



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

2022; Vol. 9(2): 395-422.



REVIEW

A brief tour through the Wavelets

Un breve paseo por las Ondículas

Alejandro Ortiz Fernández 

Agradecimiento a: mi profesor Dr. Geraldo

Avila, UNB, por su amistad y enseñanzas

Received, Feb. 22, 2022

Accepted, Set. 30, 2022



How to cite this article:

Ortiz A. *Un breve paseo por las Ondículas*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(2):395-422. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.02.14>

Abstract

The objective of these notes is to give a brief overview of wavelet theory, both of the fundamental mathematical arguments and of the ideas it contains. In addition, the theory is suitable for multidisciplinary work.

Keywords. Wavelets, Fourier, Haar, AMR, orthonormal basis, transform.

Resumen

El objetivo de estas notas es dar un breve panorama de la teoría de ondículas, tanto de los argumentos matemáticos fundamentales como de las ideas que ella encierra. Además, la teoría sirve para un trabajo multidisciplinario.

Palabras clave. Ondículas, Fourier, Haar, AMR, bases ortonormales, transformada.

Introducción. Vivimos una era digital, de la informática, llena de nuevas y novedosas contribuciones a la ciencia y la tecnología; en este panorama la matemática también está presente; así, en la década de los 1980's surgió una teoría que habría de contribuir en tal desarrollo, la teoría de ondículas ("wavelets"); ver [10] para tener un breve panorama de la teoría, [9] nos da una amplia visión de las ondículas. Ver también [7], [3], [5],..., para mayores detalles entre muchas otras referencias. El objetivo de este "paseo" es dar un breve panorama matemático e ideas que se requieren para introducirnos en este bello universo, el libro [4] nos fue útil en esta tarea. Remarcamos que la formación matemática de actuales investigadores en diferentes áreas de la ciencia es cada vez más exigente, lo que fue una motivación para escribir este breve "tour".

Nuestro universo está lleno de ondas y de ondículas las cuales son ondas pequeñas en cierto sentido que precisaremos oportunamente; la teoría de ondículas es muy útil para profesionales que trabajan en el procesamiento de la señal, en comprensión de datos e imágenes, en modelación de fenómenos multiescalas,...; surgió el análisis de ondículas (a.o.) para investigar diversos problemas en el campo de la ciencia y de la tecnología en estos 36 años pasados. El a.o. provee una sistemática y eficiente representación universal para una amplia clase de funciones (o señales). El a.o. fue el resultado de un esfuerzo multidisciplinario de matemáticos, físicos, ingenieros,..., quienes reconocieron que desarrollaban ideas similares en formas diferentes, tal conexión creó un flujo de nuevas ideas que producen, a su vez, resultados cada vez más novedosos. Se creó una interrelación entre los matemáticos puros con los científicos aplicados.

Nuestro mundo está inmerso en un universo en movimiento, de constantes cambios, así el mundo transitorio es más amplio y más complejo que el mundo de las señales estacionarias; el análisis de ondículas es más útil en el mundo transitorio, en la matemática aplicada donde ha producido instrumentos diseñados

*Sección Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. (jortiz@pucep.edu.pe).

para procesar ciertas señales e imágenes. El gráfico siguiente ubica a las ondículas en el universo de las ciencias.

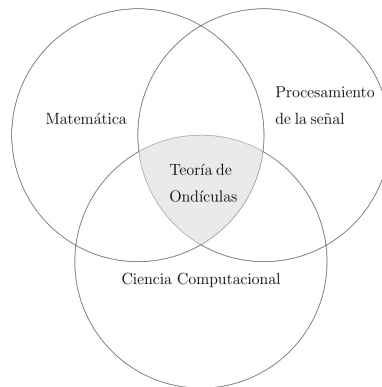


Figura 0.1: Ubicación de las ondículas

1. Antecedentes. Alrededor de dos mil años antes de Cristo ya existieron culturas con un gran nivel en el conocimiento de la matemática. Así, en la antigua Babilonia existen textos matemáticos que posiblemente se remontan al 2100 A.C. Ellos ya conocían una escala numérica (en base 60) y en geometría (con énfasis en medidas prácticas), sabían calcular áreas de distintos triángulos, así como de cientos de trapecios, sabían calcular volúmenes de paralelepípedos, de prismas rectos, de cilindros circulares rectos, sabían que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto... y algo que nos interesa en relación con las ondículas, tuvieron un conocimiento aproximado de π : $\pi = 3\frac{1}{8}$.

En el álgebra conocieron ciertas reglas prácticas para resolver ecuaciones particulares. Llegaron a establecer que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, fórmula que fue probada por primera vez por Arquímedes.

Otra gran cultura de la antigüedad fue la egipcia. En el papiro Moscú, 800 A.C.) ya se encuentran complicados problemas, como el calcular el volumen de una pirámide truncada. En el papiro de Rhind (1650 A.C.) se encuentran 85 problemas de aritmética, de álgebra y de geometría. Acá también se tiene un problema de aproximación. Respecto a la Gran Pirámide afirmaron que: "la mitad del perímetro de la base dividido por su altura es igual a 3.14". Posiblemente ellos conocieron que π tiene el valor aproximado de 3.16.

Es con la Gran cultura griega que la matemática habría de alcanzar la categoría de ciencia. Tales de Mileto (600 A.C.), Pitágoras (570-500 A.C), Euclides(300s A.C.), Arquímedes (+212 A.C.),..., realizaron verdaderas construcciones matemáticas, sobretodo Arquímedes, uno de los más grandes científicos de todos los tiempos. Con él la matemática casi llega al nivel de los tiempos modernos; en verdad, Arquímedes escribió verdaderos "papers". En su estudio de la cuadratura de la parábola, él llega a un problema de "límite". Se trata de encontrar el área del segmento de parábola ACB . Llega a establecer que:

$$\begin{aligned} \text{área segmento parabólico} &= \text{área del } \triangle ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \frac{4}{3} \text{área } \triangle ABC. \end{aligned}$$

Arquímedes tuvo un alto conocimiento de la idea de aproximación y del error. Ello se puede inducir al estudiarse algunos de sus notables trabajos teóricos.

Luego de un período glorioso de esplendor científico, la cultura griega fue terminando. En el año 529 de nuestra era, la Academia de Platón fue cerrada, y en 641 la biblioteca de Alejandría fue incendiada, desapareciendo muchísimos tesoros del conocimiento. Luego siguió un largo periodo de estancamiento científico (en general, un promedio de mil años). En el siglo XVII se produce el amanecer de la matemática moderna; los científicos se nutren del legado de los griegos. La ciencia moderna nace en el siglo anterior bajo la influencia de Galileo, Descartes, Kepler, Leibniz y sobretodo gracias a la obra de Newton. La creación del cálculo diferencial e integral fue un acontecimiento singular en la historia de la ciencia y de la tecnología. La ciencia del siglo XVIII fue el desarrollo de la mecánica; y en la matemática surgieron nuevas y poderosas ideas y métodos. Fue una pléyade de matemáticos los encargados de realizar tal tarea. Entre ellos, algunos de la familia Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace,...., quienes a fines del siglo XVIII van preparando el terreno para el trabajo

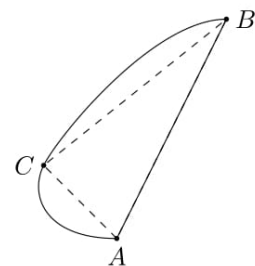


Figura 1.1: Cuadratura de la parábola

de Fourier, a inicios del siglo XIX. De algún modo, por esta época van surgiendo ideas que conducirían a las ondículas. A fines del siglo XVIII e inicios del XIX, la física matemática se enfrenta con la solución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales. El origen de las series trigonométricas, usadas por Fourier, está en el estudio del problema de la cuerda vibrante. La ecuación de la onda, deducida por d'Alembert en 1747, describe el comportamiento de la vibración de una cuerda. La solución del problema es una superposición de ondas. Si son conocidas ciertas condiciones iniciales, es factible predecirse el comportamiento futuro en la cuerda. Una arbitraria función se podría representar vía una serie trigonométrica. Más o menos, esto fue el panorama que encontró Fourier.

2. Alfred Haar: Proyección de su obra. En 1807, Fourier afirma que cualquier función 2 periódica $f(x)$ puede ser representada por la serie trigonométrica $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, donde a_0, a_k y b_k son apropiadas constantes. En aquella época el análisis matemático aun no existía, por ello la obra de Fourier sobre la conducción del calor adolecía de deficiencias formales, pero la intuición por el modelo matemático fue correcto. Una situación crítica surgió en 1873 cuando Dubois-Reymond construye una función continua de variable real x , 2π -periódica, cuya serie trigonométrica (serie de Fourier) asociada diverge en un punto dado. Solucionar esta situación condujo a A. Haar a introducir un ingenioso argumento, que ochenta años después habría de ser el punto de partida de la teoría de ondículas. En estos primeros años del siglo pasado, Haar estudia el problema de construir una base ortonormal (b.o.n) $h_0(t), h_1(t), h_2(t), \dots, h_m(t)$ para el espacio $L^2([0, 1])$ tal que para todo $f \in C^o([0, 1])$ tengamos $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, h_m \rangle h_m(t)$, donde la serie converge uniformemente. El punto de partida fue la función:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , x \notin [0, 1] \end{cases}$$

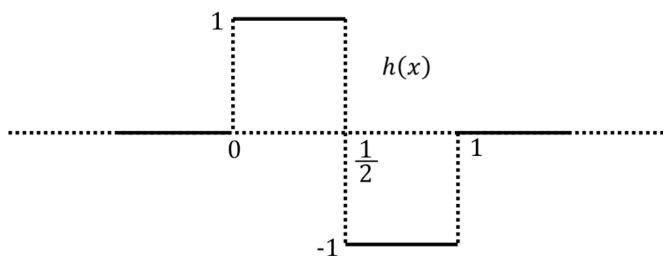


Figura 2.1: Ondícula de Haar.

$h(x)$ es una función con soporte compacto, con soporte $[0, 1]$. Si j, k son enteros positivos, Haar considera la descomposición $m = 2^j + k$, donde $m \geq 1$, $j \geq 0$ y $0 \leq k < 2^j$ y construye la translación-dilatación

$$h_{j,k}(x) \equiv h_m(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k). \tag{2.1}$$

Se observa que el soporte de h_m es el intervalo diádico $I_m = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$. Es claro que $I_m \subset [0, 1] \equiv I$. Pongamos $h_0 \equiv \phi(x) = 1$ sobre I .

Haar establece que la familia $\{h_m(x)\}_{m=0,1,2,\dots}$ es una b.o.n. de $L^2([0, 1])$. Si $f \in C^o([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$, entonces los elementos básicos h_m que se usan para aproximar f no son continuas. Es deseable que tales funciones básicas o átomos también pertenezcan al espacio considerado.

También, si $f \in C^1([a, b])$ la aproximación más natural sería usando polígonos inscritos y no con funciones escalera h_n . Volvamos ahora a la representación

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, h_m \rangle h_m(t) \text{ para } f \in C^0([0, 1]).$$

Remarcamos aún que las sumas parciales $S_m f(t) = \langle f, h_0 \rangle h_0(t) + \dots + \langle f, h_m \rangle h_m(t)$ aproximan $f(t)$ vía funciones que son constantes sobre intervalos (función escalera). El trabajo de Haar fue el inicio de una serie de esfuerzos hechos a fin de corregir defectos cuando se trabaja en espacios más generales o de diferentes tipos. Esto es una interesante historia en la teoría de bases y de espacios de funciones. Así, si $f \in C^1([0, 1])$, los h'_m s no son apropiados, un avance fue logrado por Faber y Schauder en el periodo 1910-20. así, parten de la función

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin [0, 1] \\ 2x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

y construyen $\Delta_m(x) = \Delta(2^j x, k)$, donde $m = 2^j + k, j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$.

Nuevamente, soporte de $\Delta_m = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$.

Si $\Delta_0(x) = x$, la familia $1, \Delta_0(x), \Delta_1(x), \dots, \Delta_m(x), \dots$ es una base de Schauder para $C^0([0, 1])$; esto es, si $f \in C^0([0, 1])$ entonces $f(x) = a + bx + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Delta_n(x)$, donde la convergencia es uniforme en $[0, 1]$.

Lamentablemente, tal familia no es una base de Schauder para $C^1([0, 1])$. Esto motivó la introducción del espacio $C^\alpha([0, 1]), 0 < \alpha < 1$ donde $f \in C^\alpha([0, 1])$ si existe una constante C tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$. (Ver[8]).

En los años 1930's surge una interesante teoría dentro del análisis de Fourier, es la teoría de Littlewood-Paley en \mathbb{R}^1 . Ellos consideran descomposiciones diádicas, lo que de algún modo es una idea que existe en los "wavelets". Así tenemos los bloques diádicos:

$$\Delta_j f(x) = \sum_{2^j < k < 2^{j+1}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

y la descomposición:

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f(x).$$

Con los espacios $L^p, 1 < p < \infty$, se tiene la siguiente conexión: " existen constantes a_p y $A_p, 0 < a_p \leq A_p$, tal que

$$a_p \|f\|_p \leq \|(|a_0|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j f(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad \text{donde } \|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = 2$ entonces $L^2(\mathbb{R}^1)$ es un espacio de Hilbert, y $a_2 = A_2 = 1$."

El profesor Antoni Zygmund y sus alumnos (la "Escuela de Chicago") llevaron la teoría al caso n-dimensional. Así surge la divulgada "ondícula madre" ψ , la que es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, rápidamente decreciente tal que:

- (i) $\hat{\psi}(\xi) = 1 \dots 1 + \alpha \leq |\xi| \leq 2 - 2\alpha, \alpha \in [0, \frac{1}{3}]$; $\hat{\ } \simeq$ transformada de Fourier;
- (ii) $\hat{\psi}(\xi) = 0, |\xi| \leq 1 - \alpha \quad \text{ó} \quad |\xi| \geq 2 + 2\alpha,$
- (iii) $\hat{\psi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$
- (iv) $\sum \left| \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2 = 1, \forall \xi \neq 0.$

Ahora se consideran las dilataciones $\psi_j(x) = 2^{nj} \psi(2^j x)$, y la convolución $\Delta_j f = f * \psi_j$. Se obtiene así la llamada función de Littlewood - Paley - Stein:

$$g(x) = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_j f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Entre esta función g y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y la conservación de la energía $\|f\|_2 = \|g\|_2$. En el caso $1 < p < \infty$, se obtiene algo similar: existen constantes $0 < a_p < A_p$ tal que:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), a_p \|g\|_p \leq \|f\|_p \leq A_p \|g\|_p, \quad \text{donde } \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Algunos años después, el análisis de Littlewood - Paley se usó como fundamento matemático para la creación de algoritmos en el procesamiento numérico de imágenes (Marr, Mallat, otros). En verdad, en los años 1930's se crearon teorías matemáticas, de inicio solo de interés para un reducido número de matemáticos, pero que con los años que encontraron interesantes aplicaciones; tal fue el caso de las llamadas "ondículas de Lusin".

Veamos: Sea $\mathcal{P} = \{z = x + iy / y > 0\}$ el semi-espacio complejo superior. Ahora definimos el **espacio de Hardy**:

$$H^p(\mathbb{R}) = \left\{ f(z)/f(z) \text{ es holomórfica en } \mathcal{P} \text{ y } \sup_{y>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Se tiene que $\|f(x + iy) - f(x)\|_{L^p} \rightarrow 0$ si $y \rightarrow 0$; estos espacios resultaron útiles en el procesamiento de señales. Así, sea $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, una señal real de energía finita ($f \in L^2(\mathbb{R})$); a ella se le asocia la señal analítica $F(t)$ para la cual $f(t)$ es su parte real. Así, se requiere que $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt < \infty$, esto es, que $F \in H^2(\mathbb{R})$.

De esta manera $F(t) = f(t) + ig(t)$, donde g es llamada la **transformada de Hilbert** de f .

El análisis en $H^p(\mathbb{R})$, según Lusin, es vía los "átomos" $\frac{1}{(t-\xi)^2}$, $\xi \in \mathcal{P}$. Así,

$$\text{si } f \in H^p(\mathbb{R}), \text{ entonces: } f(z) = \int \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{1}{z-\xi}\right)^2 \alpha(\xi) dudv, \quad \xi = u + iv.$$

Se observa que $\alpha(\xi)$ juega el papel de los coeficientes de Fourier (o de "wavelets"). Ver el libro "Wavelets; Tools for Science and Technology" de S. Jaffard - y. Meyer - R. Ryan (J.M.R.) (citado en [12]) donde encontramos un amplio panorama de esta teoría.

La síntesis en H^p es via el siguiente argumento. Sea $\alpha(\xi)$ una función medible cualquiera y pongamos

$$A(x) = \left(\int \int_{\Gamma} |\alpha(u + iv)|^2 \frac{1}{v^2} dudv \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ donde } \Gamma(x) \text{ es el cono } \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / v > |u - x|\}.$$

Si $\int_{-\infty}^{\infty} A^p(x) dx < \infty$, entonces:

$$f(z) = \int \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{(z-\xi)^2} \alpha(\xi) dudv \in H^p(\mathbb{R}) \text{ y } \|f\|_{L^p} \leq C_p \left(\int_{-\infty}^{\infty} A^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Los fundamentos teóricos de la teoría de ondículas se nutrieron de resultados en el campo del análisis de Fourier; es significativo que estudios en dominios estrictamente teóricos hayan tenido, años después, aplicaciones en variados campos de la ciencia y tecnología. G. Weis, junto con R. Coifman, coincidió la idea de construir elementos básicos, los "átomos", y que permitan representar todo elemento del espacio en términos de tales átomos. Por ejemplo, en el caso del espacio de Hardy $H^p(\mathbb{R})$, las funciones $\frac{1}{(z-\xi)^2}$, $\xi \in \mathcal{P}$, son los átomos (sujetos a ciertas condiciones). Remarquemos que en el caso de Fourier, la familia $\cos kx, \sin kx, k \geq 1$, son los átomos que permiten las representaciones conocidas. Sin embargo, para el espacio de Lebesgue $L^p([0, 2\pi])$ tales funciones no serían los átomos requeridos ya que no tienen el comportamiento adecuado que les permita ser útiles en la práctica. En 1938, Marcinkiewicz probó que la más simple descomposición atómica para los espacios $L^p([0, 1]), 1 < p < \infty$, es dado por el sistema de Haar.

2.1. La identidad de Calderón. [1964].

Alberto P. Calderón fue uno de los más grandes analistas del siglo XX; en su profundo trabajo sobre interpolación compleja, introduce una identidad, la que años después se relacionó con la teoría de ondículas; ella es una descomposición atómica. Veamos. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la que Grossmann y Morlet en los años 80's llamaron una ondícula analizante. $\hat{\psi}$ es su transformada de Fourier sujeta a la condición

$$\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \text{ c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal condición implica que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$.

Pongamos $\tilde{\psi} = \bar{\psi}(-x), \psi_t(x) = \frac{1}{t^n} \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ y $\tilde{\psi}_t(x) = \frac{1}{t^n} \tilde{\psi}\left(\frac{x}{t}\right)$.

Definamos: $Q_t \cdot = \psi_t * \cdot$ y $Q_t^* \cdot = \tilde{\psi}_t * \cdot$ (convoluciones).

La identidad de Calderón es una descomposición del operador identidad, y lo podemos escribir simbólicamente via:

$$I = \int_0^{\infty} Q_t Q_t^* \frac{dt}{t}$$

esto es: $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos:

$$f = \int_0^{\infty} Q_t [Q_t^*(f)] \frac{dt}{t},$$

donde se remarca que el límite de la integral impropia es tomada en el sentido (norma) de $L^2(\mathbb{R})$.

Pasaron 20 años desde el trabajo de Calderón hasta el redescubrimiento hecho por Grossmann y Morlet en Francia en el marco de las aplicaciones. Consideraron a lo que llamaron la ondícula analizante ψ , la que genera las ondículas via:

$$\psi_{(a,b)}(x) = \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}^n.$$

Esta familia de ondículas ha de jugar el papel de una base ortonormal. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, los coeficientes de ondículas son los productos internos:

$$W(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle, \text{ donde en general } \langle u, v \rangle = \int u(x)\bar{v}(x)dx.$$

De esta manera la señal o función f es analizada vía $W(a, b)$.

La síntesis de f es obtenida via

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} W(a, b) \Psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^{n+1}} \quad (\text{Ver J.M.R. [12]}).$$

La naciente teoría de ondículas se enriqueció mucho con el aporte, del entonces joven estudiante de ingeniería, Stéphane Mallat, quién descubrió semejanzas existentes en teorías en ingeniería y en la teoría matemática de ondículas. Esto fue en 1985. Así, Mallat observó la íntima conexión entre las bases ortonormales de ondículas, descubiertas por Strömberg y Meyer, con los filtros espejos cuadratura inventados por Croisier, Esteban y Galand para el teléfono digital, así como con los algoritmos piramidales de Burt y Adelson, inventados en el contexto del procesamiento numérico de la imagen. Otro notable progreso fue conseguido con la introducción de las ondículas de soporte compacto por I. Danbechies (1988), quien completó el trabajo de Haar.

Así, para cada entero r , ella construye una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $2^{j/2} \Psi_r(2^j x - k)$, donde j, k son enteros tal que:

1. El soporte de ψ_r es el intervalo $[0, 2r + 1]$;
2. $\int_{-\infty}^\infty x^n \psi_r(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots, r$;
3. Si r está cerca de $\frac{1}{5}$, ψ_r tiene γ_r derivadas continuas (γ es una constante).

Si $r = 0$, lo propuesto se reduce al sistema de Haar.

De aquel entonces (inicios de los años 1990's) hasta la actualidad, la producción de nuevas ideas, teorías y aplicaciones a variados campos ha sido muy abundante, lo que se objetiviza en una gran abundancia de trabajos producidos, y en la publicación de un también gran número de libros que se han escrito sobre ondículas y sus aplicaciones.

3. En los dominios del análisis de Fourier.

3.1. El espacio $l^2(\mathbb{Z})$. (Ver [4] para mayores detalles). Primero veamos algunas consideraciones generales sobre espacios de Hilbert. Sea X un espacio producto interno (complejo), de dimensión infinita (o de dimensión finita), con producto interno \langle, \rangle .

Si $u \in X$, su norma es $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge a $u \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N \quad \text{se tiene,} \quad \|u_n - u\| < \epsilon.$$

Diremos que $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Cauchy en X si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n > N, \|u_m - u_n\| < \epsilon$.

Si (u_n) es convergente en X , entonces ella es de Cauchy en X . El recíproco no es cierto en general.

Definición 3.1. Un espacio producto interno (complejo) X es llamado un espacio de Hilbert (o un espacio completo) si en X toda sucesión de Cauchy es convergente.

3.2. Series en un espacio de Hilbert. Sea H un espacio de Hilbert y $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión en H ; sea $S_N = \sum_{n=-N}^N u_n$ una suma parcial simétrica. Decimos que la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge a u en H si la sucesión (S_N) converge a u en H en el sentido dado antes.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ es un conjunto ortonormal en } H \text{ si } \langle u_n, u_m \rangle = 0, n \neq m; \langle u_n, u_n \rangle = \|u_n\|^2 = 1.$$

Diremos que $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en H es un **sistema ortonormal (s.o.n.) completo** si es ortonormal y si el único elemento $u \in H$ tal que $\langle u, u_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, es $u = 0$.

Entremos ahora al espacio de Hilbert particular $l^2(\mathbb{Z})$, donde remarcamos que \mathbb{Z} es el conjunto de números enteros. Consideramos sucesiones de números complejos definidos sobre los enteros:

$$z = (\dots, z(-2), z(-1), z(0), z(1), z(2), \dots) \quad \text{ó} \quad z = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Definición 3.2. $l^2(\mathbb{Z}) = \{z = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}} / z(n) \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 < \infty\}$. $l^2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial, si $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$, consideramos el producto interno $\langle z, w \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n) \overline{w(n)}$. $\langle z, w \rangle = 0$ significa $z \perp w$. Si $z \in l^2(\mathbb{Z})$, $\|z\| = (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2)^{1/2}$.

Así, $l^2(\mathbb{Z})$ es un espacio normado, también un espacio métrico con la métrica $d(z, w) = \|z - w\|$.

Para muchos propósitos son útiles las desigualdades:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)w(n)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |w(n)|^2 \right)^{1/2} = \|z\| \|w\|, \quad \text{desigualdad de Cauchy-Schwarz,}$$

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n) + w(n)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |w(n)|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{desigualdad triangular.}$$

Remarcamos, si z_k y z están en $l^2(\mathbb{Z})$, diremos que $(z_k) \rightarrow z$ en $l^2(\mathbb{Z})$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > N$, tenemos $\|z_k - z\| < \epsilon$. (z_k) es una sucesión de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z})$ si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, m > N$, tenemos $\|z_k - z_m\| < \epsilon$, entonces, $l^2(\mathbb{Z})$ es un espacio de Hilbert, de dimensión infinita, donde se considera la base estandar $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ definida así:

$$e_j(n) = \begin{cases} 1 \dots \text{ si } n = j, \\ 0 \dots \text{ si } n \neq j. \end{cases}$$

Luego, si $z = (z(n)) \in l^2(\mathbb{Z})$, tendremos $z = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j)e_j$.

Nota 3.1. l^2 desempeña un papel natural en el estudio de los espacios de Hilbert de dimensión infinita. Así, tenemos los siguientes resultados:

Lema 3.1. Sea H un espacio de Hilbert; $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un conjunto ortonormal (o.n.) en H y $z = (z(j))_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie $\sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j)a_j$ es convergente en H y tenemos:

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j)a_j \right\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |z(j)|^2 \tag{3.1}$$

Demostración: Sea $S_N = \sum_{j=-N}^N z(j)a_j, N = 1, 2, 3, \dots$ Para $N > M$ tenemos:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{M < |j| \leq N} z(j)a_j \right\|^2 = \sum_{m < |j| \leq N} |z(j)|^2. \tag{3.2}$$

Pero

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |z(j)|^2 < \infty,$$

luego (S_N) es una sucesión de Cauchy, esto es: dado $\epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ tal que para $N > M > K, \sum_{M < |j| < N} |z(j)|^2 < \epsilon$.

Desde que H es completo, $(S_N)_N \in \mathbb{N}$ es convergente en H , esto es: $\sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j)a_j$ converge en H .

Finalmente probemos (3.1). Sean $z = \sum_{j=1}^n z(j)v_j$ y $w = \sum_{j=1}^n w(j)v_j$, donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal; entonces:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z(j) \overline{w(j)}, \quad \|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z(j)|^2 \quad \text{luego,} \quad \|S_N\|^2 = \sum_{j=-N}^N |z(j)|^2.$$

Pero,

$$S_N \rightarrow s = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j)a_j \quad \text{en } H.$$

Por tanto ($\|\cdot\|$ es continuo), $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\| = \|s\|$. □

Lema 3.2. Sea H un espacio de Hilbert, (a_j) un conjunto o.n. en H ; $f \in H$. Entonces:

$$(\langle f, a_j \rangle)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, a_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Demostración: Sea $S_N = \sum_{j=-N}^N \langle f, a_j \rangle a_j$, $N = 1, 2, \dots$; entonces

$$\|f - S_N\|^2 = \langle f, f \rangle - \langle f, S_N \rangle - \langle S_N, f \rangle + \langle S_N, S_N \rangle.$$

Pero

$$\begin{aligned} \langle f, S_N \rangle &= \langle f, \sum_{j=-N}^N \langle f, a_j \rangle a_j \rangle \\ &= \sum_{i=-N}^N \overline{\langle f, a_j \rangle} \langle f, a_j \rangle \\ &= \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} \langle S_N, f \rangle &= \overline{\langle f, S_N \rangle} \\ &= \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Además, (versión finita de (3.1)):

$$\|S_N\|^2 = \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|^2 &= \|f\|^2 - 2 \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2 + \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

esto es:

$$\sum_{j=-N}^N |\langle f, a_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Si $N \rightarrow \infty$, obtenemos la tesis. □

Resumiendo:

Dados $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ y f en H , la sucesión $(\langle f, a_j \rangle)_{j \in \mathbb{Z}}$ está en $l^2(\mathbb{Z})$ y por el lema 3.1, la serie $\sum \langle f, a_j \rangle a_j$ converge en H .

Ahora, ¿Bajo qué condiciones sobre (a_j) , tendremos $\sum \langle f, a_j \rangle a_j = f, \quad \forall f \in H$?

El siguiente resultado nos da una respuesta.

Lema 3.3. *H es un espacio de Hilbert; $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un conjunto o.n. en H. Entonces, $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto o.n. completo si y solo si $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, a_j \rangle a_j, \forall f \in H$.*

Demostración:

\Rightarrow Sea $f \in H$. La serie $g = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, a_j \rangle a_j$ converge en H (lemas 3.1 y 3.2).

Se tiene $\langle g, a_m \rangle = \langle f, a_m \rangle, \forall m \in \mathbb{Z}$. Luego, $\langle f - g, a_m \rangle = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Pero, por hipótesis $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ es o.n. completo. Así $f = g$.

\Leftarrow Se tiene que $\forall f \in H, f = \sum \langle f, a_j \rangle a_j$; luego, si $\langle f, a_j \rangle = 0 \forall j$, es claro que $f = 0$. \square

Lema 3.4. *Sea $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un conjunto o.n. en H. Entonces, son equivalentes:*

1. (a_j) es completo,
2. $\overline{\text{Espacio generado por } (a_j)} = H$,
3. $\forall f \in H$, tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \sum_{j=1}^k c_j a_j\| = 0$; c_j es coeficiente de Fourier asociado a (a_j) ,
4. $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$ (Identidad de Parseval).

Demostración:

1 \Rightarrow 2) Sea $M = \text{espacio generado por } (a_j)$; si tuvieramos $\overline{M} \neq H$, entonces existiría $a \neq 0$ en $H - \overline{M}$ y de esta manera, existiría $b \neq 0$ tal que $b \perp \overline{M}$ y por tanto se tendría $b \perp a_j, \forall j$. Esto contradice la hipótesis de ser (a_j) un conjunto maximal.

2 \Rightarrow 3) . Tenemos $\overline{M} = H$, luego dado $\epsilon > 0$ tendremos $\|f - \sum_{j=1}^k \alpha_j a_j\| < \epsilon$ para alguna combinación lineal de los a_j 's. Y desde que los coeficientes de Fourier dan la mejor aproximación, tendremos $\|f - \sum_{j=1}^k c_j a_j\| < \epsilon$.

3 \Rightarrow 4). Tenemos, $\|f - \sum_{j=1}^k c_j a_j\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^k |c_j|^2$. La tesis sigue tomando limite $k \rightarrow \infty$.

4 \Rightarrow 1) Tenemos, $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, a_j \rangle|^2$; luego, si $\langle f, a_j \rangle = 0$ se tendrá $f = 0$. \square

Definición 3.3. *Un espacio de Hilbert es llamado separable si posee un conjunto o.n. completo (que puede ser finito o enumerablemente infinito).*

3.3. Proyección Ortogonal. Un importante concepto en el análisis multiresolución, que permite construir ondículas es el de proyección en espacios de Hilbert. Veamos brevemente algunas ideas.

Sea (a_j) un conjunto o.n. en un espacio de Hilbert H, y el subespacio de H,

$$S = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j) a_j / z = (z(j))_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2(z) \right\}.$$

Definición 3.4. *Si $f \in H$, definimos $P_S(f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, a_j \rangle a_j$ (la serie converge por los lemas 3.1 y 3.2). $P_S(f)$ es llamado el **operador proyección de f sobre S**. P_S es llamada la **proyección ortogonal sobre S**.*

Lema 3.5. *Sea H un espacio de Hilbert. S y P_S son como antes; entonces,*

1. $\forall f \in H, P_S(f) \in S$;
2. la transformación $P_S : H \rightarrow S$ es lineal,
3. si $u \in S, P_S u = u$;
4. $\forall f \in H, \forall u \in S$, tenemos $\langle f - P_S(f), u \rangle = 0$ (propiedad de ortogonalidad.)
5. $\forall f \in H, \forall u \in S$, tenemos $\|f - P_S(f)\| \leq \|f - u\|$; se tiene la igualdad solamente para $u = P_S(f)$ (propiedad de la mejor aproximación).

Para mayores detalles ver M. Frazier [4].

3.4. El espacio $L^2([-\pi, \pi])$ ([4]).

Definición 3.5. $L^2([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty\}$.

$L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio vectorial y un espacio producto interno, con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta, f, g \in L^2([-\pi, \pi]).$$

Se le asocia la norma

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Son también útiles las desigualdades:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)g(\theta)|d\theta \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 d\theta\right)^{1/2}, \quad \text{Desigualdad de Cauchy-Schwarz}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) + g(\theta)|^2 d\theta\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 d\theta\right)^{1/2}, \quad \text{Desigualdad triangular.}$$

3.4.1. $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert. El conjunto de funciones $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es llamado un sistema trigonométrico, y un polinomio trigonométrico es una función de la forma $\sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$, para algún $N \in \mathbb{N}$ y algún conjunto de números complejos $\{c_n\}_{n=-N, \dots, N}$. Se verifica que un sistema trigonométrico es un conjunto o.n. en $L^2([-\pi, \pi])$.

Algo más; el mencionado sistema trigonométrico es completo en $L^2([-\pi, \pi])$.

Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$, esto es, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|d\theta < \infty$. Si $n \in \mathbb{Z}$, $\langle f, e^{in\theta} \rangle$ es llamado el n -ésimo coeficiente de Fourier de f . La serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{in\theta} \rangle e^{in\theta}$ es llamada la serie de Fourier de f .

Lema 3.6.

1. Sea $z = (z(n)) \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces, la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)e^{in\theta}$ converge a un elemento de $L^2([-\pi, \pi])$.
2. Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Entonces la sucesión $(\langle f, e^{in\theta} \rangle)_n$ está en $l^2(\mathbb{Z})$ y

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e^{in\theta} \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \|f\|^2, \quad \text{Fórmula de Plancherel.}$$

3. si $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{in\theta} \rangle \overline{\langle g, e^{in\theta} \rangle}, \quad \text{Fórmula de Parseval.}$$

4. Para todo $f \in L^2([-\pi, \pi])$ tenemos $f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{in\theta} \rangle e^{in\theta}$ en la topología de $L^2([-\pi, \pi])$; además $\|\sum_{n=-N}^N \langle f, e^{in\theta} \rangle e^{in\theta} - f\| \rightarrow 0$, si $N \rightarrow \infty$.

3.5. La transformada de Fourier sobre $l^2(\mathbb{Z})$.

Definición 3.6. La aplicación

$$\wedge : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2([-\pi, \pi]),$$

$$z = (z(n)) \rightarrow \hat{z}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)e^{in\theta},$$

es llamada la transformada de Fourier sobre $l^2(\mathbb{Z})$.

La serie es interpretada como su límite en el $L^2([-\pi, \pi])$ -sentido. La existencia de este límite está garantizado por el lema 3.1 y por el hecho de que el sistema trigonométrico es un conjunto o.n. en $L^2([-\pi, \pi])$. Por otro lado, el lema 3.2 y por la mencionada propiedad del sistema trigonométrico se tiene que la sucesión $(\langle f, e^{in\theta} \rangle)_n$ está en $l^2(\mathbb{Z})$, donde $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Así, tenemos:

Definición 3.7. La aplicación

$$\vee : L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$f \rightarrow f^\vee,$$

donde: $f^\vee(n) = \langle f, e^{in\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta} d\theta$, es llamada la transformada inversa de Fourier.

Lema 3.7. La aplicación \wedge es inyectiva y sobre, con inversa \vee . Si $z \in l^2(\mathbb{Z})$ se tiene

$$z(n) = (\hat{z})^\vee(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{z}(\theta)e^{-in\theta} d\theta.$$

Además, si $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$, se tiene:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)\overline{w(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{z}(\theta)\overline{\hat{w}(\theta)}d\theta = \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle, \quad \text{Identidad de Parseval}$$

$$\|z\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{z}(\theta)|^2 d\theta = \|\hat{z}\|^2, \quad \text{Identidad de Plancherel.}$$

Demostración: Sea $z \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces

$$\hat{z}^\vee(n) = \langle \hat{z}, e^{in\theta} \rangle = \langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)e^{im\theta}, e^{in\theta} \rangle = z(n),$$

luego $(\hat{z})^\vee = z$. Por tanto, si $\hat{z}(\theta) = \hat{w}(\theta)$, $(\hat{z}(\theta))^\vee = (\hat{w}(\theta))^\vee$, ó $z = w$.

Luego \wedge es inyectiva. Veamos que \wedge es sobre. Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Luego, por Lema 3.6 parte 4, tenemos

$$f(\theta) = \sum_n \langle f, e^{in\theta} \rangle e^{in\theta} = \sum_n \check{f}(n)e^{in\theta} = \left(\check{f}\right)^\wedge.$$

Luego \wedge es sobre, con inversa \vee .

Por otro lado, si $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$, sean $f = \hat{z}$ y $g = \hat{w}$, con $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$. Luego:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{in\theta} \rangle \overline{\langle g, e^{in\theta} \rangle}, \quad \text{esto es,} \\ \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \hat{z}, e^{in\theta} \rangle \overline{\langle \hat{w}, e^{in\theta} \rangle} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n) \overline{w(n)} = \langle z, w \rangle. \end{aligned}$$

□

3.6. Convolución en $l^2(\mathbb{Z})$ [4]. Sean $z, w \in l^2(\mathbb{Z}), m \in \mathbb{Z}$; por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(m-n)w(n)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(m-n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |w(n)|^2\right)^{1/2} = \|z\| \|w\|.$$

Definición 3.8. Sean $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$ y $m \in \mathbb{Z}$. Definimos la convolución de z y w , $z * w$, vía:

$$(z * w)(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(m-n)w(n).$$

Corolario 3.1. Si $z, w \in l^2(\mathbb{Z}), |z * w(m)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(m-n)w(n)| \leq \|z\| \|w\|$.

Luego, $z * w$ es una sucesión acotada, esto es, $z * w \in l^\infty(\mathbb{Z})$, pero, no necesariamente tenemos que $z * w \in l^2(\mathbb{Z})$, para lograr esto se introduce la siguiente idea:

Sea $z = (z(n))$ una sucesión de números complejos. Decimos que z es sumable si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)| < \infty$.

Definición 3.9. $l^1(\mathbb{Z}) = \{z(n)_{n \in \mathbb{Z}} = z/z(n) \in \mathbb{C}, z \text{ es sumable}\}$

Si $z \in l^1(\mathbb{Z})$, definimos la norma $\|z\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|$. Entonces $l^1(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial, normado. Tenemos ahora el:

Lema 3.8. Sea $z \in l^2(\mathbb{Z}), w \in l^1(\mathbb{Z})$, entonces $z * w \in l^2(\mathbb{Z})$ y $\|z * w\| \leq \|z\| \|w\|_1$

Demostración: Para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left|\sum z(m-n)w(n)\right| &\leq \sum |z(m-n)| |w(n)|^{1/2} |w(n)|^{1/2} \\ &\leq \left(\sum |z(m-n)|^2 |w(n)|\right)^{1/2} \left(\sum |w(n)|\right)^{1/2} \\ &= \|w\|_1^{1/2} \left(\sum |z(m-n)|^2 |w(n)|\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|z * w\|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left|\sum_{n \in \mathbb{Z}} z(m-n)w(n)\right|^2 \\ &\leq \|w\|_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(m-n)|^2 |w(n)| \\ &= \|w\|_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w(n)| \sum_{m \in \mathbb{Z}} |z(m-n)|^2. \end{aligned}$$

Pero, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |z(m-n)|^2 = (\text{cambio de variable}) = \|z\|^2$.

Conclusión:

$$\|z * w\|^2 \leq \|w\|_1^2 \|z\|^2.$$

□

Otras propiedades de la convolución son dadas por el

Lema 3.9. Sean $v, w \in l^1(\mathbb{Z}), z \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces,

1. $(z * w)^\wedge(\theta) = \hat{z}(\theta)\hat{w}(\theta)$ c.t.p.

2. $z * w = w * z$

3. $v * (w * z) = (v * w) * z$.

Sea $z \in l^2(\mathbb{Z})$. La reflexión-conjugada de z es definida via: $\tilde{z}(n) = \overline{z(-n)}, n \in \mathbb{Z}$.

También definimos $z^*(n) = (-1)^n z(n)$.

3.7. El espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$ [4]. Inicialmente, el análisis-ondículas era referido a las ondículas sobre la recta \mathbb{R} . Luego se la extendió a dominios más generales. En esta sección veremos aspectos básicos del análisis de Fourier sobre \mathbb{R} .

Sea $L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty\}$, con producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ y norma $\|f\| = (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$. Tenemos las usuales desigualdades:

$$1. \int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\| \|g\|,$$

$$2. \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Diremos que $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$ si $\|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Sea el espacio $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty\}$, con la norma $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$. Diremos que f es integrable si $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1$. $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado, pero no un espacio producto interno.

3.7.1. Convolución sobre \mathbb{R} . Sean f y g dos funciones definidas sobre \mathbb{R} , tal que c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy < \infty$. En estas condiciones se define la convolución

$$f * g : (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

Nota 3.2. $(f * g)(x) = 0$ si $\int |f(x-y)g(y)| dy = \infty$.

Via un cambio de variables, verificamos que $f * g = g * f$.

Lema 3.10.

1. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}), |(f * g)(x)| \leq \|f\| \|g\|, \forall x \in \mathbb{R}$ entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

2. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}), \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$; esto es, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Si $f \in L^2(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}), \|f * g\| \leq \|f\| \|g\|_1$; esto es, $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.

Demostración:

1.

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int f(x-y)g(y) dy \right| \leq \int |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq (\int |f(x-y)|^2 dy)^{1/2} (\int |g(y)|^2 dy)^{1/2} = \|f\| \|g\|, \end{aligned}$$

$$\text{luego } |(f * g)(x)| \leq \|f\| \|g\|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int |(f * g)(x)| dx \leq \int \int |f(x-y)| |g(y)| dy dx \\ &= \int |g(y)| (\int |f(x-y)| dx) dy = \|g\|_1 \|f\|_1, \end{aligned}$$

$$\text{luego } \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

3.

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &= \int |f(y)| |g(x-y)|^{1/2} |g(x-y)|^{1/2} dy \\ &\leq (\int |f(y)|^2 |g(x-y)| dy)^{1/2} (\int |g(x-y)| dy)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } |(f * g)(x)|^2 &\leq \|g\|_1 (\int |f(y)|^2 |g(x-y)| dy) dx \\ &= \|g\|_1 \int |f(y)|^2 dy \int |g(x-y)| dx; \end{aligned}$$

$$\text{esto es } \|f * g\|^2 \leq \|g\|_1 \|f\|^2 \|g\|_1 \text{ ó } \|f * g\| \leq \|f\| \|g\|_1. \quad \square$$

De la anterior discusión extraigamos dos ideas:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, y \in \mathbb{R}$; definimos $R_y f(x) = f(x-y)$... translación de f , y $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$... reflexión-conjugada de f .

Se verifica que si $f, g \in L^2(\mathbb{R}), x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\langle R_x f, R_y g \rangle = \langle f, R_{y-x} g \rangle$
2. $\langle f, R_y g \rangle = \langle f * \tilde{g} \rangle(y)$.

3.7.2. Dilatación. Para la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, t > 0$, definimos la dilatación

$$g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow g_t(x) = \frac{1}{t}g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Definición 3.10. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que:

$$|g(x)| \leq \frac{C_1}{(1 + |x|)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ y alguna constante } C_1; \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$$

Entonces $\{g_t\}_{t>0}$ es llamada una aproximación de la identidad.

Definición 3.11.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$ es llamado un **punto de Lebesgue** de f si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x - y) - f(x)|dy = 0$.

Lema 3.11. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ es un punto de Lebesgue de f .

Teorema 3.1.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\{g_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad, entonces para todo punto de Lebesgue de f (para c.t.p. $x \in \mathbb{R}$) tenemos $\lim_{t \rightarrow 0^+} (g_t * f)(x) = f(x)$.

3.7.3. Transformada de Fourier sobre \mathbb{R} . Sea el producto interno $\langle f, e^{ix\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, tenemos $|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx| \leq \|f\|_1$. Esto justifica la

Definición 3.12. Si $f \in L^1(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$, definimos $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$.

\hat{f} es la transformada de Fourier de f ; la aplicación $\hat{}$ es llamada la transformada de Fourier.

Si $g \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$, definimos g^\vee , la transformada de Fourier inversa de g

$$g^\vee = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi,$$

la aplicación $^\vee$ es llamada la transformada de Fourier inversa.

Para tener la deseada fórmula de inversión $f(x) = (\hat{f})^\vee(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi$, se impone la condición de que f y \hat{f} pertenezcan a $L^1(\mathbb{R})$.

Además, tales condiciones permitirán definir \hat{f} si $f \in L^2(\mathbb{R})$. Obviando la introducción de una adecuada función gaussiana, se tiene la siguiente versión de la inversa de Fourier sobre $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 3.2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi,$$

en todo punto de Lebesgue x de f .

Corolario 3.2 (Unicidad de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = \hat{g}$ c.t.p. Entonces $f = g$ c.t.p.

Demostración: Por el teorema 3.2, $f - g = (\hat{f} - \hat{g})^\vee = 0$ c.t.p. □

Nota 3.3. También se tiene $f = (\hat{f})^\vee$

Lema 3.12. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces:

1. $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$;
2. $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$, Parseval,
3. $\|\hat{f}\| = \sqrt{2\pi}\|f\|$, Plancherel.

Lema 3.13. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y la sucesión $(f_n)_{n=1,2,\dots}$ tal que $f_n, \hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R}), \forall n$ y $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces:

1. $(\hat{f}_n) \rightarrow F$ en $L^2(\mathbb{R})$, para algún $F \in L^2(\mathbb{R})$.
2. Sea (g_n) otra sucesión tal que $g_n, \hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R}), \forall n$ y $g_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Así por 1, $\hat{g}_n \rightarrow G$ en $L^2(\mathbb{R})$, para algún $G \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $G = F$ c.t.p., donde F es como en 1.
3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y F es como en 1., entonces $F = \hat{f}$.

Definición 3.13 (Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$).

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}); (f_n)$ tal que $f_n, \hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R}), \forall n$ y $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Definimos la transformada de Fourier de f, \hat{f} , siendo el límite de (\hat{f}_n) en el sentido $L^2(\mathbb{R})$. Así, $\hat{f} = \lim \hat{f}_n$ en $L^2(\mathbb{R})$.

También definimos \check{f} , la transformada de Fourier inversa de $f \in L^2(\mathbb{R})$ via $\check{f} = \lim \check{f}_n$ en $L^2(\mathbb{R})$.

Nota 3.4. Observemos que para $f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}$ es definida como una función de $L^2(\mathbb{R})$, y no puntualmente en el caso de $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Se tiene $\wedge : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ y $\vee : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.3. si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

1. $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$
2. $\|\hat{f}\| = \sqrt{2\pi} \|f\|$
3. $\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle$
4. $\|\check{f}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|$

Corolario 3.3. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}), (f_n)$ en $L^2(\mathbb{R})$, tal que $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\hat{f}_n \rightarrow \hat{f} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \tag{3.3}$$

$$\check{f}_n \rightarrow \check{f}, \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

Finalmente, en nuestro recorrido por los dominios del análisis de Fourier, tenemos el siguiente resultado central:

Teorema 3.4. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $f = (\check{f})^\vee$ y $f = (\hat{f})^\wedge$.

Demostración: Seleccionemos una sucesión (f_n) , donde $f_n, \hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$.

Por la definición de \hat{f} , se tiene $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$.

Por (3.4) del corolario, tenemos $(\hat{f}_n)^\vee \rightarrow (\hat{f})^\vee$ en $L^2(\mathbb{R})$. Pero, $(\hat{f}_n)^\vee = f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Luego $(\hat{f})^\vee = f$.

Similarmente, por (3.3) del corolario, tenemos:

$$(\check{f}_n)^\wedge = \lim (\check{f}_n)^\wedge = \lim f_n = f \text{ en } L^2(\mathbb{R}). \quad \square$$

Observación 3.1. Observación El teorema 3.4 nos permite afirmar que $\wedge : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es un operador inyectivo y sobre, con inversa $\vee : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$.

Nota 3.5. Para mayores detalles ver M. Frazier [4]

4. En el mundo de las ondículas (ver [7], [3], [5], [11]).

4.1. Ondas y Ondículas. Vivimos en un mundo lleno de ondas y de ondículas, una ondícula es una onda pequeña, es decir, es una onda amortiguada que tiende a cero en el infinito. Los hombres y los animales en general, nos comunicamos gracias a ciertas ondas que son procesadas por el oído "con un algoritmo tipo ondícula". Al presionar una tecla de piano, observamos que el sonido va decayendo hasta desaparecer (va a cero en el infinito-tiempo). Escuchar el Quinto concierto de piano de Beethoven ("El Emperador") significa desde el punto de vista matemático disponer de un conjunto de ondículas de diversas frecuencias, ritmos, tiempos, ... y de "más cosas", cuya resultante (síntesis) es la hermosa melodía que escuchamos. El procesamiento de tal enorme conjunto de información es hecho en forma veloz por nuestro oído y por nuestro cerebro.

Venimos de recorrer parte del dominio del análisis de Fourier. Por muchas décadas este análisis (series y transformadas de Fourier) sirvió para estudiar diversos problemas (periodicos) del análisis armónico, de la física, de la ingeniería, entre otros dominios. Como hemos mencionado tal análisis, aún cuando sigue

vigente, es insuficiente en diversas situaciones que provienen de la teoría de la señal, sobre todo de señales, por ejemplo, que provienen del cerebro humano que son altamente singulares, sujetos a cambios violentos en breves espacios de tiempo.

Como sabemos, la idea fundamental es asociar a una función f , que está en un cierto espacio de funciones, una serie trigonométrica de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, donde los coeficiente c_n dependen de f . La función básica es la onda sinusoidal $\psi(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, y es la única requerida para generar todas las funciones 2π -periódicas, cuadrado-integrables ($L^2(0, 2\pi)$). Pongamos $\psi_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$; ψ_n representa dilataciones de ψ . Si n es muy grande en valor absoluto, diremos que $\psi_n(x)$ tiene alta frecuencia y si $|n|$ es pequeño, $\psi_n(x)$ tiene baja frecuencia. Por tanto, cuando representamos $f \in L^2(0, 2\pi)$ en su serie de Fourier, estamos representando f como una composición de ondas de diversas frecuencias (incluyendo las bajas y las altas). Por otro lado, se sabe que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_m(x) \overline{\psi_n(x)} dx = 0, m \neq n;$$

es decir, la familia $(\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortogonal, y tendremos $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \psi_n(x)$. Así mismo, en el análisis de Fourier conocemos a la identidad de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2,$$

”puente” que permite comunicar a los espacios de Hilbert $L^2(0, 2\pi)$ y $l^2(\mathbb{Z})$. Tal ”puente” deseamos que exista cuando definamos a la ondícula. Remarcamos que ψ y ψ_n son ondas, no ondículas. Ahora recordemos al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Lamentablemente las ondas ψ_n no pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$ pues ellas no tienden a cero en el $+\infty$, lo que si sucede con toda función de $L^2(\mathbb{R})$.

Así surge la tarea de buscar o construir ondas pequeñas u ondículas que generen $L^2(\mathbb{R})$. Como en el caso $L^2(0, 2\pi)$ se desea construir una sola función ψ y que via dilataciones (y traslaciones), generen $L^2(\mathbb{R})$. Las traslaciones surgen en la necesidad de abarcar toda la recta \mathbb{R} . Por razones de eficiencia computacional, se usan potencias enteras como dilataciones, dilataciones binarias. De esta manera las ondas pequeñas tendrán la forma

$$\psi(2^j x - k) = \psi(2^j(x - \frac{k}{2^j})), j, k \in \mathbb{Z}$$

donde observamos que se consideran traslaciones diádicas. Para toda función (o señal) $f \in L^2(\mathbb{R})$, se desea que ella sea representada en función de todas las ondículas o átomos.

Conclusión:

Dada o construida $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, con $\|\psi\| = \|\psi\|_{L^2} = 1$, consideramos la familia $\{\psi_{j,k}(x)\}$, con $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ donde observamos que el coeficiente $2^{j/2}$ ha sido colocado para tenerse $\|\psi_{j,k}\| = 1 = \|\psi\|$. Luego se puede ensayar la siguiente noción de ”ondícula ortonormal”(o.o.n.)

Definición 4.1. Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una ondícula ortonormal si la familia $\{\psi_{j,k}\} \equiv \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal, esto es, si tenemos

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}; \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad \text{donde}$$

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 \dots j = k \\ 0 \dots j \neq k, \end{cases};$$

y para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x), \tag{4.1}$$

donde la convergencia de la serie es la topología de $L^2(\mathbb{R})$, esto es, tenemos

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=-M_2}^{N_2} \sum_{j=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \psi_{j,k}\| = 0$$

La serie (4.1) es llamada una serie ondículas. Por analogía con las series de Fourier, los coeficientes $c_{j,k}$ son llamados los coeficientes de ondículas y son dadas por

$$c_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle . \tag{4.2}$$

Nuevamente, en analogía con la transformada de Fourier, consideramos la siguiente transformada integral sobre $L^2(\mathbb{R})$; si $a > 0, -\infty < b < \infty$,

$$(T_\psi f)(b, a) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{4.3}$$

Entonces los coeficientes de ondículas $c_{j,k}$ son dadas via:

$$c_{j,k} = (T_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) . \tag{4.4}$$

T_ψ es llamada **transformada (integral) de ondícula** relativa a la ondícula ψ . T_ψ es la transformada de ondícula continua. En analogía a la relación entre las series de Fourier con las transformadas de Fourier, la serie ondícula y la transformada de ondícula están relacionadas via (4.4).

Históricamente, en el espacio de tiempo entre la transformada de Fourier y la transformada de ondícula continua, se consideraron otras transformadas, entre las que destacamos a la transformada de Gabor, que presentamos a continuación.

4.2. La transformada de Gabor([2],[5]). Las señales pueden ser digitales o analógicos. Un ejemplo de señal digital es la "delta"

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} ;$$

y de señal analógica, la función "escalón" de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} .$$

En general, la idea es aproximar señales analógicas via señales digitales. Sea f una señal analógica, con energía finita, esto es, $f \in L^2(\mathbb{R})$. Su transformada de Fourier \hat{f} proporciona información espectral de la señal. Recordando que:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx,$$

vemos que cualquier perturbación de la señal en una pequeña vecindad de x , afectará la información de la señal. Es decir, observando el comportamiento local de f , tal transformada no es útil para obtener información del espectro. Esto fue observado por D. Gabor en 1946, quien introdujo una simple pero muy útil idea: Cortar el integrando via una función "ventana" $g(x-b)$, donde el parámetro b sirve para trasladar la ventana por todo el dominio real (tiempo); ella sirve para localizar en la variable x . La figura adjunta nos ilustra una ventana $g(x)$. Gabor usó la familia de funciones Gaussianas

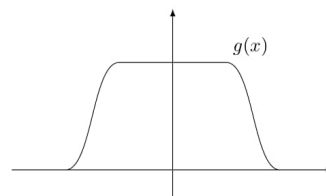


Figura 4.1: Ventana $g(x)$.

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \text{ donde } \alpha > 0 \text{ es fijo. (ver [1])}$$

Definición 4.2. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$; su transformada de Gabor es definida via:

$$G_{n,\alpha}(f)(\xi) \equiv G(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) g_\alpha(x-n) dx.$$

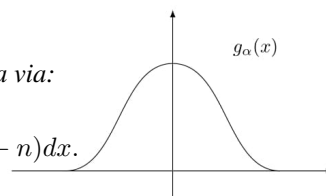


Figura 4.2: Función gaussiana

$G(f)$ localiza a la transformada de Fourier en una vecindad de $x = n$.

Definición 4.3. $v \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una **función ventana** si $xv(x) \in L^2(\mathbb{R})$. El radio de la ventana $v(x)$ es definido siendo

$$\Delta_v = \frac{1}{\|v\|_{L^2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

donde: $t^* = \frac{1}{\|v\|_{L^2}^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |v(x)|^2 dx$ es el centro de la ventana.

Por otro lado, si $a > 0$ es conocido que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$; en particular, $(e^{-x^2})^\wedge(\xi) = \pi e^{-\frac{\xi^2}{4}}$. Luego, si $\xi = 0, \alpha = \frac{1}{4\alpha}$ tendremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f)(\xi) dn = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x - n) dn dx = \hat{f}(\xi),$$

desde que $\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x - n) dn = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(y) dy = 1.$

Conclusión: \hat{f} es descompuesto en función de una familia de transformadas de Gabor $(G_n f)_{n \in \mathbb{R}}$ para dar información espectral.

Ahora hagamos un simple pero sugestivo reemplazo: $g_{\xi,n}(x) = e^{i\xi x} g_\alpha(x - n)$; luego,

$$G_{n,\alpha}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g_{\xi,n}(x)} dx = \langle f, g_{\xi,n} \rangle$$

es decir, $G_{n,\alpha}$ es una localización de la señal f usándose la ventana $g_{\xi,n}$. Esto es la idea de la transformada de ondículas.

Además, desde que $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$, tenemos

$$G_{n,\alpha}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g}_{\xi,n} \rangle = \langle \hat{f}, h_{\xi,n} \rangle$$

donde $h_{\xi,n}(y) = \frac{1}{2\pi} \hat{g}_{\xi,n}(y).$

Así, la información obtenida investigándose la señal $f(x)$ en $x = n$, usándose la ventana $g_{\xi,n}(x) = e^{i\xi x} g_\alpha(x - n)$, puede también ser obtenida observándose el espectro $\hat{f}(y)$ de f en una vecindad de la frecuencia $y = \xi$, usándose ahora la ventana $h_{\xi,n}$. $g_{\xi,n}$ es una ventana-tiempo (o espacio) y $h_{\xi,n}$ es una ventana-frecuencia.

El lector puede encontrar en [1], por ejemplo, otros detalles de lo que estamos tratando. Así se verifica que $\Delta_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}, \alpha > 0$; por tanto el ancho de la ventana g_α es $2\sqrt{\alpha}$.

También se verifica el interesante resultado:

$$(2\Delta_{g_{\xi,n}})(2\Delta_{h_{\xi,n}}) = (2\Delta_{g_\alpha})(2\Delta_{g_{\frac{1}{4\alpha}}}) = 2.$$

De esta manera, el "área" de la ventana tiempo-frecuencia es constante, donde el producto cartesiano

$$[n - \sqrt{\alpha}, n + \sqrt{\alpha}] \times \left[\xi - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \xi + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \right]$$

es llamado una ventana tiempo-frecuencia rectangular.

Generalización

Sea v una ventana en general, y $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definimos la transformada de Fourier localizada via

$$\tilde{G}_n(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) \overline{v(x - n)} dx$$

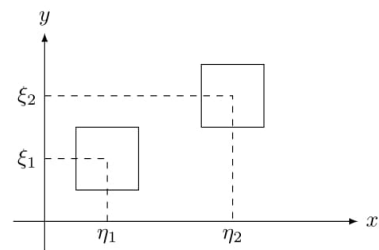


Figura 4.3: Ventanas de Gabor.

Si ponemos $v_{\xi,n}(x) = e^{i\xi x}v(x - n)$, obtendremos nuevamente

$$\tilde{G}_n(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{v_{\xi,n}(x)}dx = \langle f, v_{\xi,n} \rangle$$

Así $\tilde{G}_n(f)$ nos da información local de la señal f en la ventana-tiempo $[x^* + n - \Delta_v, x^* + n + \Delta_v]$, donde x^* es el centro,

$$x^* = \frac{1}{\|v\|_2} \int_{-\infty}^{\infty} x|v(x)|^2 dx, \text{ y } \Delta_v \text{ es el radio,}$$

$$\Delta_v = \frac{1}{\|v\|_{L^2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - x^*)^2 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Si $\hat{v}(\xi)$ fuera una ventana (frecuencia, $\xi \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$), en forma análoga se define el centro ξ^* y el radio $\Delta_{\hat{v}}$ de la ventana $\hat{v}(\xi)$.

Consideremos ahora la ventana $V_{\xi,n}(y) = \frac{1}{2\pi} \hat{v}_{\xi,n}(y)$ (con centro $\xi^* + \xi$ y radio $\Delta_{\hat{v}}$), entonces, por Parseval, tendremos

$$\tilde{G}_n(f)(\xi) = \langle f, v_{\xi,n} \rangle = \langle \hat{f}, V_{\xi,n} \rangle$$

, de donde concluimos que $\tilde{G}_n(f)$ nos da también información local espectral de f en la ventana-frecuencia $[\xi^* + \xi - \Delta_{\hat{v}}, \xi^* + \xi + \Delta_{\hat{v}}]$.

Así, nuevamente, se ha construido una ventana tiempo-frecuencia: $[x^* + n - \Delta_v, x^* + n + \Delta_v] \times [\xi^* + \xi - \Delta_{\hat{v}}, \xi^* + \xi + \Delta_{\hat{v}}]$, con ancho $2\Delta_v$ y con área constante $4\Delta_v \Delta_{\hat{v}}$.

Se observa que no es posible encontrarse una ventana de "tamaño" más pequeño o igual que el de las funciones gaussianas $g_{\alpha}(x)$. Más precisamente, se tiene el

Teorema 4.1 (Principio de incertidumbre [1]). *Sea $v \in L^2(\mathbb{R})$ una ventana tal que \hat{v} es también una ventana. Entonces, $\Delta_v \Delta_{\hat{v}} \geq \frac{1}{2}$ (el área de la ventana tiempo-frecuencia es ≥ 2). Además,*

$$\Delta_v \Delta_{\hat{v}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow v(x) = ce^{iax}g_{\alpha}(x - n), \quad c \neq 0, \alpha > 0, a, n \in \mathbb{R}.$$

El principio de incertidumbre establece que la energía difundida por una función y por su transformada de Fourier no pueden ser simultáneamente pequeñas. El clásico principio de incertidumbre fue desarrollado en el marco de la mecánica cuántica (Heisenberg, Pauli, Weyl, Wiener,...) y fué interpretado por el físico Gabor en el contexto de la teoría de comunicaciones (1946), quien define átomos tiempo-frecuencia como formas de ondas elementales, y que tienen una mínima difusión en el plano tiempo.frecuencia. Con el propósito de medir la "información" tiempo-frecuencia contenida en una señal, Gabor propuso descomponer la señal en base a esos átomos formas de ondas. Así, él demostró la importancia del procesamiento de la señal vía localizaciones tiempo-frecuencia. La década de los años 1920's, alrededor del gran matemático David Hilbert, fue un periodo del desarrollo del análisis matemático moderno (el análisis funcional) y de la física teórica. [10].

Luego de la segunda guerra mundial se produjeron muchos avances científicos y tecnológicos. Así, C. Shannon descubrió las leyes que gobiernan la codificación y la transmisión de señales e imágenes. N. Wiener y J. V. Newmann trabajan en la relación entre la lógica matemática, la electrónica y la neurofisiología, entre otros campos; todo esto ha de preparar el terreno para el surgimiento de las primeras computadoras. Se abrieron nuevos caminos en la ciencia; la teoría del muestreo, en particular el famoso teorema de Shannon, es importante en la teconología digital, así en la ingeniería de comunicaciones, en el análisis de la señal, de la imagen, en la imagen médica, en radares,..., Las ondículas están relacionadas con el resultado de Shannon.

Teorema 4.2 (de Shannon). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que el soporte de \hat{f} está contenido en $[-\pi, \pi]$. Entonces,*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen}\pi(x - k)}{\pi(x - k)}.$$

Demostración: Extenderemos \hat{f} , 2π -periódicamente, a \mathbb{R} . Sea su serie de Fourier: $\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$,

donde $c_k = \langle \hat{f}, e^{-ik\xi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi) e^{ik\xi} d\xi = (\hat{f})^{\vee}(k) = f(k)$. Luego, por la fórmula de inversión de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-ix\xi} e^{ix\xi} d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen}\pi(x - k)}{\pi(x - k)}.$$

□

4.3. El análisis tiempo-frecuencia. Hemos visto que en el análisis de Fourier las señales que se estudian son funciones continuas, 2π -periódicas. La idea es descomponer la función en sus detalles básicos, como son los senos y cosenos. El análisis es dado por los coeficientes de Fourier, al que sigue una síntesis, Sin embargo, el análisis de Fourier no es el único método para estudiar tal tipo de funciones. Existen otros, como es el análisis de ondículas, el que es más eficiente que Fourier en diversas situaciones. Mientras en el análisis de Fourier, los elementos básicos son únicos (senos y cosenos), en el análisis-ondículas tenemos muchas clases de ondículas, es decir, se dispone de un banco de elementos básicos. Justo, el análisis de la señal consiste en elegir apropiadamente las ondículas-átomos, en función de las cuales la señal es descompuesta. La ciencia contemporánea basa mucho de su progreso en técnicas usadas en el procesamiento de la señal. Por ejemplo, es usada en las telecomunicaciones (TV, teléfono,...), en el análisis de la variación del clima, en el análisis de imágenes via satélites y otras aplicaciones. Las señales 2-dimensionales son llamadas imágenes. ([1],[6],[11],[12]).

4.3.1. Los átomos tiempo-frecuencia. La idea, ya presentada, es usar una familia de formas de ondas básicas, las que son bien concentradas en tiempo y en frecuencia. A tal familia se le asocia una transformación lineal tiempo-frecuencia. Tales formas de ondas son llamadas átomos tiempo-frecuencia o elementos básicos. Denotemos con $(\varphi_\nu)_{\nu \in \Gamma}$ (donde ν podría ser un parámetro multi-índice) una familia general de átomos tiempo-frecuencia, que asumimos en $L^2(\mathbb{R})$, con $\|\varphi_\nu\| = 1$. A tal familia (φ_ν) , y a cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$, le asociamos el operador lineal tiempo-frecuencia T , definido via

$$Tf(\nu) = \langle f, \varphi_\nu \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_\nu(t)} dt.$$

Sabemos, por la fórmula de Parseval, que

$$T(f(\nu)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}_\nu(\xi) d\xi.$$

Un caso particular de tal T es la transformada de Gabor, la que es conseguida usando

$$\varphi_\nu(t) = g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u), \quad (\text{átomo de Fourier localizado o "ventanizado"}).$$

Como sabemos, estos átomos fueron introducidos por Gabor en 1946 para medir los componentes frecuencias localizadas de sonidos. La ventana g es de valor real y simétrica ($g(t) = g(-t)$), es trasladada por u y es modulada en la frecuencia ξ . Observemos que si $\|g\| = 1$, entonces $\|g_{u,\xi}\| = 1, \forall (u, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Así obtenemos la ya conocida transformada de Gabor (con una variante respecto a la anterior notación)

$$G(f)(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} f(t) g(t - u) dt,$$

la que también es llamada transformada de Fourier "corto-tiempo" (pues la transformada de Fourier es localizada por $g(t - u)$ en una variedad de $t = u$).

Volvamos al caso general de los átomos tiempo-frecuencia. Sea ψ una ondícula "progenitora" en el sentido de que ella genera átomos-ondículas de la forma

$$\varphi_\nu(t) = \psi_{s,u}(t) = s^{-1/2} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

Las funciones de Fourier localizadas y las ondículas tienen sus energías bien localizadas en tiempo, en tanto que la transformada de Fourier es bien concentrada en bandas de frecuencia limitadas. ¿Cómo es la representación tiempo-frecuencia de un átomo φ_ν ? Veamos.

Como $\|\varphi_\nu\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\nu(t)|^2 dt = 1$, podemos interpretar $|\varphi_\nu(t)|^2$ como una distribución de probabilidad centrada en $u_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} t |\varphi_\nu(t)|^2 dt$. Así, la propagación alrededor de u_ν es medida por la varianza $\sigma_t^2(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - u_\nu)^2 |\varphi_\nu(t)|^2 dt$. Via Plancherel tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \|\varphi_\nu\|^2$.

El centro-frecuencia de $\hat{\varphi}_\nu$ es entonces definido via:

$$\xi_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\hat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 d\xi,$$

y la difusión alrededor de ξ_ν es

$$\sigma_\xi^2(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_\nu)^2 |\hat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 d\xi.$$

La resolución tiempo-frecuencia de φ_t es representada en el plano (t, ξ) tiempo-frecuencia por una caja de Heisenberg, de centro (u_ν, ξ_ν) y cuyos lados miden $\sigma_t(\nu)$ y $\sigma_\xi(\nu)$. El principio de incertidumbre de Heisenberg (teorema 4.1) establece que el área del rectángulo es al menos $\frac{1}{2}$. En general: $\sigma_t \sigma_\xi \geq \frac{1}{2}$. Es importante resaltar lo siguiente: no existe función alguna que sea perfectamente bien concentrada a la vez en el punto t_0 , y en la frecuencia ξ_0 . Solamente los rectángulos con área $\frac{1}{2}$ pueden corresponder a átomos tiempo-frecuencia.

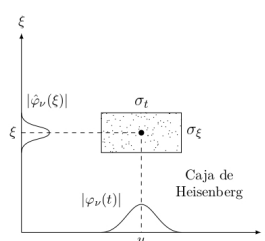


Figura 4.4: Caja de Heisenberg.

Sea (u, ξ) un punto arbitrario del plano tiempo-frecuencia; supongamos que exista un único átomo $\varphi_\nu(u, \xi)$, centrado en (u, ξ) . Entonces la caja tiempo-frecuencia de $\varphi_\nu(u, \xi)$ determina una vecindad de (u, ξ) , donde la energía de f es medida por

$$|\langle f, \varphi_{\nu(u, \xi)} \rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{\nu(u, \xi)}(t)} dt \right|^2.$$

Definición 4.4. $P_T(f)(u, \xi) = |\langle f, \varphi_{\nu(u, \xi)} \rangle|^2$ es llamado una densidad de energía. En el caso de los átomos de Gabor, la densidad de energía se llama un espectrograma:

$$P_G(f)(u, \xi) = |G(f)(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt \right|^2,$$

lo que mide la energía de f en la vecindad tiempo-frecuencia de (u, ξ) , dada por la caja de Heisenberg de $g_{u, \xi}$.

El átomo de Gabor g es una función par, luego $g_{u, \xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u)$ está centrada en u . Luego:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - u)^2 |g_{u, \xi}(t)|^2 dt = (\text{cambio de variable}) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt,$$

es decir, el tiempo se propaga alrededor de u , independiente de u y ξ . Así mismo, \hat{g} es real y simétrica (g es real y simétrica) y se tiene:

$$\hat{g}_{u, \xi}(w) = e^{-iu(w - \xi)} \hat{g}(w - \xi)$$

es decir, la ventana frecuencia está centrada en ξ . La propagación frecuencia alrededor de ξ es dada por:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (w - \xi)^2 |\hat{g}_{u, \xi}(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 |\hat{g}(w)|^2 dw;$$

(nuevamente la propagación es independiente de u y ξ). ([1]).

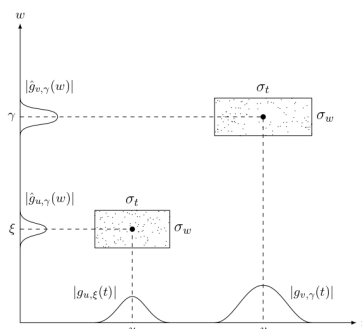


Figura 4.5: Cajas de Heisenberg de $g_{u, \xi}$ y $g_{v, \gamma}$ ([1])

De esta manera, $g_{u, \xi}$ corresponde a una caja de Heisenberg que tiene área $\sigma_t \sigma_w$, con centro en (u, ξ) . Ver la figura adjunta. Observemos que el tamaño de la caja es independiente de (u, ξ) ; esto significa que la transformada de Fourier localizada tiene la misma resolución a través del plano tiempo-frecuencia. Notemos que cuando los puntos tiempo-frecuencia (u, ξ) recorre \mathbb{R}^2 , las cajas de Heisenberg de los átomos $g_{u, \xi}$

cubren todo el plano tiempo-frecuencia. De esta manera se puede conjeturar que una señal, de energía finita, se pueda recuperar usándose la transformada de Fourier localizada $Gf(u, \xi)$. La respuesta es afirmativa y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} d\xi du, \tag{4.5}$$

y se tiene la conservación de la energía:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du. \tag{4.6}$$

Demostración: [1] Probemos (4.5). Pongamos $f_{\xi}(u) = Gf(u, \xi)$. Entonces, usando $g(t) = g(-t)$:

$$\begin{aligned} f_{\xi}(u) &= e^{-iu\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-u)e^{i\xi(u-t)} dt = e^{-iu\xi} f * (g(u)e^{i\xi u}) \\ &\equiv e^{-iu\xi} f * g_{\xi}(u) \end{aligned}$$

Luego:

$$\hat{f}_{\xi}(w) = \hat{f}(w + \xi)\hat{g}_{\xi}(w + \xi) = \hat{f}(w + \xi)\hat{g}(w).$$

Por tanto, el segundo lado de (4.5) es:

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} du d\xi \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w + \xi)|\hat{g}(w)|^2 e^{it(w+\xi)} dw \right) d\xi,$$

donde hemos usado que: $(g(t-u))^{\wedge}$, respecto a u , $= \hat{g}(w)e^{-itw}$.

Recordemos ahora al teorema de Fubini, que nos permite intercambiar el orden de integración.

Teorema 4.4 (Fubini). *Si $\int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy) dx < +\infty$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

Luego, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (si no se tuviera esta condición, entra en juego un argumento de densidad entre los espacios de Lebesgue) aplicamos el teorema de Fubini para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} d\xi du &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(w)|^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w + \xi)e^{it(w+\xi)} d\xi \right) dw \\ &= \text{(considerando que } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(w)|^2 dw = 1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w + \xi)e^{it(w+\xi)} d\xi \\ &= f(t), \end{aligned}$$

(considerando la fórmula de la transformada de Fourier inversa).

Prueba de (4.6): Tenemos $[Gf(u, \xi)]^{\wedge}$, respecto a u , $= \hat{f}(w + \xi)\hat{g}(w)$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Gf(u, \xi)|^2 du d\xi &= \text{(usando Plancherel } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w + \xi)|^2 |\hat{g}(w)|^2 dw d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(w)|^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w + \xi)|^2 d\xi \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w + \xi)|^2 d\xi \quad \text{Plancherel} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

□

Observación. Observemos que la fórmula de reconstrucción (4.5) se puede escribir en la forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, g_{u,\xi} \rangle g_{u,\xi}(t) d\xi du,$$

la cual, recuerda a la descomposición de una señal en una base ortonormal, pero con el cuidado de que en este caso la familia $(g_{u,\xi})_{u,\xi \in \mathbb{R}^2}$ es redundante en $L^2(\mathbb{R})$.

Sigamos con la transformada de Gabor Gf . Es claro que $f(t)$ es una señal uni-dimensional, en tanto que su transformada de Fourier localizada $Gf(u, \xi)$ es una función bi-dimensional, definida en el plano tiempo-frecuencia. La fórmula (4.6) nos dice que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $Gf \in L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, por la anterior observación, Gf es redundante y por tanto no es verdad que cualquier $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ es la transformada de Gabor de algún $f \in L^2(\mathbb{R})$. ¿Cómo obtener una caracterización de esta situación? Se tiene el siguiente resultado al respecto.

Teorema 4.5. *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Entonces, existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que*

$$\phi(u, \xi) = Gf(u, \xi) \Leftrightarrow \phi(u_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi,$$

donde $K(u_0, u, \xi_0, \xi) = \langle g_{u,\xi}, g_{u_0,\xi_0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)g(t-u_0)e^{-i(\xi_0-\xi)t} dt$.

Demostración:

\Rightarrow) Supongamos que $\exists f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\phi(u, \xi) = Gf(u, \xi)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} Gf(u_0, \xi_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_0 t} f(t)g(t-u_0)dt \quad \text{por (4,5)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} d\xi du g(t-u_0)dt \\ &= (g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t}g(t-u)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)g(t-u_0)e^{-i(\xi_0-\xi)t} dt) Gf(u, \xi) du d\xi \quad (\text{usando hipótesis}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u_0, u, \xi_0, \xi) \phi(u, \xi) du d\xi. \end{aligned}$$

\Leftarrow) Definamos $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} d\xi dt$.

Entonces, $f \in L^2(\mathbb{R})$ y tenemos

$$\begin{aligned} \phi(u_0, \xi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} d\xi du g(t-u_0)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_0 t} f(t)g(t-u_0)dt = Gf(u_0, \xi_0). \end{aligned}$$

□

El núcleo $K(u_0, u, \xi_0, \xi)$ es llamado el núcleo reproductor.

4.3.2. Colección de átomos tiempo-frecuencia [7], [11], [3]. El análisis tiempo-frecuencia en el procesamiento de señales es un campo de gran investigación en los últimos años. En esta dirección es conveniente considerar algunos aspectos como son: los átomos tiempo - frecuencia; disponer de descomposiciones óptimas de la señal en función de átomos tiempo-frecuencia; buen manejo del plano tiempo-frecuencia y su partición óptima. El problema esencial es construir un algoritmo que permita descomponer una señal dada, de un modo óptimo, como una combinación lineal de átomos tiempo-frecuencia, elegidos de un modo adecuado. Cada señal admite, en general, un número infinito de tales representaciones; la idea es escoger la "mejor" entre ellas, de acuerdo a algún criterio. Ya conocemos a los átomos tiempo-frecuencia de Gabor.

Una colección Ω de átomos tiempo-frecuencia es un subconjunto de $L^2(\mathbb{R})$, que es completo, esto es, el conjunto de las combinaciones lineales $\sum \alpha_i a_i$, $a_i \in \Omega$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Por conveniencia tomamos $\|a\|_{L^2} = 1, \forall a \in \Omega$. Se requiere, además, que $a \in \Omega$ tenga una estructura simple y que sea óptimamente localizada en el plano tiempo-frecuencia. Algunos ejemplos de colecciones de átomos tiempo-frecuencia son: las ondículas de Gabor, la colección completa de átomos tiempo-frecuencia de Gabor, las ondículas de Malvar-Wilson, los paquetes de ondículas, entonces, ¿Qué colección Ω deberá uno escoger para estudiar una dada señal? Pues bien, habiendo escogido Ω , ¿Cómo debemos descomponer una señal f óptimamente en una serie $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \Omega$? Las respuestas a tales cuestiones han permitido una serie de investigaciones en el campo del procesamiento de la señal. Por ejemplo, un elegante algoritmo que permite una óptima descomposición es el propuesto por S. Mallat y llamado "matching pursuit". [7], tercera edición.

4.4. La transformada de ondícula . ([2],[1],[5],[9])

En la sección 4.1 ya hemos considerado una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y a la familia que ella genera, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Consideramos ahora también $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, donde $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$. Es claro que $\|\psi_{j,k}\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$ y que $\|\varphi_{j,k}\| = \|\varphi\|_{L^2}$.

φ jugará el papel de aproximación y ψ el del error. En aquella oportunidad definimos cuando ψ es una ondícula ortonormal. Completamos ahora la idea.

Definición 4.5. Un sistema de Ondículas para $L^2(\mathbb{R})$ es un conjunto ortonormal (o.n) completo en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, para algún $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

ψ es llamada la ondícula progenitora, y $\psi_{j,k}$'s las ondículas.

Una esencial tarea es construir un sistema de ondículas.

Sea $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ un sistema de ondículas, entonces

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \text{identidad de ondícula.}$$

y la aplicación $f \rightarrow \{\langle f, \psi_{j,k} \rangle\}$ es llamada la transformada de ondícula discreta.

La identidad de ondícula nos dice que la señal f es descompuesta en sus componentes, a diferentes escalas $\frac{1}{2^j}$, y centradas en diferentes ubicaciones $\frac{k}{2^j}$, para $j, k \in \mathbb{Z}$.

4.4.1. Una fórmula de Calderón.

Teorema 4.6. Sea $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(s)|^2 \frac{ds}{s} = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^\infty |\hat{\psi}(-s)|^2 \frac{ds}{s} = 1.$$

Para $t > 0, y \in \mathbb{R}$ sea la dilatación $\psi_t(x) = \frac{1}{t} \psi(\frac{x}{t})$.

Entonces, para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene la representación

$$f(x) = \int_0^\infty \psi_t * \tilde{\psi}_t * f(x) \frac{dt}{t}, \tag{4.7}$$

donde $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$.

Recordemos que este profundo resultado de Calderón ya fue enunciado en la sección 2.1, donde enfatizamos que $\psi_t(x) = \frac{1}{t} \tilde{\psi}(\frac{x}{t})$.

Demostración: Tomemos transformada de Fourier en el lado derecho de 4.7 y cambiando el orden de integración, obtenemos:

$$\begin{aligned} (\int_0^\infty \psi_t * \tilde{\psi}_t * f(x) \frac{dt}{t})^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \psi_t * \tilde{\psi}_t * f(x) \frac{dt}{t} e^{-ix\xi} dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \psi_t * \tilde{\psi}_t * f(x) e^{-ix\xi} dx \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty (\psi_t * \tilde{\psi}_t * f)^\wedge(\xi) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty (\psi_t)^\wedge(\xi) (\tilde{\psi}_t)^\wedge(\xi) f(\xi) \frac{dt}{t} \\ &= \hat{f}(\xi) \int_0^\infty |(\psi_t)^\wedge(\xi)|^2 \frac{dt}{t} = \hat{f}(\xi) \int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Si $\xi > 0$, hagamos el cambio de variables $s = t\xi$ en la última integral, obtenemos:

$$\hat{f}(\xi) \int_0^\infty |\hat{\psi}(s)|^2 \frac{ds}{s} = \hat{f}(\xi)$$

Finalmente, si $\xi < 0$ pongamos $s = -t\xi$ y obtendremos

$$\hat{f}(\xi) \int_0^\infty |\hat{\psi}(-s)|^2 \frac{ds}{s} = \hat{f}(\xi).$$

□

Corolario 4.1. Bajo las hipótesis del teorema 4.6, pongamos $\psi_{t,y}(x) = t^{-1/2} \psi(\frac{x-y}{t})$. Entonces:

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{t,y} \rangle \psi_{t,y}(x) dy \frac{dt}{t^2}. \tag{4.8}$$

Demostración:

$$\psi_t * \tilde{\psi}_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_t(x-y) \tilde{\psi}_t * f(y) dy = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{t,y} \rangle \psi_{t,y} dy.$$

Sustituyendo esta representación en (4.7), obtenemos (4.8). □

Observemos que $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{t,y} \rangle \psi_{t,y}(x) dy \frac{dt}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{t,y} \rangle \psi_{t,y}(x) dy \frac{dt}{t^2}$.

Nota 4.1. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces f puede ser escrito, via (4.8), como una superposición de las funciones básicas $\{\psi_{t,y}\}_{t>0,y \in \mathbb{R}}$. $\psi_{t,y}$ está a la escala t y está centrada en y .

Definición 4.6. La aplicación $f \rightarrow \langle f, \psi_{t,y} \rangle_{t>0,y \in \mathbb{R}}$ es llamada la transformada de ondícula continua.

(4.8) es llamada identidad de ondícula continua.

Es claro que desde el punto de vista computacional, (4.7) y (4.8) no son fáciles de manipular cuando se desee obtener aproximaciones finitas. Sin embargo, la prueba matemática de tales representaciones es relativamente más fácil que demostrar la identidad de ondícula. Dentro de este panorama, S. Mallat introdujo la idea de análisis multiresolución, la que ha de servir para construir ondículas. [6].

Definición 4.7. Un análisis multiresolución (AMR), con función escala φ , es una sucesión $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios (cerrados) de $L^2(\mathbb{R})$ tal que:

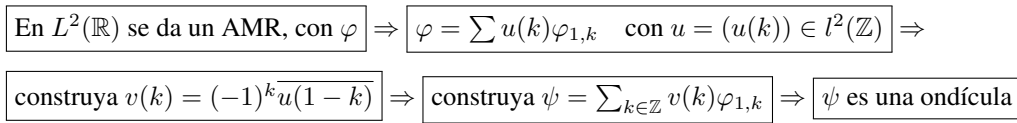
- i) $V_j \subseteq V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$, propiedad monótona;
- ii) $\exists \varphi \in V_0$ tal que $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal y $V_0 = \{\sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k}/z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})\}$;
- iii) $\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$, propiedad de dilatación;
- iv) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, intersección trivial;
- v) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, propiedad de densidad. De esta manera, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ tal que $f_n \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ y $\|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Vía cambio de variables, se verifica que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema o.n. completo (una base) para V_j . Desde que $\varphi \in V_0 \subset V_1$ se tiene:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)2^{1/2}\varphi(2^j x - k), \quad \text{ecuación escala.} \quad (4.9)$$

donde $(u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ y $u(k) = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$. $u = (u(k))$ se llama **sucesión escala**.

En forma muy breve, el camino para construir una ondícula a partir de una AMR es como sigue:



Estudiemos ahora al fundamental resultado de Mallat.

Teorema 4.7. [4],[5],[9] Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR, con función escala φ y sucesión escala $u = (u(k))$ en $l^1(\mathbb{Z})$.

Si $v(k) = (-1)^k \overline{u(1-k)}$ y $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x)$, entonces, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema de ondículas en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración: Vía dilatación, la o.n. de $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ implica que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es o.n. $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Definamos $W_j = \{\sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k)\psi_{j,k}/z = (z(k)) \in l^2(\mathbb{Z})\}$.

Via dilatación verificamos que $f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_j$.

Luego, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ [tenemos $V_1 = V_0 \oplus W_0$; de $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$ y $f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_j$, se tiene la igualdad].

La tesis es equivalente a verificar que $B = \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto o.n. completo en $L^2(\mathbb{R})$.

Probemos que B es un conjunto o.n. en $L^2(\mathbb{R})$. En efecto, sabemos que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es o.n. para cada j . Probemos que $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0$ si $j \neq l$.

Bien, asumamos $j > l$; entonces, $\psi_{l,m} \in W_l \subset V_{l+1} \subset \dots \subset V_j$. Pero, $\psi_{j,k} \in W_j$ y $W_j \perp V_j$, luego $\psi_{j,k} \perp \psi_{l,m}$. Por tanto, B es o.n.

Probemos ahora que B es completo en $L^2(\mathbb{R})$. Usaremos el siguiente resultado:

Nota 4.2. "Si $g \in V_j$ para algún $j \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall l \leq j - 1$, se tiene $g \perp W_l$ (esto es, $\forall w \in W_l, \langle g, w \rangle = 0$), entonces $g = 0$."

De esta manera, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = 0, \forall j, k \in \mathbb{Z}$ (esto es, $f \perp W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$), debemos probar que $f = 0$. En efecto, para cada $j \in \mathbb{Z}$ sea $P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ el operador proyección; así, $P_j(f)$ es la proyección de f sobre el subespacio cerrado V_j . Luego, $P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$. Sabemos que $P_j(f) \in V_j$ y $(f - P_j(f)) \perp V_j$. Si $l \leq j - 1$ entonces $W_l \subset V_{l+1} \subseteq V_j$. Luego, $(f - P_j(f)) \perp W_l, \forall l \leq j - 1$. Desde que $f \perp W_l, \forall l$, la linealidad implica que $P_j(f) \perp W_l, \forall l \leq j - 1$.

Luego, por el resultado 4.2, tenemos $P_j(f) = 0, \forall j \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, $\forall j \in \mathbb{Z}, P_j(f) = 0$ es la mejor aproximación a f en V_j . Esto es, $\forall h \in V_j$ se tiene $\|f\| = \|f - P_j(f)\| \leq \|f - h\|$. Por otro lado, la hipótesis $\overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$ implica que existe $\{f_n\}$ tal que $f_n \in \bigcup V_j, \forall n \in \mathbb{Z}$, y $\|f - f_n\| \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$. Luego $\|f\| \leq \|f - f_n\|$ implica $\|f\| = 0$ ó $f = 0$. □

Nota 4.3. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\|f - P_j(f)\| \rightarrow 0$.

4.5. Ejemplos.

4.5.1. La ondícula de Haar. ([2], [1],[5],[9]).

Sea $\varphi(x)$ la función característica de $[0, 1)$, cuyo soporte compacto es $[0, 1]$. De ella se construye la ondícula

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ sobre } [0, 1/2), \\ -1 & , \text{ sobre } [1/2, 1), \\ 0 & , \text{ fuera de } [0, 1). \end{cases} \tag{4.10}$$

ψ genera la familia $\phi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$, las que también son de soporte compacto. Usando la idea de AMR, y siguiendo a Daubechies [2], probamos que la familia $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n (base ortonormal) para $L^2(\mathbb{R})$. Para ello se verifica que:

1. $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal y
2. $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene $\|f - \sum_{j \in J} c_{j,k} \psi_{j,k}\| < \epsilon$ donde J es un conjunto finito.

En efecto, probemos (1). El lector es invitado a graficar las funciones $\varphi(x), \psi(x), \psi(2x), \psi(2x - 1), \dots$ por ejemplo. Se observa que, en general,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) dx = 0, \forall j, k \in \mathbb{Z},$$

donde soporte de $\psi_{j,k} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$.

De esta manera observamos que $\psi_{j,k}$ y $\psi_{j,k'}$, con $k \neq k'$, tienen soportes disjuntos (salvo posiblemente, conjuntos de medida cero); luego, $\psi_{j,k} \perp \psi_{j,k'}$. Consideremos ahora $\psi_{j,k}$ y $\psi_{j',k}$ con $j \neq j'$, digamos $j' < j$. Observemos que la longitud del soporte de $\psi_{j,k}$ es $\frac{1}{2^j}$. Luego, si $j' < j, \frac{1}{j'} < \frac{1}{j}$ y tenemos que soporte de $\psi_{j,k} \subset$ soporte de $\psi_{j',k}$. Entonces, $\psi_{j,k} \perp \psi_{j',k}$.

Desde que $\|\psi_{j,k}\| = 1, \forall j, k \in \mathbb{Z}$, concluimos que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal.

La prueba de (2) es técnica y larga, por ello la omitimos, Ver [5][9].

Por otro lado se observó en la prueba de que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, es una b.o.n. de $L^2(\mathbb{R})$ está implícita la idea de AMR. Así, para cada $j \in \mathbb{Z}$ pongamos

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / \forall k \in \mathbb{Z}, f \text{ es constante sobre } I_{j,k}\},$$

donde $I_{j,k}$ es el intervalo diádico $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$. Se tiene: si k es par, entonces $I_{j+1,k} \subseteq I_{j, \frac{k}{2}}$; y si k es impar, $I_{j+1,k} \subseteq I_{j, \frac{k-1}{2}}$. Luego, si $f \in V_j$ entonces f es constante sobre intervalos diádicos de longitud 2^{-j} , y por tanto f es constante sobre intervalos diádicos de longitud $2^{-(j+1)}$. Por tanto, $f \in V_{j+1}$. Así, se ha verificado i) $V_j \subseteq V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$.

Probemos ahora:

- ii) Existe una función φ en V_0 tal que

$$\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es o.n. y } V_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) \varphi_{0,k} / z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

En efecto, sea $\varphi = \mathcal{X}_{[0,1]}$ función característica de $[0, 1]$. Se tiene que $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es o.n. Además, $\forall f \in V_0$ puede ser escrito en la forma $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}$, donde c_k es el valor de f sobre $[k, k+1]$.

Se observa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \infty |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \text{ y por tanto } c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

- iii) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x) = c$ en $[k, k+1] \Leftrightarrow f(x) = c, k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow f(2^j x) = c, k \leq 2^j x \leq k+1 \Leftrightarrow f(2^j x) = c, \frac{k}{2^j} \leq x \leq \frac{k+1}{2^j} \Leftrightarrow f(2^j x) = c$ en $I_{j,k} \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$.

- iv) Si $f \in \bigcap_j V_j$, entonces $f = 0$.

En efecto, $f = c_1$ sobre $[0, \frac{1}{2^j})$ y $f = c_2$ sobre $[\frac{-1}{2^j}, 0), \forall j \in \mathbb{Z}$. Luego, $f = c_1$ sobre $[0, +\infty)$ y $f = c_2$ sobre $(-\infty, 0]$ (tome $j \rightarrow -\infty$). Pero $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces, $f = 0$.

- v) De la definición de V_0 se tiene que $f \in V_0$ implica $f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, via argumentos que requieren de otros requisitos técnicos se tiene:

- vi) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$.

Conclusión: V_j es una AMR para $L^2(\mathbb{R})$.

Por esta última conclusión, y por el teorema de Mallat, se puede construir un sistema de ondículas en $L^2(\mathbb{R})$.

Veamos; tenemos $\varphi(x) = \sum_k u(k)\varphi_{1,k}(x)$. Calculemos los coeficientes $u(k), k \in \mathbb{Z}$. Sabemos que: $u(k) = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$ ya que $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es o.n. Pero,

$$\varphi_{1,k} = 2^{1/2}\varphi(2x - k) = \begin{cases} 2^{1/2} & , \quad \frac{k}{2} \leq x < \frac{k+1}{2} \\ 0 & , \quad \text{complemento.} \end{cases}$$

Luego $u(0) = \langle \varphi, \varphi_{1,0} \rangle = 2^{-1/2}, u(1) = \langle \varphi, \varphi_{1,1} \rangle = 2^{-1/2}$ y $u(j) = 0$, si $j \neq 0, 1$.

Por tanto tenemos $\varphi(x) = \sum_k u(k)2^{1/2}\varphi(2x - k)$, esto es

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1), \quad \text{ecuación dilatación.}$$

Además, $v(k) = (-1)^k \overline{u(1-k)}$ implica $v(0) = 2^{-1/2}, v(1) = -2^{-1/2}$ y $v(j) = 0, j \neq 0, 1$. Por tanto, $\psi(x) = \sum_k v(k)\varphi_{1,k}(x)$ implica $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1)$, donde ψ es la ondícula de Haar (4.10).

Via dilataciones y translaciones se tiene la familia $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, donde:

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{j/2} & , \quad \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}}; \\ 2^{j/2} & , \quad \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq x < \frac{k+1}{2^j}; \\ 0 & , \quad x < \frac{k}{2^j} \text{ ó } \frac{k+1}{2^j} \geq x. \end{cases}$$

Corolario 4.2. $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. para $L^2(\mathbb{R})$.

ψ es llamada la ondícula de Haar. El sistema de Haar $\{\psi_{j,k}\}$ es la más antigua b.o.n. de ondículas.

4.5.2. Ondículas de Shannon. ([1], [5], [3], [9])

Recordemos al teorema de muestro de Shannon: “Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que el soporte de $\hat{f} \subset [-\pi, \pi]$, entonces

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\text{sen}\pi(x - n)}{\pi(x - n)},$$

En esta dirección tenemos el siguiente argumento:

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{complemento.} \end{cases}$

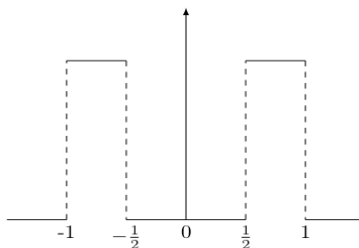


Figura 4.6: La función $\hat{\psi}(\xi)$

Observemos que $\|\hat{\psi}\| = 1$. Por otro lado, antitransformando, $\psi(x) = \frac{\text{sen}2\pi x - \text{sen}\pi x}{\pi x}$.

Objetivo: probar que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. para $L^2(\mathbb{R})$.

Para probar esta afirmación, debemos verificar que $\|\psi_{j,k}\| = 1, \forall j, k \in \mathbb{Z}$, y que $\{\psi_{j,k}\}$ es un marco (frame) casi ortogonal, con cota-marco igual a 1 (esto significa que debemos probar: $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2$). Si estas dos condiciones se satisfacen, es conocido que ello implica que $\{\psi_{j,k}\}$ sea una b.o.n. para $L^2(\mathbb{R})$. En efecto,

Primero veamos que se cumple: i) $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\| = \|\hat{\psi}\| = 1, \forall j, k \in \mathbb{Z}$.

En segundo lugar tenemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,k} | \langle f, \psi_{j,k} \rangle |^2 &= \sum_{j,k} | \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k} \rangle |^2 = \sum_{j,k} 2^j \left| \int_{2^{-(n+1)} \leq |\xi| \leq 2^{-m}} \hat{f}(\xi) e^{2^{j+1} \pi i k \xi} d\xi \right|^2 \\
 &= (\text{cambio de variables}) = \sum_{j,k} 2^{-j} \left| \int_{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1} \hat{f}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) e^{2\pi i k \xi} d\xi \right|^2 \\
 &= \sum_{j,k} 2^{-j} \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{f}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \xi^{2\pi i k \xi} d\xi + \int_1^{-\frac{1}{2}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) e^{2\pi i k \xi} d\xi \right|^2 \\
 &= (\mathcal{K} = \text{función característica}) \\
 &= \sum_j 2^{-j} \left(\sum_k \left| \int_0^1 e^{2\pi i k \xi} \left[\hat{f}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \mathcal{K}_{[\frac{1}{2}, 1]}(\xi) + \hat{f}\left(\frac{\xi-1}{2^j}\right) \mathcal{K}_{[0, \frac{1}{2}]}(\xi) \right] d\xi \right|^2 \right) \\
 &= (\text{ortonormalidad de las } e^{2\pi i k \xi} \text{'s y Plancherel}) \\
 &= \sum_j 2^{-j} \int_0^1 \left[\hat{f}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \mathcal{K}_{[\frac{1}{2}, 1]}(\xi) + \hat{f}\left(\frac{\xi-1}{2^j}\right) \mathcal{K}_{[0, \frac{1}{2}]}(\xi) \right]^2 d\xi \quad (\text{cambio de variables}) \\
 &= \sum_j \left(\int_{2^{-(j+1)}}^{2^{-j}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{-2^{-j}}^{-2^{-(j+1)}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) = \int_0^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{-\infty}^0 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(x)|^2 dx \\
 &= \|f\|^2.
 \end{aligned}$$

$\therefore \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. para $L^2(\mathbb{R})$.

Definición 4.8. $\psi(x) = \frac{\text{sen}2\pi x - \text{sen}\pi x}{\pi x}$ es llamada ondícula de Shannon.

4.5.3. Ondículas Splines. ([1])

Este ejemplo es una regularización del sistema de Haar. Sea $g_0(x) = \mathcal{K}_{[0,1]}(x)$.

Por definición, $g_m = g_{m-1} * g_0, m \geq 1$ entero. g_m se llama la función spline de orden m . De esta manera, $g_m(x) = \int_0^1 g_{m-1}(x-t) dt$. Sea la familia $\{g_m(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

V_0^m denota al espacio generado por $\{g_m(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. V_j^m es definido via dilatación:

$$f(x) \in V_j^m \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0^m.$$

Sea $m \geq 1$ entero. Por definición

$$S_m = \{f \in C^{m-2} / f|_{[k, k+1]} \text{ es un polinomio de grado a lo mas } m-1, k \in \mathbb{Z}\}$$

En particular,

$S_1 = \{f \text{ constante sobre } [k, k+1], k \in \mathbb{Z}\}$, espacio en donde consideramos la base $(g_0(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$. En general:

4.5.4. S_m^j es el espacio de los splines. , con puntos nudos en $2^{-j}\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$. Así en particular S_m es el espacio de los splines, con nudos en $\mathbb{Z} (S_m \equiv S_m^0)$.

Redefinamos V_j^m via $V_j^m = S_m^j \cap L^2(\mathbb{R})$, donde la cerradura es en $L^2(\mathbb{R})$.

Corolario 4.3.

1. $\dots \subset S_m^{-1} \subset S_m^0 \subset S_m^1 \subset \dots$
2. $\dots \subset V_{-1}^m \subset V_0^m \subset V_1^m \subset \dots$
3. $\{V_j^m\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un AMR para $L^2(\mathbb{R})$, donde $(g_m(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base (de Riesz) para V_0^m .

En general, $(2^{j/2} g_m(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base (de Riesz) para V_j^m .

Construcción de las ondículas splines. Siendo $\{V_j^m\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR para $L^2(\mathbb{R})$, la función escala φ se construye via:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{\hat{g}_m(\xi)}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_m(\xi + 2\pi k)|^2)^{1/2}}$$

Se verifica [1] que $(\varphi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. para V_0^m . Las ondículas splines son construidas através de la fórmula:

$$\psi(x) = 2^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{1-k} (-1)^k \varphi(2x - k).$$

Nota 4.4. Estas ondículas son también conocidas como ondículas de Battle-Lemarie.

4.6. Comentarios generales. En este breve paseo por el mundo de las ondículas hemos recorrido algunos pasajes de un universo que cada vez se va ampliando más, tanto en sus fundamentos teóricos, como, y sobretodo, en sus diversas aplicaciones. Este camino podría ser continuado por otros caminos de igual belleza y atracción. Bosquejemos algunos de ellos:

1. **La transformada de ondícula continua(TOC)**, [1],[2],[9]. En este ambiente conoceríamos a la condición de admisibilidad $c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$, la que permite estudiar a la TOC. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, su TOC respecto a ψ , es: $T_\psi f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx$, donde $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ y $\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi(\frac{x-b}{a})$. La TOC es útil en muchas aplicaciones.
2. **La transformada de ondículas discreta(TOD)** [1],[2],[9]. $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada ondícula-diádica si \exists constantes $A, B, 0 < A \leq B < \infty$, tal que $A \leq \sum_j |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 \leq B$. Dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ su TOD es definida siendo:

$$T_\psi f(m, n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(\frac{x - nb_0 a_0^m}{a_0^m})} dx,$$

donde $a_0 > 1, b_0 \neq 0$ parámetros fijos; $m, n \in \mathbb{Z}$.

Observemos que

$$T_\psi f(m, n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(a_0^{-m}x - nb_0)} dx = \langle f, \psi_{m,n} \rangle,$$

donde $\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0)$.

Si $a_0 = 2, b_0 = 1$, obtenemos la discretización diádica: $\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - n)$.

La TOD es muy importante en múltiples aplicaciones en ingeniería, en medicina, en física y otros campos.

3. **Ondículas de soporte compacto.** En su inter-relación con la teoría de filtros y problemas concretos, en la teoría de ondículas surgieron algunas cuestiones como, ¿es posible construirse bases o.n. de ondículas que corresponden a filtros finitos? ¿tales ondículas serán más útiles en problemas concretos, como en la teoría de señales? Estas, y otras cuestiones, fueron clarificadas por I. Daubechies, en 1988, al introducir las ondículas de soporte compacto, quien fue motivada por un trabajo de S. Mallat relativo a un algoritmo rápido para calcular transformadas de ondículas. Ver [2] y [6].
4. **Ondículas y sus múltiples aplicaciones.** Se ha publicado mucho sobre ondículas, tanto en artículos, como en libros. Esta tendencia parece incrementarse día a día. Una razón es por sus múltiples aplicaciones a muchas áreas de la ciencia y de la tecnología. El lector es invitado a visitar la biblioteca de ciencias de la PUCP, en donde existen muchos libros sobre ondículas, tanto teóricos como de aplicaciones. Vía esa visita, este paseo puede continuar...

ORCID and License

Alejandro Ortíz Fernández <https://orcid.org/0000-0002-9380-4301>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Chui CK. An Introduction to Wavelets. San Diego: Ac.d. Press; 1992.
- [2] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM; 1992.
- [3] Debnat L, Shah FA. Wavelet Transforms and Their Applications. 2d editon. Boston: Birkhäuser; 2015.
- [4] Frazier M. An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra. New York: Springer; 1999.
- [5] Hernández E, Weiss G. A First Course on Wavelets. Boca Raton: CRC. Press; 1996.
- [6] Mallat S. Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Base of $L^2(\mathbb{R})$. Trans.Am.Math.Soc. 315. 1989.
- [7] Mallat S. A Wavelet Tours of Signal Processing. Second Edit. USA: Academic Press; 2000.
- [8] Meyer Y. Wavelets and Operators. Cambridge University Press. Vol.1; 1992.
- [9] Ortíz A. Ondículas (“Wavelets”), un Paseo Histórico-Analítico. Lima: Sec. Matem. PUCP. Vols.1, 2; 2012.
- [10] Ortíz A. Ondículas, Evolución de Algunas Ideas y Aplicaciones. Selecciones Matemáticas. 2019; Vol.06(01): 119-127.
- [11] Strang G, Nguyen T. Wavelets and Filter Banks. Walllesley - Cambridge Press; 1996.
- [12] Jaffard S, Meyer Y, Ryan RD. Wavelets: Tools for Science-Technology. Philadelphia: SIAM; 2001.