Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(1): 210-226.

REVIEW

On the $R-$automorphisms of formal power series on several indeterminates and with coefficients over the ring R

Sobre los $R-$automorfismos de series de potencias formales en varias indeterminadas y con coeficientes en el anillo R

Soledad Ramírez C.* and Anderson Cárdenas F.†

Received, May. 17, 2022 *Accepted, Jun. 30, 2022*

How to cite this article:
Ramirez S, Cárdenas A. *Sobre los $R-$automorfismos de series de potencias formales en varias indeterminadas y con coeficientes en el anillo R.* Selecciones Matemáticas. 2022;9(1):210–226. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.18

Abstract
In this paper, we show a way to characterize the $R-$automorphisms of formal power series on several indeterminates and with coefficients over a commutative ring with identity, R. We show this characterization, as an extension of existing result for the $R-$automorphisms of the formal power series in an indeterminate, given by O'Malley, M. and Wood, C. in [12].
Keywords . Automorphism, endomorphism, I-adic topology, topological ring, formal power series.

Resumen
En este artículo, mostramos una forma de caracterizar los $R-$automorfismos de series de potencias formales en varias indeterminadas y con coeficientes en un anillo conmutativo con identidad, R. Mostramos dicha caracterización, como una extensión de un resultado existente para los $R-$automorfismos de las series de potencias formales en una indeterminada, dado por O'Malley, M. y Wood, C. en [12].
Palabras clave. Automorfismo, endomorfismo, topología I-ádica, anillo topológico, serie de potencias formal.

1. Introducción.

El objetivo de este trabajo, es presentar las condiciones necesarias y suficientes para caracterizar los $R-$automorfismos de series de potencias formales con coeficientes en el anillo conmutativo con identidad R y en n indeterminadas, $R^{(\!(n)\!)}$. Cuando K es un cuerpo, se da un tratamiento diferente a las series de potencias formales con coeficientes en el cuerpo K. Así, los $K-$automorfismos de estas series de potencias formales están caracterizados usando el concepto de determinante jacobiano (el lector puede revisar el Teorema 6.3.12 de [2]). Este resultado es usado fuertemente en muchos artículos debido a su utilidad.

Nuestro interés estuvo dirigido a estudiar las series de potencias formales con coeficientes en un *anillo*, para esto dedicamos tres secciones en este artículo, la sección 2, correspondiente a los Preliminares tiene definiciones y conceptos de carácter topológico necesarios para nuestro estudio.

La sección 3, contiene propiedades de los $R-$endomorfismos de $R^{(\!(n)\!)}$, el Teorema 3.4 caracteriza los $R-$endomorfismos de $R^{(\!(n)\!)}$ inyectivos y el Teorema 3.5, establece las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de los $R-$automorfismos de $R^{(\!(n)\!)}$.

Nuestra motivación partió de la Tesis de Maestría de Mejía, C.E. [8], así, nos interesamos inicialmente en caracterizar los R–automorfismos de $R^{(\!(1)\!)}$, esto nos condujo a revisar información sobre los

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. German Amézaga s/n, Lima, Perú. (*sramirezc@unmsm.edu.pe*).
†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. German Amézaga s/n, Lima, Perú. (*12140150@unmsm.edu.pe*).

$R-$ endomorfismos de $R^{((1))}$, (ver [12]) y los $R-$automorfismos de $R^{((1))}$, (ver [10]).

En las secciones 1 y 2 de [7], se encuentran los teoremas principales que mostramos con detalle en la sección 3, a excepción del Corolario 3.1 y Corolario 3.2, que los obtuvimos como resultado de la manera de abordar el estudio de los $R-$automorfismos de $R^{((n))}$.

Finalmente, brindamos algunas conclusiones de nuestro trabajo.

2. Preliminares.

Sea el espacio topológico (X, τ), llamaremos *entorno* $V \subset X$ de $x \in X$ a cualquier conjunto abierto $V \in \tau$) que contiene a x. De esta manera, definimos el conjunto de entornos de $x \in X$,

$$\mathcal{N}_{(x)} = \{\ V \subset X\ ,\ V \text{ es entorno de } x\ \}.$$

Definición 2.1 (Grupo topológico). *Sea $G = (G, +)$ un grupo abeliano con alguna topología. Diremos que G es un grupo topológico (con respecto a su topología dada) si*

$$\begin{array}{rccc} g: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} h: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & -x, \end{array}$$

son aplicaciones continuas (donde a $G \times G$ se le asigna la topología producto).

Definición 2.2 (Anillo topológico). *Sea $R = (R, +, .)$ un anillo con alguna topología. Diremos que R es un anillo topológico si*

$$\begin{array}{rccc} g: & R\times R & \longrightarrow & R \\ & (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} h: & R\times R & \longrightarrow & R \\ & (x,y) & \longmapsto & xy, \end{array}$$

son aplicaciones continuas.

Proposición 2.1. *Sea G un grupo topológico, $a \in G$, entonces la aplicación traslación*

$$\begin{array}{rccc} T_a: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & a+x, \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Demostración:

$i)$ La función traslación T_{-a} es la función inversa de T_a.

En efecto, sea $x \in G$ entonces $(T_a \, o \, T_{-a})(x) = T_a(-a+x) = a - a + x = x$, análogamente se prueba que $(T_{-a} \, o \, T_a)(x) = x$.
Así, concluimos que T_a es biyectiva.

$ii)$ Como G es un grupo topológico, entonces las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} g: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} I_a: & G & \longrightarrow & G\times G \\ & x & \longmapsto & I_a(x) = (a,x), \end{array}$$

son continuas. Luego, $T_a = g \, o \, I_a$ es continua.
De manera análoga, la función inversa $T_{-a} = g \, o \, I_{-a}$, es continua.
Por lo tanto, T_a es un homeomorfismo. □

Observación 2.1. *Sea (G, τ) un grupo topológico. Entonces:*

(i) $(T_a)^{-1} = T_{-a}$.

(ii) *Sea V un subconjunto de G, entonces $T_a(V) = a + V = V + a$.*

(iii) *Como T_a es homeomorfismo, si $B \in \tau$, entonces $T_a(B) = B + a \in \tau$.*

Proposición 2.2. *Sea (G, τ) un grupo topológico, $x \in G$.*
$V \in \mathcal{N}_{(x)}$ si y solo si $V = U + x$, donde $U \in \mathcal{N}_{(0)}$.

Demostración: Si $V \in \mathcal{N}_{(x)}$, entonces $V \in \tau$.

Luego $x \in V$, $0 = T_{-x}(x) \in T_{-x}(V) \in \tau$.

Como $T_{-x}(V) = V - x$ entonces $0 \in (V - x) \in \tau$.

Es decir, $U = (V - x) \in \mathcal{N}_{(0)}$, así $V = U + x$, donde $U \in \mathcal{N}_{(0)}$.

Recíprocamente, sea $V = U + x$, donde $U \in \mathcal{N}_{(0)}$ entonces $0 \in (V - x) \in \tau$.

$x = T_x(0) \in T_x(V - x) \in \tau$, es decir, $x \in (V - x) + x = V \in \tau$.

Por lo tanto $V \in \mathcal{N}_{(x)}$. □

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{R}$ un un anillo conmutativo con identidad, M un ideal de $\mathcal{R}$. El conjunto $B = \{M^n + a;\ a \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}_0\}$ forma una base de alguna topología en $\mathcal{R}$.*

Demostración: Veamos que B forma una base de alguna topología.

$i)$ Sea $x \in \mathcal{R}$, entonces $M^{n_0} + x \in B$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, como $0 \in M^{n_0}$, $x \in M^{n_0} + x$.

Luego, existe $V = M^{n_0} + x \in B$ tal que $x \in V$, es decir $x \in \bigcup_{V \in B} V$.

Por lo tanto, $\mathcal{R} = \bigcup_{V \in B} V$.

$ii)$ Sean $M^n + a,\ M^m + b \in B$ y $x \in (M^n + a) \cap (M^m + b)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos $m \leq n$ entonces $M^n + a \subset M^m + a$.

Por otro lado, $x = y_1 + a = y_2 + b$, donde $y_1 \in M^n$, $y_2 \in M^m$.

Luego, $a - b = y_2 - y_1 \in M^m$. Así, tenemos $M^m = M^m + (a - b)$, $M^m + a = M^m + b$.

Luego, $M^n + a \subset M^m + b$.

Por lo tanto, $x \in (M^n + a) \cap (M^m + b) = M^n + a \in B$. Así, B es una base alguna topología $\tau(B)$ sobre $\mathcal{R}$. □

Tenemos una topología para el anillo conmutativo con identidad $\mathcal{R}$, en la siguiente Proposición garantizamos que $\mathcal{R}$ es un anillo topológico con la topología M-ádica sobre $\mathcal{R}$.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo con identidad y M su ideal entonces $\mathcal{R}$ con su topología M-ádica es un anillo topológico.*

Demostración:

$i)$ Sea la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = x - y. \end{array}$$

Dado $(a, b) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ arbitrario y V un entorno básico (arbitrario) de $g(a, b) = a - b$.

Entonces $V = M^n + (a - b)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Tomemos el conjunto $U = (M^n + a) \times (M^n + b)$. Entonces, U es un abierto en $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ y $(a, b) \in U$, luego $U \in \mathcal{N}_{(a,b)}$.

Sea $z \in g(U)$, entonces existe $(x_0, y_0) \in U$ tal que $z = g(x_0, y_0)$.

Luego, existen $x_0 \in M^n + a$, $y_0 \in M^n + b$ tales que $z = x_0 - y_0$.

Tenemos $z = x_0 - y_0 = m + (a - b)$ donde $m \in M^n$. Por tanto $z \in M^n + (a - b) = V$.

Luego, existe $U \in \mathcal{N}_{(a,b)}$ tal que $g(U) \subset V$. Así, concluimos que g es continua.

$ii)$ Sea la aplicación

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & h(x, y) = xy. \end{array}$$

Dado $(a, b) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ arbitrario y W un entorno básico de $h(a, b) = ab$. Entonces $W = M^n + ab$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Tomamos el conjunto $U' = (M^n + a) \times (M^n + b)$. Como en *(i)*, $U' \in \mathcal{N}_{(a,b)}$.

Sea $z \in h(U')$, entonces existe $(x_0, y_0) \in U'$ tal que $z = h(x_0, y_0)$. Es decir, existen $x_0 \in M^n + a$, $y_0 \in M^n + b$ tales que $z = x_0 y_0$. Tenemos $z = x_0 y_0 = m' + ab$ donde $m' \in M^n$. Luego $z \in M^n + ab = W$.

Luego, existe $U' \in \mathcal{N}_{(a,b)}$ tal que $h(U') \subset W$. Así, h es continua.

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ con su topología M-ádica es un anillo topológico. □

Observación 2.2.

i) *Tenemos que $\{M^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ forma una filtración M-ádica.*

ii) *La topología que tiene a B como base (la topología $\tau(B)$) se denomina topología M-ádica o M-Topología.*

iii) *Denotaremos con $(\mathcal{R}, M)$ al anillo topológico $\mathcal{R}$ con su topología $\mathcal{M}$-ádica sobre $\mathcal{R}$.*

Proposición 2.5. *Sea el anillo topológico $(\mathcal{R}, M)$ y H la intersección de todos los entornos de 0 en $\mathcal{R}$, entonces $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^n$.*

Demostración: Sea $x \in H$, entonces tenemos

$$\text{para todo } U \in \mathcal{N}_{(0)},\ x \in U. \tag{2.1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $0 \in M^n$, además M^n pertenece a la base de la topología M-ádica sobre $\mathcal{R}$, así $M^n \in \mathcal{N}_{(0)}$. Luego de (2.1), $x \in M^n$, es decir, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M^n$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M^n$ tenemos que

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \in M^n. \tag{2.2}$$

Dado $U \in \mathcal{N}_{(0)}$, entonces $0 \in U$ y U pertenece a la topología M-ádica sobre $\mathcal{R}$, es decir, $0 \in U = \bigcup_{j\in I} U_j$, donde $U_j = M^{n_j} + a_j$, para todo $j \in I$. Luego, para algún $i \in I$, $-a_i \in M^{n_i}$.
Como $n_i \in \mathbb{N}$, de (2.2) tenemos que $x \in M^{n_i}$, así $x - a_i \in M^{n_i}$ entonces $x \in M^{n_i} + a_i = U_i$, para algún $i \in I$, esto es, $x \in \bigcup_{j\in I} U_j = U$.
Luego, x pertenece a cualquier entorno U de $0 \in \mathcal{R}$. Por lo tanto $x \in H$. □

Un Lema que caracteriza los grupos topológicos que son de Hausdorff, es el siguiente.

Lema 2.1. *Sea G un grupo topológico y H la intersección de todos los entornos de 0 en G, entonces:*

i) H es subgrupo de G.
ii) H es la clausura de $\{0\}$.
iii) G es de Hausdorff si y sólo si $H = \{0\}$.

Demostración: La prueba se encuentra en la página 113 de [1]. □

Observación 2.3.

i) *Todo anillo topológico es un grupo topológico.*
ii) *No todo grupo topológico es un espacio de Hausdorff.*
iii) *Un grupo G con mas de un elemento, dotado con la topología indiscreta es un grupo topológico que no es de Hausdorff.*

Definición 2.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge a un punto $x \in X$ si,*

$$\textit{para todo } V \in \mathcal{N}_{(x)},\ \textit{existe } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que para todo } n \geq n_0,\ x_n \in V,$$

y lo representaremos: $x_n \longrightarrow x$, $\lim x_n = x$ ó $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Observación 2.4. *En la definición anterior, se puede reemplazar los entornos $V \in \mathcal{N}_{(x)}$ por entornos básicos, esto es, reemplazar por abiertos $V \in \tau$, $x \in V$.*

Proposición 2.6 (Topología inducida por una métrica). *Dado un espacio métrico (X,d), la colección de todas las bolas abiertas en X,*

$$\beta_d = \{B_d(a,r) \subset X;\ a \in X, r > 0\},$$

es una base de alguna topología sobre X.

Observación 2.5. *Diremos que un espacio topológico (X,τ) es metrizable si existe un espacio métrico (X,d) tal que $\tau = \tau_d$.*

Proposición 2.7. *Si (X,τ) es un espacio topológico metrizable, la definición de convergencia de un espacio topológico y un espacio métrico son equivalentes.*

Demostración: En efecto, supongamos que en el espacio topológico (X,τ), $x_n \longrightarrow x \in X$.

Dado $\varepsilon > 0$, $B_d(x,\varepsilon)$ es un entorno básico de x en $\tau_d = \tau$.
Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_d(x,\varepsilon)$, esto es, $d(x,x_n) < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que en el espacio métrico (X,d), $x_n \longrightarrow x \in X$.
Dado V un entorno básico de x en $\tau_d = \tau$, $V = B_d(x,r)$, para algún $r > 0$.
Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x,x_n) < r$, esto es, $x_n \in B_d(x,r) = V$. □

Teorema 2.1. *Una sucesión convergente en un espacio métrico (X,d) lo hace únicamente en un punto.*

Teorema 2.2. *Dado un espacio métrico (X,d), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X.*
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $x \in X$ entonces cualquier subsucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en x.

Observación 2.6.

i) *En (X,τ) un espacio topológico metrizable, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es de Cauchy si, para todo $V \in \mathcal{N}_{(x)}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n,m \geq n_0$, $x_n - x_m \in V$.*
ii) *Toda sucesión convergente en un espacio métrico (X,d) es sucesión de Cauchy en (X,d).*

Proposición 2.8. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de un espacio métrico (X,d). Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

En el anillo topológico $(\mathcal{R}, M)$ definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} v: & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ & x & \longmapsto & v(x), \end{array}$$

donde:

$$v(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} M^n \quad (M^0 = \mathcal{R}), \\ \\ Sup\{n \in \mathbb{N}_0 \,/ x \in M^n\}, & \text{si} \quad x \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} M^n. \end{cases}$$

La aplicación v es llamada *Aplicación de orden* en el anillo $\mathcal{R}$ (el lector puede revisar [8]).

Como $M^0 = \mathcal{R}$, entonces $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} M^n = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M^n$.

Si $v(x) = \infty$ entonces $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M^n$ y por el Lema 2.1, $x \in \overline{\{0\}}$.

Si $v(x)$ es finito, esto es, $v(x) = Sup\{n \in \mathbb{N}_0, x \in M^n\} = n'$, entonces $x \in M^{n'}$ y como $n' < n' + 1$ tenemos que $x \notin M^{n'+1}$.

Lema 2.2. *Dado* $(\mathcal{R}, M)$. *Sean* $x, y \in \mathcal{R}$, *entonces:*
i) $v(x + y) \geq min\{v(x), v(y)\}$.
ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$.
Demostración:
Caso 1: $v(x) = v(y) = \infty$.
Tenemos $x, y \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M^n$ luego $x + y,\, xy \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M^n$.

Por lo tanto, $v(x + y) = v(xy) = \infty$.
Caso 2: $v(x) = \infty$, $v(y) = j \in \mathbb{N}_0$.
$x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M^n$, $y \in M^j$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Tenemos que $x + y \in M^j$, $xy \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M^n$.
Luego, $v(x + y) \geq j$ y $v(xy) = \infty$.
Caso 3: $v(x) = n \geq j = v(y)$, donde $n, j \in \mathbb{N}_0$. Tenemos $x \in M^n$, $y \in M^j$. Luego $x + y \in M^j$, $xy \in M^{n+j}$.
Por lo tanto, $v(x + y) \geq j = min\{n, j\}$ y $v(xy) \geq n + j$. □

Ahora, nos proponemos encontrar una condición necesaria y suficiente para que $(\mathcal{R}, M)$ sea un espacio métrico.

Dada la definición de orden v en el anillo $\mathcal{R}$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = e^{-v(x-y)}. \end{array}$$

Denotaremos $e^{-\infty} = 0$.

Proposición 2.9. *d es una pseudométrica.*

Demostración: Evidentemente $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in \mathcal{R}$.
$v(x) = v(-x)$, para todo $x \in \mathcal{R}$.
Luego, $d(x, y) = e^{-v(x-y)} = e^{-v(y-x)} = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathcal{R}$.

Afirmación.- Para todo $x, y, z \in \mathcal{R}$, $d(x, z) \leq Max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

En efecto, $x - z = (x - y) + (y - z)$, luego del Lema 2.2:

$$\begin{array}{rcl} v(x - z) & \geq & min\{v(x - y), v(y - z)\} \\ -v(x - z) & \leq & -min\{v(x - y), v(y - z)\} = Max\{-v(x - y), -v(y - z)\}. \end{array}$$

Por lo tanto $e^{-v(x-z)} \leq Max\{e^{-v(x-y)}, e^{-v(y-z)}\}$. Así, queda probada la afirmación.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $d(x, y) \leq d(y, z)$, luego por la afirmación $d(x, z) \leq d(y, z)$.

Luego, $d(x,z) \leq d(x,z) + d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Por lo tanto, $d(x,y) = e^{-v(x-y)}$ es una pseudométrica. □

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo con identidad y M ideal de $\mathcal{R}$.*

i) $(\mathcal{R}, M)$ es de Hausdorff si y sólo si d es una métrica.

ii) Si $(\mathcal{R}, M)$ es de Hausdorff entonces su M-Topología se puede definir con la métrica d.

Demostración:

$i)$ Supongamos que $\mathcal{R}$ es un espacio de Hausdorff entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} M^n = \{0\}$.

Dados $x, y \in \mathcal{R}$, si $d(x,y) = 0$ entonces $e^{-v(x-y)} = 0$, luego $v(x-y) = \infty$, esto quiere decir que $(x-y) \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} M^n = \{0\}$ entonces $x = y$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} M^n$ entonces $v(x) = v(x-0) = \infty$.

Como d es una métrica, $d(x,0) = e^{-\infty} = 0$, luego $x = 0$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} M^n = \{0\}$.

Así, del Lema 2.1 concluimos que $(\mathcal{R}, M)$ es de Hausdorff.

$ii)$ Al ser $(\mathcal{R}, M)$ un espacio de Hausdorff nos garantiza que d es una métrica.
Ahora veremos que la topología inducida por d es igual a la topología de $(\mathcal{R}, M)$.
Definimos para cada $a \in \mathcal{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$,

$$S_n(a) = B_d(a, e^{-n}) = \{x \in \mathcal{R},\ d(x,a) < e^{-n}\}.$$

Estos conjuntos de bolas abiertas determinan una base de la topología inducida por la métrica d, esta base la representaremos como β_d (una topología puede tener bases diferentes que generan la misma topología).

Afirmación.- Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $M^n = S_{n-1}(0)$.

En efecto, si $x \in M^n$, entonces $n \leq v(x)$ y $-v(x) < -(n-1)$.
$d(x,0) = e^{-v(x)} < e^{-(n-1)}$, luego $x \in S_{n-1}(0)$. Así, concluimos que $M^n \subset S_{n-1}(0)$.
Si $x \in S_{n-1}(0)$ entonces $d(x,0) = e^{-v(x)} < e^{-(n-1)}$, luego $n-1 < v(x)$, esto es, $n \leq v(x)$ (fijamos n).
Ahora supongamos que:

$$x \notin M^n. \tag{2.3}$$

Entonces $v(x) = Sup\{n \in \mathbb{N}_0,\ x \in M^n\}$ luego $x \in M^{v(x)}$.
Por otro lado, de la ecuación (2.3), $x \notin M^m$, para todo $m \geq n$.
Luego, como $n \leq v(x)$ entonces $x \notin M^{v(x)}$ lo cual es una contradicción.
Esto quiere decir que $x \in M^n$, así $S_{n-1}(0) \subset M^n$, probamos de esta manera la afirmación.
De la afirmación, para cada $a \in \mathcal{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
M^n + a &= S_{n-1}(0) + a \\
&= \{x + a \in \mathcal{R},\ x \in S_{n-1}(0)\} = \{x + a \in \mathcal{R},\ d(x,0) < e^{-(n-1)}\} \\
&= \{y \in \mathcal{R},\ d(y,a) < e^{-(n-1)}\} = S_{n-1}(a).
\end{aligned}$$

Luego $\beta_d = \{M^n + a;\ a \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}_0\}$ el cual es una base de la topología M-ádica.

Por lo tanto, la topología de $(\mathcal{R}, M)$ se puede generar a partir de la base de la topología inducida por d. □

Observación 2.7. *Sea $\mathcal{R}$ anillo conmutativo con identidad y M ideal de $\mathcal{R}$. Entonces $\beta = \{M^n + a;\ a \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}_0\}$ es base de la topología $\tau(\beta) = \left\{ \bigcup\limits_{i\in I} B_i,\ B_i \in \beta \right\}$ (Topología generada por β).*

Luego, denotaremos al espacio topológico $\mathcal{R}$ con la topología $\tau(\beta)$, $(R, \tau(\beta))$ con $(\mathcal{R}, M)$.

Observación 2.8.

i) *En $(\mathcal{R}, M)$ los entornos básicos de $x \in \mathcal{R}$ en su topología M-ádica son de la forma $M^n + x$.*

ii) *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{R}$ converge a x si, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe $s_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x \in \mathcal{M}^k$, para todo $n \geq s_k$.*

iii) *Si en $(\mathcal{R}, M)$ su topología M-ádica es metrizable entonces una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{R}$ es de Cauchy si, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe $s_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in M^k$, para todo $n, m \geq s_k$.*

3. R-automorfismos de series de potencias formales en varias indeterminadas.

Sea R un anillo conmutativo con identidad. Denotaremos con

$$R^{((n))} = R[[x_1, ..., x_n]],$$

al anillo de las series de potencias formales en las indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ y coeficientes en R.

Análogamente, denotaremos con $R^{(n)} = R[x_1, ..., x_n]$, el anillo de los polinomios en las indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ y coeficientes en R.

Cada elemento $f \in R^{((n))}$ se puede expresar como una suma de polinomios homogéneos, es decir,

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + ...$$

donde $P_i = 0$ o P_i es un polinomio homogéneo de grado i en las indeterminadas $x_1, ..., x_n$ y coeficientes en R. Consideramos al polinomio cero como un polinomio de grado $-\infty$. Tal forma de escribir $f \in R^{((n))}$ es llamada la *descomposición homogénea* de f, más aún, diremos que f se expresa de forma única en función de sus *componentes homogéneos* P_i, tal como lo refieren Gilmer, R. y O'Malley, M. en [7].

Escribiremos, $P_i = P_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \in R^{(n)}$.

Sin embargo, una forma diferente de escribir los elementos de $R^{((n))}$, está dada por Chenciner, A. en [2].

Diremos que $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in R^{((n))}$ y $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in R^{((n))}$ son *iguales* si $P_i = Q_i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in R^{((n))}$, se define la *suma* y *producto* de f y g como sigue:

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i) \in R^{((n))} \quad \text{y} \quad fg = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{r+s=i} P_r Q_s \right) \in R^{((n))},$$

con estas operaciones de suma y producto se verifica que $R^{((n))}$ es un anillo conmutativo con identidad.

Así mismo, como R es un anillo conmutativo con identidad, R y $R^{(n)}$ son subanillos de $R^{((n))}$.

Recordemos que un elemento $f \in R^{((n))}$ es unidad (o invertible) en $R^{((n))}$ si existe otro elemento $g \in R^{((n))}$ tal que $f.g = g.f = 1$.

Proposición 3.1. $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in R^{((n))}$ *es invertible si y solo si* P_0 *es invertible en* R.

Demostración: Sea $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in R^{((n))}$ el elemento inverso de f. Luego,

$$1 = fg = P_0Q_0 + (P_1Q_0 + P_0Q_1) + \cdots$$

Entonces $1 = P_0Q_0$. Por lo tanto, P_0 es invertible en R.

Recíprocamente, encontraremos un elemento $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in R^{((n))}$ tal que verifique:

$$fg = P_0Q_0 + (P_1Q_0 + P_0Q_1) + \cdots = 1 \qquad .$$

Como $P_0 \in R$ es invertible, e igualando término a término en la ecuación, podemos encontrar los polinomios homogéneos de g de forma iterativa, los cuales serían:

$$\begin{array}{rcl} Q_0 & = & P_0^{-1} \\ Q_1 & = & -P_0^{-1} P_1 Q_0 \\ \vdots & & \\ Q_n & = & -P_0^{-1}(P_nQ_0 + P_{n-1}Q_1 + ... + P_1Q_{n-1}) \end{array} \quad .$$

Por lo tanto, f es invertible. □

Si R es un anillo conmutativo con identidad, tenemos:

$$\mathcal{M} = \left\{ f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in R^{((n))},\ P_0 = 0 \right\} \text{ es un ideal de } R^{((n))}.$$

$\mathcal{M}$ es el ideal generado por las indeterminadas $x_1, ..., x_n$, es decir, $\mathcal{M}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle R^{(\!(n)\!)}$, usaremos esta notación para precisar que $\mathcal{M}$ es un ideal de $R^{(\!(n)\!)}$. Si no existiera confusión, sólo escribiremos $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$.

Para cada $k\in\mathbb{N}$, la k-ésima potencia de $\mathcal{M}$ es el conjunto

$$\mathcal{M}^k=\left\{f=\sum_{i=0}^{\infty}P_i\in R^{(\!(n)\!)},\ P_0=\dots\cdots=P_{k-1}=0\right\}.$$

$\mathcal{M}^k$ denotará el ideal $\langle x_1,\dots,x_n\rangle^k R^{(\!(n)\!)}$, por convención, denotaremos $\mathcal{M}^0=R^{(\!(n)\!)}$.

Es claro que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{(\!(n)\!)}=0$.

Como $R^{(\!(n)\!)}$ es un anillo conmutativo con identidad y $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ es su ideal respectivo, entonces $\left(R^{(\!(n)\!)},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$ representa el anillo topológico $R^{(\!(n)\!)}$ con su topología $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$-ádica.

Como $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{(\!(n)\!)}=0$, entonces por el Lema 2.1, $\left(R^{(\!(n)\!)},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$ es un espacio de Hausdorff. Además, por la Proposición 2.10, se puede definir una métrica en este espacio.

Proposición 3.2. $\left(R^{(\!(n)\!)},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración: Sea $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(R^{(\!(n)\!)},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$.

Dado $i\in\mathbb{N}$, existe $k(i)\in\mathbb{N}$ tal que para todo $l,m\geq k(i)$, $f_l-f_m\in\langle x_1,...,x_n\rangle^i$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k(i)\leq k(i{+}1)$ entonces $f_{k(i+1)}-f_{k(i)}\in\langle x_1,...,x_n\rangle^i$.

Para cada $i\in\mathbb{N}$, escribiremos

$$\begin{aligned}f_{k(i)}&=P_{i,0}+P_{i,1}+P_{i,2}+...\\ f_{k(i+1)}&=P_{i+1,0}+P_{i+1,1}+P_{i+1,2}+...\end{aligned}$$

donde $P_{i,j}$ es polinomio homogéneo de grado j.

Luego,
$$f_{k(i+1)}-f_{k(i)}=\sum_{j=0}^{\infty}(P_{i+1,j}-P_{i,j})\in\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle^i.$$

Entonces, para cada $i\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$P_{i,j}=P_{i+1,j},\ \text{para todo } j=0,1,...,i-1.$$

Definimos la serie formal

$$\begin{aligned}f&=P_{1,0}+P_{2,1}+...+P_{i,i-1}+P_{i+1,i}...\\ &=\left(P_{i,0}+P_{i,1}+...+P_{i,i-1}\right)+P_{i+1,i}...\in R^{(\!(n)\!)}\end{aligned}$$

Así, $f-f_{k(i)}=(P_{i+1,i}-P_{ii})+(P_{i+2,i+1}-P_{i,i+1})+...\in\langle x_1,...,x_n\rangle^i$.

Es decir, existe $f\in R^{(\!(n)\!)}$ tal que $f-f_{k(i)}\in\langle x_1,...,x_n\rangle^i$, para todo $i\in\mathbb{N}$.

Luego, $\lim_{i\to\infty}f_{k_i}=f$. Por lo tanto, la sucesión de Cauchy $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(f_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente en $\left(R^{(\!(n)\!)},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$ que es un espacio de Hausdorff metrizable.

Por lo tanto $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge en $\left(R^{(\!(n)\!)},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$. □

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la definición de orden en el anillo $R^{(\!(n)\!)}$ con su topología $\mathcal{M}$-ádica.

$$\begin{aligned}v:\ R^{(\!(n)\!)}&\longrightarrow\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}\\ f&\longmapsto v(f),\end{aligned}$$

donde,

$$v(f)=\begin{cases}\infty, & \text{si}\quad f=0,\\ Max\{m\in\mathbb{N}_0\,/\,f\in\mathcal{M}^m\}, & \text{si}\quad f\neq 0.\end{cases}$$

Si $f\neq 0$, entonces existe algún $r\in\mathbb{N}_0$ tal que $f=P_r+P_{r+1}+P_{r+2}+\dots$ donde $P_r\neq 0$ y $P_j=0$ para todo j menor que r.

Denotaremos el *orden* de f con $Ord(f)$, esto es, $Ord(f)=v(f)$.

Tenemos que $f\in\langle x_1,\dots,x_n\rangle^r R^{(\!(n)\!)}$. Supongamos que $v(f)=m$ entonces $m\geq r$.

Luego, $f=P_r+P_{r+1}+P_{r+2}+\dots\in\langle x_1,\dots,x_n\rangle^m R^{(\!(n)\!)}$.

Si $m>r$ entonces $P_r=0$, pero esto es una contradicción.

Por tanto, $Ord(f)=v(f)=r$. Es decir,

Si $f = 0$, entonces $Ord(f) = \infty$.
Si $f \neq 0$, entonces $Ord(f) = r$, donde $f = P_r + P_{r+1} + ...$, con $P_r \neq 0$.
Llamaremos a P_r *forma inicial* de f.

Tal forma de escribir $f \in R^{((n))}$ es llamada la *descomposición homogénea* de f, más aún, diremos que f se expresa de forma única en función de sus *componentes homogéneos* P_i, tal como lo refieren Gilmer, R. y O'Malley, M. en [7].

Sin embargo, una forma diferente de escribir los elementos de $R^{((n))}$, está dada por Chenciner, A. en [2].

En el caso de $f \in R^{(n)}$, $f \neq 0$ se define el *grado* de f como el mayor $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $f_k \neq 0$.
Escribiremos los polinomios homogéneos P_i como $P_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \in R^{(n)}$.

Observación 3.1.

i) $f \in R^{((n))}$ *es unidad en* $R^{((n))}$ *si y solo si* $Ord(f) = 0$.
ii) $f = P_0$, $P_0 \neq 0 \in R^{((n))}$ *es unidad en* $R^{((n))}$.
iii) $f \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle^m R^{((n))}$ *si y solo si* $Ord(f) \geq m$.

Tenemos propiedades del orden en $R^{((n))}$ dadas en las siguientes proposiciones:

Proposición 3.3. *Sean* $f, g \in R^{((n))}$ *entonces*
i) $Ord(f + g) \geq min\{Ord(f), Ord(g)\}$.
ii) $Ord(f.g) \geq Ord(f) + Ord(g)$.

Demostración: Se sigue de la definición. □

Proposición 3.4. *Sea* R *un Dominio de Integridad. Dados* $f, g \in R^{((n))}$ *entonces se cumple:*
i) $Ord(f.g) = Ord(f) + Ord(g)$.
ii) $Ord(f \pm g) \geq min\{Ord(f), Ord(g)\}$.
Más aún, cuando R *es un anillo cualquiera, si* $Ord(f) \neq Ord(g)$ *entonces*

$$Ord(f \pm g) = min\{Ord(f), Ord(g)\}.$$

Demostración:

$i)$ Dados $f = \sum_{i=r}^{\infty} P_i$, $g = \sum_{i=m}^{\infty} Q_i$ con $P_r \neq 0$ y $Q_m \neq 0$.

Luego, $f.g = P_r Q_m + (P_{r+1}Q_m + P_r Q_{m+1}) + ...$,

donde $P_r Q_m \neq 0$ por ser R un Dominio de Integridad. Además, el grado de $P_r Q_m$ es $r + m$.

Por lo tanto, $Ord(f.g) = r + m = Ord(f) + Ord(g)$.

$ii)$ Por la Proposición 3.3, se tiene que $Ord(f \pm g) \geq min\{Ord(f), Ord(g)\}$.

Teniendo a f y g establecidos como en la parte *(i)*, tenemos que $Ord(f) = r$ y $Ord(g) = m$.
Si $m > r$, entonces $f \pm g = P_r + P_{r+1} + ... + (P_m \pm Q_m) + (P_{m+1} \pm Q_{m+1}) + ...$

y como $P_r \neq 0$ tenemos que $Ord(f \pm g) = r = min\{Ord(f), Ord(g)\}$. □

Considerando el anillo conmutativo con identidad R, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R^{((n))}$.
Para cada $i \in \mathbb{N}_0$ denotaremos:

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_n^{i_n} \in R^{((n))} \text{ donde } r_{i_1,...,i_n} \in R.$$

Luego, $R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^{((n))},\ m \in \mathbb{N}_0 \right\}$ es el *subanillo* de $R^{((n))}$ generado por R y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Observación 3.2.

Sean $\alpha_1, .., \alpha_n \in R^{((n))}$ *y* T *subanillo de* $R^{((n))}$ *tal que* $R[\alpha_1, .., \alpha_n] \subset T$*, entonces* $\langle \alpha_1, .., \alpha_n \rangle T$ *es el ideal de* T *generado por* $\alpha_1, .., \alpha_n$ *y* $(T, \langle \alpha_1, .., \alpha_n \rangle T)$ *anillo topológico con la topología* $\langle \alpha_1, .., \alpha_n \rangle T$*-ádica en* T.

Proposición 3.5. *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R^{((n))}$ *y* $m \in \mathbb{N}$*. Si existe* ϕ *R-endomorfismo de* $R^{((n))}$ *tal que* $\phi(x_i) = \alpha_i$ *entonces*
i) $\phi\left(R^{(n)}\right) = R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.
ii) $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle^m R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \left\{ \sum_{i=m}^{k} P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ k \in \mathbb{N} \right\}$.

Demostración:

$i)$ Para cada polinomio homogéneo $P_i = P_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \in R^{((n))}$.

Tenemos que $P_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=i} r_{i_1,i_2,\dots,i_n}\alpha_1^{i_1}\dots\alpha_n^{i_n} = \phi(P_i)$.

Entonces $\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \sum_{i=0}^{m}\phi(P_i) = \phi\left(\sum_{i=0}^{m} P_i\right)$ y esto implica la igualdad.

$ii)$ Primero probaremos la afirmación:

$$\phi\left(\langle x_1,\dots,x_n\rangle^m R^{(n)}\right) = \langle \alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle^m \phi\left(R^{(n)}\right).$$

En efecto,

$\phi\left(\sum_{i_1+\dots+i_n=m} P_{i_1,i_2,\dots,i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\right) = \sum_{i_1+\dots+i_n=m}\phi(P_{i_1,\dots,i_n})\alpha_1^{i_1}\dots\alpha_n^{i_n}$, donde $P_{i_1,\dots,i_n} \in R^{(n)}$. Luego, $f \in \langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle^m R[\alpha_1,\dots,\alpha_n] = \phi\left(\langle x_1,\dots,x_n\rangle^m R^{(n)}\right)$ si y solo si existe $\sum_{i=m}^{k} P_i \in \langle x_1,\dots,x_n\rangle^m R^{(n)}$, donde $P_i = P_i(x_1,\dots,x_n) \in R^{(n)}$ tal que

$$f = \phi\left(\sum_{i=m}^{k} P_i\right) = \sum_{i=m}^{k}\phi(P_i) = \sum_{i=m}^{k} P_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

□

Existe una definición bastante general de completación de un anillo topológico, dada por O'Malley, M. en [10] (Definición 3.1). Nosotros, usaremos la definición dada en [7], por Gilmer, R. y O' Malley, M.

Definición 3.1. *Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in R^{((n))}$, T subanillo de $R^{((n))}$ tal que $R[\alpha_1,...,\alpha_n] \subset T$ y $(R[\alpha_1,...,\alpha_n], \langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle R[\alpha_1,...,\alpha_n])$ es espacio de Hausdorff.*

Diremos que $(T,\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle T)$ es completación de $(R[\alpha_1,...,\alpha_n],\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle R[\alpha_1,...,\alpha_n])$ si se cumplen las siguientes condiciones:

- *i) $(T,\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle T)$ es espacio de Hausdorff y completo.*
- *ii) Cada elemento de T es el límite de una sucesión de Cauchy en $(R[\alpha_1,...,\alpha_n],\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle R[\alpha_1,...,\alpha_n])$.*
- *iii) La topología inducida sobre $R[\alpha_1,...,\alpha_n]$ por la topología $\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle$ T-ádica en T es equivalente a la topología $\langle\alpha_1,..,\alpha_n\rangle R[\alpha_1,...,\alpha_n]$-ádica en $R[\alpha_1,...,\alpha_n]$.*

Y lo denotaremos: $(T,\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle T) = (R[\alpha_1,..,\alpha_n],\langle\alpha_1,..,\alpha_n\rangle R[\alpha_1,..,\alpha_n])^{\zeta}$.

Proposición 3.6. *Sean $\alpha_1,...,\alpha_n \in R^{((n))}$ y ϕ un R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, para todo $i = 1,...,n$.*

- *i) Si T es subanillo de $R^{((n))}$ tal que $\phi\left(R^{((n))}\right)\subset T$, entonces ϕ es continua de $\left(R^{((n))},\langle x_1,...,x_n\rangle\right)$ en $(T,\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle T)$.*
- *ii) Si $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in R^{((n))}$ entonces existe $\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1,...,\alpha_n)\right]$ en $(T,\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle T)$.*

Demostración:

i) Afirmación.- $\phi\left(\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}\right) = \langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^k\phi\left(R^{((n))}\right)$, para todo $k\in\mathbb{N}$.

En efecto, si $f \in \phi\left(\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}\right)$ entonces existe $h \in \langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}$ tal que $f = \phi(h)$, donde $h = \sum_{i_1+\dots+i_n=k} f_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1}...x_n^{i_n}$, $f_{i_1,\dots,i_n} \in R^{((n))}$.

Luego, $$f = \phi(h) = \sum_{i_1+\dots+i_n=k}\phi\left(f_{i_1,\dots,i_n}\right)\alpha^{i_1}...\alpha^{i_n} \in \langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^k\phi\left(R^{((n))}\right).$$

Si $f \in \langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^k\phi\left(R^{((n))}\right)$ entonces $f = \sum_{i_1+\dots+i_n=k}\phi\left(f_{i_1,\dots,i_n}\right)\alpha^{i_1}...\alpha^{i_n}$ para algún $f_{i_1,\dots,i_n} \in R^{((n))}$.

Luego, $f = \phi\left(\sum_{i_1+\dots+i_n=k} f_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1}...x_n^{i_n}\right) \in \phi\left(\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}\right)$.

Dado $g \in R^{((n))}$ arbitrario, para cada $\left(\phi(g)+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^k T\right)$ entorno de $\phi(g)$ en $(T,\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle T)$ existe $\left(g+\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}\right)$ entorno de g en $\left(R^{((n))},\langle x_1,...,x_n\rangle R^{((n))}\right)$ tal que:

$$\begin{aligned}\phi\left(g+\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}\right) &= \phi(g)+\phi\left(\langle x_1,...,x_n\rangle^k R^{((n))}\right)\\ &= \phi(g)+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^k\phi\left(R^{((n))}\right)\\ &= \subset \phi(g)+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^k T.\end{aligned}$$

Por tanto ϕ es continua.

$ii)$ Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $s_k = k \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq s_k$,

$$f - \sum_{i=0}^{m} P_i = \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i \in \langle x_1, ..., x_n \rangle^{m+1} R^{(\!(n)\!)} \subset \langle x_1, ..., x_n \rangle^{k} R^{(\!(n)\!)}.$$

Entonces $\lim\limits_{m \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{m} P_i \right) = f$ en $\left(R^{(\!(n)\!)}, \langle x_1, ..., x_n \rangle\right)$.

Desde que ϕ es continua de $\left(R^{(\!(n)\!)}, \langle x_1, ..., x_n \rangle R^{(\!(n)\!)}\right)$ en $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$, tenemos:

$$\phi(f) = \lim_{m \to \infty} \phi \left(\sum_{i=0}^{m} P_i \right) = \lim_{m \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{m} P_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \right] \in T.$$

□

Observación 3.3. *Considerando $\alpha_1 \in R^{(\!(1)\!)}$ tal que $\phi(\alpha_1) = \alpha_1$, donde ϕ es un $R-$endomorfismo de $R^{(\!(1)\!)}$ se consigue la continuidad de ϕ en la topología α_1- ádica sobre $R^{(\!(1)\!)}$ (ver [11]- Lema 3.3).*

Observación 3.4. *Si en la Proposición 3.6, usamos como hipótesis la condición: $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} [\langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^m T] = \{0\}$, es decir que $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es de Hausdorff, entonces ϕ es único.*

En efecto:

Supongamos que existe ψ R-endomorfismo de $R^{(\!(n)\!)}$ tal que $\psi(x_i) = \alpha_i$ y $\psi\left(R^{(\!(n)\!)}\right) \subset T$.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in R^{(\!(n)\!)}$. De la demostración de la Proposición 3.6, tenemos que:

$f = \lim\limits_{m \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{m} f_i \right) \in R^{(\!(n)\!)}$ y ψ es continua.

Entonces $\psi(f) = \lim\limits_{m \to \infty} \psi \left(\sum_{i=0}^{m} f_i \right) = \lim\limits_{m \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{m} f_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \right] \in T$.

Como $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es de Hausdorff, este límite es único, entonces $\psi(f) = \phi(f)$. Por tanto $\psi = \phi$.

Teorema 3.1. *Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R^{(\!(n)\!)}$ y T subanillo de $R^{(\!(n)\!)}$ tal que $R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \subset T$. Si $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es un espacio de Hausdorff completo entonces existe un único ϕ R-endomorfismo de $R^{(\!(n)\!)}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, para $i = 1, ..., n$. y $\phi\left(R^{(\!(n)\!)}\right) \subset T$.*

Demostración: Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in R^{(\!(n)\!)}$ tal que $P_i = \sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \in R^{(n)}$.

Entonces $P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} ... \alpha_n^{i_n} \in R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \subset T$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Afirmación.- $\left(\sum_{i=0}^{m} P_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$.

En efecto: para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe $s_k = k \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq m \geq s_k$ entonces

$$\sum_{i=0}^{p} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) - \sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{i=m+1}^{p} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{m+1} R[\alpha_1, ..., \alpha_n].$$

$$\sum_{i=m+1}^{p} P_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \in \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{m+1} R\left[\alpha_1, ..., \alpha_n\right]$$
$$\subset \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{k} R\left[\alpha_1, ..., \alpha_n\right] \subset \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{k} T.$$

Desde que $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es espacio de Hausdorff completo, $\left(\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a un único elemento de T y lo denotaremos

$$f\left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) = \lim_{m \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{m} P_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \right].$$

Esto nos garantiza la definición de la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \phi : R^{(\!(n)\!)} & \longrightarrow & T \subset R^{(\!(n)\!)} \\ f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i & \longmapsto & \phi(f) = f\left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) = \lim\limits_{m \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{m} P_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \right] \end{array}$$

que verifica las condiciones de un R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$.
Como $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es de Hausdorff, de la Observación 3.4 obtenemos la unicidad de ϕ. □

Corolario 3.1. *Existe un único ϕ $R-$endomorfimo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = x_i$, el cual es el automorfismo identidad.*

Demostración: Como $\left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle\right)$ es espacio de Hausdorff completo (Proposición 3.2), considere $T = R^{((n))}$ en el Teorema 3.1. □

Lema 3.1. *Sean S un a.c.c.i y $b_1, b_2, ...b_n \in S$.*
Si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(S, \langle b_1, ..., b_n \rangle S)$ entonces existe una subsucesión $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$c_m = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} b_1^{i_1} ... b_n^{i_n} \right], \text{ donde } r_{i_1,...,i_n} \in S.$$

Demostración: Sea $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(S, \langle b_1, ..., b_n \rangle S)$. Luego, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe $s_k \in \mathbb{N}_0$ tal que $a_p - a_m \in \langle b_1, ..., b_n \rangle^{k+1} S$, para todo $p, m \geq s_k$.
Sin pérdida de generalidad ordenamos $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ...$ Luego, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ existe $s_i \in \mathbb{N}_0$ tal que $a_{s_{i+1}} - a_{s_i} \in \langle b_1, ..., b_n \rangle^{i+1} S$ desde que $s_{i+1} \geq s_i$.
Entonces, existen $r_{i_1,...,i_n} \in S$ tal que $a_{s_{i+1}} - a_{s_i} = \displaystyle\sum_{i_1+...+i_n=i+1} r_{i_1,...,i_n} b_1^{i_1} ... b_n^{i_n}$.
Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, denotamos $f_i(b_1, ..., b_n) = \displaystyle\sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} b_1^{i_1} ... b_n^{i_n}$.
Luego, para todo $i \in \mathbb{N}_0$,

$$a_{s_{i+1}} = a_{s_i} + f_{i+1}(b_1, ..., b_n).$$

Para $i \in \mathbb{N}_0$, sea $c_i = a_{s_i}$ y $a_{s_0} = f_0(b_1, ..., b_n)$.
Esto es,

$$\begin{array}{rcccl}
c_1 & = & a_{s_1} & = & a_{s_0} + f_1(b_1, ..., b_n) = f_0(b_1, ..., b_n) + f_1(b_1, ..., b_n), \\
c_2 & = & a_{s_2} & = & a_{s_1} + f_2(b_1, ..., b_n) = f_0(b_1, ..., b_n) + f_1(b_1, ..., b_n) + f_2(b_1, ..., b_n), \\
\vdots & & \vdots & & \\
c_m & = & a_{s_m} & = & a_{s_{m-1}} + f_m(b_1, ..., b_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} f_i(b_1, ..., b_n).
\end{array}$$

Por tanto, $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es la subsucesión de $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $c_m = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} r_{i_1,...,i_n} b_1^{i_1} ... b_n^{i_n} \right]$. □

Los Teoremas 3.2 y 3.3 que enunciamos a continuación, se encuentra en [7](Teorema 2.1), para la prueba de este teorema, sugieren los autores revisar [4].

Teorema 3.2. *Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R^{((n))}$ y T es subanillo de $R^{((n))}$ tal que $R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \subset T$ y verifica las siguientes condiciones:*
i) $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es Hausdorff completo.
ii) Cada elemento de T es el límite de una sucesión de Cauchy en
$(R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])$.
Entonces existe un único ϕ R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ y $\phi\left(R^{((n))}\right) = T$.

Demostración: Sea T subanillo de $R^{((n))}$ tal que $R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \subset T$ que cumple las condiciones *i)* y *ii)*. Como $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es Hausdorff Completo, del Teorema 3.1, tenemos que existe un único ϕ R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ y $\phi\left(R^{((n))}\right) \subset T$.

Afirmación.- $T \subset \phi\left(R^{((n))}\right)$.
En efecto: sea $g \in T$ entonces existe $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en
$(R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_m = g$.
Del Lema 3.1, tenemos que existe $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$d_m = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} f_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} ... \alpha_n^{i_n} \right],$$

donde $f_{i_1,...,i_n} \in R[\alpha_1, ..., \alpha_n] = \phi\left(R^{(n)}\right)$.
Esto es, existe $h_{i_1,...,i_n} \in R^{(n)}$ tal que $\phi(h_{i_1,...,i_n}) = f_{i_1,...,i_n}$.

Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$d_m = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} \phi\left(h_{i_1,...,i_n}\right) \alpha_1^{i_1} ... \alpha_n^{i_n} \right] = \phi\left(\sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} h_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \right] \right).$$

Denotaremos h_i para cada $i \in \mathbb{N}_0$,

$$h_i = \sum_{i_1+...+i_n=i} h_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \in \langle x_1, ..., x_n \rangle^i R^{(n)} \subset \langle x_1, ..., x_n \rangle^i R^{((n))}.$$

Además,

$$\left(\sum_{i=0}^{m} h_i \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ es sucesión de Cauchy en } \left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle R^{((n))} \right). \tag{3.1}$$

puesto que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ existe $s_k = k \in \mathbb{N}_0$ tal que si $p \geq m \geq s_k$,
$\displaystyle\sum_{i=0}^{p} h_i - \sum_{i=0}^{m} h_i = \sum_{i=m+1}^{p} h_i = h_{m+1} + ... + h_p \in \langle x_1, ..., x_n \rangle^{m+1} R^{((n))} \subset \langle x_1, ..., x_n \rangle^k R^{((n))}$.

Como $\left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle R^{((n))}\right)$ es completo entonces existe $h \in R^{((n))}$ tal que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} h_i \right) = h$.

Tenemos que ϕ es continua de $\left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle R^{((n))}\right)$ en $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$.

Entonces, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} (d_m) = \lim_{m\to\infty} \phi \left(\sum_{i=0}^{m} h_i \right) = \phi(h) \in T.$

Como $(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T)$ es Hausdorff y la subsucesión $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, tenemos que $d_m \longrightarrow \phi(h)$ y $f_m \longrightarrow g$. Por tanto $g = \phi(h) \in \phi\left(R^{((n))}\right)$. □

Teorema 3.3. *Si ϕ es R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ y además $\left(\phi(R^{((n))}), \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle \phi\left(R^{((n))}\right)\right)$ es de Hausdorff entonces $T = \phi(R^{((n))})$ cumple las condiciones i) y ii) del Teorema 3.2.*

Demostración: Evidentemente $\phi(R^{((n))})$ es subanillo de $R^{((n))}$ y $R[\alpha_1, ..., \alpha_n] = \phi(R^{(n)}) \subset \phi(R^{((n))})$.
Además, ϕ es continua de $\left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle R^{((n))}\right)$ en $\left(\phi(R^{((n))}), \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle \phi(R^{((n))})\right)$.

$i)$ Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(\phi(R^{((n))}), \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle \phi(R^{((n))})\right)$. Por el Lema 3.1, existe $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$d_m = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} g_{i_1,...,i_n} \alpha_1^{i_1} ... \alpha_n^{i_n} \right]$$

donde $g_{i_1,...,i_n} \in \phi\left(R^{((n))}\right)$, es decir, existe $h_{i_1,...,i_n} \in R^{((n))}$ tal que $\phi\left(h_{i_1,...,i_n}\right) = g_{i_1,...,i_n}$.

Entonces,

$$d_m = \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} \phi\left(h_{i_1,...,i_n}\right) \alpha_1^{i_1} ... \alpha_n^{i_n} \right] = \phi\left(\sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{i_1+...+i_n=i} h_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \right] \right).$$

Denotaremos para cada $i \in \mathbb{N}_0$,

$$h_i = \sum_{i_1+...+i_n=i} h_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} \in \langle x_1, ..., x_n \rangle^i R^{((n))}.$$

De (3.1), tenemos que $\displaystyle\left(\sum_{i=0}^{m} h_i \right)_{m\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle R^{((n))}\right)$ que es completo.

Luego, existe $h \in R^{((n))}$ tal que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} h_i \right) = h$.

Entonces $\displaystyle\lim_{m\to\infty} d_m = \lim_{m\to\infty} \phi \left(\sum_{i=0}^{m} h_i \right) = \phi(h) \in \phi\left(R^{((n))}\right)$.

Desde que, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy y $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente en $\left(\phi(R^{((n))}), \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle \phi(R^{((n))})\right)$ que es de Hausdorff. Luego,

$$\lim_{m\to\infty} f_m = \lim_{m\to\infty} d_m = \phi(h) \in \phi\left(R^{((n))}\right).$$

Por tanto, $\left(\phi(R^{((n))}), \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle \phi(R^{((n))})\right)$ es completo.

$ii)$ Sea $g\in\phi\left(R^{((n))}\right)$ entonces existe $h=\sum_{i=0}^{\infty} h_i\in R^{((n))}$ tal que $\phi(h)=g$.

Analogamente a la prueba de (3.1), la sucesión $\left(\sum_{i=0}^{m} h_i\right)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\left(R^{((n))},\langle x_1,...,x_n\rangle R^{((n))}\right)$.

Como $\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{m} h_i\right)=h,$ de la continuidad de ϕ tenemos:

$$\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{m} h_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\right]=\lim_{m\to\infty}\phi\left(\sum_{i=0}^{m} h_i\right)=\phi(h)=g.$$

Además,

$\left(\sum_{i=0}^{m} h_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $(R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right],\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right])$.

Por lo tanto, para todo $g\in\phi\left(R^{((n))}\right)$, existe $\left(\sum_{i=0}^{m} h_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en

$(R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right],\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right])$ tal que $\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{m} h_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\right]=g.$ □

Proposición 3.7. *Sean* $\alpha_1,...,\alpha_n\in R^{((n))}$, ϕ *un* R*-endomorfismo de* $R^{((n))}$ *tal que* $\phi(x_i)=\alpha_i$ *y* $R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]\subset\phi(R^{((n))})$.

Entonces $\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]=\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})\cap R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$.

Demostración: Es claro que:

$$\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]\subset\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})\cap R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right].$$

Desde que, $\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]\subset R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$ y $\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]\subset\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})$.

Por otro lado,

si $F\in\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})\cap R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$ entonces $F\in\phi(\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R^{((n))})$ y $F\in R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$.

Luego, $F=\phi\left(\sum_{i=m}^{k} P_i\right)$, donde P_i es polinomio homogéneo de grado i.

Así, $F\in\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$. □

Lema 3.2. *Considerando las hipótesis de la Proposición 3.7, y sean las bases*

$$\beta_1=\left\{\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]+f;\ f\in R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right],\ m\in\mathbb{N}_0\right\},$$

$$\beta_2=\left\{\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})+f;\ f\in\phi(R^{((n))}),\ m\in\mathbb{N}_0\right\},$$

de $(R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right],\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right])$ *y* $\left(\phi(R^{((n))}),\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle\phi(R^{((n))})\right)$ *respectivamente. Entonces* $\beta_1=(\beta_2)|_{R[\alpha_1,...,\alpha_n]}$.

Demostración: Sea $h+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]\in\beta_1$, donde $h\in R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$. Luego, de la Proposición 3.7 tenemos:

$$h+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]=\left(h+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})\right)\cap R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right].$$

Por otro lado, sea $(f+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))}))\cap R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]\in(\beta_2)|_{R[\alpha_1,...,\alpha_n]}$, donde $f\in\phi(R^{((n))})$. Entonces,

$$f=\phi\left(\sum_{i=0}^{m} P_i\right)+\phi\left(\sum_{i=m}^{\infty} P_i\right)=h+g,$$

donde $h=\phi\left(\sum_{i=0}^{m} P_i\right)\in R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]$, $g=\phi\left(\sum_{i=m}^{\infty} P_i\right)\in\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})$ y P_i es polinomio homogéneo de grado i.

Luego, usando la Proposición 3.7 concluimos que:

$\left(f+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m\phi(R^{((n))})\right)\cap R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right]=h+\langle\alpha_1,...,\alpha_n\rangle^m R\left[\alpha_1,...,\alpha_n\right].$ □

Observación 3.5. *Sean* $\alpha_1,...,\alpha_n\in R^{((n))}$, ψ *un* R*-homomorfismo de* $R^{(n)}$ *en* $R^{((n))}$ *tal que* $\psi(x_i)=\alpha_i$, *para todo* $i=1,2,...,n$. *Entonces* ψ *es único.*

En efecto, sea $\varphi:R^{(n)}\longrightarrow R^{((n))}$ R*-homomorfismo tal que* $\varphi(x_i)=\alpha_i$.

Si $f=\sum_{i=0}^{k} P_i\in R^{(n)}$ *entonces* $\varphi(f)=\sum_{i=0}^{k}\varphi\left(P_i\right)=\sum_{i=0}^{k} P_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$.

Luego,

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{k} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \psi\left(\sum_{i=0}^{k} P_i\right) = \psi(f).$$

Por tanto, $\psi = \varphi$.

Una pregunta interesante es, bajo qué condiciones los $R-$ endomorfismos de $R^{((n))}$ sobreyectivos son inyectivos. Para responder esta pregunta, citamos el Teorema 5.5 (ver [7], p. 41) que muestra las condiciones necesarias y suficientes para que un $R-$ endomorfismo de $R^{((n))}$ sobreyectivo sea automorfismo. Así mismo, Eakin, P. y Sathaye, A. en [3](Corolario C), muestran que los $R-$endomorfismos de $R^{((n))}$ son sobreyectivos si y solo si son automorfismos.

Precisamos que, Gilmer, R, y O'Malley, M. enuncian el siguiente Teorema en [7](Teo-rema 2.2), sin prueba, solo con la sugerencia de revisar [12].

Teorema 3.4. *Sean* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R^{((n))}$. *Existe* ϕ *R-endomorfismo inyectivo de* $R^{((n))}$ *tal que* $\phi(x_i) = \alpha_i$ *si y solo si*

i) ψ *es inyectivo.*

ii) Existe T *subanillo de* $R^{((n))}$ *tal que*
$(T, \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}$.

Demostración:

$i)$ Es evidente que $\psi = \phi|_{R^{(n)}}$ es inyectivo.

$ii)$ Sea $T = \phi\left(R^{((n))}\right)$ entonces T es subanillo de $R^{((n))}$ y de la Proposición 3.5, tenemos que $R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \subset T$.

Afirmación.- $(T, \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T)$ es de Hausdorff, es decir, $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle^m T] = \{0\}$.

En efecto, de la afirmación de la Proposición 3.6, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left[\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle^m \phi(R^{((n))})\right] &= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \phi\left(\langle x_1, ..., x_n\rangle^m R^{((n))}\right) \\
&= \phi\Big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle x_1, ..., x_n\rangle^m R^{((n))}\Big) \\
\bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle^m T] &= \phi(\{0\}) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Del Lema 3.2, tenemos que los elementos de la base de la topología inducida sobre $R[\alpha_1, ..., \alpha_n]$ por la $(\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T)$-topología son los mismos elementos de la base de la $(\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])$-topología.

Esto implicará que las respectivas topologías son equivalentes.

Finalmente usando el Teorema 3.3, concluimos que

$$(T, \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}.$$

Recíprocamente, como existe T subanillo de $R^{((n))}$ tal que

$$(T, \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}.$$

Entonces $R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \subset T$ y $(T, \langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T)$ es Hausdorff Completo.

Por el Teorema 3.1, tenemos que existe un único ϕ R-endomorfismo de $R^{((n))}$,

$$\begin{aligned}
\phi : R^{((n))} &\longrightarrow T \subset R^{((n))} \\
f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i &\longmapsto \phi(f) = \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n),
\end{aligned}$$

tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ y $\phi\left(R^{((n))}\right) \subset T$.

Ahora, probaremos que ϕ es inyectiva.

$$\text{Sea } f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in Nu(\phi) \text{ entonces } \phi(f) = \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n)\right] = 0 \in T.$$

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ (arbitrario), de la hipótesis *(ii)* tenemos:

$$\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle^{k+1} R[\alpha_1, ..., \alpha_n] = R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \cap \bigcup_{\substack{i\in I\\ V_i\in\beta_2}} V_i,$$

donde β_2 es base de la topología $\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle T-$ ádica.

Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que
$$R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \cap (\langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^p T) \subset R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \cap \bigcup_{\substack{i \in I \\ V_i \in \beta_2}} V_i = \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{k+1} R[\alpha_1, ..., \alpha_n].$$
Es decir, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que
$$R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \cap \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^p T \subset \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{k+1} R[\alpha_1, ..., \alpha_n]. \tag{3.2}$$

Para $p \in \mathbb{N}$, existe $s_p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq s_p$, $\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^p T$.

Entonces para todo $m \geq s_p$, $\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R[\alpha_1, ..., \alpha_n] \cap \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^p T$.

De (3.2), para todo $m \geq s_p$ tenemos:
$$\sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle^{k+1} R[\alpha_1, ..., \alpha_n].$$
Luego, para todo $m \geq s_p$,
$$\phi\left(\sum_{i=0}^{m} P_i\right) = \sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{i=k+1}^{l} Q_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \phi\left(\sum_{i=k+1}^{l} Q_i\right), \text{ donde } Q_i \in R^{(n)}.$$
Como $\psi = \phi|_{R^{(n)}}$ es inyectivo entonces $\sum_{i=0}^{m} P_i = \sum_{i=k+1}^{l} Q_i$, para todo $m \geq s_p$.

Luego, $P_0 = P_1 = ... = P_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Es decir, $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 0$.

Así, concluimos que ϕ es inyectiva. □

O' Malley, M. en [10](Sección 5), muestra una caracterización de los $R-$ endomorfismos de $R^{((1))}$ que son $R-$ automorfismos de $R^{((1))}$, usando R un dominio de integridad. En [9], los dominios de integridad con identidad se usan para determinar el anillo de invariantes de un grupo finito de R-automorfismos de $R^{((1))}$.

Gilmer, R. en la sección 3 de [6], muestra las condiciones equivalentes para la existencia de un R-automorfismo de $R^{((1))}$, así mismo, en el Corolario 5.5 de [6], se da una respuesta a una pregunta sin responder de [10]. En esta sección 3, Gilmer R. utiliza resultados de [10] y de [12] (artículo que a la fecha no estaba publicado).
También, Gilmer, R. caracteriza los automorfismos de $R^{(1)}$ en [5].

Ahora, enunciamos y detallamos la prueba de la caracterización de los $R-$ automorfismos de $R^{((n))}$ dado en [7].

Teorema 3.5. *Sean* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R^{((n))}$. *Existe un único* ϕ *R-automorfismo de* $R^{((n))}$ *tal que* $\phi(x_i) = \alpha_i$ *si y solo si* $\left(R^{((n))}, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R^{((n))}\right) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}$ *y el único R-homomorfismo* $\psi : R^{(n)} \longrightarrow R^{((n))}$ *tal que* $\psi(x_i) = \alpha_i$ *es inyectivo.*

Demostración: Del Teorema 3.4, tenemos que $\psi = \phi|_{R^{(n)}} : R^{(n)} \longrightarrow R^{((n))}$ es R-homomorfismo inyectivo y existe $T = \phi\left(R^{((n))}\right)$ subanillo de $R^{((n))}$ tal que:
$$(T, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle T) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}.$$
Además, de la Observación 3.5, tenemos que ψ es único.
Como ϕ es R-automorfismo de $R^{((n))}$ entonces $T = R^{((n))}$ y por lo tanto
$$\left(R^{((n))}, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R^{((n))}\right) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}.$$
Recíprocamente, desde que
$$\left(R^{((n))}, \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R^{((n))}\right) = (R[\alpha_1, ..., \alpha_n], \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle R[\alpha_1, ..., \alpha_n])^{\zeta}.$$
Por el Teorema 3.2, existe un único ϕ R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ y $\phi\left(R^{((n))}\right) = R^{((n))}$. Es decir, ϕ es sobreyectivo.
Como $\psi : R^{(n)} \longrightarrow R^{((n))}$ es el único R-homomorfismo inyectivo, $\psi = \phi|_{R^{(n)}}$. Del Teorema 3.4, tenemos que existe $\bar{\phi}$ R-endomorfismo inyectivo de $R^{((n))}$ tal que $\bar{\phi}(x_i) = \alpha_i$. Desde que ϕ es único tenemos que $\bar{\phi} = \phi$. Así ϕ es inyectivo.
Por lo tanto, existe un único ϕ R-automorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$. □

Corolario 3.2. *Se cumple que:*
$\left(R^{((n))}, \langle x_1, ..., x_n \rangle\right) = (R[x_1, ..., x_n], \langle x_1, ..., x_n \rangle R[x_1, ..., x_n])^{\zeta}$.

Demostración: Inmedito del Teorema 3.5 y del Corolario 3.1. □

4. Conclusiones.

La caracterización de los $R-$ automorfismo de $R^{(\!(n)\!)}$ que presentamos está basada en el concepto de completación, uno de los conceptos más importantes en el estudio de los anillos topológicos. En casos particulares, es algo complicado usar esta caracterización, sin embargo, detallamos la referida caracterización como una extensión del resultado para los $R-$automofismos de series de potencias formales en una indeterminada, dada en [12].

En la Sección 3 del artículo, debido a la manera de abordar nuestro estudio, hemos obtenido de manera inmediata los Corolario 3.1, y 3.2.

En el Corolario 3.1, garantizamos que existe un único ϕ $R-$ endomorfismo de $R^{(\!(n)\!)}$ tal que $\phi(x_i) = x_i$, el cual es el automorfismo identidad. Este Corolario 3.1, se obtiene del Teorema 3.1. También, Gilmer, R. y O' Malley, M. en [7](Lema 5.4) enuncian un resultado similar, donde la hípótesis es, asumiendo que ϕ es $R-$endomorfismo de $R^{(\!(n)\!)}$ tal que $\phi(x_i) = x_i$, concluyen que ϕ es el automorfismo identidad, y la prueba tiene un contexto diferente al nuestro.

En el Corolario 3.2, mostramos que la completación del anilo topológico generado por R y $x_1, ..., x_n$ es el anillo topológico $R^{(\!(n)\!)}$ con su topología $<x_1, ..., x_n>-$ádica.

ORCID and License
Soledad Ramírez C. https://orcid.org/0000-0002-9974-0943
Anderson Cárdenas F. https://orcid.org/0000-0002-6313-4474

Referencias

[1] Atiyah MF, Macdonald IG. Introducción al Álgebra Conmutativa. Barcelona: Reverté; 1978. 146p.
[2] Chenciner A. Courbes Algébriques Planes. Berlin: Springer-Verlag; 2008. 160p.
[3] Eakin P, Sathaye A. R-Endomorphisms of $R[[X]]$ are essentially continuous. Pacific J. of Math. 1976; 66(1):83-87.
[4] Gilmer R. On ideal-adic topologies for a commutative ring. Enseign. Math. 1972; 18(3-4):201-204.
[5] Gilmer R. R-automorphisms of $R[X]$. Proc. London Math. Soc. 1968; 3(2):328-336.
[6] Gilmer R. R-automorphisms of $R[[X]]$. Michigan Mathematical J. 1970; 17(1):15-21.
[7] Gilmer R, O'Malley M. R-Endomorphisms of $R[[X_1, ..., X_n]]$. J. of Algebra. 1977; 48(1):30-45.
[8] Mejía CE. Automorfismos de anillos de series formales[Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias; 1985.
[9] O'Malley M. Finite groups of R-automorphisms of $R[[X]]$. Michigan Mathematical J. 1973; 20(3):277-284.
[10] O'Malley M. R-automorphisms of $R[[X]]$. Proc. London. Math. Soc. 1970; 3(2):60-78.
[11] O'Malley M. Some remarks on the formal power series ring. Bulletin de la S.M.F. 1971; 99:247-258.
[12] O'Malley M, Wood C. R-Endomorphisms of $R[[X]]$. J. of Algebra. 1970; 15(3):314-327.