



Numerical simulation of energy cascade in turbulent fluids

Simulación numérica de la cascada de energía en fluidos turbulentos

Alexis Rodriguez Carranza[✉], Elder J. Varas Pérez[✉] and Juan C. Ponte Bejarano[✉]

Received, Jul. 07, 2022

Accepted, Oct. 23, 2022



How to cite this article:

Rodriguez A, Varas E, Ponte JC. Numerical simulation of energy cascade in turbulent fluids. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(2):302–311. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.02.07>

Abstract

Transfer of energy from large to small scales in turbulent flows is described as a flux of energy from small wave numbers to large wave numbers in the spectral representation of the Navier-Stokes equation. The problem of resolving the relevant scales in the flow corresponds in the spectral representation to determining the spectral truncation at large wave numbers. The effective number of degrees of freedom in the flow depends on the Reynolds number and a numerical simulation of the Navier Stokes equation for high Reynolds numbers is impractical without some sort of reduction of the number of degrees of freedom. The shell models are constructed to obey the same conservation laws and symmetries as the Navier Stokes equation as an alternative. In this work we present the Sabra shell model for the study of the energy cascade of turbulence and we will show numerically that the energy dissipation is approximately $-1/3$ which is in agreement with the theory $K41$.

Keywords. Navier Stokes Equations, energy transfer, shell models.

Resumen

La transferencia de energía de escalas grandes a pequeñas en flujos turbulentos se describe como un flujo de energía de números de onda pequeños a números de onda grandes en la representación espectral de la ecuación de Navier-Stokes. El problema de resolver las escalas relevantes en el flujo corresponde en la representación espectral a determinar el truncamiento espectral en números de onda grandes. El número efectivo de grados de libertad en el flujo depende del número de Reynolds y una simulación numérica de la ecuación de Navier Stokes para números de Reynolds altos no es práctica sin algún tipo de reducción del número de grados de libertad. Los modelos shell se construyen para obedecer las mismas leyes de conservación y simetrías que la ecuación de Navier Stokes como alternativa. En este trabajo presentamos el modelo shell Sabra para el estudio de la cascada de energía en un flujo turbulento y mostraremos numéricamente que la disipación de energía es de aproximadamente $-1/3$ lo cual está de acuerdo con la teoría $K41$.

Palabras clave. Ecuaciones de Navier Stokes, transferencia de energía, modelos shell

1. Introduction. La transferencia de energía de grandes a pequeñas escalas en flujos turbulentos se describe como un flujo de energía de números de onda pequeños a números de onda grandes en la representación espectral de la ecuación de Navier-Stokes, ver [1]

$$(\partial_t + \nu k^2)u_i(\mathbf{k}) = -\nu k_j \int (\delta_{i\ell} - \frac{k_i k'_\ell}{k^2}) u_j(\mathbf{k}') u_\ell(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}' + f_i(\mathbf{k}), \quad (1.1)$$

*Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (arodriguezca@unitru.edu.pe).

†Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (evaras@unitru.edu.pe).

‡Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (jponte@unitru.edu.pe).

dónde u_i representa las componentes del campo de velocidades, k_i las componentes del modo de Fourier k e i representa la unidad imaginaria. El problema de resolver las escalas relevantes en un flujo turbulento usando la representación espectral es la determinación del truncamiento espectral a grandes números de onda. El número efectivo de grados de libertad en el flujo depende del número de Reynolds. La escala de Kolmogorov η depende del número de Reynolds como $\eta \sim Re^{-3/4}$, por lo que el número de ondas N necesarias para resolver escalas mayores que η crece con Re como $N \sim \eta^{-3} \sim Re^{9/4}$. Esto significa que incluso para números de Reynolds moderados ~ 1000 , el número efectivo de grados de libertad es del orden de 10^7 . Una simulación numérica de la ecuación de Navier Stokes para números de Reynolds altos es por lo tanto impracticable sin algún tipo de reducción del número de grados de libertad. Este cálculo con un conjunto reducido de ondas fue realizado por primera vez por [3] en el caso de la ecuación de vorticidad para la turbulencia 2D. Las figuras en este artículo fueron sacadas de ([1]) La idea es dividir el espacio espectral en esferas concéntricas, como se muestra en la Figura 1.1.

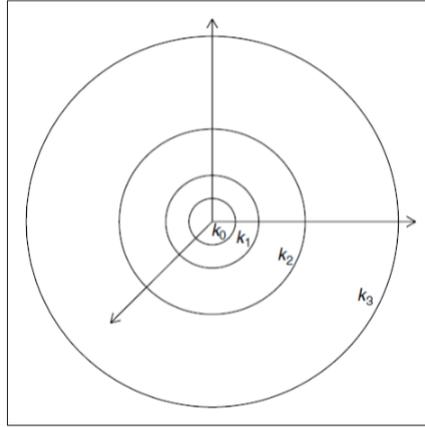


Figura 1.1: El espacio espectral se divide en capas esféricas, a cada una de ellas se le asigna un número de onda que es el radio de la esfera exterior.

Las esferas pueden tener radios que crecen exponencialmente $k_n = \lambda^n$, dónde $\lambda > 1$ es una constante. El conjunto de números de onda contenidos en la n -ésima esfera no contenida en la esfera $(n-1)$ -ésima se llama el n -ésimo shell. El n -ésimo shell contiene del orden de λ^{3n} números de onda. En los modelos shell, como los propuestos en [4], [5], [6], [7] y [8], sólo unos pocos números de onda se conservan en cada shell. Las velocidades espectrales correspondientes a estos números de onda representan entonces algún tipo de velocidad promedio sobre el shell.

Los coeficientes de los términos cuadráticos en la ecuación (1.1), se llaman coeficientes de interacción, se eligen de tal manera que la energía y la enstrofia sean conservadas por las interacciones no lineales. Los coeficientes de interacción acoplan exactamente tres números de ondas, el lado izquierdo de (1.1), queda en función de una amplitud de onda y en el lado derecho de dos. El procedimiento de reducir el número de ondas se ha seguido en muchos trabajos, y se llama modelos de número de onda reducido.

Un modelo shell a partir de una perspectiva diferente fue propuesto por primera vez por [9]. Este modelo no se deriva directamente como una aproximación de la ecuación espectral de Navier-Stokes, es estructuralmente similar, con una cascada de energía de acuerdo con la imagen de Kolmogorov. El modelo es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas, no lineales y cuadráticas en el conjunto de velocidades, u_n , asociadas con números de onda discretos, k_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Las velocidades correspondientes a los números de onda discretos podrían considerarse como representativas de las componentes de la velocidad espectral, $u_i(\mathbf{k})$, dentro de un shell de números de onda, $k_{n-1} < |\mathbf{k}| < k_n$. Las ecuaciones son dadas por:

$$\dot{u}_n = a_{n-1}u_{n-1}u_n - a_n u_{n+1}^2 - \nu_n u_n \delta_{n>N} + f \delta_{n,1}. \quad (1.2)$$

Los dos primeros términos del lado derecho representan la advección no lineal y el término de presión. El tercer término describe la disipación activa para grandes números de onda $n > N$, y el cuarto término es una fuerza (por unidad de masa) sólo activo en el primer componente de número de onda. Las ecuaciones son estructuralmente similares a las ecuaciones de Navier-Stokes espectral (1.1) en el sentido de que los términos de advección y presión son cuadráticos en las velocidades y el término de disipación es lineal y dominante para números de onda grandes. Para que el modelo muestre una cascada de energía de grandes a pequeñas escalas, la energía debe inyectarse a grandes escalas (pequeños números de onda), transferirse

a través de un rango inercial y disiparse a pequeñas escalas (grandes números de onda). Las cantidades que se conservan cuando $\nu_n = f = 0$ se denominarán invariantes inviscidos. Los dos primeros términos conservan la cantidad $\sum u_n^2/2$, que se denominará energía E . Esto se puede ver calculando \dot{E} usando la ecuación (1,2). Por lo tanto, para este modelo la energía es un invariante inviscido. Sin embargo, el modelo no cumple el teorema de Liouville para sistemas Hamiltonianos ver [1], en el límite inviscido.

Un conjunto de ecuaciones cumple trivialmente el teorema de Liouville si u_n no ocurre en los términos no lineales de la ecuación para \dot{u}_n . Esto llevó a [4] a proponer el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\dot{u}_n = A_n u_{n+1} u_{n+2} + B_n u_{n-1} u_{n+1} + C_n u_{n-2} u_{n-1} - \nu_n u_n \delta_{n > N_d} + f_n, \tag{1.3}$$

que cumple el teorema de Liouville. Como condiciones de frontera “inferiores” tenemos $u_{-1} = u_0 = 0$, y podemos o no especificar condiciones de fronteras “superiores” semejantemente como $u_{N+1} = u_{N+2} = 0$.

Con esta elección de términos de interacción no lineal, los coeficientes de interacción A_n, B_n, C_n pueden ser elegidos de tal manera que la energía, $E = \sum_n u_n^2/2$, y enstrofia, $Z = \sum_n k_n^2 u_n^2/2$, son invariantes no viscosos correspondientes a la turbulencia 2D. El modelo Shell propuesto por Gledzer fue investigado numéricamente por [5], unos 15 años después de que fuera propuesto por [4]. Sus simulaciones mostraron que el modelo exhibe una cascada de enstrofia y dinámica caótica. El interés en los modelos shell creció rápidamente después de eso y muchos artículos que investigan modelos shell han sido publicados desde entonces. Como no existe un vínculo directo entre las ecuaciones de Navier-Stokes y los modelos shell, se han propuesto varios modelos shell [8]. El modelo más estudiado es el propuesto por Gledzer e investigado por Yamada y Okhitani. Ahora se encuentra en una versión compleja conocida como el modelo Gledzer-Okhitani-Yamada(GOY).

La parte no lineal de la ecuación de Navier-Stokes espectral (1,1) no solo conservará la energía y la helicidad (en el caso 3D) globalmente, sino en cada triada que involucre números de onda $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$, donde $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0$.

El modelo usado e implementado en el presente trabajo fué el modelo shell Sabra, que está definido como antes por un conjunto de números de onda unidimensionales exponencialmente espaciados $k_n = k_0 \lambda^n$, para los cuales tenemos u_n como la velocidad shell compleja para el shell $n \geq 1$ ([2]; [10]). La forma de la ecuación de gobierno para este modelo está motivada por la demanda de que los momentos involucrados en las interacciones de la triada deben sumar cero, como en la ecuaciones de Navier-Stokes. Esto, junto con la construcción habitual de las interacciones locales en el espacio k , la conservación inviscida de la energía y el cumplimiento del teorema de Liouville, da la ecuación del movimiento para las velocidades shell.

$$\dot{u}_n = \nu [k_n u_{n+1}^* u_{n+2} - \epsilon k_{n-1} u_{n-1}^* u_{n+1} + (1 - \epsilon) k_{n-2} u_{n-2} u_{n-1}] - \nu k_n^2 u_n + f_n, \tag{1.4}$$

donde ν es la viscosidad y f_n es la fuerza externa. La fuerza, como en el modelo GOY, típicamente se tomaría como activa solo para algunos números de onda pequeña, por ejemplo, $f_n = f \delta_{n,4}$. Las condiciones de frontera se pueden especificar de la manera habitual mediante la asignación $u_{-1} = u_0 (= u_{N+1} = u_{N+2}) = 0$.

El requisito de cerrar las tríadas se cumple si los números de onda k_n se definen como una secuencia de Fibonacci, $k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$. La elección de una secuencia de Fibonacci para los momentos conduce a un modelo con el espaciamiento shell siendo únicamente la proporción de oro $g = (\sqrt{5} + 1)/2$, ya que para cualquier elección de $k_1, k_2 (k_1 \leq k_2)$ tenemos $k_n/k_{n-1} \rightarrow g$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, esto corresponde a las definiciones usuales de los números de onda de shell con la proporción de oro como el espaciado shell para $(k_1, k_2) = (1, g)$. La proporción de oro g y $-1/g$ son las raíces de la ecuación $\lambda^2 = \lambda + 1$, por lo que desempeña un papel clave en las simetrías de los modelos shell.

Con esta formulación, el espaciado shell no es un parámetro libre del modelo. Sin embargo, usando la definición dada en [2], $k_n = g^n$, siendo un *cuasimomento*, mantendremos el espaciamiento shell λ como parámetro libre, $k_n = \lambda^n$. La ecuación de movimiento se puede escribir de la misma forma que la ecuación (1,13) para el modelo GOY:

$$\dot{u}_n = \nu k_n \left(u_{n+1}^* u_{n+2} - \frac{\epsilon}{\lambda} u_{n-1}^* u_{n+1} - \frac{\epsilon - 1}{\lambda^2} u_{n-2} u_{n-1} \right) - \nu k_n^2 u_n + f_n. \tag{1.5}$$

En ese trabajo mostraremos que la cascada de energía ocurre en determinadas escalas, implementando el modelo Sabra [?], y que ella obedece la ley de Kolmogorov.

1.1. Invarianza de escala del modelo shell. Hasta este punto, no hay asociaciones directas entre las velocidades shell, u_n , y los números de onda, k_n . Comparando la ecuación (1,3) y la ecuación espectral de Navier-Stokes (1,1) podemos ver que los coeficientes de interacción deben tener la dimensión del número de onda, de modo que podemos redefinir los coeficientes de interacción $A_n = k_n a_n, B_n = k_n b_n, C_n = k_n c_n$, donde a_n, b_n y c_n son coeficientes de interacción adimensionales. De la simetría de escala de las ENS

y la ENS espectral (1,1) encontramos que la ecuación de Navier-Stokes espectral es invariante bajo la transformación de escalamiento $(t, k, u(k), \nu) \rightarrow (\lambda^{1-h}t, \lambda^{-1}k, \lambda^{h+D}u(\lambda^{-1}k), \lambda^{1+h}\nu)$ para cualquier h . En efecto, denotando $\bar{t} = \lambda^{1-h}t$, $\bar{k} = \lambda^{-1}k$, $\bar{u}(\bar{k}) = \lambda^{h+D}u(\lambda^{-1}k)$ y $\bar{\nu} = \lambda^{1+h}\nu$. Escalando cada término de la ecuación (1,1) obtenemos

$$\begin{aligned} & \bullet \partial_t u_i(\mathbf{k}) = \partial_t \lambda^{-h-D} \bar{u}_i(\bar{\mathbf{k}}) = \lambda^{-h-D} \partial_{\bar{t}} \bar{u}_i(\bar{\mathbf{k}}) \lambda^{1-h} = \lambda^{1-2h-D} \partial_{\bar{t}} \bar{u}_i(\bar{\mathbf{k}}), \\ & \bullet k_j \int (\delta_{ij\ell} - \frac{k_i k'_\ell}{k^2}) u_j(\mathbf{k}') u_\ell(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}' \\ & \quad = \lambda \bar{k}_j \int (\delta_{ij\ell} - \lambda^2 \frac{\bar{k}_i \bar{k}'_\ell}{\lambda^2 \bar{k}^2}) \lambda^{-2h-2D} \bar{u}_j(\bar{\mathbf{k}}') \bar{u}_\ell(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{k}}') \lambda^{-D} d\bar{\mathbf{k}}' \\ & \quad = \lambda^{1-2h-D} \bar{k}_j \int (\delta_{ij\ell} - \frac{\bar{k}_i \bar{k}'_\ell}{\bar{k}^2}) \bar{u}_j(\bar{\mathbf{k}}') \bar{u}_\ell(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{k}}') d\bar{\mathbf{k}}', \\ & \bullet \nu k^2 u_i(\mathbf{k}) = \lambda^{-1-h} \bar{\nu} \lambda^2 \bar{k}^2 \lambda^{-h-D} \bar{u}_i(\bar{\mathbf{k}}) = \lambda^{1-2h-D} \bar{\nu} \bar{k}^2 \bar{u}_i(\bar{\mathbf{k}}), \end{aligned}$$

luego de reemplazar estos resultados en la ecuación (1,1), simplificar el factor λ^{1-2h-D} y renombrar a $\bar{\mathbf{k}}$ por \mathbf{k} , obtenemos el resultado. ■

El escalamiento de las velocidades espectrales con la dimensión D surge de la NSE espectral siendo una ecuación integral donde el elemento de volumen se escala como $d\mathbf{k} \rightarrow \lambda^{-D} d\mathbf{k}$. El modelo shell debe poseer el mismo tipo de invarianza de escala. Con $k_m = \lambda^{-1} k_n$ podemos aplicar la transformación $(t, k_n, u_n) \rightarrow (\lambda^{1-h}t, k_m, \lambda^h u_m)$ a (1,5) y obtener, en el caso $(\nu = f = 0)$,

$$\dot{u}_m = k_m a_n u_{m+1} u_{m+2} + k_m b_n u_{m-1} u_{m+1} + k_m c_n u_{m-2} u_{m-1}. \quad (1.6)$$

Para que esto sea idéntico con la parte no viscosa de (1,1) los coeficientes de interacción deben ser independientes del número de onda n : $a_n = \tilde{a}$, $b_n = \tilde{b}$, y $c_n = \tilde{c}$. Esto no debería sorprender, ya que los coeficientes son adimensionales y se impone la invarianza de escala. Así podemos reescribir el sistema de ecuaciones, como:

$$\dot{u}_n = k_n (\tilde{a} u_{n+1} u_{n+2} + \tilde{b} u_{n-1} u_{n+1} + \tilde{c} u_{n-2} u_{n-1}) - \nu k_n^2 u_n + f_n, \quad (1.7)$$

donde hemos introducido la disipación dimensionalmente correcta.

1.2. El espaciado shell y conservación de la energía. El modelo shell se construye de tal manera que la energía $E = \sum_n u_n^2/2$ es un invariante inviscido. Esto se puede observar teniendo en cuenta que el invariante debe ser independiente del tiempo. Usando la ecuación (1,7) con $\nu = f = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{d}{dt} \sum_n u_n^2/2 = \sum_n u_n \dot{u}_n \\ &= \sum_n k_n (\tilde{a} u_n u_{n+1} u_{n+2} + \tilde{b} u_{n-1} u_n u_{n+1} + \tilde{c} u_{n-2} u_{n-1} u_n) \\ &= \sum_n (k_n \tilde{a} + k_{n+1} \tilde{b} + k_{n+2} \tilde{c}) u_n u_{n+1} u_{n+2} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

En los últimos dos términos hemos cambiado sólo la etiqueta de suma y hemos usado las condiciones de contorno. Como podemos tener cualquier conjunto de velocidades iniciales, debemos tener

$$k_n \tilde{a} + k_{n+1} \tilde{b} + k_{n+2} \tilde{c} = 0, \quad (1.9)$$

para que E sea un invariante inviscido. Para definir completamente el modelo, solo quedan por definir los números de onda. En el espíritu del deseo de derivar relaciones de escala, la opción más natural es definir los números de onda, como:

$$k_n = k_0 \lambda^n, \quad (1.10)$$

donde λ , llamado espaciado shell, es un número real mayor que 1. Esto significa que el espacio espectral cubierto por los shell crece exponencialmente con el número de shell n . De esta forma, es posible simular un costo de “flujo” de número de Reynolds muy alto de manera eficiente. Insertar esta forma de los números de onda en (1,9) da

$$k_n (\tilde{a} + \tilde{b} \lambda + \tilde{c} \lambda^2) = 0. \quad (1.11)$$

Con la definición adicional $a = \tilde{a}$, $b = \tilde{b} \lambda$, y $c = \tilde{c} \lambda^2$ tenemos

$$a + b + c = 0. \quad (1.12)$$

El modelo shell GOY se definió originalmente así. Sin embargo, definiremos las velocidades como números complejos. La razón de esto es que, desde un punto de vista computacional, es deseable que

en el caso inviscido la velocidad recorra rápidamente la superficie de energía, en el espacio de fase. Este comportamiento deseado del modelo parece lograrse cuando el número efectivo de grados de libertad es dos por shell en lugar de uno. Para que la velocidad en un shell dado cambie de signo, tiene que desaparecer en el caso de las velocidades reales, mientras que si la velocidad es compleja puede mantener un módulo constante y cambiar el signo de la parte real.

Una restricción en la forma espectral de las velocidades en un campo de flujo real es $u_i^*(\mathbf{k}) = u_i(-\mathbf{k})$. El operador gradiente ∂_i en los términos de gradiente de advección y presión se transforma en un operador de multiplicación ιk_i , en la representación espectral, por lo que es natural poner la unidad imaginaria “ ι ” como un factor delante del término no lineal en la ecuación (1,7). Además, para velocidades complejas, la energía se define como $E = \sum_n u_n u_n^*/2$, por lo tanto, debemos tener conjugaciones complejas en el sistema de ecuaciones para conservar energía de acuerdo con la ecuación (1,8). Con un simple cambio de unidades podemos eliminar una de las tres constantes, digamos a , dividiendo la ecuación por a y absorbiéndola en la unidad de tiempo (y en las constantes de los términos lineales ν y f). Es una tradición en la literatura en este caso definir $b = -\epsilon$. Usando (1,12) tenemos $c = \epsilon - 1$ y la ecuación gobernante se puede escribir en forma alternativa

$$\dot{u}_n = \iota k_n (u_{n+1} u_{n+2} - \frac{\epsilon}{\lambda} u_{n-1} u_{n+1} + \frac{\epsilon-1}{\lambda^2} u_{n-2} u_{n-1})^* - \nu k_n^2 u_n + f_n. \quad (1.13)$$

En esta forma, es transparente que el modelo esté definido por dos parámetros libres ϵ y λ junto con las cantidades dimensionales k_0, ν, f_n y las condiciones iniciales $u_n(0)$.

1.3. Espaciado para los parámetros. Podemos caracterizar completamente los invariantes inviscidos del modelo como una función de los parámetros b, c, λ , donde tenemos $a = 1$ por reescalamiento en el tiempo. El modelo tiene dos integrales conservadas (o más bien sumas), en el caso ($\nu = f = 0$). Denotamos las dos integrales conservadas por

$$E^{(i)} = \sum_{n=1}^N E_n^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N k_n^{\alpha_i} |u_n|^2 = \frac{1}{2} k_0^{\alpha_i} \sum_{n=1}^N \lambda^{n\alpha_i} |u_n|^2, \quad (1.14)$$

donde $i = 1$ o 2 . Según la definición (1,13), uno de los invariantes es la energía, $E = E^{(1)}$ lo que implica que $\alpha_1 = 0$. Sin embargo, por un momento relajaremos la restricción $1 + b + c = 0$ dada por la conservación de energía. Configurando $\dot{E}^{(i)} = 0$, usando \dot{u}_n de (1,13) exactamente por el mismo procedimiento que en (1,8), obtenemos

$$1 + bz + cz^2 = 0, \quad (1.15)$$

donde las raíces $z_1 = \lambda^{\alpha_1}$, $z_2 = \lambda^{\alpha_2}$ se llaman los generadores de las integrales conservadas. En el caso de las raíces negativas z podemos usar la formulación compleja, $\alpha = (\log |z| + \iota\pi)/\log \lambda$. Los parámetros (b, c) se determinan a partir de (1,15) como

$$b = -\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}, \quad c = \frac{1}{z_1 z_2}. \quad (1.16)$$

En el plano de parámetros (b, c) dentro del espacio de parámetros (b, c, λ) , la curva $c = b^2/4$ representa modelos con solo una integral conservada, como se muestra en la Figura 1,2. Por encima de la parábola, los generadores son complejos conjugados, y por debajo son reales y diferentes. Cualquier integral conservada representada por un generador real distinto de cero z , define una línea en el plano de parámetros (b, c) , que es tangente a la parábola en el punto $(b, c) = (-2/z, 1/z^2)$.

Ahora devolvemos el foco a la línea definida por $1 + b + c = 0$, correspondiente a $z_1 = 1$, para lo cual obtenemos

$$E^{(i)} = E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N |u_n|^2. \quad (1.17)$$

Desde aquí cambiamos la notación a $b = -\epsilon$ y $c = (\epsilon - 1)$, de acuerdo con (1,13). Para ahorros adicionales en los índices, escribimos $z_2 = z$ y $\alpha_2 = \alpha$. El espacio de parámetros es ahora el plano definido por el par (ϵ, λ) .

El plano de fase (ϵ, δ) se puede reducir utilizando una invariancia de escala discreta del modelo. Insertando las transformaciones.

$$\begin{aligned} u'_n &= \lambda^{n\beta} u_n, \\ t' &= \lambda^{-3\beta} t, \\ \lambda' &= \lambda^{1-\beta}, \\ \epsilon' &= \epsilon \lambda^{2\beta}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

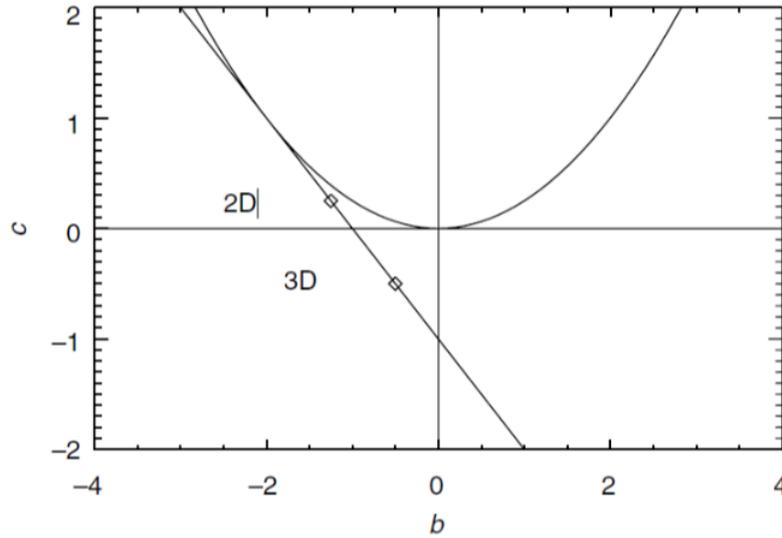


Figura 1.2: El espacio de parámetros (b, c) . La línea es el conjunto de (b, c) donde la integral conservada es la energía.

en la ecuación gobernante (1,13) la ecuación se deja sin cambios siempre que

$$\epsilon' - 1 = (\epsilon' - 1)\lambda^{4\beta}. \tag{1.19}$$

Usando (1,18) obtenemos las dos soluciones.

$$\lambda^{2\beta} = \begin{cases} 1, \\ 1/(\epsilon - 1) \end{cases}, \tag{1.20}$$

dónde la primera solución es la identidad trivial. La segunda solución transforma la energía en la segunda invariante y viceversa, es decir,

$$(E^{(1)}, E^{(2)})' = (E^{(2)}, E^{(1)}).$$

Al insertar la segunda solución en (1,18) se obtiene la relación $\epsilon' = \epsilon/(\epsilon - 1)$, y como podemos ver en la Figura 1,3, la región $\epsilon < 0$ se asigna a la región $0 < \epsilon < 1$ mientras que la región $\epsilon > 2$ se asigna a la región $1 < \epsilon < 2$. En el primer caso, el espaciado shell se convierte en $\lambda' = -\iota\lambda\sqrt{1 - \epsilon}$ y en el segundo caso $\lambda' = \sqrt{\epsilon - 1}$. Restringimos nuestro interés a la región $0 < \epsilon < 2$ en el espacio de fase.

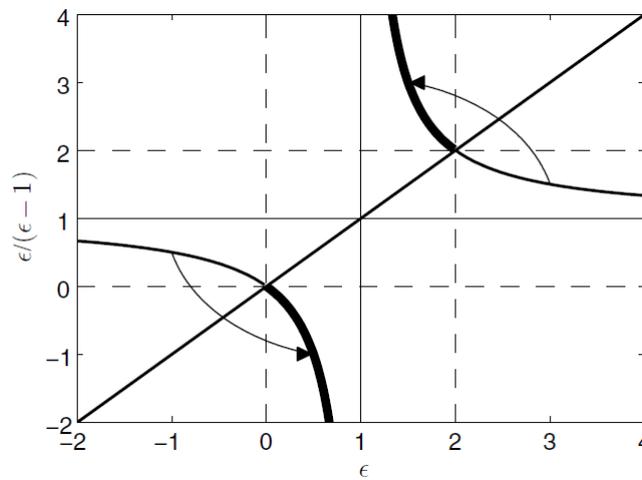


Figura 1.3: Las regiones $\epsilon < 0$ y $\epsilon > 2$ se asignan a la región $0 < \epsilon < 2$ por transformación (1,18).

1.4. Interacciones de la tríada y flujos no lineales.. Los modelos shell están contruidos para tener un balance de energía detallado dentro de tríadas de ondas interactivas similares a la ecuación espectral de Navier-Stokes. Para estudiar esto definimos los llamados correlatores

$$\Delta_n = k_{n-1} \Im(u_{n-1} u_n u_{n+1}), \quad (1.21)$$

Tomando la derivada de la energía $E = \sum_n u_n u_n^*/2$ con respecto al tiempo usando (1.13), y considerando solo aquellos términos que involucran los números de shell $n-1, n, n+1$, obtenemos,

$$\begin{aligned} \dot{E}_{n-1} &= \Delta_n, \\ \dot{E}_n &= -\epsilon \Delta_n, \\ \dot{E}_{n+1} &= (\epsilon - 1) \Delta_n. \end{aligned} \quad (1.22)$$

De estas ecuaciones se deduce que tenemos $\dot{E}_{n-1} + \dot{E}_n + \dot{E}_{n+1} = 0$. De la misma manera, todos los demás términos suman cero en grupo de tres que incluyen tres shell consecutivos.

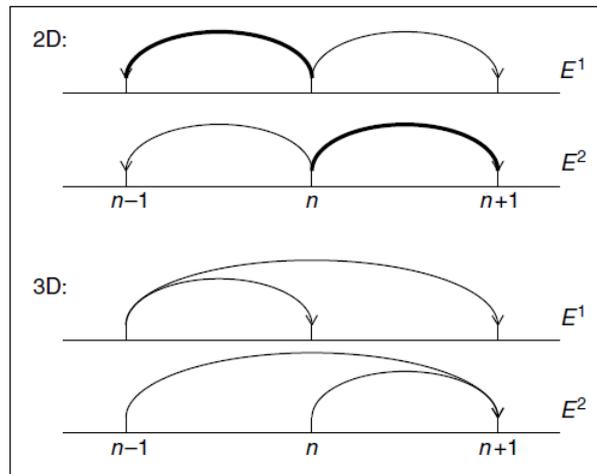


Figura 1.4: Las interacciones de la tríada de shell. Las flechas indican la transferencia de energía, E y la estrofia, Z , para el caso 2D, $\epsilon = 5/4$; y energía, E y helicidad, H , para el caso 3D, $\epsilon = 1/2$.

La Figura 1.4 muestra los dos casos $\epsilon < 1$ para modelos 3D y $\epsilon > 1$ para modelos 2D. La transferencia real de energía depende del signo de Δ_n ; si $\Delta_n < 0$ las flechas en la figura se giran en sentido opuesto. Si la transferencia es como se indica en el promedio, habrá una transferencia de energía de escalas grandes a pequeñas (números de onda pequeña a números de onda grande) en el caso 3D. En el caso 2D, esperamos que haya una transferencia de energía de escalas pequeñas a grandes.

2. Métodos y Técnicas.

2.1. El modelo shell Sabra: Cascada de energía. La parte no lineal de la ecuación de Navier-Stokes espectral (1.1) no solo conservará la energía y la helicidad (en el caso 3D) globalmente, sino que en cada tríada que involucre números de onda $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$, donde $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0$. Este es el balance detallado.

El modelo shell Sabra está definido como antes por un conjunto de números de onda unidimensionales exponencialmente espaciados $k_n = k_0 \lambda^n$, para los cuales tenemos u_n como la velocidad shell compleja para el shell $n \geq 1$ ([2]; [10]). La forma de la ecuación de gobierno para este modelo está motivada por la demanda de que los momentos involucrados en las interacciones de la tríada deben sumar cero, como en la ENS. Esto, junto con la construcción habitual de las interacciones locales en el espacio k , la conservación no viscosa de la energía y el cumplimiento del teorema de Liouville, da la ecuación del movimiento para las velocidades shell.

$$\dot{u}_n = \nu [k_n u_{n+1}^* u_{n+2} - \epsilon k_{n-1} u_{n-1}^* u_{n+1} + (1 - \epsilon) k_{n-2} u_{n-2} u_{n-1}] - \nu k_n^2 u_n + f_n, \quad (2.1)$$

donde ν es la viscosidad y f_n es la fuerza externa. La fuerza, como en el modelo GOY, típicamente se tomaría como activa solo para algunos números de onda pequeña, por ejemplo, $f_n = f \delta_{n,4}$. Las condiciones de frontera se pueden especificar de la manera habitual mediante la asignación $u_{-1} = u_0 (= u_{N+1} = u_{N+2}) = 0$.

Si interpretamos el momento, k_n , como representante del módulo del vector de onda, \mathbf{k}_n , en 2D o 3D, la desigualdad del triángulo implica $k_n + k_{n+1} \geq k_{n+2}$, por lo que la secuencia de Fibonacci corresponde en este sentido a los módulos de tres vectores de onda paralelos. Tenga en cuenta que para un espaciado shell $\lambda > g$ (como la opción habitual, $\lambda = 2$) se viola la desigualdad triangular. Esto significa que no podemos interpretar las interacciones usuales del modelo shell como interacciones representativas entre ondas dentro de tres shell consecutivos, ya que dichos tríos de números de onda no constituyen triángulos. En este caso, debemos referirnos a los cuasi-momentos.

Para dar sentido a la noción de cerrar las tríadas, podemos definir momentos negativos, $k_{-n} \equiv -k_n$, y asignar la velocidad, $u_{-n} = u_n^*$, a estos momentos. (El modelo todavía tiene solo $2N$ grados de libertad, representados por las N velocidades complejas). Se puede ver que (2,1) también se cumple para los momentos negativos, lo que requiere que el prefactor sea “ ι ”. Con esta notación, podemos reescribir (2,1) como

$$(d/dt + \nu k_n^2)u_n = \iota k_n \sum_{k_\ell < k_m} I(\ell, m; n) u_\ell u_m + f_n, \quad (2.2)$$

donde la suma es sobre momentos positivos y negativos, y todos los coeficientes de interacción adimensionales tienen la forma

$$I(\ell, m; n) = \delta_{n+1, \ell} \delta_{n+2, m} - \frac{\epsilon}{\lambda} \delta_{n-1, \ell} \delta_{n+1, m} + \frac{1-\epsilon}{\lambda} \delta_{n-2, \ell} \delta_{n-1, m}.$$

A partir de esta formulación, se hace evidente por qué las conjugaciones complejas en el modelo de Sabra son exactamente como en (2,1). El primer término en el lado derecho de (2,2) corresponde a la tríada donde $k_n = -k_{n+1} + k_{n+2}$, y por lo tanto u_{n+1}^* correspondiente al número de onda $-k_{n+1}$ está en (2,1). El segundo término corresponde a la tríada donde $k_n = -k_{n-1} + k_{n+1}$ y por lo tanto u_{n-1}^* aparece, mientras que el último término corresponde a la tríada $k_n = k_{n-2} + k_{n-1}$, donde todos los números de onda que aparecen son positivos. Por lo tanto, este acoplamiento de tres números de onda es similar al caso de las NSE espectral discreto.

2.2. Simulación numérica. Para la simulación numérica fueron usados como condiciones de frontera “inferiores” $u_{-1} = u_0 = 0$, y condiciones de fronteras “superiores” $u_{N+1} = u_{N+2} = 0$. Los resultados de números de onda vs energía son ploteados en la figura(2.1). A continuación, una parte del código.

```

program sabra
  Declaración de variables
  !Inicializando RK4 para las velocidades futuras
do j=1,n
  do i=1,m
    call du(j, n, m, x, F)
      K1(k)=h*F(k)
      K2(k)=h*F(k)
      K3(k)=h*F(k)
      K4(k)=h*F(k)
    end do

    w(j+1, i)=x(j, i)+(1./6.)*(K1(i)+2*K2(i)+2*K3(i)+K4(i))
    x(j+1, i)=w(j+1, i)
  end do

  subroutine du(j, n, m, x, F)
  integer, intent(in)::j, n, m
  real, intent(in)::x(n+1, m)
  real, intent(out)::F(m)
  F(1)=-4.*x(j, 1)+3.*x(j, 2)+6.
  F(2)=-2.4*x(j, 1)+1.6*x(j, 2)+3.6
end subroutine

```

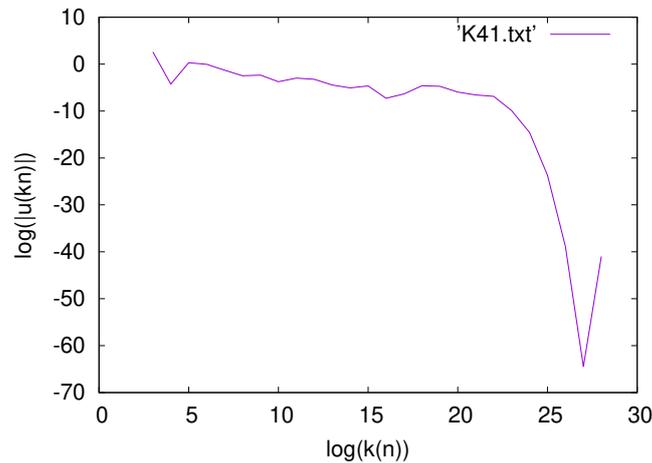


Figura 2.1: Número de shell vs Energía en una escala logarítmica.

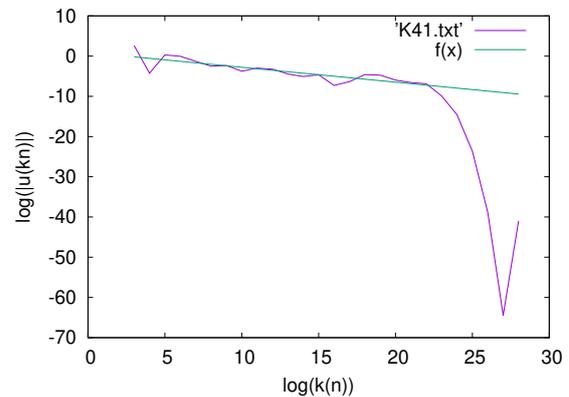
Observamos en la figura(2.1) que la energía se transfiere con un coeficiente angular lineal en determinados shells, escalas en el espacio físico, tal y como es prescrito en la teoría de Kolmogorov. Haciendo un fit o regresión lineal en dichas escalas, obtenemos un coeficiente angular de $-1,36$. Resaltando que la teoría K41 ([11]) predice un coeficiente angular de $-1,66$ Dicho fit es obtenido en la figura 2.2

```
gnuplot> fit f(x) 'fit u.txt' via m,b
iter  chisq  delta/lim  lambda  m  b
0  7.2014934012e+03  0.00e+00  9.76e+00  1.000000e+00  1.000000e+00
1  4.0912874731e+01  -1.75e+07  9.76e-01  -3.355907e-01  9.123419e-01
2  3.6642308666e+01  -1.17e+04  9.76e-02  -3.697382e-01  9.212881e-01
3  3.6642275965e+01  -8.92e-02  9.76e-03  -3.699467e-01  9.243194e-01
iter  chisq  delta/lim  lambda  m  b
After 3 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 36.6423
rel. change during last iteration : -8.92451e-07

degrees of freedom (FIT NDF) : 18
rms of residuals (FIT STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 1.42677
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 2.03568

Final set of parameters      Asymptotic Standard Error
=====
m      = -0.369947      +/- 0.05533      (14.96%)
b      = 0.924319      +/- 0.7616      (82.4%)
```

(a) Fit



(b) Cascada

Figura 2.2: Fit o regresión lineal dónde ocurre la transferencia de energía, obteniendo un coeficiente angular de $-1,36$.

3. Conclusiones.

- La cascada de energía se produce en determinadas escalas, rango inercial, el cual es visible en nuestra simulación.
- El coeficiente angular obtenido fue $-1,36$ el cual es aproximado a coeficiente angular prescrito por la teoría K41 de Kolmogorov, $-1,6$.
- En fluidos turbulentos la presencia de una cascada de energía fué corroborada.

ORCID and License

Alexis Rodríguez Carranza <https://orcid.org/0000-0002-0290-165X>

Elder J. Varas Pérez <https://orcid.org/0000-0002-1769-9765>

Juan C. Ponte Bejarano <https://orcid.org/0000-0002-8682-9682>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Ditlevsen PD. *Turbulence and Shell Models*, Cambridge University Press 2011.
- [2] L'vov VS, Podivilov E, Pomyalov A, Procaccia I, Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence. *Physical Review E*. 1998; 58(2):1811–22.
- [3] Lorenz EN. Low order models representing realizations of turbulence. *J. Fluid Mech.* 1972; 55:545–63.
- [4] Gledzer EB. System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1973; 209(5):1046–1048.
- [5] Yamada M, Ohkitani K. Lyapunov Spectrum of a Chaotic Model of Three-Dimensional Turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1987; 56:4210-4213.
- [6] Jensen MH, Paladin G, Vulpiani A. Intermittency in a cascade model for three-dimensional turbulence *Phys. Rev. A*. 1991; 43:798.
- [7] Pissarenko D, Biferale L, Courvoisier D, Frisch U, Vergassola M. Further results on multifractality in shell models. *Phys. Fluids A. Fluid Dynamics*; 1993; 5:2533.
- [8] Benzi R, Biferale L, Parisi G. On intermittency in a cascade model for turbulence. *Physica D*. 1993; 65:163-171.
- [9] Obukhov AM. On some general characteristics of the equations of the dynamics of the atmosphere. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmos. Okeana*. 1971; 7:695–704.
- [10] Ditlevsen PD. Symmetries, invariants, and cascades in a shell model of turbulence. *Phys. Rev. E*. 2000; 62:484-9.
- [11] Kolmogoroff AN. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1941; 30:301–305.
- [12] Batchelor GK. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press. 1967.