



## Analysis of the behavior of the flow of prices in the financial market using the entropy of information

### Análisis del comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero usando la entropía de la información

José Luis Ponte Bejarano , Juan Carlos Ponte Bejarano  and Alexis Rodriguez Carranza 

Received, Nov. 18, 2022;

Accepted, Jul. 15, 2023;

Published, Jul. 27, 2023



#### How to cite this article:

Ponte J. et al. *La entropía de la información para mejorar la información en el análisis del comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero*. *Selecciones Matemáticas*. 2023;10(1):164–172. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2023.01.15>

#### Abstract

*In the present work it is indicated that the entropy of the information is the most appropriate tool to analyze the behavior of the flow of prices in the financial market. For this, the following points are mentioned: general concepts of chaos theory applied to the financial market, concept of dynamic systems applied to the flow of prices, time series of prices and the entropy of information applied to the flow of prices in the financial market.*

**Keywords** . Information entropy, time series of prices, financial market.

#### Resumen

*En el presente trabajo se indica que la entropía de la información es la herramienta más adecuada para analizar el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero. Para esto se mencionan los siguientes puntos: conceptos generales de la teoría del caos aplicada al mercado financiero, concepto de sistemas dinámicos aplicada al flujo de precios, series temporales de precios y la entropía de la información aplicada al flujo de precios en el mercado financiero.*

**Palabras clave**. Entropía de la información, serie temporal de precios, mercado financiero.

**1. Introducción.** Actualmente, la economía tiene un rol fundamental para el bienestar de los integrantes de la sociedad, y en este aspecto el estado peruano no es ajeno a esta problemática ya que existe un gran número de empresas peruanas que invierten en la bolsa de valores, pero su crecimiento económico no es el esperado en comparación con empresas extranjeras. Esto se debe principalmente a que los modelos de inversión utilizados en la bolsa de valores se basan sólo en probabilidad, y esto genera inseguridad al momento de invertir. Es por ello que analizar el comportamiento de la serie temporal de precios de las acciones en la bolsa de valores es importante, pues ello permitirá un crecimiento social sostenible en el tiempo. Existen algunas herramientas utilizadas hasta el momento para analizar el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero, como son la dimensión de conteo por cajas y la dimensión de correlación.

\*Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú (jponteb@unitru.edu.pe).

†Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú (jponte@unitru.edu.pe).

‡Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú (arodriguezca@unitru.edu.pe).

Los valores proporcionados por ambas herramientas indican el número de variables significativas necesarias para entender el flujo de las trayectorias en el mercado financiero. Pero estas no son suficientes para el estudio asintótico de la misma. Ante tal situación, se plantea la siguiente interrogante: ¿Cómo mejorar la información para analizar el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero? Se propone que la información, para analizar el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero, se mejora usando la entropía de la información. Para sustentar esta propuesta se tratarán los siguientes puntos: conceptos generales de la teoría del caos aplicada al mercado financiero, concepto de sistemas dinámicos aplicada al flujo de precios, series temporales de precios, análisis no lineal de la serie temporal de precios, teoremas de reconstrucción de atractores mediante coordenadas de retraso, atractores de Henon y Lorenz, dimensión de conteo con cajas y la entropía de la información aplicada al flujo de precios en el mercado financiero.

**2. Puntos esenciales.**

**2.1. Teoría del caos, sistemas dinámicos y el mercado financiero.** La teoría del caos presenta un nuevo enfoque científico que viene siendo usado para explicar la dinámica compleja de la evolución del flujo de precios en el mercado financiero. En él, sistemas aparentemente simples generan comportamientos muy complicados, caóticos, cuando alguna de las variables es perturbada, aun si dicha perturbación es arbitrariamente pequeña [17]. Es por ello, que uno podría preguntarse si la evolución del flujo de precios en el mercado financiero es no aleatoria, es decir, si las variables que intervienen están conectadas de alguna manera, y al perturbar alguna de ellas se produce una modificación de todo el sistema; la respuesta afirmativa conseguiría explicar la volatilidad, ya que una pequeña perturbación de alguna variable del sistema afecta directamente el comportamiento del flujo de precios [1]. Además, se debe tomar en cuenta que la teoría del caos ha sido usada como una herramienta para la búsqueda de un mecanismo que genera los movimientos observados en los datos económicos reales y que minimiza los efectos negativos por las especulaciones [21]. En este sentido, la teoría del caos presenta un cambio en el pensamiento acerca de los métodos para el estudio del flujo de precios en el mercado financiero.

Los sistemas dinámicos son sistemas que describen el comportamiento de fenómenos que cambian con el tiempo. Para investigar el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero podría usarse la información dinámica y geométrica que cargan, usando teoremas de reconstrucción [16], bajo la hipótesis de que las variables que describen el comportamiento del flujo de precios están relacionadas de alguna manera [10],[8]. Existe evidencia de que el flujo de precios en el mercado financiero podría provenir de un sistema no lineal [8], [16]; en este sistema no lineal, su estado de operación puede aparecer como un fenómeno caótico generado por el cambio de los parámetros del sistema, lo que resulta en un desorden económico, el cual se podría regular utilizando la dinámica no lineal y otras herramientas de la teoría de los sistemas dinámicos [13]. Por lo tanto, los sistemas dinámicos, generados por sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, representan una adecuada herramienta a utilizar para describir la evolución del flujo de precios en el mercado financiero; el cual se logra reconstruyendo el atractor que existe detrás de la serie temporal de precios mediante las coordenadas de retraso.

**2.2. Serie temporal.** Una serie temporal es un conjunto de datos numéricos que contienen información del flujo de algún sistema dinámico, es decir, contienen información de las trayectorias que describen el comportamiento de algún fenómeno, sea de naturaleza física o económica. La definición formal de serie temporal se muestra a continuación.

**Definición 2.1.** Dado un sistema dinámico con flujo  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  en un espacio de fase  $H$ , siendo  $H$  un espacio métrico completo. Una serie temporal  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se define como los valores que toma una función, llamada función de observación,  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $s(t) = F(\phi_t(x_0))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in H$ . Una representación geométrica de una serie temporal, considerando  $H = \mathbb{R}^n$ , se muestra en la figura 2.1.

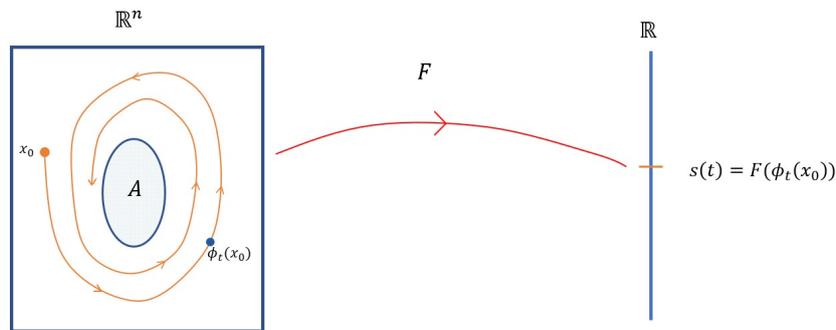


Figura 2.1: Función de observación  $F$  y serie temporal  $s$ .

Si consideremos que las trayectorias convergen a un conjunto atractor  $A \subset \mathbb{R}^n$ , en la figura 2.1 se observa que la función  $F$ , llamada función de observación, toma los puntos de la órbita que pasa por  $x_0$ , generada por el flujo  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ; y les asigna valores reales. Es decir, lo que hace la función  $F$  es brindarnos información sobre el comportamiento y/o características del sistema dinámico a estudiar. Conforme la variable  $t \in \mathbb{R}$  varía se obtienen un conjunto de datos reales, a los cuales llamamos serie de tiempo o temporal; y estas son denotadas por  $s(t)$ .

Como ejemplo de una serie temporal se tienen los precios de las acciones de una empresa particular en el mercado financiero, el cual contiene información dinámica del flujo de precios [15]. La serie temporal de precios al tener información dinámica del flujo de las trayectorias, considerando que existe algún conjunto atractor, se emplea para reconstruir tal conjunto atractor mediante la aplicación de coordenadas de retraso, pues haciendo ello se conocerán las trayectorias que describen el flujo de precios en el mercado financiero [8]. Por lo tanto, la serie temporal de precios es esencial para describir el comportamiento asintótico del flujo de precios en el mercado financiero.

La aplicación de coordenadas retraso mencionada líneas arriba, vital para la reconstrucción del conjunto atractor, se define a continuación.

**Definición 2.2.** Sea  $\Phi$  el flujo de un sistema dinámico sobre una variedad diferenciable  $M$  por lo menos de clase  $C^1$ ,  $T$  un entero positivo (llamada de retraso) y  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Se define la aplicación de coordenadas de retraso  $F_{(\Phi,T,h)} : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por:

$$F_{(\Phi,T,h)}(x) = (h(x), h(\Phi_T(x)), h(\Phi_{2T}(x)), \dots, h(\Phi_{nT}(x))).$$

Una representación geométrica de la aplicación de coordenadas de retraso, para  $M = \mathbb{R}^k$ , se muestra en la figura 2.2.

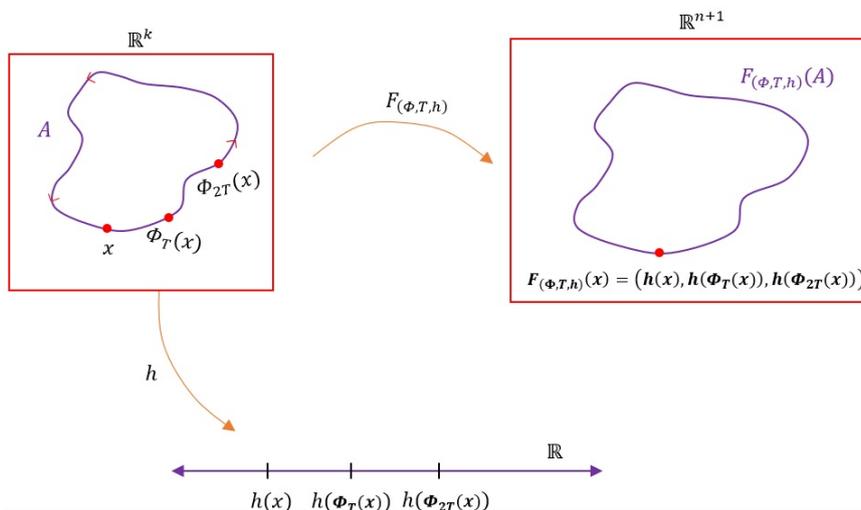


Figura 2.2: Reconstrucción del atractor  $A$  vía la aplicación  $F_{(\Phi,T,h)}$  para  $n = 2$ .

En la figura 2.2 se observa que la función  $h$  es la función de observación, y las imágenes de  $h$  generan la serie temporal. Y como se puede ver en la figura 2.2 estos valores son usados para obtener una copia del conjunto atractor  $A$ .

La tarea principal para estudiar el comportamiento no lineal en una serie de tiempo, como una serie de precios, es la reconstrucción de la dinámica que tiene, es decir, del conjunto atractor existente detrás de la serie temporal. Si una serie de tiempo proviene de un sistema determinista, esta tiene dependencia entre sus componentes dada por el sistema de ecuaciones que modela y contiene información geométrica considerando que las trayectorias convergen a un atractor, el cual se sumergirá en algún espacio euclidiano [8]. Utilizando dicha información y las ideas del teorema de inmersión de Whitney en el cual una variedad compacta de dimensión  $n$  puede sumergirse en un espacio euclidiano de dimensión  $2n$ , junto con sus generalizaciones para conjuntos fractales, es posible reconstruir la dinámica oculta en la serie temporal [18],[16], [12]. Por lo tanto, cuando se tiene una serie temporal de precios, que proviene de un sistema determinístico, se debe analizar si esta viene de un sistema no lineal; y para ello se tiene que reconstruir la dinámica oculta en la serie temporal de precios, pues la no linealidad podría indicar la existencia de algún conjunto atractor fractal.

Una de las técnicas del análisis de series temporales utilizadas para obtener información sobre variables no observadas es la reconstrucción del espacio de estados, la que tiene como base el Fractal Delay

Embedding Prevalence Theorem propuesto por Sauer, Yorke y Casdagli en 1991 [18]; que se menciona a continuación.

**Teorema 2.1.** *Sea  $\Phi$  el flujo de un sistema dinámico sobre un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$ , y  $A$  un subconjunto compacto de  $U$  de  $\dim_B(A) = d$ . Sea  $n > 2d$  un entero y  $T > 0$ . Además, considere que  $A$  contiene sólo un número finito de puntos de equilibrio; no contiene órbitas periódicas de  $\Phi$  de periodo  $T$  o  $2T$  y contiene un número finito de órbitas periódicas de  $\Phi$  de periodo  $3T, 4T, \dots, nT$ . Entonces, para casi toda función  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , la aplicación de coordenadas de retraso  $F_{(\Phi, T, h)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por:*

$$F_{(\Phi, T, h)}(x) = (h(x), h(\Phi_T(x)), h(\Phi_{2T}(x)), \dots, h(\Phi_{(n-1)T}(x))),$$

es inyectiva sobre  $A$

En este teorema 2.1 se utiliza la aplicación de coordenadas de retraso, con la cual es posible reconstruir un espacio de estados de dimensión finita, equivalente al espacio de estados original a partir de las mediciones de una única variable, y obtener una copia inyectiva del conjunto atractor oculto en la serie temporal [18]. En esta técnica de reconstrucción, las coordenadas de retraso aplicada a la serie temporal de precios permiten reconstruir el atractor oculto en ella, y de esa manera obtener el conjunto atractor que está compuesta por las trayectorias que describen el comportamiento asintótico del flujo de precios en el mercado financiero [15],[8]. Por lo tanto, el teorema 2.1 de reconstrucción de atractores brinda la base matemática para afirmar que con probabilidad uno sí es posible tener una copia inyectiva del conjunto atractor, el cual contiene información dinámica del flujo de precios en el mercado financiero.

**2.3. Reconstrucción de atractores.** Cuando se pretende utilizar la aplicación de coordenadas de retraso, para indicar la utilidad que esta tiene en la reconstrucción de la dinámica de un sistema a partir de una sólo observación temporal, se suelen emplear como ejemplos los atractores de Henon y Lorenz.

**El atractor de Henon:**

El atractor de Henon es dado por el sistema discreto (para  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$ ):

$$\begin{cases} x(n + 1) = 1 - ax(n)^2 + y(n), \\ y(n + 1) = bx(n). \end{cases} \tag{2.1}$$

La representación geométrica del atractor del Henon se muestra en la figura 2.3.

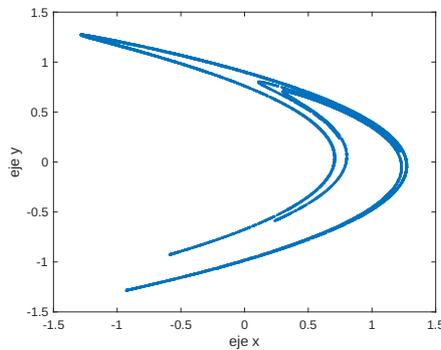


Figura 2.3: Atractor de Henon

En la figura 2.3 se visualiza el comportamiento que tienen las trayectorias, generado el atractor de Henon. Estas trayectorias son soluciones numéricamente del sistema discreto 2.1. Para obtener las soluciones numéricas se utilizó el programa Fortran, y para construir la figura 2.3 Octave.

A continuación, se indica cómo utilizar la aplicación de coordenadas de retraso para reconstruir el atractor de Henon. Para obtener una serie temporal, se considera la función de observación  $h$  como la proyección en el eje  $x_1$ . Es decir,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto h(x_1, x_2) = x_1 \end{aligned}$$

Así, la serie temporal es formada por las coordenadas  $x_1$  de las trayectorias que son soluciones numérica de la ecuación 2.1, que es un sistema discreto en el tiempo [9].

Como el atractor de Henon se encuentra en  $\mathbb{R}^2$  se considera como dimensión del espacio donde el atractor será reconstrucción  $n = 2$ . Ahora se debe elegir el tiempo de retraso  $T$  adecuado, para ello hacemos

variar el valor de  $T$ . Los tiempos de retraso considerados son  $T = 1, T = 2, T = 3$  y  $T = 5$ , siendo el tiempo de retraso óptimo igual a  $T = 1$ . Utilizando la aplicación de coordenadas de retraso dada en la definición 2.2, o en el teorema 2.1, se tienen en la figura 2.4 reconstrucciones. De estas reconstrucciones, sólo cuando el tiempo de retraso es  $T = 1$  se logra reconstruir el atractor de Henon.

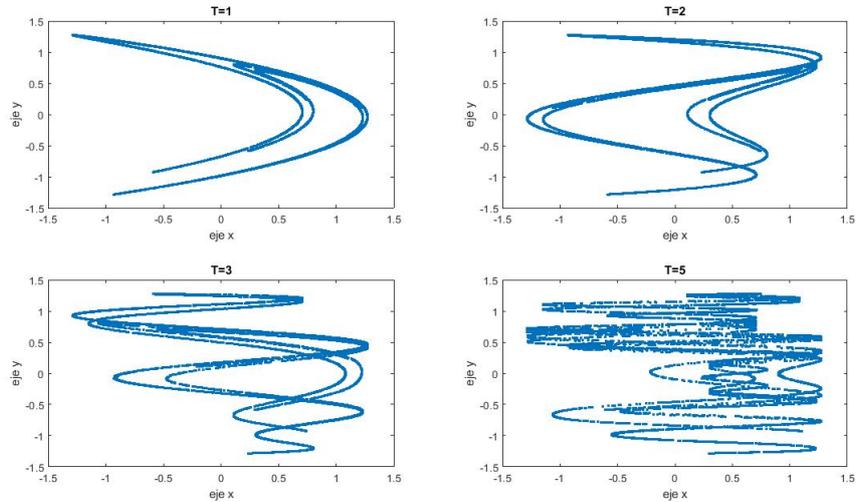


Figura 2.4: Reconstrucción del Atractor de Henon para  $T = 1, 2, 3, 5$ .

En la figura 2.4 se observa que con tiempo de retraso  $T = 1$  y dimensión del espacio de reconstrucción  $n = 2$ , se logra tener una copia inyectiva del conjunto atractor de Henon [12]. Esta copia esta garantizada debido al teorema 2.1.

#### El atractor de Lorenz:

El atractor de Lorenz es obtenido a través del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (para  $\sigma = 10, \rho = 45$  y  $\beta = 8/3$ ):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases} \quad (2.2)$$

La representación geométrica del atractor del Lorenz se muestra en la figura 2.5.

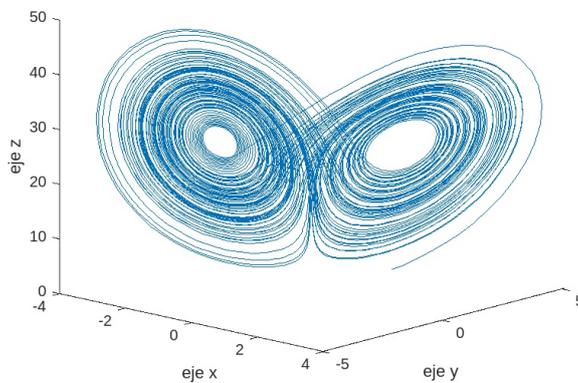


Figura 2.5: Atractor de Lorenz

En la figura 2.5 se visualiza el comportamiento que tienen las trayectorias, generado el atractor de

Lorenz. Estas trayectorias son soluciones numéricamente del sistema de ecuaciones diferenciales 2.2. Para obtener las soluciones numéricas se utilizó el programa Fortran, y para construir la figura 2.5 Matlab.

A continuación, se indica cómo utilizar la aplicación de coordenadas de retraso para reconstruir el atractor de Lorenz. Para obtener una serie temporal, se considera la función de observación  $h$  como la proyección en el eje  $x_1$ . Es decir,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto h(x_1, x_2, x_3) = x_1. \end{aligned}$$

Así, la serie temporal es formada por las coordenadas  $x_1$  de las trayectorias que son soluciones numérica de la ecuación 2.2, que es un sistema de ecuación diferenciales continuo en el tiempo [14]. Esta se observa en la figura 2.6.

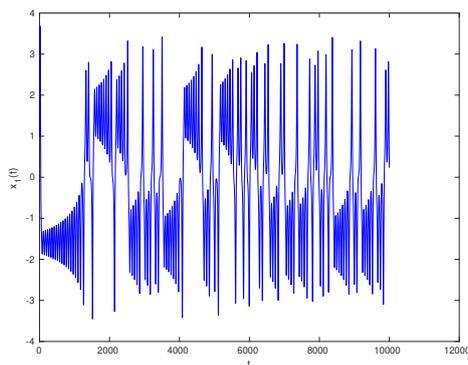


Figura 2.6: Serie de tiempo para Lorenz, formada por la coordenada  $x_1$ .

Como el atractor de Lorenz se encuentra en  $\mathbb{R}^3$  se considera como dimensión del espacio donde el atractor será reconstrucción  $n = 3$ . Ahora se debe elegir el tiempo de retraso  $T$  adecuado, para ello hacemos variar el valor de  $T$ . Los tiempos de retraso considerados son  $T = 1, T = 10, T = 17$  y  $T = 90$ , siendo el tiempo de retraso óptimo igual a  $T = 17$ . Luego, utilizando la aplicación de coordenadas de retraso dada en el teorema 2.1, se tienen en la figura 2.7 reconstrucciones. De estas, cuando  $T = 1$  la reconstrucción es casi un recta, para  $T = 10$  la reconstrucción no representa una copia inyectiva de atractor de Lorenz; y para  $T = 90$  la reconstrucción obtenida no representa el conjunto atractor de Lorenz. Sin embargo, para  $T = 17$  se tiene una copia inyectiva del conjunto atractor de Lorenz.

En la figura 2.7 se observa que con tiempo de retraso  $T = 17$  y dimensión del espacio de reconstrucción  $n = 3$ , se logra tener una copia inyectiva del conjunto atractor de Lorenz [12]. Esta copia inyectiva esta garantizada debido al teorema 2.1.

En los ejemplos anteriores, Henon y Lorenz, se observa que para reconstruir ambos atractores se debe seguir un orden: Primero se debe tener la serie temporal, que en el caso de Henon y Lorenz la serie temporal fue formada por las coordenadas  $x_1$  que son soluciones numéricas de las ecuaciones 2.1 y 2.2, respectivamente. Segundo, se debe elegir el tiempo de retraso y la dimensión del espacio de reconstrucción adecuados. Para elegir el tiempo de retraso adecuado se utiliza el algoritmo de la información mutua propuesto por Fraser y Swinney [6]; y para elegir la dimensión del espacio de reconstrucción se utiliza la técnica de lo falsos vecinos propuesta por Kennel, Brown y Abarbanel [11]. Luego, se utiliza la aplicación de coordenadas de retraso para reconstruir los atractores de Henon y Lorenz. En base al teorema 2.1 la reconstrucción será una copia inyectiva del atractor original. Este mismo esquema se aplica cuando se pretende reconstruir el atractor oculto en una serie de precios de una empresa del mercado financiero: Primero se debe tener la serie temporal, que en este caso está formada por los precios de las acciones de una empresa del mercado financiero. Segundo, se debe determinar el tiempo de retraso adecuado mediante el algoritmo de la información mutua [6] y la dimensión del espacio de reconstrucción mediante la técnica de los falsos vecinos [11]. Luego, utilizando la aplicación de coordenadas de retraso dada por la definición 2.2 se reconstruye el conjunto atractor oculto en la serie temporal de precios. En base al teorema 2.1 la reconstrucción será una copia inyectiva del atractor original. Como el conjunto atractor se reconstruye a partir de la serie temporal de precios, las trayectorias reconstruidas tendrán información acerca del flujo de precios del mercado financiero.

**2.4. Algunas herramientas para el análisis del flujo de precios en el mercado financiero.** Actualmente, existen algunas herramientas para analizar y obtener información del comportamiento de un sistema,

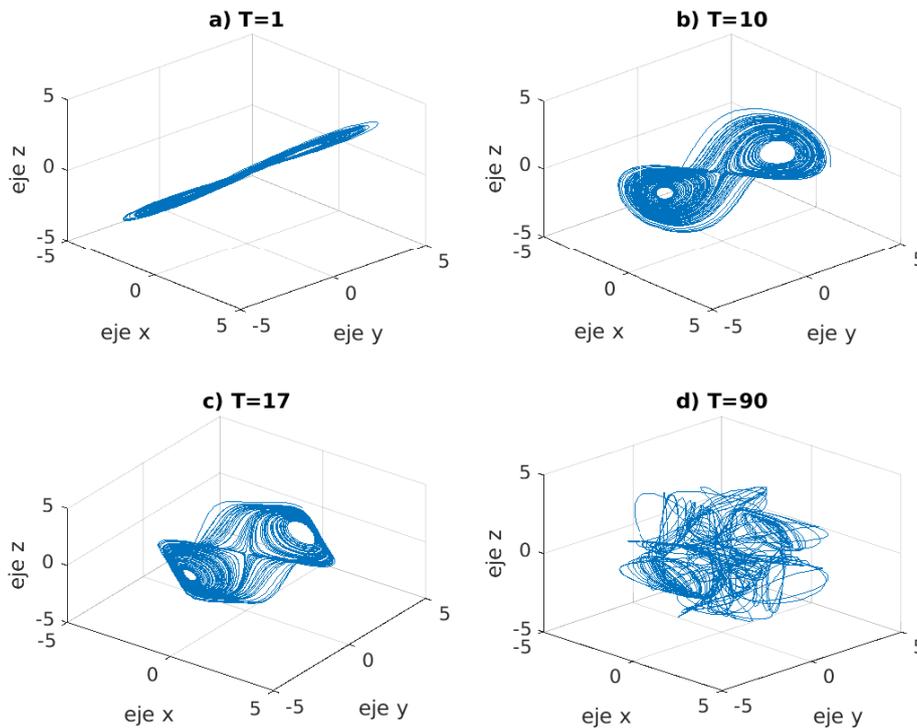


Figura 2.7: Reconstrucción del Atractor de Lorenz para  $T = 1, 10, 17, 90$ .

como el mercado financiero. Una herramienta utilizada en este campo es la dimensión de conteo por cajas, la que se define a continuación.

**Definición 2.3.** Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . La dimensión de la caja de  $A$ , llamada también dimensión de conteo por cajas, es definida por:

$$\dim_B(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(\varepsilon)}{-\log(\varepsilon)},$$

donde  $n(\varepsilon)$  representa el número de cubos de lado  $\varepsilon > 0$  que tienen intersección con  $A$ , es decir, el número de cubos necesarios para cubrir  $A$ .

Para calcular la dimensión de conteo por cajas, dada por la definición 2.3, de un conjunto atractor se tiene que particionar el conjunto en cubos de tamaño pequeño; y haciéndolo más fina. Así, el valor obtenido representa el número de variables significativas necesarias para analizar el flujo de las trayectorias que describen el comportamiento del sistema [7]. Esta manera de obtener información de la dinámica de un sistema se puede aplicar cuando se considera una serie temporal de precios; y el valor obtenido representa la complejidad que implica trabajar con series temporales de precios del mercado financiero, mas no indica el mínimo número de información en bits que se debe tener para realizar el estudio del comportamiento asintótico del flujo de precios en el mercado financiero [16]. Por lo tanto, la dimensión de conteo por caja es una herramienta útil para tener información del flujo de precios en el mercado financiero, pero la información proporcionada por esa herramienta al no ser suficiente debe ser mejora.

La entropía de Shannon, llamada también la entropía de la información fue introducida por Claude Shannon [19]. El mostró que si se tiene un conjunto de  $n$ -eventos, cuyas probabilidades de ocurrencia son  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , entonces la cantidad de información promedio para especificar una de ellas es dada por:

$$H(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i). \quad (2.3)$$

La igualdad dada en la ecuación 2.3 es llamada la entropía de la información. Esta ha sido utilizada en el campo de las finanzas para comprender el comportamiento del mercado financiero. Por ejemplo, Chen menciona la similitud entre los conceptos de la teoría de la información y el valor económico de la información con respecto a los mercados [2], y emplea la entropía de la información para explicar la

mayoría de las evidencias empíricas sobre los comportamientos del mercado, determinando el valor de la información según el número de personas que la conocen [3]. Devi usa una generalización de la entropía de Shannon para establecer una posible medida de riesgo en la construcción de carteras de riesgo óptimo cuyos rendimientos superan los rendimientos del mercado [5]. Calcagnile, Corsi y Marmi investigan la eficiencia relativa de la información de los mercados financieros midiendo la entropía de la serie temporal de datos de alta frecuencia [4]. Así, la entropía de la información es una herramienta útil para medir la eficiencia del mercado financiero [20]. Por lo tanto, la entropía de la información representa una herramienta útil para describir el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero, ya que cuando se calcula la entropía de Shannon del atractor reconstruido mediante la aplicación de coordenadas de retraso, usando la serie temporal de precios, esta indica el número mínimo de información en bits necesarios para describir lo que ocurre con la evolución del flujo de precios en el mercado financiero.

**3. Conclusión.** De los puntos tratados anteriormente se concluye que la información, para analizar el comportamiento del flujo de precios en el mercado financiero, se mejora usando la entropía de la información. Del análisis realizado, el valor numérico de la entropía de la información indica el número mínimo de bits de información necesarios para analizar lo que está ocurriendo con la evolución del flujo de precios en el mercado financiero. Este hecho indica que la entropía de la información es la herramienta más útil, en comparación con otras, para describir lo que está ocurriendo con el flujo de las trayectorias, existentes detrás de la serie temporal de precios, en el mercado financiero.

Como un trabajo futuro, la entropía de la información podría ser muy útil para un economista al momento de querer invertir en la bolsa de valores ya que si se desarrollan trabajos en esta dirección podría servir en la predicción de precios a corto tiempo en el mercado financiero.

### ORCID and License

José Luis Ponte Bejarano <https://orcid.org/0000-0002-4997-7950>

Juan Carlos Ponte Bejarano <https://orcid.org/0000-0002-8682-9682>

Alexis Rodriguez Carranza <https://orcid.org/0000-0002-0290-165X>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Alves P. Quantifying chaos in stock markets before and during COVID-19 pandemic from the phase space reconstruction. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2022; 202: 480-499. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.07.026>.
- [2] Chen J. Information, entropy and evolutionary finance. School of Business. University of Northern British Columbia. 2003; 1-27. Available from: URL <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.350683>
- [3] Chen J. Information Theory and Market Behavior. School of Business. University of Northern British Columbia. 2006; 1-25. Available from: URL <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.622901>
- [4] Calcagnile L, Corsi F, Marmi S. Entropy and Efficiency of the ETF Market. *Computational Economics*. 2020; 55(1): 143-184. Available from: URL <https://doi.org/10.1007/s10614-019-09885-z>
- [5] Devi S. Financial portfolios based on Tsallis relative entropy as the risk measure. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2021; 9: 093207. Available from: URL <https://doi.org/10.1088/1742-5468/ab3bc5>
- [6] Fraser A., Swinney H. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A (General Physics)*. 1986; 33(2): 1134-1140.
- [7] Freiberg U, Kohl S. Box dimension of fractal attractors and their numerical computation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021; 95: 105615. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105615>
- [8] Gutierrez A, Rodriguez A, Carrasco A. Detecting nonlinear dynamics using BDS test and surrogate data in financial time series. *Journal of Mathematics and System Science*. 2019; 9(2). Available from: URL <https://doi.org/10.17265/2159-5291/2019.02.002>
- [9] Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*. 1976; 50(1): 69-77. Available from: URL <https://doi.org/10.1007/BF01608556>
- [10] Immonen E. Simple agent-based dynamical system models for efficient financial markets: Theory and examples. *Journal of Mathematical Economics*. 2017; 69: 38-53. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2016.12.005>
- [11] Kennel M., Brown R., Abarbanel H. Determining embedding dimensions for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *The American Physical Society, Phys. Rev.* 1992; 45: 34033411.
- [12] Krakovská A, Pócoš S, Mojžišová K, Bečková I, Xaver J. State space reconstruction techniques and the accuracy of prediction. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022; 111: 106422. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106422>
- [13] Lin X, Wang Y, Wang J, Zeng W. Dynamic analysis and adaptive modified projective synchronization for systems with Atangana-Baleanu-Caputo derivative: A financial model with nonconstant demand elasticity. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2022; 160: 112269. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112269>
- [14] Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963; 20(2): 130-141. Available from: URL [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNFj>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNFj>2.0.CO;2)
- [15] Rodriguez A, Ponte J. Measuring the complexity in the Peruvian financial market. *Selecciones Matemáticas*. 2015; 2(02): 119-128. Available from: URL <https://doi.org/10.17268/sem.mat.2015.02.06>

- [16] Rodríguez A, Cabral M, Ponte J. Dinâmica não linear e caos no mercado financeiro: Pesquisando indícios de caos. *Novas Edicoes Academicas*; 2015. 25-110 p.
- [17] Salim L. A study on chaos in crude oil markets before and after 2008 international financial crisis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017; 466: 389-395. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.09.031>
- [18] Sauer T, Yorke A, Casdagli M. Embedology. *Journal of Statistical Physics*. 1991; 65: 579-616. Available from: URL <https://doi.org/10.1007/bf01053745>
- [19] Shannon C. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*. 1948; 27: 379-423; 623-656.
- [20] Shternshis A, Mazzarisi P, Marmi S. Measuring market efficiency: The Shannon entropy of high-frequency financial time series. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2022; 162: 112403. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112403>
- [21] Vogl M, Rötzel P. Chaoticity versus stochasticity in financial markets: Are daily S&P 500 return dynamics chaotic?. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022; 108: 106218. Available from: URL <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106218>