \delta_0) = 0.$$

H.2. (Condición de Bifurcación)

La matriz jacobiana en el punto P_3 con $\delta = \delta_0$ es

$$A(\delta_0) = DF(\mathbf{x}^*, \delta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c(1-k)}{2} \\ \frac{1+k}{2k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Con valores propios

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\delta_0), \quad \omega(\delta_0) = \sqrt{\frac{c(k^2-1)}{4k}} > 0.$$

H.3. (Condición de transversalidad)

Al derivar $\mu(\delta) = \frac{\sigma(\delta)}{2}$ respecto a δ se tiene

$$\dot{\mu}(\delta) = \frac{(c-\delta)[c(k-1) - \delta(k+1) - \delta(k+1)] + 2\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{2k(c-\delta)^3}.$$

En $\delta = \delta_0$,

$$\dot{\mu}(\delta_0) = -\frac{(k+1)^2(k-1)}{8kc} \neq 0, \quad k > 1$$

T: Así el sistema (3.1) en $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$ es topológicamente equivalente al sistema de la forma normal de la bifurcación de Hopf. \square

En $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$ se tiene el punto de equilibrio

$$P_3(\delta_0) = \left(\frac{k-1}{2}, \frac{(k+1)^2}{4ck} \right).$$

De

$$\sigma(\delta) = \frac{\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{k(c-\delta)^2},$$

se tiene que $\sigma(\delta) > 0$ para $\delta < \delta_0$ y $\sigma(\delta) < 0$ para $\delta > \delta_0$, así el punto de equilibrio $P_3(\delta_0)$ es inestable para $\delta < \delta_0$ y asintóticamente estable para $\delta > \delta_0$. $P_3(\delta_0)$ es punto de bifurcación del sistema.

De sustituir $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$ en (4.3) se obtiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \left(\frac{-c(k-1)}{2} \right) \xi_2 + \left(\frac{1-k}{2k} \right) \xi_1^2 - \left(\frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \left(\frac{k+1}{2k} \right) \xi_1 + \left(\frac{2c}{k+1} \right) \xi_1\xi_2. \end{cases} \quad (6.1)$$

Así el sistema (6.1) se representa de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(\delta_0)\boldsymbol{\xi} + \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0), \quad \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0) = (\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, \delta_0), \widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, \delta_0))^T,$$

donde

$$\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, \delta_0) = \left(\frac{1-k}{2k}\right)\xi_1^2 - \left(\frac{1}{k}\right)\xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2, \quad \widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, \delta_0) = \left(\frac{2c}{k+1}\right)\xi_1\xi_2$$

El sistema (6.1) se puede representar además como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(\delta_0)\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{6}C(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}),$$

donde las funciones multilineales B, C , con $\boldsymbol{\xi} = 0$, toman en los vectores bidimensionales

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^T,$$

los valores

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} B_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ B_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-k}{k}\right)x_1y_1 - c(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \left(\frac{2c}{k+1}\right)(x_1y_2 + x_2y_1) \end{bmatrix}.$$

$$C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{k}\right)x_1y_1z_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.1. Primer Coeficiente de Lyapunov. Para el cálculo de vectores propios se plantea

$$A(\delta_0)\boldsymbol{q} = \lambda_1\boldsymbol{q} \quad \text{y} \quad A^T(\delta_0)\boldsymbol{p} = \lambda_2\boldsymbol{p},$$

donde

$$A^T(\delta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+k}{2k} \\ \frac{c(1-k)}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vector propio $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^2$ asociado a

$$\lambda_1 = i\omega(\delta_0) = i\sqrt{\frac{c(k^2-1)}{4k}}$$

de $A(\delta_0)$ es

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = \left(\sqrt{\frac{ck(k-1)}{k+1}}i, 1 \right),$$

y un vector propio $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^2$ asociado a

$$\lambda_2 = -i\omega(\delta_0) = -i\sqrt{\frac{c(k^2-1)}{4k}},$$

de $A^T(\delta_0)$ es

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) = \left(\sqrt{\frac{k+1}{ck(k-1)}}i, 1 \right).$$

Si se considera a

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{ck(k-1)}}i, 1 \right),$$

se tiene que

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{q}} \rangle = 0.$$

Ahora en los vectores propios $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}$ se tiene que el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$L_1(\delta_0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0g_{2,1}) = \frac{-c(k-1)}{k+1} < 0, \quad k > 1.$$

Se tiene que $L_1(\delta_0) < 0$; $k > 1$, así se presenta una *bifurcación de Hopf supercrítica*, al variar $\delta = \delta_0$.

6.2. Retrato de fase: Bifurcación de Hopf Supercrítica.

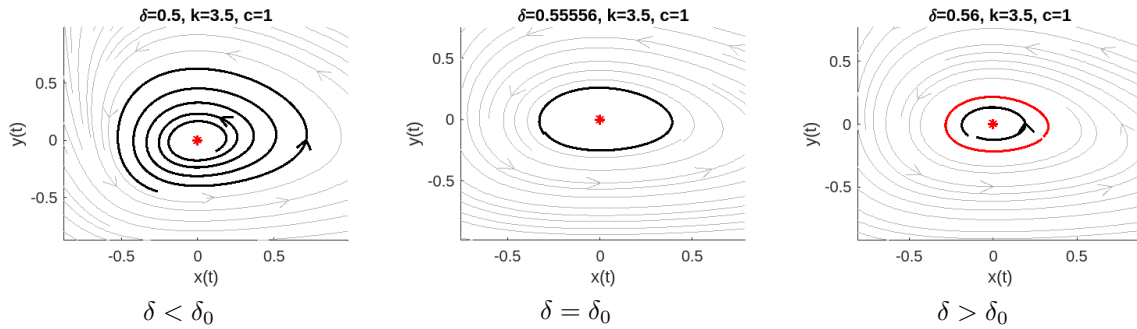


Figura 6.1: Caso III- P_3 trasladado al origen

7. Ciclo(s) límite(s). Sea $F = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ el campo vectorial asociado al sistema (3.1) y el punto de equilibrio no trivial

$$P_3 = \left(\frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2} \right).$$

Proposición 7.1. El campo F asociado al sistema posee un ciclo límite en una vecindad de P_3 para todo $c \in (c_0, c_0 + r)$ con $r > 0$ y $c_0 = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1}$.

Demostración:

H.1. (Condición de bifurcación)

Del (Caso I) los valores propios de $A(c_0) = DF(P_3, c_0)$ son

$$\lambda_{1,2}(c_0) = \pm \omega(c_0)i, \quad \omega(c_0) = \frac{(k + 1)}{2} \sqrt{\frac{\delta}{k}} > 0$$

H.2. (Condición de transversalidad)

$$Re(\lambda_{1,2}) = \frac{\delta[k(c - \delta) - (c + \delta)]}{2k(c - \delta)^2} \quad \text{luego} \quad \frac{d}{dc} Re(\lambda_{1,2})|_{c=c_0} = \frac{(k - 1)^3}{8\delta k} > 0$$

H.3. (P_3 trasladado al origen es asintóticamente estable)

Considerando $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$ el sistema (4.3) que tiene a $(0, 0)$ como punto de equilibrio, de (4.3) el sistema es equivalente en coordenadas polares a

$$\begin{cases} \dot{r} = r \cos(\theta) \left[\frac{\delta[k(c - \delta) - c - \delta] \cos(\theta)}{k(c - \delta)^2} - \left(\frac{c\delta}{c - \delta} \right) \text{sen}(\theta) + \frac{k(c - \delta) - c - 2\delta}{k(c - \delta)} r \cos^2(\theta) \right] \\ + r \cos(\theta) \left[-\frac{1}{k} r^2 \cos^3(\theta) - cr \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) \left(1 - \frac{\delta}{k(c - \delta)} \right) + r(c - \delta) \text{sen}^2(\theta) \right] \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left[\left(1 - \frac{\delta}{k(c - \delta)} \right) + (c - \delta) r \text{sen}(\theta) \right] - \text{sen}(\theta) \left[\cos(\theta) \frac{\delta[k(c - \delta) - c - \delta]}{k(c - \delta)^2} \right] + \\ - \text{sen}(\theta) \left[\frac{-c\delta \text{sen}(\theta)}{c - \delta} + r \cos^2(\theta) \left(\frac{k(c - \delta) - c - 2\delta}{k(c - \delta)} \right) - \frac{1}{k} r^2 \cos^3(\theta) - cr \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \right] \end{cases} \quad (7.1)$$

Para $\theta = 0$ se tiene que

$$\dot{r} = \frac{r\delta[k(c - \delta) - c - \delta]}{k(c - \delta)^2} + \frac{r^2[k(c - \delta) - c - 2\delta]}{k(c - \delta)} - \frac{r^3}{k} \quad (7.2)$$

En $c = c_0 = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1}$ se tiene que

$$\dot{r}|_{c=c_0} = \frac{r^2}{k} \left[\frac{1 - k}{2} - r \right] < 0$$

para $k > 1$ siempre que $r \neq 0$. Así, el origen es asintóticamente estable. Luego por el Teorema de Poincaré, Andronov, Hopf, se tiene que para $c_0 < c$, próximo de c_0 , el campo F posee un ciclo límite. □

Proposición 7.2. *El campo F asociado al sistema posee un ciclo límite en una vecindad de P_3 para todo $k \in (k_0, k_0 + r)$ con $r > 0$ y $k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$.*

Demostración:

H.1. (Condición de bifurcación)

Del (Caso II) se tiene que los valores propios en $A(k_0) = DF(P_3, k_0)$ son

$$\lambda_{1,2}(k_0) = \pm \omega(k_0)i \quad \text{donde} \quad \omega(k_0) = \sqrt{\frac{c^2 \delta}{c^2 - \delta^2}} > 0$$

H.2. (Condición de transversalidad)

$$Re(\lambda_{1,2}) = \frac{\delta[k(c - \delta) - (c + \delta)]}{2k(c - \delta)^2} \quad \text{luego} \quad \frac{d}{dk} Re(\lambda_{1,2})|_{k=k_0} = \frac{\delta}{2(c + \delta)} > 0$$

H.3. (P_3 es asintóticamente estable)

Sustituyendo en (7.2) el valor $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ se tiene que

$$\dot{r}|_{k=k_0} = \frac{-r^2[\delta + (c - \delta)r]}{c + \delta} < 0$$

siempre que $r \neq 0$. Así el origen es asintóticamente estable. Luego se tiene que para $k_0 < k$, próximo de k_0 , el campo F posee un ciclo límite □

8. Conclusiones. La complejidad generada por la no linealidad entre las variables de estado en ciertos sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias dificulta la obtención de su solución explícita y su estudio. Por consiguiente, la teoría de los sistemas dinámicos y bifurcaciones juega un papel crucial en el análisis cualitativo de estos sistemas, proporcionando información sobre la evolución de sus órbitas, puntos de equilibrio y las posibilidades de que las órbitas se acerquen o se alejen de estos.

La bifurcación de Hopf muestra para qué valores de los parámetros del sistema se presentan soluciones periódicas, en qué momento las poblaciones tienden a converger a dichas soluciones y bajo qué condiciones estas especies podrían desaparecer o perpetuarse. Biológicamente, la bifurcación de Hopf puede interpretarse como un cambio en la dinámica de la relación presa-predador o el sistema podría estar en un estado de equilibrio, donde las poblaciones de presas y predadores se mantienen constantes. Sin embargo, cuando los parámetros de bifurcación toman valores mayores o menores al valor de bifurcación, el sistema exhibe oscilaciones en las poblaciones.

En este trabajo se presentó un sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional Holling tipo II y se determinó tres puntos de equilibrio del sistema, dos triviales y uno no trivial, dados por $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$ y $P_3 = \left(\frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2}\right)$. Gracias al teorema traza-determinante los puntos de equilibrio triviales P_1 y P_2 se clasifican topológicamente como puntos silla-nodo, matemáticamente estos dos puntos tienen órbitas cercanas que tienden a acercarse y a alejarse de estos respectivamente. Para el punto no trivial P_3 se encontró que para cada valor $c_0 = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1}$, $k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ y $\delta_0 = \frac{c(k - 1)}{k + 1}$ se satisface el teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf, es decir, son valores de bifurcación. El primer coeficiente de Lyapunov determinó que para cada uno de estos valores el sistema exhibe una bifurcación de Hopf supercrítica.

En conclusión cuando $c > c_0$, $k > k_0$ el sistema autónomo presa-predador garantiza la coexistencia sostenible de las especies. Para $\delta > \delta_0$ se evidencia un comportamiento interesante, puesto que se forma una órbita repulsora.

9. Contribución de autores. Los autores han contribuído de la siguiente manera: Análisis del modelo: Contribución al análisis cualitativo del modelo de estudio. Formalización de los teoremas con sus respectivas demostraciones, DEPV; Investigación: análisis de la región de invarianza, Estructuró la parte teórica y análisis cualitativo, JESG.

Conflicto de interés. Los autores declaran no tener conflicto de interes.

ORCID and License

Danny Estefany Paz Vidal <https://orcid.org/0009-0004-2662-7095>

Joan Esteban Salazar Gordillo <https://orcid.org/0000-0002-2922-867X>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Navas J. Modelos matemáticos en biología[Internet]. Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén; 2009. Disponible en http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/index.htm
- [2] Puchuri Medina, L. Limit Cycles in Predator-Prey Models. Selecciones Matemáticas, 2017; 4(01), 70-81. <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.08>
- [3] Yi F, Wei J, Shi J. Bifurcation and Spatiotemporal Patterns in a Homogeneous Diffusive Predator-Prey System. J. of Differential Equations. 2009; 246(5):1944-1977.
- [4] Gálvez García M. Estudio y comparación de diversos modelos de depredador-presa. Trabajo de fin de grado de Matemáticas. Universidad de Sevilla; 2018.
- [5] Kuznetsov Y. Elements of Applied Bifurcation Theory. 2da ed. Springer; 1998.
- [6] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. 3rd ed. Estados Unidos: Springer-Verlag; 2001.