



## Existence of the solution of a Schrödinger type homogeneous model in periodic Sobolev spaces

## Existencia de la solución de un modelo homogéneo tipo Schrödinger en espacios de Sobolev periódico

Víctor Candia Estrada<sup>ID</sup> and Yolanda Santiago Ayala<sup>ID</sup>

Received, Nov. 23, 2022

Accepted, Dec. 24, 2022



### How to cite this article:

Candia E. V, Santiago A Y. *Existence of the Solution of a Schrödinger type Homogeneous Model in Periodic Sobolev Spaces*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(2):357–369. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2022.02.11>

### Abstract

In this article we prove that the Cauchy problem associated to a Schrödinger type homogeneous model in periodic Sobolev spaces is well posed. We do this in an intuitive way using Fourier theory and in a fine version using Groups theory, inspired by works Iorio [3], Santiago and Rojas [10] and [11]. Finally, we study the relationship between initial data and differentiability of the solution.

**Keywords.** Unitary groups theory, Schrödinger type equation, homogeneous equation, periodic Sobolev spaces, Fourier theory.

### Resumen

En este artículo probamos que el problema de Cauchy asociado a un modelo homogéneo tipo Schrödinger en espacios de Sobolev periódico está bien colocado. Hacemos esto en un modo intuitivo usando la teoría de Fourier y en una versión elegante usando la teoría de grupos, inspirados en los trabajos de Iorio [3], Santiago y Rojas [10] y [11]. Finalmente, estudiamos la relación entre el dato inicial y la diferenciabilidad de la solución.

**Palabras clave.** Teoría de grupos unitarios, ecuación tipo Schrödinger, ecuación homogénea, espacios de Sobolev periódico, teoría de Fourier.

**1. Introducción.** Sea la siguiente ecuación propuesto por el físico austriaco Erwin Schrödinger (1925)

$$u_t - ia^2 u_{xx} = 0, \quad (1.1)$$

con dato inicial  $u(0) = \phi \in H_{per}^s$ , donde  $s$  es un número real y denotamos por  $H_{per}^s$  al espacio de Sobolev periódico de orden  $s$ . Dicha ecuación describe la evolución temporal de una partícula no relativista. Esta ecuación es importante en la teoría de la mecánica cuántica. Schrödinger discute en detalle las relaciones entre la mecánica hamiltoniana y la óptica en 1926, ver [4] y [12]. Para la justificación física del modelo podemos citar [2] y [15].

De [13], la ecuación de Schrödinger homogénea (1.1) está bien colocada para todo  $s$  real.

Ahora, planteamos el modelo

$$u_t - iu_{xx} + i\alpha u = 0, \quad (1.2)$$

\*Fac. de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú. (victor.candia@unmsm.edu.pe).

†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Perú. (ysantiago@unmsm.edu.pe).

con dato inicial en  $H_{per}^s$ , el cual resolveremos siguiendo las ideas de [3], [11], [12] y [13]. Esto es, probaremos que posee solución, la solución es única y que ella depende continuamente respecto al dato inicial.

Citamos algunos trabajos de existencia de solución vía semigrupos [4], [6], [7], [8], [9] y nos apoyamos de algunos resultados de [10].

Probaremos la existencia y unicidad de solución de (1.2), así como la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial. Luego, introduciremos una familia de operadores para reescribir nuestro resultado en una versión más elegante. Finalmente, haremos el análisis de diferenciabilidad versus dato inicial del problema homogéneo (1.2).

Nuestro artículo está organizado como sigue. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos la referencia usada para los resultados preliminares que se puedan necesitar. En la sección 3, probamos que el problema de Cauchy asociado a la ecuación homogénea (1.2) está bien colocada. En la sección 4, introducimos una familia de operadores que forma un grupo unitario en  $H_{per}^s$ . En la sección 5, mejoramos el Teorema 3.1. En la sección 6, hacemos el análisis de la diferenciabilidad de la solución versus el dato inicial.

Finalmente, en la sección 7, damos las conclusiones de nuestro estudio.

**2. Metodología.** Como marco teórico, usaremos en este trabajo los siguientes tópicos: Teoría de Fourier en espacios de Sobolev periódico, análisis armónico, teoría de grupos y semigrupos de clase  $C_o$ , y familias fuertemente continuas. Como referencia, en la revisión de algunos resultados previos que usaremos, citamos a Iorio [3], Santiago and Rojas [11] y [12].

Toda esta teoría la usamos en el análisis de existencia y buena colocación del problema de Cauchy asociada a la ecuación (1.2), realizando una serie de cálculos y aproximaciones en el desarrollo de este trabajo.

**3. Existencia de solución del problema  $(Q_3)$ .** En esta sección, empezamos probando que existe solución del modelo homogéneo (1.2) en espacios de Sobolev Periódico, usando la teoría de Fourier.

**Teorema 3.1.** *Sea  $s$  un número real fijo,  $\alpha > 0$  y el problema homogéneo*

$$(Q_3) \begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_{per}^s) \cap C^1(\mathbb{R}, H_{per}^{s-2}), \\ \partial_t u - i\partial_x^2 u + i\alpha u = 0 \in H_{per}^{s-2}, \\ u(0) = \phi \in H_{per}^s, \end{cases}$$

entonces  $(Q_3)$  está globalmente bien colocado i.e.  $\exists! u \in C(\mathbb{R}, H_{per}^s) \cap C^1(\mathbb{R}, H_{per}^{s-2})$  satisfaciendo la ecuación  $(Q_3)$ , de modo que la aplicación  $:\phi \rightarrow u$ , que asigna a cada dato inicial  $\phi$  la solución  $u$  del PVI  $(Q_3)$ , es continua.

Además, la solución  $u$  satisface la regularidad:

$$u(t) \in H_{per}^r, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall r \leq s,$$

con

$$\|u(t)\|_{H_{per}^r} \leq \|\phi\|_{H_{per}^s}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall r < s,$$

y  $\|u(t)\|_{H_{per}^s} = \|\phi\|_{H_{per}^s}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

También se obtiene que la aplicación:  $\phi \rightarrow \partial_t u$  que asigna a cada dato inicial  $\phi$  la derivada de la solución  $u$  del PVI  $(Q_3)$ :  $\partial_t u$ , es continua y satisface:

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-2} &\leq C\|\phi - \tilde{\phi}\|_s, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-2} &\leq C\|\phi - \tilde{\phi}\|_s, \end{aligned}$$

donde  $C := \max\{1, |\alpha|\}$ .

Además,  $\partial_t u(t) \in H_{per}^\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta \leq s - 2$  y satisface:

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_\theta &\leq C\|\phi\|_s, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta \leq s - 2 \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\partial_t u(t)\|_\theta &\leq C\|\phi\|_s, \quad \forall \theta \leq s - 2. \end{aligned}$$

*Demostración:* La prueba lo hacemos del siguiente modo.

1. Primero obtenemos el candidato a solución. Para conseguir ese candidato tomamos la transformada de Fourier a la ecuación

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u + i\alpha u = 0,$$

obteniendo

$$0 = \partial_t \hat{u} - i(ik)^2 \hat{u} + i\alpha \hat{u} = \partial_t \hat{u} + ik^2 \hat{u} + i\alpha \hat{u},$$

que para cada  $k \in Z$  es una EDO con dato inicial  $\hat{u}(k, 0) = \hat{\phi}(k)$ .

Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Gamma_k) \begin{cases} \hat{u} \in C(\mathbb{R}, l_s^2(Z)) \\ \partial_t \hat{u}(k, t) + ik^2 \hat{u}(k, t) + i\alpha \hat{u}(k, t) = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{\phi}(k) \text{ con } \hat{\phi} \in l_s^2(Z), \end{cases}$$

$\forall k \in Z$  y conseguimos

$$\hat{u}(k, t) = e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k),$$

de donde obtenemos el candidato a solución:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k, t) \phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \phi_k. \tag{3.1}$$

2. En segundo lugar, probaremos que:

$$u(t) \in H_{per}^s \text{ y } \|u(t)\|_s = \|\phi\|_s, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

En efecto, sea  $t \in \mathbb{R}$  y  $\phi \in H_{per}^s$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_{per}^s}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= \|\phi\|_{H_{per}^s}^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3. Ahora, probaremos que  $u(\cdot)$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

Sea  $t' \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t')\|_{H_{per}^s}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |(e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} - e^{-ik^2 t'} e^{-i\alpha t'}) \hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \underbrace{|e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} - e^{-ik^2 t'} e^{-i\alpha t'}|^2}_{H(t):=}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se observa que  $\lim_{t \rightarrow t'} H(t) = 0$ . Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomamos el  $k$ -ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned} I_{k,t} &:= 2\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \underbrace{|e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} - e^{-ik^2 t'} e^{-i\alpha t'}|^2}_{\leq 2} \\ &\leq 8\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la igualdad  $|e^{i\theta}| = 1$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ .

Así,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4\|\phi\|_{H_{per}^s}^2 < \infty,$$

y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge uniformemente. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow t'} \|u(t) - u(t')\|_{H_{per}^s}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t \rightarrow t'} I_{k,t}}_{=0} = 0$$

y de ahí concluimos

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|u(t) - u(t')\|_{H_{per}^s} = 0.$$

4. Probaremos que

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u + i\alpha u \right\|_{H_{per}^{s-2}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u + i\alpha u \right\|_{H_{per}^{s-2}}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| \hat{\phi}(k) \right|^2 \left| \frac{e^{-ik^2(t+h)}e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-ik^2t}e^{-i\alpha t}}{h} \right. \\ & \quad \left. - i(ik)^2 e^{-ik^2t}e^{-i\alpha t} + i\alpha e^{-ik^2t}e^{-i\alpha t} \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| \hat{\phi}(k) \right|^2 \left| e^{-ik^2t}e^{-i\alpha t} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{e^{-ik^2h}e^{-i\alpha h} - 1}{h} + ik^2 + i\alpha \right\}}_{M(h):=} \right|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Usando L'Hospital tenemos que  $M(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procedemos mayorando el k-ésimo término de la serie. Previamente observamos para  $h > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ik^2h}e^{-i\alpha h} - 1}{h} &= \int_0^h \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ e^{-ik^2s}e^{-i\alpha s} \right\} ds \\ &= \int_0^h \frac{1}{h} [-ik^2 - i\alpha] e^{-ik^2s}e^{-i\alpha s} ds \end{aligned}$$

y tomando norma tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ik^2h}e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right| &\leq \frac{1}{h} | -ik^2 - i\alpha | \int_0^h | e^{-ik^2s}e^{-i\alpha s} | ds \\ &= \frac{1}{h} |k^2 + \alpha| \cdot h \\ &= k^2 + |\alpha| \\ &\leq \underbrace{\max\{1, |\alpha|\}}_{C:=} \{1 + k^2\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Considerando  $h < 0$  para el caso  $t \neq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ik^2h}e^{-i\alpha h} - 1}{h} &= - \int_h^0 \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ e^{-ik^2s}e^{-i\alpha s} \right\} ds \\ &= - \int_h^0 \frac{1}{h} [-ik^2 - i\alpha] e^{-ik^2s}e^{-i\alpha s} ds, \end{aligned}$$

tomando norma y usando que  $|e^{i\vartheta}| = 1, \forall \vartheta \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ik^2h}e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right| &\leq \frac{1}{|h|} |ik^2 + i\alpha| \int_h^0 ds \\ &\leq \frac{1}{|h|} \{k^2 + |\alpha|\} \cdot |h| \\ &= \{k^2 + |\alpha|\} \\ &\leq \underbrace{\text{máx}\{1, |\alpha|\}}_{C=} \{k^2 + 1\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando las desigualdades (3.6) y (3.7) procedemos a mayorar  $|M(h)|^2$  como sigue

$$|M(h)|^2 \leq \{2C(k^2 + 1)\}^2 = 4C^2(k^2 + 1)^2 = C_5 [1 + k^2]^2. \tag{3.8}$$

Esto también es válido para el caso  $t = 0$ , donde hemos usado (3.6) para el caso  $h > 0$  y (3.7) para el caso  $h < 0$ .

Ahora, pasamos a mayorar el  $k$ -ésimo término de la serie, donde usamos la estimativa (3.8)

$$\begin{aligned} (1 + k^2)^{s-2} \left| \hat{\phi}(k) \right|^2 |M(h)|^2 &\leq (1 + k^2)^{s-2} \left| \hat{\phi}(k) \right|^2 C_5(1 + |k|^2)^2 \\ &= C_5(1 + k^2)^s \left| \hat{\phi}(k) \right|^2 \end{aligned}$$

y como la serie  $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s \left| \hat{\phi}(k) \right|^2 = \|\phi\|_{H_{per}^s}^2 < \infty$  desde que  $\phi \in H_{per}^s$ , entonces usando el Teorema M-Test de Weierstrass tenemos que la serie (3.5) converge uniformemente y por lo tanto es posible intercambiar límites y obtener

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u + i\alpha u \right\|_{H_{per}^{s-2}}^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

5. Probaremos la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales, i.e. sean  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  datos próximos en  $H_{per}^s$ , entonces sus correspondientes soluciones  $u$  y  $\tilde{u}$ , respectivamente, también están próximos en el espacio solución. Sea  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H_{per}^s}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} (\hat{\phi}(k) - \hat{\tilde{\phi}}(k)) \right|^2 (1 + k^2)^s \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^s \left| \hat{\phi}(k) - \hat{\tilde{\phi}}(k) \right|^2 \\ &= \|\phi - \tilde{\phi}\|_{H_{per}^s}^2. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre  $\mathbb{R}$  tenemos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H_{per}^s} = \|\phi - \tilde{\phi}\|_{H_{per}^s}. \tag{3.9}$$

De aquí tenemos que si  $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$  entonces  $u \rightarrow \tilde{u}$ .

6. Ahora, probaremos la unicidad de solución. La igualdad (3.9) nos permitirá mostrar que la solución es única. En efecto, sea  $\phi \in H_{per}^s$  y supongamos que existan  $u$  y  $\tilde{u}$  dos soluciones, entonces usando (3.9) tenemos,

$$\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{H_{per}^s} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H_{per}^s} = \|\phi - \tilde{\phi}\|_{H_{per}^s} = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

de donde concluimos que  $u = \tilde{u}$ .

Así, el problema  $(Q_3)$  está bien colocado y su única solución que depende continuamente del dato inicial es

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \phi_k.$$

7. Sea  $r < s$  entonces  $H_{per}^s \subset H_{per}^r$  y desde que el dato inicial  $\phi \in H_{per}^s$ , tenemos que  $\phi \in H_{per}^r$  y satisface

$$\|\phi\|_r \leq \|\phi\|_s. \tag{3.10}$$

De (3.3) y usando (3.10) tenemos que

$$\|u(t)\|_r^2 = \|\phi\|_r^2 \leq \|\phi\|_s^2 < \infty.$$

Es decir,

$$u(t) \in H_{per}^r, \forall r \in (-\infty, s). \tag{3.11}$$

8. Así, de (3.2) y (3.11) concluimos que para  $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) \in H_{per}^r, \forall r \in (-\infty, s].$$

9. Probaremos que  $\partial_t u(\cdot)$  es continua en  $\mathbb{R}$ . En efecto, sea  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-2}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |\widehat{\partial_t u(t)}(k) - \widehat{\partial_t u(t')}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |(ik^2 + i\alpha) \{e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} - e^{-ik^2t'} e^{-i\alpha t'}\} \hat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \underbrace{(k^2 + |\alpha|)^2 |e^{-i(k^2+\alpha)t} - e^{-i(k^2+\alpha)t'}|^2}_{H(t):=} |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq \underbrace{(\max\{1, |\alpha|\})^2}_{=C} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{2\pi(1+k^2)^s H(t)}_{I_{k,t}:=} |\hat{\phi}(k)|^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Se observa que  $\lim_{t \rightarrow t'} H(t) = 0$ .

Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomamos el  $k$ -ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned} I_{k,t} &\leq 2\pi(1+k^2)^s 4|\hat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq 8\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la igualdad  $|e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$ .

Así,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4\|\phi\|_s^2 < \infty,$$

y usando el Teorema del M-Test de Weierstras tenemos que la serie converge uniformemente. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t \rightarrow t'} I_{k,t}}_{=0} = 0$$

y de ahí concluimos

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-2}^2 = 0.$$

Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-2} = 0.$$

10. Probaremos la dependencia continua de  $\partial_t u$  respecto a los datos iniciales, i.e sean  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  próximos en  $H_{per}^s$ , entonces sus correspondientes derivadas de las soluciones  $u$  y  $\tilde{u}$ , esto es  $\partial_t u$  y  $\partial_t \tilde{u}$ , respectivamente, también están próximos. Sea  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-2}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |(-ik^2 - i\alpha)e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \{\hat{\phi}(k) - \hat{\tilde{\phi}}(k)\}|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} (k^2 + |\alpha|)^2 |\hat{\phi}(k) - \hat{\tilde{\phi}}(k)|^2 \\ &\leq C^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k) - \hat{\tilde{\phi}}(k)|^2 \\ &= C^2 \|\phi - \tilde{\phi}\|_s^2, \end{aligned}$$

esto es,

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-2}^2 \leq C^2 \|\phi - \tilde{\phi}\|_s^2.$$

Así,

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-2} \leq C \|\phi - \tilde{\phi}\|_s.$$

Tomando supremo sobre  $\mathbb{R}$  tenemos:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\partial_t u(t) - \partial_t \tilde{u}(t)\|_{s-2} \leq C \|\phi - \tilde{\phi}\|_s.$$

11. Del item anterior tenemos que vale:

$$\|\partial_t u(t)\|_{s-2} \leq C \|\phi\|_s.$$

Además, usando inmersión continua de espacios de Sobolev periódico, tenemos que  $\|\partial_t u(t)\|_{r-2} \leq C \|\phi\|_r \leq C \|\phi\|_s, \forall r < s$ .  
 Así,  $\partial_t u(t) \in H_{per}^\theta, \forall \theta \in (-\infty, s-2]$ . □

En consecuencia tenemos el siguiente resultado

**Corolario 3.1.** *La única solución de  $(Q_3)$  es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \phi_k.$$

donde  $\phi_k(x) := e^{ikx}$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

**4. Grupo de Operadores Unitarios en  $H_{per}^s$ .** Ahora, introduciremos una familia de operadores que verifiquen las condiciones de ser un grupo unitario de clase  $C_0$  en  $H_{per}^s$ .

**Teorema 4.1.** *Sea  $s \in \mathbb{R}$  y la aplicación*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\rightarrow L(H_{per}^s) \\ t &\rightarrow T(t) \end{aligned}$$

tal que  $T(t) = e^{i(\partial_x^2 - \alpha I)t}$ , i.e. aplica  $T(t)\phi = \left[ \left( e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee, \forall \phi \in H_{per}^s$ . Entonces  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es un grupo unitario de clase  $C_0$  en  $H_{per}^s$ .  
 Además, se verifican los siguientes enunciados:

1.  $T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H_{per}^s), \forall \phi \in H_{per}^s$ .
2. La aplicación  $\phi \rightarrow T(\cdot)\phi$  es continua y  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H_{per}^s$  se satisface:

$$\|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H_{per}^s} = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_{per}^s}, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H_{per}^s} = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_{per}^s}.$$

*Demostración:* Primero observamos que  $T(0)\phi = \phi, \forall \phi \in H_{per}^s$ , así  $T(0) = I$ . Afirmamos que  $T(t)$  es lineal pues la transformada de Fourier y su inversa son lineales. En efecto, sea  $a \in \mathbb{C}$  y  $(\phi, \psi) \in H_{per}^s \times H_{per}^s$  entonces

$$\begin{aligned} T(t)(a\phi + \psi) &= \left[ \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} [a\phi + \psi]^\wedge(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \\ &= \left[ \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} [a\hat{\phi}(k) + \hat{\psi}(k)] \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \\ &= \left[ a \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} + \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\psi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \\ &= a \left[ \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee + \left[ \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\psi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \\ &= aT(t)\phi + T(t)\psi. \end{aligned}$$

Probaremos que  $T(t)\phi \in H_{per}^s$  y  $\|T(t)\phi\|_s = \|\phi\|_s, \forall \phi \in H_{per}^s$ ; i.e.  $\|T(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ . En efecto, sea  $\phi \in H_{per}^s$  y  $t \in \mathbb{R}$ , análogo a (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi\|_{H_{per}^s}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= \|\phi\|_{H_{per}^s}^2 < \infty. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Luego,

$$\|T(t)\phi\|_s = \|\phi\|_s, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \phi \in H_{per}^s, \tag{4.2}$$

es decir  $T(t) \in L(H_{per}^s)$  con  $\|T(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Ahora, probaremos que  $T(t+r) = T(t) \circ T(r), \forall t, r \in \mathbb{R}$ . En efecto, sea  $\phi \in H_{per}^s$  y  $t, r \in \mathbb{R} - \{0\}$ , tenemos

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[ \left( e^{-ik^2(t+r)} e^{-i\alpha(t+r)} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \\ &= \left[ \left( e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \cdot e^{-ik^2r} e^{-i\alpha r} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sabemos que si  $\phi \in H_{per}^s$  entonces  $\hat{\phi} \in l_s^2$ , esto es

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 < \infty. \tag{4.4}$$

Afirmamos que

$$\left( e^{-ik^2r} e^{-i\alpha r} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_s^2, \forall r \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

En efecto, cuando  $r = 0$  es evidente que se cumple la afirmación. Así, probaremos el caso  $r > 0$ . Para esto, basta observar que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-ik^2r} e^{-i\alpha r} \hat{\phi}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \underbrace{|e^{-ik^2r} e^{-i\alpha r}|^2}_{=1} |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 < \infty \end{aligned}$$



desde que vale (4.4).

Luego, de (4.5) y tomando la transformada inversa de Fourier tenemos:

$$\left[ \left( e^{-ik^2 r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \in H_{per}^s, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Así, definimos:

$$g := \left[ \left( e^{-ik^2 r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \in H_{per}^s.$$

Esto es,

$$g = T(r)\phi. \tag{4.6}$$

También, tomando la transformada de Fourier a  $g$  obtenemos:

$$\widehat{g} = \left( e^{-ik^2 r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}},$$

i.e.

$$\widehat{g}(k) = e^{-ik^2 r} e^{-i\alpha r} \widehat{\phi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Usando (4.7) en (4.3) y de (4.6) tenemos

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[ \left( e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t} \widehat{g}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^\vee \\ &= T(t)g \\ &= T(t)(T(r)\phi) \\ &= [T(t) \circ T(r)]\phi, \quad \forall t, r \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

Así,

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r), \quad \forall t, r \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{4.8}$$

Si  $t = 0$  o  $r = 0$ , entonces la igualdad de (4.8) también es verdad, con esto concluimos con la prueba de

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r), \quad \forall t, r \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Ahora, probaremos que el operador  $T(t)$  es unitario  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

De la identidad (4.2) tenemos que  $T(t)$  es isométrico para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

De (4.9) tenemos

$$T(t) \circ T(-t) = T(t-t) = T(0) = I, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

$$T(-t) \circ T(t) = T(-t+t) = T(0) = I, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Obviamente se observa que (4.10) implica la sobreyectividad de  $T(t)$  y que (4.11) implica la inyectividad de  $T(t)$ . Por lo tanto,  $T(t)$  es biyectivo y

$$\exists T(t)^{-1} = T(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Siendo  $T(t)$  isométrico y sobreyectivo obtenemos que  $T(t)$  es unitario  $\forall t \in \mathbb{R}$  (i.e.  $T(t)^* \circ T(t) = T(t) \circ T(t)^* = I$ ). Además, de (4.12) tenemos  $T(t)^* = T(-t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Ahora probaremos la continuidad de  $t \rightarrow T(t)\phi$ , esto es

$$\|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|_{H_{per}^s} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \tag{4.13}$$

En efecto, usando el ítem 3 de la prueba del teorema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} &\|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|_{H_{per}^s}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |(e^{-ik^2(t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t}) \widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \underbrace{|e^{-ik^2(t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-ik^2 t} e^{-i\alpha t}|^2}_{H(t+h)=}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Observamos que  $\lim_{h \rightarrow 0} H(t+h) = 0$ .

Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para eso, tomamos el  $k$ -ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$I_{k,t,h} := 2\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \underbrace{|e^{-ik^2(t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} - e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t}|^2}_{\leq 4} \leq 8\pi(1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2,$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la igualdad  $|e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$ . Así,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,h} \leq 4\|\phi\|_{H_{per}^s}^2 < \infty, \tag{4.15}$$

y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie en (4.15) converge uniformemente. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T(t+h)\phi - T(t)\phi\|_{H_{per}^s}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} I_{k,t,h}}_{=0} = 0.$$

□

**Observación 4.1.** *Se verifica rápidamente que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)\phi - \phi\|_{H_{per}^s} = 0, \forall \phi \in H_{per}^s.$$

**Observación 4.2.** *Si  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es un grupo de clase  $C_0$  entonces satisface*

$$\lim_{t \rightarrow r} \|T(t)\phi - T(r)\phi\|_{H_{per}^s} = 0, \forall r \in \mathbb{R}, \forall \phi \in H_{per}^s.$$

**Observación 4.3.** *Con la observación 4.1 tendríamos que  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es un grupo de clase  $C_0$ . Así, por la observación (4.2) se tendría (4.13). Por lo tanto,  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es un grupo unitario de clase  $C_0$  en  $H_{per}^s$ . Sean  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  datos próximos en  $H_{per}^s$ , entonces probaremos que sus correspondientes  $T(\cdot)\varphi_1$  y  $T(\cdot)\varphi_2$ , respectivamente, también están próximos. Como  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es unitario, para  $t \in \mathbb{R}$  tenemos*

$$\|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H_{per}^s} = \|T(t)[\varphi_1 - \varphi_2]\|_{H_{per}^s} = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_{per}^s}.$$

Tomando supremo sobre  $\mathbb{R}$  tenemos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(t)\varphi_1 - T(t)\varphi_2\|_{H_{per}^s} = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_{per}^s}. \tag{4.16}$$

De aquí tenemos que si  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$  entonces  $T(\cdot)\varphi_1 \rightarrow T(\cdot)\varphi_2$ .

**5. Versión del Teorema 3.1 usando  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ .** A seguir enunciamos el Teorema 3.1 en función del grupo  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ .

**Teorema 5.1.** *Sea  $s \in \mathbb{R}$  y  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  el grupo unitario de clase  $C_0$  del Teorema 4.1 entonces  $T(\cdot)\phi$  es la única solución de*

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_{per}^s) \cap C^1(\mathbb{R}, H_{per}^{s-2}) \\ u_t = A_1 u \text{ en } H_{per}^{s-2} \\ u(0) = \phi \in H_{per}^s \end{cases},$$

en el sentido que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_1 T(t)\phi \right\|_{H_{per}^{s-2}} = 0, \tag{5.1}$$

donde  $A_1 := i\partial_x^2 - i\alpha I$ , y si  $\varphi_1 \sim \varphi_2$  entonces  $T(\cdot)\varphi_1 \sim T(\cdot)\varphi_2$ .

Además, se satisface la siguiente regularidad: Si  $\phi \in H_{per}^s$  entonces  $T(t)\phi \in H_{per}^r \forall t \in \mathbb{R}, \forall r \leq s$  y satisface que  $\|T(t)\phi\|_{H_{per}^r} \leq \|\phi\|_{H_{per}^s}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall r < s$  y  $\|T(t)\phi\|_{H_{per}^s} = \|\phi\|_{H_{per}^s}, \forall t \in \mathbb{R}$ . También, se obtiene que la aplicación:  $\phi \rightarrow A_1T(\cdot)\phi$  que a cada dato  $\phi \in H_{per}^s$  le asigna  $A_1T(\cdot)\phi$ , es continua. Esto es,

$$\|A_1T(t)\phi - A_1T(t)\tilde{\phi}\|_{s-2} \leq C\|\phi - \tilde{\phi}\|_s, \forall t \in \mathbb{R},$$

donde  $C = \max\{1, |\alpha|\}$ .

Así,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A_1T(t)\phi - A_1T(t)\tilde{\phi}\|_{s-2} \leq C\|\phi - \tilde{\phi}\|_s.$$

Además,  $A_1T(t)\phi \in H_{per}^\theta, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \theta \leq s - 2$ , con  $\|A_1T(t)\phi\|_\theta \leq C\|\phi\|_s, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \theta \leq s - 2$ .

Así,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A_1T(t)\phi\|_\theta \leq C\|\phi\|_s, \forall \theta \leq s - 2.$$

*Demostración:* La prueba de (5.1) es análoga al del ítem 4 de la prueba del Teorema 3.1. Y la prueba del resto del enunciado también se sigue como la prueba del Teorema 3.1 y como consecuencia del Teorema 4.1. □

**6. Análisis de la diferenciabilidad versus datos iniciales.** Con la finalidad de enriquecer nuestro estudio, buscaremos el espacio infinito dimensional donde ocurre la diferenciabilidad y su conexión con el dato inicial.

**Teorema 6.1.** Sea  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) + i\alpha u(t) \right\|_{H_{per}^{s-2}} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si y solamente si  $\phi \in H_{per}^s$ .

*Demostración:* Sea  $\phi \in H_{per}^s$ , la prueba lo hacemos análoga a la prueba de diferenciabilidad del teorema 3.1. Sea  $s \in \mathbb{R}$ , si  $\phi \in H_{per}^s$  entonces  $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t} \hat{\phi}(k) \phi_k$  y  $u$  es solución de  $(Q_3)$ .

Recuerde obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) + i\alpha u(t) \right\|_{H_{per}^{s-2}}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |e^{-ik^2t} e^{-i\alpha t}|^2 \left| \frac{e^{-ik^2h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} + ik^2 + i\alpha \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \underbrace{\left| \frac{e^{-ik^2h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} + ik^2 + i\alpha \right|^2}_{M(h):=} |\hat{\phi}(k)|^2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Usando L'Hospital tenemos que  $M(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procederemos mayorando el k-ésimo término de la serie. Para  $h > 0$  tenemos

$$\frac{e^{-ik^2h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h (e^{-ik^2s} e^{-i\alpha s})_s ds,$$

luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ik^2h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_0^h |e^{-ik^2s} e^{-i\alpha s}| | -ik^2 - i\alpha | ds \\ &= \frac{1}{|h|} |k^2 + \alpha| |h| \\ &\leq k^2 + |\alpha| \\ &\leq \underbrace{\max\{1, |\alpha|\}}_{C=} (k^2 + 1). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Usando la desigualdad (6.2) procedemos a mayorar  $|M(h)|^2$  como sigue

$$|M(h)|^2 \leq \{2C(k^2 + 1)\}^2 \leq 4C^2\{1 + |k|^2\}^2. \tag{6.3}$$

Pasamos a mayorar el  $k$ -ésimo término de la serie, donde usamos la estimativa (6.3)

$$\begin{aligned} I_{k,t,s} &:= (1 + k^2)^{s-2} |M(h)|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq (1 + k^2)^{s-2} 4C^2 (1 + k^2)^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= (1 + k^2)^s 4C^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \end{aligned}$$

y como  $\|\phi\|_s^2 < \infty$  entonces la serie es convergente.

Así, usando el Teorema M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge uniformemente y por lo tanto es posible intercambiar los límites y obtener:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) + i\alpha u(t) \right\|_{H_{per}^{s-2}}^2 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,s} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} I_{k,t,s}}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i\partial_x^2 u(t) + i\alpha u(t) \right\|_{H_{per}^{s-2}} = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , probaremos que  $\phi \in H_{per}^s$ . En efecto, como en  $H_{per}^{s-2}$  vale  $\partial_t u(t) = i\partial_x^2 u(t) - i\alpha u(t), \forall t \in \mathbb{R}$ , en particular es válido para  $t = 0$ :

$$H_{per}^{s-2} \ni \partial_t u(0) = i\partial_x^2 u(0) - i\alpha u(0) = i\partial_x^2 \phi - i\alpha \phi = i(\partial_x^2 - \alpha I)\phi,$$

luego  $\phi \in H_{per}^s$ . □

Así, se cumple el siguiente resultado, para  $t = 0$ .

**Corolario 6.1.** Sea  $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(h) - \phi}{h} - i\partial_x^2 \phi + i\alpha \phi \right\|_{H_{per}^{s-2}} = 0,$$

si y solamente si  $\phi \in H_{per}^s$ . Ahora, en términos del grupo unitario  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ , obtenemos los dos siguientes resultados cuyas pruebas son análogas a las pruebas del teorema 6.1 y corolario 6.1 respectivamente.

**Teorema 6.2.** Sea  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_1 T(t)\phi \right\|_{H_{per}^{s-2}} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si y solamente si  $\phi \in H_{per}^s$ .

También se cumple el siguiente resultado,

**Corolario 6.2.** Sea  $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{T(h)\phi - \phi}{h} - A_1 \phi \right\|_{H_{per}^{s-2}} = 0,$$

si y solamente si  $\phi \in H_{per}^s$ .

**7. Conclusiones.** En nuestro estudio de la ecuación tipo Schrödinger en espacios de Sobolev periódico hemos obtenido importantes resultados, entre los cuales destacamos:

1. Usando la teoría de Fourier, demostramos la existencia y unicidad de solución del modelo  $(Q_3)$ , así como la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.
2. Probamos la regularidad de la solución de  $(Q_3)$ .
3. Introduciendo una familia de operadores, la cual forma un  $C_0$ -Grupo unitario, reescribimos la solución del problema  $(Q_3)$ , obteniendo resultados más elegantes.
4. En el análisis de diferenciabilidad de la solución versus el dato inicial obtenemos resultados como el saber en que espacio  $H_{per}^r$  existe la derivada  $\partial_t u(t) = i\partial_x^2 u(t) - i\alpha u(t)$  y que esto depende mucho del espacio donde se tome el dato inicial.

5. Además, teóricamente hemos conseguido una familia de operadores que forman un  $C_o$ -Grupo unitario.

### ORCID and License

Víctor Candia Estrada <https://orcid.org/0000-0003-1163-6920>

Yolanda Santiago Ayala <https://orcid.org/0000-0003-2516-0871>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Burq N, Gérard P, Ptzvetkov N. An instability property of the nonlinear Schrödinger Equation on  $S^d$ . Math. Research Letters. 2002; 9:323-335.
- [2] Cazenave T. An introduction to nonlinear Schrödinger equations. Third Edition. Rio de Janeiro: IM-UFRJ; 1996.
- [3] Iorio R, Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University; 2001.
- [4] Liu Z, Zheng S. Semigroups associated with dissipative system. Chapman Hall/CRC; 1999.
- [5] Moore W. Schrödinger - Life and Thought. Cambridge University Press; 1989.
- [6] Muñoz Rivera J. Semigrupos e equações Diferenciais Parciais. Petropolis-LNCC; 2007.
- [7] Pazy A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berlín; 1983.
- [8] Santiago Ayala Y. Sobre la analiticidad del semigrupo  $C_o$  asociado a un sistema viscoelástico. Pesquimat. 2003; 06(02):27-36.
- [9] Santiago Ayala Y. Global existence and exponential stability for a coupled wave system. J. of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2012; 16(1-2):29-46.
- [10] Santiago Ayala Y. Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones. Alemania. Editorial Académica Española; 2014.
- [11] Santiago Y, Rojas S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.
- [12] Santiago Y, Rojas S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01):49-65.
- [13] Santiago Y, Rojas S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación de Schrödinger no homogénea en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01):37-51.
- [14] Schrödinger E. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. Phys. Rev. 1926; 28:10-49.
- [15] Sulem C, Sulem P. The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse. Springer Verlag New York; 1999.
- [16] Terence T. Nonlinear dispersive equations: Local and Global analysis. Regional conference series in mathematics, No. 106. American Mathematical Society; 2006.